وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

مبادئ الهندسة الكهربائية

الدكتور محمد زكي محمد خضر   الدكتور مظفر أنور النعمة

الطبعة الثانية المنقحة

١٤١١ هـ / ١٩٩١ م

مبادئ الهندسة الكهربائية
١٩٩١

وزارة التع

مبادئ الهندسة الكهربائية

١٩٩١

مطابع
دار الحكمة للطباعة والنشر

مَبَادِئُ
الهَندَسةِ الكَهرَبائيَّة

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

مبادئ الهندسة الكهربائية

وفق المنهج المقرر لطلبة الصف الأول في
أقسام الهندسة الكهربائية بالجامعات العراقية

تأليف

الدكتور محمد زكي محمد خضر

الدكتور مظفر أنور النعمة

الطبعة الثانية المنقحة

١٤١١هـ / ١٩٩١م

نشر وطبع وتوزيع
دار الحكمة للطباعة والنشر - الموصل
شارع ابن الاثير - الموصل
الجمهورية العراقية
هاتف ٧٦٣٢٣١
٧٦٣٢٣٥
تلكس ٨٠٩٢

بسم الله الرّحمن الرّحيم

الحمد لله ربّ العالمين والصلوة والسّلام على سيّدنا محمّد وعلى آله وصحبه أجمعين .

المحتويات

	مقدمة الطبعة الثانية	١٥
	مقدمة الطبعة الأولى	١٩
	الرموز والمختصرات والوحدات	٢١
الفصل الأول :	**الكميات الكهربائية**	**٢٣**
1.1	نظم الوحدات	٢٣
1.2	الوحدات القياسية العالمية	٢٤
1.3	الوحدات الثانوية	٢٨
1.3.1	الطاقة والشغل	٢٨
1.3.2	القدرة	٢٨
1.3.3	الكفاءة	٢٩
1.3.4	التيار الكهربائي	٢٩
1.3.5	الفولتية	٢٩
1.3.6	المقاومة والتوصيلية	٢٩
1.3.7	درجة الحرارة	٣٠
1.3.8	وحدات أخرى	٣٠
1.4	تمثيل العلاقات الرياضية بيانياً	٣٢
	مسائل الفصل الاول	٤٠
الفصل الثاني :	**المقاومة وتطبيقات قانون أوم**	**٤٧**
2.1	مقاومة المواد المختلفة	٤٧
2.2	التأثير الحراري على المقاومة	٥٢
2.3	الايصالية والايصالية النوعية	٥٦
2.4	مصادر الفولتية (او القوة الدافعة الكهربائية)	٥٧
2.5	قانون أوم	٦١
2.6	ربط المقاومات	٦٢

2.6.1	ربط المقاومات عل التوالي	٦٢
2.6.2	تقسيم الفولتية	٦٣
2.6.3	المقاومات على التوازي	٦٥
2.6.4	تقسيم التيار	٦٨
2.7	أجهزة القياس	٧١
2.7.1	الكلفانوميتر	٧١
2.7.2	قياس التيار والفولتية (او الجهد)	٧٢
2.7.3	قياس المقاومة	٧٦
2.8	الخطأ في أجهزة القياس	٧٨
2.9	قياس القدرة	٨٢
2.10	البرنامج الاول : قانون اوم وحساب القدرة	٨٧
	مسائل الفصل الثاني	٨٩
الفصل الثالث :	**حل الدوائر الكهربائية باستخدام قانون كرشوف**	**١٠٣**
3.1	المصادر المُعتَمِدة وغير المُعتَمِدة	١٠٣
3.2	قانون التيار لكرشوف	١٠٥
3.3	قانون الفولتية لكرشوف	١١٠
3.4	إستعمال تيارات ماكسويل (الشبيكات)	١١٥
3.5	التحليل العقدي	١٢٣
3.6	الدوائر المستوية والدوائر غير المستوية	١٣٣
3.7	البرنامج الثاني : حل دائرة باستخدام قانوني كرشوف	١٣٩
	مسائل الفصل الثالث	١٤١
الفصل الرابع :	**تبسيط الدوائر الكهربائية**	**١٥٣**
4.1	مقدمة	١٥٣
4.2	ربط النجم – الدلتا	١٥٤

4.3	نظرية التراكب	١٦٢
4.4	نظرية ثفنن	١٦٧
4.5	نظرية نورتن	١٧٨
4.6	تحويل المصادر	١٨٣
4.7	القدرة القصوى	١٨٦
4.8	إيجاد مكافئ ثفنن ونورتن عند وجود مصادر مُعتَمدة	١٩٣
4.9	البرنامج الثالث : التحويل من ربط النجم الى الدلتا وبالعكس	١٩٦
4.10	البرنامج الرابع : القدرة العظمى	١٩٧
	مسائل الفصل الرابع	١٩٨

الفصل الخامس : مبادئ الكهربائية الساكنة ٢١٣

5.1	الكميات المتجهة وغير المتجهة	٢١٣
5.2	قانون كولوم	٢١٦
5.3	شدة المجال الكهربائي	٢٢٢
5.4	الفيض الكهربائي	٢٢٩
5.5	قانون كاوس	٢٣١
5.6	الجهد الكهربائي	٢٣٨
5.7	سطوح تساوي الجهد	٢٤٤
5.8	حركة الألكترونات في مجال كهربائي	٢٤٧
5.9	البرنامج الخامس : جمع القوى اتجاهياً	٢٥١
	مسائل الفصل الخامس	٢٥٢

الفصل السادس : دوائر المتسعات ٢٥٧

6.1	حساب السعة	٢٥٧
6.2	المتسعة ذات الصفحتين المتوازيتين	٢٦٠
6.3	متسعة من إسطوانتين المتوازيتين	٢٦٠
6.4	المتسعات ذات الأشكال الأخرى	٢٦٣

6.5	ربط المتسعات	٢٦٤
6.5.1	المتسعة المنفردة	٢٦٤
6.5.2	المتسعات على التوازي	٢٦٥
6.5.3	المتسعات على التوالي	٢٦٦
6.6	عازل المتسعة	٢٦٨
6.7	الحالة العابرة في المتسعات	٢٧٠
6.7.1	شحن المتسعات	٢٧٠
6.7.2	تفريغ المتسعة	٢٧٧
6.8	خزن الطاقة في المتسعات	٢٨٢
6.9	البرنامج السادس : الحالة العابرة لدائرة المتسعة والمقاومة	٢٨٤
	مسائل الفصل السادس	٢٨٥
الفصل السابع :	**مبادئ الكهرومغناطيسية**	٢٩٣
7.1	مقدمة	٢٩٣
7.2	قطبية المجال المغناطيسي	٢٩٤
7.3	الفيض المغناطيسي	٢٩٧
7.4	قانون لنز	٢٩٨
7.5	قانون فاراداي	٢٩٩
7.6	القوى الناتجة عن المجالات المغناطيسية	٣٠٠
7.6.1	القوة على عنصر تيار	٣٠١
7.6.2	القوة لكل عنصر تيار أو شدة المجال المغناطيسي	٣٠٢
7.7	كثافة الفيض المغناطيسي الناتجة عن تيار موزع	٣٠٢
7.8	القوة بين موصلين يحملان تياراً	
7.9	شدة المجال المغناطيسي	٣٠٧
7.10	الإنفاذية	٣١١
7.11	المعاوقة والمنافذة	٣١٣
7.12	الدوائر المغناطيسية	٣١٥

7.13	حلقة المسترة	٣٢٦
7.14	التيار الدوام	٣٣١
7.15	البرنامج السابع : حسابات الدوائر المغناطيسية	٣٣٢
	مسائل الفصل السابع	٣٣٤

الفصل الثامن :	**دوائر المحثات**	**٣٤٥**
8.1	المحاثة الذاتية	٣٤٥
8.2	ربط المحثات	٣٥١
8.3	المحاثة التبادلية	٣٥٤
8.4	الطاقة في المحث	٣٦١
8.5	الحالة العابرة في المحثات	٣٦٣
8.5.1	نمو التيار في المحث	٣٦٣
8.5.2	تناقص التيار في المحث	٣٦٩
	مسائل الفصل الثامن	٣٧٤

الفصل التاسع :	**الحالة العابرة لدوائر المتسعات والمحثات**	**٣٨١**
9.1	الإستجابة الطبيعية	٣٨١
9.2	تسليط فولتية وحدة الخطوة	٣٨٦
9.3	الإستجابة القسرية لدوائر المحثات والمتسعات	٣٩٠
9.4	الإستجابة الكاملة للدوائر المحتوية على مصادر معتمدة	٣٩٥
9.5	دوائر أخرى تحتوي على متسعات	٣٩٨
	مسائل الفصل التاسع	٤٠١

الفصل العاشر:	**مبادئ التيار المتناوب**	**٤٠٩**
10.1	الكميات المتناوبة	٤٠٩
10.2	الكميات الجيبية	٤١٣
10.3	القيمة المؤثرة	٤١٧
10.4	العلاقة بين الفولتية والتيار في مقاومة ومتسعة ومحث	٤٢٥

10.5	العلاقات الطورية بين الفولتية والتيار	٤٢٩
10.6	الممانعة والمسايرة	٤٣٤
10.7	القدرة وعامل القدرة	٤٤٠
10.8	البرنامج الثامن : قيمة جذر متوسط التربيع	٤٤٩
	مسائل الفصل العاشر	٤٥١
	الفصل الحادي عشر: دوائر الرنين	**٤٦١**
11.1	تغيير الممانعات مع التردد	٤٦٢
11.2	رنين دوائر التوالي	٤٦٥
11.3	عامل النوعية	٤٩٦
11.4	خصائص أخرى لدائرة رنين التوالي	٤٧١
11.5	دائرة رنين التوازي	٤٧٨
11.6	الرنين في دوائر أخرى	٤٨٢
11.7	البرنامج التاسع : دائرة رنين التوالي	٤٨٣
	مسائل الفصل الحادي عشر	٤٨٧
	الفصل الثاني عشر: أساليب أخرى لتحليل دوائر التيار المتناوب	**٤٩٣**
12.1	خواص الكميات الطورية	٤٩٤
12.2	العامل j	٤٩٥
12.3	الممانعة ككمية مركبة	٤٩٧
12.4	القدرة ككمية مركبة	٥٠٣
12.5	التحليل العقدي والشبيكي لدوائر التيار المتناوب	٥٠٦
12.6	تطبيق نظريات حل الدوائر الكهربائية	٥١٠
12.7	القدرة العظمى في دوائر التيار المتناوب	٥١٩
12.8	البرنامج العاشر: دائرة تيار متناوب بسيطة	٥٢٣
	مسائل الفصل الثاني عشر	٥٢٥

الفصل الثالث عشر: الدوائر ذات ثلاثة أطوار		٥٣٩
13.1	الدوائر متعددة الأطوار	٥٣٩
13.2	التوليد بثلاثة أطوار	٥٤٣
13.3	الأحمال ثلاثية الأطوار	٥٤٧
13.4	الربط النجمي	٥٤٧
13.4.1	ربط الدلتا	٥٥٠
13.4.2	القدرة	٥٥٦
13.5	الدوائر غير المتزنة	٥٦٤
13.6	البرنامج الحادي عشر: حسابات القدرة في دوائر الاطوار الثلاثة	٥٦٤
	مسائل الفصل الثالث عشر	٥٧٣
الملحق	(أ) حل المعادلات بطريقة المحددات	٥٨٣
الملحق	(ب) خواص الكميات المركبة	٥٩٢
	ب 1 الضرب في مقدار حقيقي	٥٩٢
	ب 2 الضرب في العامل j	٥٩٢
	ب 3 جمع الكميات المركبة	٥٩٣
	ب 4 طرح الكميات المركبة	٥٤
	ب 5 ضرب الكميات المركبة	٥٩٤
	ب 6 مرافق الكمية المركبة	٥٩٥
	ب 7 قسمة الكميات المركبة	٥٩٥
	ب 8 متطابقة يولير	٥٩٦
	ب 9 رفع الكميات المركبة الى أسس	٥٩٨
	ب 10 إيجاد لوغاريتم الكمية المركبة	٥٩٩
المصطلحات : إنكليزي / عربي		٦٠٠
المصادر	الاجنبية والعربية	٦٠٩

مقدمة الطبعة الثانية

الحمد لله المنعم المتفضل .... وبعد :

فقد مضت سنوات على نشر هذا الكتاب بطبعته الأولى وقد حدث في هذه السنوات تقدم هائل في حقل الهندسة الكهربائية جعل من الضروري توسيع المعرفة العلمية على مستوى القاعدة للمهندس الكهربائي .

الكتاب الحالي بطبعته المنقحة هذه سار على منوال الطبعة الأولى مع زيادة في الأمثلة والمسائل إضافة الى إعادة ترتيب بعض الفصول وإضافة فصول جديدة . كما تم إغناء الكتاب ببرامج على الحاسبة الألكترونية بلغة بيسك .

الفصل الأول : أعيدت كتابته بشكل يكاد أن يكون تاماً وقد أضيفت له مقدمة في تمثيل العلاقات الرياضية بيانياً لما لهذا الموضوع من أهمية للمهندس الكهربائي .

الفصل الثاني : تم إحداث بعض التغييرات فيه مع إضافة تتعلق بأجهزة القياس والخطأ الذي يقع فيها .

أما الفصل الثالث : حل الدوائر الكهربائية بإستخدام قانون كرشوف بكافة الطرائق المباشرة والعقدي والدارات فقد أجريت عليه تعديلات مهمة .

الفصل الرابع : أضيفت له مقدمة عن المصادر المعتمدة وغير المعتمدة مع أمثلة عليها وإعطاء أهمية أكبر للتحليل العقدي وذلك لما لها من تطبيقات في الدوائر الألكترونية الحديثة وأنظمة القدرة الكهربائية أيضاً .

الفصل الخامس : والذي يتعلق بالكهربائية الساكنة والمتسعات أجريت فيه تعديلات طفيفة مع إضافة مسائل عدة وكذلك كانت الحال في الفصل السادس الذي يتعلق بدوائر المتسعات .

الفصل السابع : من مبادئ الكهرومغناطيسية أعيد تبويبه وترتيبه وحذف جزء كبير منه وأضيفت له مادة الدارة التخلفية والتيارات الدوامية والدوائر المغناطيسية التي كانت سابقاً ضمن الفصل الثامن .

أما الفصل الثامن : فقد إستبدلت تسميته السابقة "تطبيقات الكهرومغناطيسية" ب "دوائر المحثات" مع إجراء الكثير من إعادة التبويب وبعض الإضافات عليه.

وقد تم إجراء هذه التغييرات في هذين الفصلين لكي يكون تسلسل المواضيع أيسر وأكثر إتساقاً.

أما الفصل التاسع : فقد أضيف بصورة كاملة لكي يحكم الترابط بين دوائر المتسعات والمحثات في الحالة العابرة. وقد قدمت فيه فكرة دالة وحدة الخطوة وتقديم الإستجابة الكاملة للدوائر الحاوية على محثات ومتسعات سواء كانت المصادر معتمدة أو غير معتمدة. وذلك إستكمالاً للنهج الذي بدأ في الفصل الرابع بإضافة المصادر المعتمدة الى فصول الكتاب.

الفصل العاشر: مبادئ التيار المتناوب والذي كان هو الفصل التاسع في الطبعة الأولى من الكتاب أجريت عليه بعض التنقيحات وأضيفت له مسائل جديدة، مع حذف فقرة دوائر الرنين منه والتي وضعت في فصل مستقل هو الفصل الحادي عشر الذي إستحدث في الطبعة نظراً لأهمية هذا الموضوع وضرورة إجراء بعض التوسع فيه.

أما الفصلان الثاني عشر والثالث عشر فهما الفصلان العاشر والحادي عشر من الطبعة الأولى مع بعض الإضافات والتعديلات.

هذا وقد أجري تغيير تسلسل كثير من المواضيع ومحل ورودها في الكتاب مثل تحويل النجم الى دلتا وبالعكس لكي يتماشى مع الإتجاهات الحديثة في موقع إعطاء تلك المواضيع كما أعيد النظر بعناوين بعض الفصول بما يتلاءم مع محتوياتها الجديدة.

هذا وقد أضيفت الى الكتاب احد عشر برنامجاً تعليمياً على الحاسبة الألكترونية بلغة بيسك ألحقت في نهايات الفصول ذات العلاقة بمضمونها والتي يمكن للطالب أن يستعملها في حل بعض المسائل أو أن يتعلم منها أو أن يقوم بتطوير بعضها.

لقد أصبح حجم الكتاب بعد هذه التنقيحات والإضافات أكبر من حجمه في طبعته الأولى وهو مايتفق مع زيادة عدد الساعات المقررة لتدريس الموضوع وقد تضمنت تلك الزيادات توسعاً كبيراً في عدد المسائل غير المحلولة وشرحاً وافياً للأمثلة المحلولة وزيادة في الأشكال.

والكتاب بصيغته الحالية لايخلو مع كل الجهد الذي بذل فيه من هفوات وإمكانية للتحسين. نرجو ممن يجد من ذلك شيئاً أن لايبخل بإقتراحه الذي نرجو أن نأخذ به في طبعة لاحقة ان شاء الله تعالى. والله الموفق.

المؤلفان
الموصل/ رجب ١٤١٠ هـ
شباط ١٩٩٠ م

مقدمة
الطبعة الاولى

لقد كان للقبول الحسن الذي قوبل به نشر كتاب علم الهندسة الكهربائية الاساسي الذي قمنا بترجمته عن الانكليزية في الجامعات والمعاهد العربية اثره الكبير في تشجيعنا على تقديم كتابنا هذا. وقد جاء تكليف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي لنا بالقيام بتأليف هذا الكتاب تأكيداً على المُضي في تعريب التعليم العالي وفق الاحتياجات المحلية سواء بالترجمة او بالتأليف.

روعي في هذا الكتاب ان يكون وفق مناهج طلبة الصف الاول في اقسام الهندسة الكهربائية في الجامعات العراقية. وقد حاولنا جهدنا تبسيط المادة وتقديمها بشكل متسلسل مدعما بالرسوم والامثلة.

يحتوي الكتاب على ثلاثة ابواب مستقلة عن بعضها البعض.
الاول خاص بالتيار المستمر والثاني بمبادئ الكهربائية الساكنة والكهرومغناطيسية والثالث يتعلق بمبادئ التيار المتناوب.

في الفصل الاول اعطيت مقدمة عن الوحدات الكهربائية وبالاخص الوحدات القياسية العالمية وتطبيقاتها. اما المقاومة وتطبيقات قانون اوم فقد عرضت في الفصل الثاني وقد تضمن هذا الفصل تحويلات النجم الى دلتا وبالعكس وقياس القدرة كذلك. اما الفصل الثالث فقد عرض قانوني كرشوف بشكليها البسيطين ثم استخدامها في التحليل الشبيكي والعقدي. وانهي الباب الاول بنظريات تحليل شبكات التيار المستمر كالتراكب وثفنن ونورتن وتطبيقاتها في تحويل المصادر والقدرة القصوى.

اما الباب الثاني فلا شك بانه يتعلق بمادة تحتاج الى اسس نظرية رياضية اكثر من الباب الاول. لقد قسم هذا الباب الى اربع فصول اثنان منها على الكهربائية الساكنة واثنان على الكهرومغناطيسية تركز الفصل الخامس على مبادئ الكهربائية الساكنة والخامس على تطبيقات ذلك في المتسعات. وقد تم اعطاء مقدمة بسيطة في نهاية هذا الفصل عن الحالة الزائلة في شحن وتفريغ المتسعات. ويشبه ذلك الفصلان السابع

والثامن حيث احتوى اولها على مبادئ الكهرومغناطيسية وثانيها على تطبيقاتها . وقد تطرق الشرح ايضاً هنا الى خزن الطاقة في المحثات .

في الباب الثالث اعطيت مبادئ التيار المتناوب الاساسية اولاً . تلى ذلك تقديم استخدام العامل ز في حل دوائر التيار المتناوب وامكانية تطبيق نظريات التيار المستمر على دوائر التيار المتناوب . اما الفصل الاخير فقد افرد للدوائر ذات ثلاثة اطوار بشكل مختصر. للأستاذ تأجيل هذا الفصل الى الصف الثاني ان لم يجد سعة من الوقت لاعطائه .

احتوى كل فصل من الفصول على مسائل عامة في نهايته . وقد حاولنا تنويع هذه المسائل قدر الامكان .

ان الجهد الذي بين يدي القارئ هذا لايخلو من هفوات ومثالب وحسبنا اننا حاولنا ونأمل ان لايبخل من يجد اي خطأ أو مقترح في الكتابة الينا بذلك مشكوراً واخيراً ندعو من الله العلي القدير ان يفيد بهذا الكتاب وان تسير عملية التعريب بخطوات سريعة لما فيه خير هذه الامة والله ولي التوفيق .

المؤلفان

الموصل نيسان 1979

الرموز والمختصرات والوحدات

الكمية بالعربية	بالانكليزي	الرمز	الوحدة بالعربية	بالانكليزي	مختصرها
التيار	current	i, I	امبير	Ampere	A
الشحنة	charge	q, Q	كولوم	Coulomb	C
الزمن	time	t	ثانية	second	s
المقاومة	resistance	r, R	اوم	Ohm	Ω
الفولتية	voltage	v, V	فولت	Volt	V
فرق الجهد	potential differance	v, V		Volt	V
الكتلة	mass	m	كيلوغرام	kilogram	kg
الطول	length	l	متر	meter	m
درجة الحرارة	temperature	θ	درجة كلفن	Kelven	K
المساحة	area	A	متر مربع	$meter^2$	m^2
الحجم	volume	V	متر مكعب	$meter^3$	m^3
السرعة	velocity	u	متر بالثانية	meter/ second	m/s
التعجيل	acceleration	a	متر بالثانية . بالثانية	$meter/ second^2$	m/s^2
القوة	force	F	نيوتن	Newton	N
الشغل او الطاقة	work or energy	w, W	جول	Joule	J
العزم	moment or torque	M or T	نيوتن متر	Newton- meter	N. m
القدرة	Power	P	واط	Watt	W
الكفاءة	Efficiency	η	هيرتز	Hertz	Hz
التردد	frequency	f	اوم- متر	ohm- meter	Ω – m
مقاومة نوعية	resistivity	ρ	لكل كلفن	per kelven	l/°K

		الرمز	الوحدة بالعربية	بالانكليزية	مختصرها
معامل درجة الحرارة للمقاومة	temperature coefficient of resistance	α	سيمنس	Siemens	S
الأيصالية	conductance	G	لكل اوم لكل متر	per ohm per meter	1/~~(Ω — m)~~
الأيصالية النوعية	conductivity	γ	فولت لكل متر	volt/ meter	V/ m
شدة المجال الكهربائي	electric field intensity	E	او نيوتن لكل كولوم	Newton/ Coloumb	N/ C
التدفق الكهربائي	electric flux	ψ	كولوم	Coloumb	C
السماحية	permitivity	ε	فراد / لكل متر	Farad/ meter	F/ m
السعة	capacitance	C	فراد	Farad	F
الفيض المغناطيسي	flux	Φ	ويبر	Weber	Wb
كثافة الفيض المغناطيسي	magnetic flux density	B	تيسلا	Tesla	T
شدة المجال المغناطيسي	magnetic field intensity	H	امبير/ متر	Ampere/ meter	A/m
المحاثة	inductance	L or M	هنري	Henry	H
المعاوقة	reluctance	S	لكل هنري او امبير	per Henry	1/ H
المنافذة	permeance	A	لفة لكل ويبر	T/ Wb or Ampere- turn per Weber	A
الطور	phase	φ	هنري	Henry	H
الممانعة	impedance	Z	زاوية نصف قطرية	radian	Rad
المسايرة	admittance	Y	اوم	Ohm	Ω
عامل القدرة	power factor	PF	سيمنس	Siemens	S
المفاعلة	reactance	X		—	—
اللفة	turn	T	اوم	Ohm	Ω

الفصل الأول

الكميات الكهربائية

"وكل شيئ عنده بمقدار"
سورة الرعد 9

1.1 نظم الوحدات System of units :

استخدم الإنسان منذ زمن بعيد نظماً مختلفة لقياس بعض الكميات التي احتاج التعامل معها ومقارنتها مع كميات أخرى. فقد احتاج مثلاً الى قياس الأطوال ، فاستخدم العرب الذراع والفرسخ والبريد للدلالة على وحدات أطوال معينة. كما احتاج الإنسان الى قياس الزمن فاتخذ من اليوم أساساً لقياسه فقد قال الله تعالى في القرآن الكريم "هو الذي جعل الشمس ضياءاً والقمر نوراً وقدره منازل لتعلموا عدد السنين والحساب ماخلق الله ذلك إلا بالحق يفصل الآيات لقوم يعلمون" سورة يونس الآية 5 وكذلك قوله تعالى "وجعلنا الليل والنهار آيتين فمحونا آية الليل وجعلنا آية النهار مبصرة لتبتغوا فضلاً من ربكم ولتعلموا عدد السنين والحساب وكل شيئ فصلناه تفصيلا" سورة الأسراء الآية 12.

وقد ازداد اهتمام الأنسان بقياس أجزاء اليوم الواحد فابتكر الساعة التي تعتمد على الماء والظل ، فقسم اليوم الى أجزاء سميت بالساعة ثم الدقيقة فالثانية. أما قياس الوزن فقد استخدم العرب فيه وحدات مختلفة كالمثقال والقنطار. واتخذت أمم أخرى لهذه الكميات وحدات مختلفة عن بعضها حيث شاع مثلاً النظام الإنكليزي الذي يستخدم القدم

واليارد والميل كوحدات طول والأونس والباوند والطن كوحدات وزن ، والنظام الفرنسي الذي يستخدم الأجزاء العشرية ضمن وحداته كالمتر والكيلو متر للطول ، والغرام والكيلوغرام للوزن .

لقد استخدم المهندسون الكهربائيون النظام العشري المستخدم في النظام الفرنسي واعتبر أساساً لنظم الوحدات الذي استخدم وسمي بنظام CGS (سنتمتر ، غرام ، ثانية) ثم استبدل الغرام بالكيلو غرام والسنتمتر بالمتر فتحول نظام الوحدات الى ماسمي بال MKS (متر ، كيلو غرام ، ثانية) إلاّ أن مهناً أخرى استمرت باستخدام أنظمة أخرى الى عام 1960 حيث استخدمت نظام الوحدات القياسية العالمية الذي يسمى بال S. I.* وقد وجدت دول كثيرة فائدة عملية في قبول هذا النظام لتسهيل التعامل بينها إضافة لبساطة هذا النظام وتجانسه وارتباط وحداته مع بعضها بعلاقات رياضية بسيطة وواضحة . وبالحقيقة لم يؤثر إقرار هذا النظام على المهندسين الكهربائيين كثيراً نظراً لأنه يشابه الى حد كبير نظام MKS الذي كان مستخدماً قبل عام 1960 .

1.2 الوحدات القياسية العالمية :

إختار هذا النظام ست كميات فيزياوية أساسية دعيت وحداتها بالوحدات الأساسية وهي : الكتلة والطول والزمن والتيار الكهربائي ودرجة الحرارة المطلقة وشدة الإستضاءة . أما وحدات الكميات الأخرى فهي وحدات مشتقة من هذه الوحدات الأساسية وترتبط معها بعلاقات خاصة ، كما يتضمن النظام بادئات Prefix تضاف قبل الوحدات لتبيان بعض المضاعفات العشرية . ويبين الجدول 1.1 بعضاً من هذه البادئات ورموزها :

يلاحظ في هذا الجدول أن كافة الكميات ذات الأس الموجب يرمز لها بالحروف اللاتينية الكبيرة عدا رمز الكيلو. أما الكميات ذات الأس السالب فتستخدم الحروف الصغيرة . ويشذ عن ذلك استخدام الحرف الأغريقي [μ] ميو.

---

* وبالفرنسية: Standard de International وقد أقر استخدام هذا النظام عالمياً.

الجدول 1.1

الرمز	البادئة			معامل الضرب
T	tera		تيرا	10^{12}
G	giga		گيگا	10^{9}
M	mega		ميگا	10^{6}
K	kilo		كيلو	10^{3}
m	milli		ملي	10^{-3}
μ	micro		ميكرو	10^{-6}
n	nano		نانو	10^{-9}
p	pico		پيكو	10^{-12}

كما أن هناك بادئة شائعة أخرى هي السنتي centi لإستخدامها مع المتر كجزء من مائة منه.

لقد عرف المتر في النظام القياسي الدولي بأنه 1650763.73 مرة بقدر طول موجة الإشعاع البرتقالي لعنصر الكربتون 68. وهذا الطول يعادل طول المتر المعروف منذ حوالي القرنين من الزمن في فرنسا*. أما الوحدة القياسية للكتلة فهي الكيلو غرام وتعادل تقريباً وزن ألف سنتمتر مكعب من الماء في درجة 4 درجة مئوية والوحدة الأساسية للزمن هي الثانية وقد عرفت بدقة بدلالة فترة التردد الإنتقالي بين مدارات ذرة السيزيوم.

* وكان فيما سبق يعتبر المتر جزءاً من عشرة ملايين من ربع محيط الكرة الارضية. ويتم الرجوع اليه من خلال وحدة قياس طولها متر واحد محفوظ في متحف علمي في فرنسا تحت ظروف قياسية معينة.

أما وحدة الحرارة فهي درجة كلفن . والوحدة الأساسية لشدة الضوء هي الكانديلا . وبقيت هناك الوحدة الأساسية الأخيرة المهمة في دراستنا وهي الأمبير Ampere والتي تعادل سريان شحنة مقدارها كولوم Coloumb واحد بالثانية . لذا علينا أن نعّرف الكولوم الذي هو وحدة الشحنة بالإستناد الى قانون كولوم الذي ينص على وجود قوة تنافر بين أي شحنتين متشابهتين موضوعتين بالقرب من بعضهما البعض. فإذا وضعت شحنتان متساويتان بحيث كانت المسافة بينهما متراً واحداً وأدى ذلك الى وجود قوة تنافر بينهما تعادل $10^{-7}C$ نيوتن حيث C ترمز الى سرعة الضوء والتي تساوي 2.997925×10^{8} متر بالثانية . فإن كلاً من الشحنتين تعادل كولوماً واحداً. وقد وجد أن الكولوم الواحد يحوي 6.24×10^{18} الكتروناً .

يبين الجدول 1.2 رموز الوحدات الأساسية وبعض الوحدات المشتقة منها مع العلاقات بينها .

يلاحظ من الجدول استخدام اسماء بعض العلماء للدلالة على وحدات كميات فيزياوية متعددة كالأمبير والفولت والأوم والنيوتن والكولوم والواط والويبر والفراد والهنري والهيرتز، وفي هذه الحالات يستعمل رمز الوحدة بالحروف اللاتينية الكبيرة . أما فيما عدا ذلك فتكون رموز الوحدات بالحروف الصغيرة .

أما الألكترون فولت فهو وحدة الشغل الذي يؤديه الكترون واحد شحنته 1.6×10^{-19} كولوماً حينما ينتقل عبر فرق جهد مقداره فولتاً واحداً. وهاتان الوحدتان ليستا من الوحدات القياسية العالمية . يقاس تردد الكميات المتناوبة بعدد الدوريات التي تحدث في الثانية الواحدة . وقد اصطلح أخيراً على تسمية وحدة التردد بالهيرتز Hertz ويرمز لها بالحرف f .

الجدول 1.2 الوحدات الأساسية والمشتقة في النظام القياسي العالمي

الكمية الفيزياوية	الرمز	الوحدة بالعربية	الرمز بالإنكليزية	الملاحظات
الكتلة	m	كيلو غرام	kg	
الطول	l	متر	m	
الزمن	t	ثانية	s	كميات
التيار	I	أمبير	A	أساسية
درجة الحرارة	°	درجة كلفن	K	
شدة الضوء	Em	كانديلا	cd	
المساحة	A	متر مربع	m	
الحجم	v	متر مكعب	m	
السرعة	u	متر بالثانية	m/ s	
التعجيل	a	متر بالثانية تربيع	m/s^2	النيوتن= كيلو غرام متر بالثانية بالثانية
القوة	F	نيوتن	N	
الشغل أو الطاقة	W	جول	J	الجول= نيوتن . متر= واط . ثانية
العزم	M او T	نيوتن . متر	N- m	
القدرة	P	واط	W	الواط = جول بالثانية
الشحنة	Q	كولوم	C	الكولوم= أمبير بالثانية
الجهد الكهربائي	V	فولت	V	الفولت= جول لكل كولوم
المقاومة	R	أوم	Ω	الأوم= فولت لكل أمبير
التردد	f	هرتز (دورة بالثانية)	H_2	
الفيض	φ	ويبر	Wb	
كثافة الفيض (التدفق)	B	تيسلا	T	تيسلا = ويبر لكل متر مربع
السعة	C	فراد	F	
المحاثة	L	هنري	H	

1.3 الوحدات الثانوية :

1.3.1 الطاقة والشغل :

يعرف الشغل بأنه حاصل ضرب القوة في المسافة . وتعرف الطاقة بأنها القابلية على إنجاز شغل لذلك تشتركان في الوحدات نفسها ويستند اشتقاق وحدتها الى العلاقة :

$$W = F.\ s$$

حيث W هو الشغل أو الطاقة و F القوة و s المسافة .

لذلك فإن الشغل أو الطاقة هي الجول (J) الذي يعرف بأنه N. m أي حاصل ضرب وحدة القوة (نيوتن N) والطول (متر m*) وحيث أن النيوتن هو ليس من الوحدات الأساسية لذلك يجب إستخدام قانون نيوتن

$$F = m.\ a$$

أي القوة تساوي حاصل ضرب الكتلة في التعجيل فالكتلة التي وحدتها الكيلو غرام (kg) والتعجيل الذي وحدته متر/ ثانية تربيع يعطي وحدة القوة نيوتن (ويساوي كيلو غرام متر/ ثانية تربيع) فتكون وحدة الشغل :

$$J = \frac{kg.m^2}{s^2}$$

ويستعمل المهندسون الميكانيكيون وحدة طاقة حرارية بريطانية هي BTU والتي تعادل 1055 جول .

1.3.2 القدرة :

تعرف القدرة بأنها سرعة تحويل الطاقة أي أن :

$$P = W/ t$$

فتكون وحدة القدرة وهي الواط (W) عبارة عن جول / ثانية (J/ s)

$$W = J/ s$$

---

* على الطالب عدم الالتباس بين استعمال الحرف m كرمز للكتلة واستعماله كرمز لوحدة الطول (متر) . كما يجب عدم الالتباس عند وضع وحدة بعد الرقم بشكل مختصر مع استعمال الرمز ضمن المعادلات والقوانين.

ولايزال هناك وحدة قديمة مستخدمة هي الحصان horse power وتعادل 746 واط .

1.3.3 الكفاءة :

تعرف الكفاءة بأنها النسبة بين القدرة الخارجة من جهاز ما الى القدرة الداخلة اليه لذلك فهي كمية بلا وحدة ويرمز لها η (إيتا) وتعطى بشكل نسبة مئوية عادة :

$$\eta = \frac{P_o}{P_i} \times 100\ \%$$

1.3.4 التيار الكهربائي :

يعرف التيار الكهربائي بأنه سرعة انتقال الشحنات الكهربائية أي :

$$I = Q/t$$

وحيث أن وحدة الشحنة هي الكولوم لذلك فإن وحدة التيار (الأمبير A) تعادل كولوم/ ثانية (C/s) :

$$A = C/s$$

1.3.5 الفولتية :

تعرف القدرة الكهربائية بأنها حاصل ضرب الفولتية في التيار أي :

$$P = VI$$

وحيث أن وحدة القدرة هي الواط W ووحدة التيار هي الأمبير A لذلك فإن وحدة الفولتية V هي واط / أمبير (W/A) وتساوي فولت .

$$V = W/A$$

1.3.6 المقاومة والأيصالية :

تعرف المقاومة بالأستناد الى قانون أوم حيث :

$$V = IR \qquad \text{أو} \qquad R = V/I$$

أي أن وحدة المقاومة (الأوم يرمز لها Ω*) هي حاصل قسمة وحدة الفولتية (الفولت V) على وحدة التيار (أمبير A).

$$\Omega = V / A$$

أما الأيصالية والتي هي مقلوب المقاومة فوحدتها هي السيمنس (كانت تدعى سابقاً موه ويرمز لها $\mho$) أي أن :

$$S = A / V$$

1.3.7 درجة الحرارة :

تستخدم درجة الحرارة بالتقدير المئوي (درجة مئوية C^o degree celsius) أو بالكلفن K حيث أن درجة الصفر بالكلفن تعادل 273 − درجة مئوية أي :

$$K^o = C^o + 273^o$$

1.3.8 وحدات أخرى :

تستخدم وحدات أخرى تعتمد على قوانين كهربائية سترد فيما بعد مثل وحدة السعة وهي الفراد ووحدة المحاثة وهي الهنري ووحدة الفيض وهي الويبر ووحدة كثافة الفيض وهي التيسلا .

كما أن هناك ثوابت للأوساط أو المواد العازلة أو الموصلة تعتمد في قيمتها على طبيعة تلك المواد وخصائصها الفيزياوية ، ويمكن اشتقاق وحداتها من علاقات رياضية خاصة بها مثل الأيصالية النوعية وحدتها (سيمنس / متر) والمقاومة النوعية (وحدتها أوم . متر) والسماحية ووحدتها (فراد لكل متر) والنفاذية وحدتها (هنري لكل متر) .

مثال 1.1 . أوجد وحدة المقاومة بدلالة الوحدات الأساسية .

---

* اعتباراً من ١ / ١ / ١٩٩٠ أصبحت قيمة الأوم القياسية مختلفة قليلاً عما سبق هذا التاريخ حيث تم إختيار وحدة الأوم القياسية بالإستناد الى ظاهرة هول Hall effect وتختلف عن القيمة التي سبقت هذا التاريخ بحوالي عدة أجزاء من المليون . واستناداً لهذا الإختلاف تغيرت قيم الفولت القياسية أيضاً.

الحل :

$$\Omega = V / A$$

$$V = P / A = W / sA$$

$$\Omega = \frac{F.S}{A^2} = \frac{1}{s} \quad \frac{kg\ m}{s^2} \quad . \quad \frac{m}{A^2}$$

$$= \frac{kg\ m^2}{S^3 A^2}$$

مثال 1.2 . محرك قدرته الخارجة 20 حصان . أوجد القدرة الداخلة بالكيلو واط إذا كانت كفاءة المحرك تساوي % 80 .

الحل :

لغرض تحويل القدرة الحصانية الى قدرة بالكيلو واط

$$1HP = 746\ W$$

والتي تعني أن الثابت 746 هو عدد الواطات لكل حصان أي :

$$746\ \frac{W}{HP}$$

فعند ايجاد ما يعادل 20 حصان يتم ضرب الرقم بالنسبة أعلاه أي :

$$20\ HP \times 746\ \frac{W}{HP} = 14920\ W$$

حيث لوحظ أن الضرب في HP ثم القسمة عليها لغرض عدم ارتكاب خطأ أثناء التحويل كما هو متوقع عادة من أي تحويل يرد مستقبلاً ، وهكذا فإن القدرة الخارجة تساوي 14920 واط وتعادل 14.92 kW وحيث أن الكفاءة :

$$\eta = \frac{P_o}{P_i}$$

فإن :

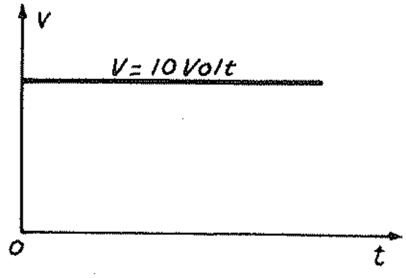
$$0{\cdot}8 = \frac{14{\cdot}92}{P_i}$$

$$\therefore P_i = 18{\cdot}65 \ \text{kW}$$

1.4 تمثيل العلاقات الرياضية بيانياً :

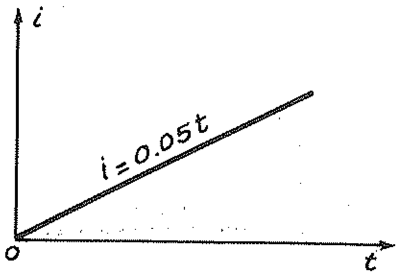
في دراسة الهندسة الكهربائية يكثر إستخدام التمثيل البياني للعلاقات الرياضية ويحتاجها الطالب في دراسته النظرية والعلمية. لذلك من الضروري أن يمتلك الطالب قدرة على تحويل العلاقات الرياضية الى بيانية وبالعكس بشكل سريع لكي يتم ربط المفاهيم الرياضية بالمفاهيم الفيزياوية.

وبصورة عامة فإن المحور الأفقي عادة يكون هو الزمن ويمثل المحور العمودي المتغيرات الأخرى كالفولتية والتيار والقدرة وغيرها فإذا كانت الكمية ثابتة مع الزمن تم تمثيلها بخط مستقيم أفقي كما في العلاقة 10 =V حيث رسمها البياني يكون كما في الشكل



الشكل 1.1

أما إذا تغيرت الكمية بشكل متناسب مع الزمن مثلاً $i = 0.05t$ فإن الشكل البياني لهذه الدالة يكون كما مبين في المنحني المبين في الشكل 1.2

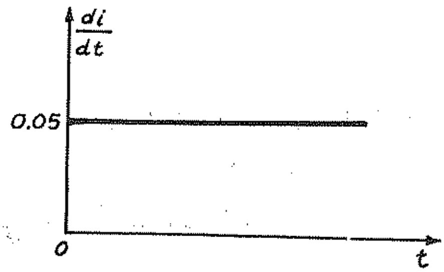


الشكل 1.2

فتمثل بخط مستقيم يبدأ من الصفر ويزداد بشكل يتناسب مع الزمن ويكون انحدار (أو ميل) هذا المستقيم معادلاً لثابت التناسب 0.05 وإذا طلب حساب منحني الميل لهذا التيار فيتم ذلك بأخذ المشتقة :

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(0.05\,t)}{dt} = 0.05$$

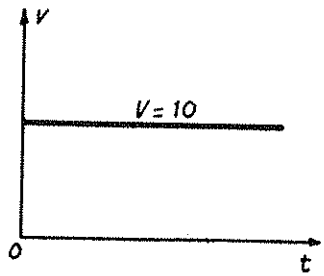
ويمثل بالمنحني المبين في الشكل 1.3 .

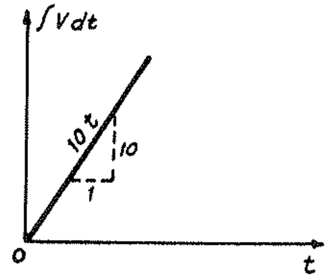


الشكل 1.3

ويمثل تكامل الدالة الرياضية بالمساحة تحت المنحني فالمسافة تحت المنحني 10 = V هي :

$$A = \int_{0}^{t} V dt = 10\, t$$



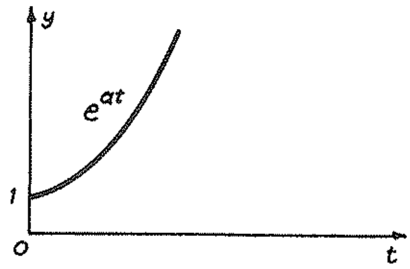


الشكل 1.4

كما أن هناك منحنيات أخرى يكثر التعامل معها مثل المنحنيات الأسية at

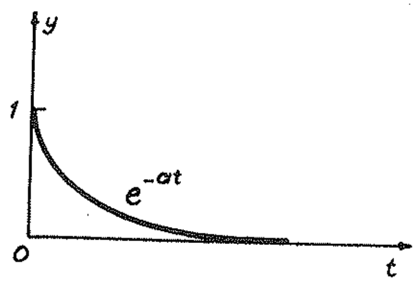
$$y = e^{at}$$

حيث تمثل بالمنحني المبين في الشكل 1.5 :



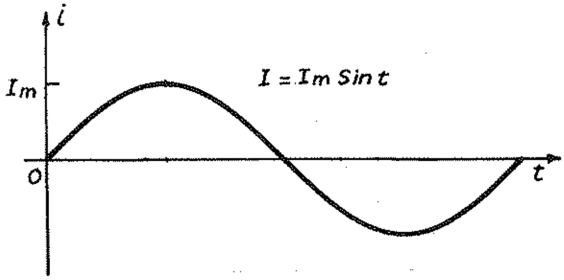
الشكل 1.5

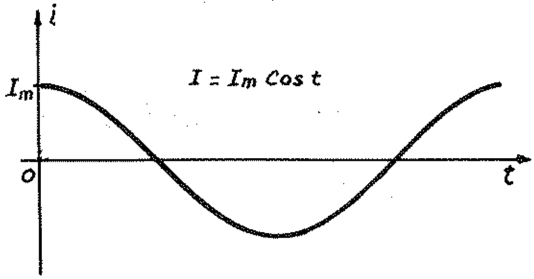
أما إذا كان الأس سالباً فإن شكل المنحني يصبح



الشكل 1.6

ويتم رسم معظم الدوال بشكل تخطيطي عادة بعد معرفة الشكل العام لها إضافة لمعرفة نقطتين على الأقل (عادة البداية عند $t=0$ والنهاية عند ($t=\infty$) أو نقاط خاصة أخرى كالنهاية العظمى أو النقطة التي تتقاطع فيها الدالة مع محور الزمن (كما في الدوال الدورية كجيب الزاوية وجيب تمامها) ويبين الشكل 1.7 بعض الدوال الدورية.





الشكل 1.7

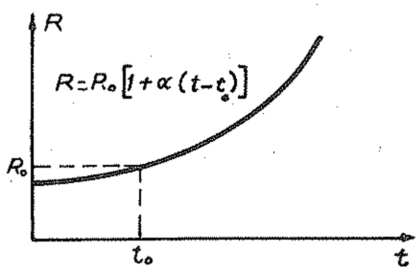
ويلاحظ ان تفاضل وتكامل هذه الدوال مرتبط بشكل وثيق حيث :

$$y = e^{at} \rightarrow \frac{dy}{dt} = ae^{at} \rightarrow \int ydt = \frac{1}{a} e^{at}$$

وللدوال الجيبية :

$$i = I_m \sin at \rightarrow \frac{di}{dt} = aI_m \cos at \rightarrow \int idt = \frac{-I_m \cos at}{a}$$

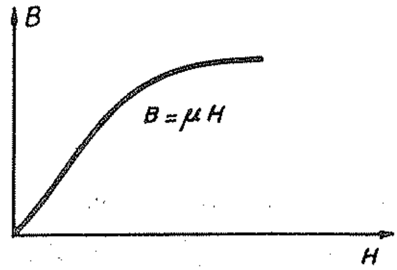
وهناك علاقات لايمكن تحديدها بشكل رياضي دقيق بل يعتبر التحديد البياني هو الأساس وخاصة إذا كانت العلاقة البيانية غير خطية ، فمثلاً تتغير كثير من المقاومات مع درجة الحرارة بشكل غير خطي كما في الشكل (1.8) .



الشكل 1.8

وعند ذلك يتم معالجة الموضوع إما بيانياً بشكل مباشر من المخطط أو بتقريب المخطط الى خط مستقيم (واحد أو اكثر) وإستخدام معادلة ذلك الخط المستقيم وإعتبارها صالحة فقط في حدود معينة وليس على إمتداد المنحني بشكل غير محدود . أما خارج هذه الحدود فيجب إستخدام معادلة أخرى أو الإعتماد على المنحني بشكل مباشر.

كما أن هناك حالات يتم التعامل معها بيانياً فقط مثل علاقة كثافة الفيض مع شدة المجال في المواد الحديدية المبينة في الشكل 1.9 حيث أن الشكل الرياضي للمنحني يستند على



الشكل 1.9

العلاقة $B = \mu H$ لكن قيمة النفاذية M تتغير مع شدة المجال المغناطيسي وسيمر بنا في فصول لاحقة استخدامات مختلفة لهذه المنحنيات.

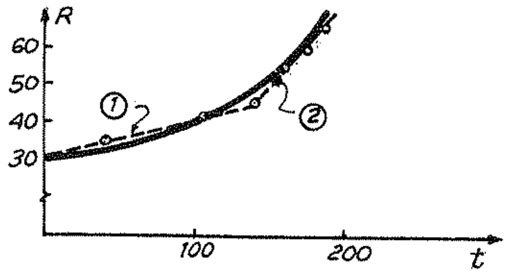
وتساعد الحاسبة الألكترونية حديثاً في التغلب على صعوبات إستخدام العلاقات غير الممثلة بمعادلات رياضية.

مثال إرسم منحني المقاومة مع الحرارة الذي يتحدد بالنقاط التالية :

المقاومة	R	30	35	43	45	52	63	70
درجة الحرارة	T	0	50	100	130	150	180	200

المطلوب تقريب المنحني الى خطين مستقيمين أحدهما للمدى من درجة الصفر مئوي الى 100 درجة مئوية والآخر للمدى من 100 درجة مئوية الى 200 درجة مئوية ثم إستخدم المعادلتين لأيجاد قيمة المقاومة عند درجة الحرارة 50 درجة مئوية و 150 درجة مئوية.

الحل :



الشكل 1.10

بالنسبة للخط المستقيم الأول نحاول رسمه بحيث يمر في معظم نقاط المنحني ويترك مساحات بينه وبين المنحني بحيث تكون متساوية من الجهتين قدر الإمكان.

المعادلة العامة للخط المستقيم $R = m\,t + b$

حيث m تمثل الميل وتساوي 0.1 ومن ثم نجد الثابت b بتعويض احدى النقاط وتكون المعادلة :

$$R = 0.1\,t + 28$$

وعند درجة الحرارة $t = 50\ ^{o}C$ فإن :

$$R = 0.1 \times 50 + 28 = 33$$

والمعادلة الثانية :

$$R = m_2\,t' + C$$

حيث $m = 0.26$ و C تساوي 38 لذا فإن :

$$R = 0{\cdot}26t' + 38$$

وبما أن $t' = t - 100$ فإن المعادلة الجديدة ستكون :

وعند الحرارة $t = 150\,t$ فإن :

$$R = 0{\cdot}26\,(150 - 100) + 38$$

$$= 41\Omega$$

مسائل الفصل الاول

1. حول الوحدات (آ) 0.06 ثانية الى ملي ثانية (ب) 862.3 ملمتر الى متر (ج) 0.0465 متر الى ملمتر (د) 0.0235 ملي امبير الى ميكرو امبير (هـ) 0.0000563 كيلو متر الى ملمترات (و) 0.062 متر مربع الى سنتمتر مربع (ز) 5.74×10^8 سنتمتر مكعب الى متر مكعب.

(الجواب: (آ) 60ms (ب) 0.8623m (ج) 46.5mm (د) 23.5A (هـ) 56.3mm (و) $620cm^2$ (ز) $572m^3$).

2. جد ناتج مايلي (آ) $720s - 6.4ms + 0.03s$ بوحدات الملي ثانية (ب) $2050m + 4.3km + 6.8 \times 10^4 cm$ بوحدات الكيلومترات

(الجواب: (آ) 35.68mS (ب) 7.03km)

3. يطلب ايجاد حجم موصل كهربائي بوحدات السنتيمترات المكعبة اذا علمت ان قطر الموصل يساوي 2mm وطوله 50m

(الجواب: $155.7cm^3$).

4. جد ناتج العمليات الحسابية التالية:

(آ) $(10^{-5})\,(10^{7})\,(0.00001)\,(100000)\,10^{3}$

(ب) $(2.9 \times 10^{-2})\,(7.2 \times 10^{=})\,(0.00058)\,892$

(ج) $(0.04 \times 10^{-3})\quad(0.04 \times 10^{-3})\quad(16 \times 10^{3})\quad(3.7 \times 10^{3})\quad 4.2^{3}$

$(0.09 \times 10^{-6})^{-2}(4 \times 10^{8})$

(د) $\dfrac{400(5000)^2}{0.08}$

(هـ) $\dfrac{0.000064^{1/2}}{40000}$

(و) $\dfrac{0.004^2(0.00006)^3(7200)^2}{[600(0.0008)(4.2\times 10)]^{1/2}}$

(الجواب : (آ) 10^5 (ب) 108 (ج) 4.44×10^{27} (د) 1.25×10^{11} (هـ) 2×10^{-7} (و) 3.06×10^{-11}

5. حول الكميات التالية : (آ) 4372m الى كيلومترات (ب) 0.000495 الى ميكرو ثانية (ج) 0.0000432km الى ملمترات (د) $92.8\,\mu A$ الى ملي امبير (هـ) 0.0000492mA الى نانو امبير (و) 0.0632m الى سنتمترات مربعة (ز) 2.92×10^7 cm^3 الى امتار مكعبة.

(الجواب : (آ) 4.372km (ب) $490\,\mu s$ (ج) 43.2mm (د) 0.0928mA (هـ) 49.2nA (و) $632\ cm^3$ (ز) $29.2m^3$ (ح) $723cm^3$).

6. اذا علمت ان معدل سريان الالكترونات في سلك هو 6.4×10^{12} الكترون بالدقيقة فما مقدار قيمة التيار في السلك.

(الجواب : 17.1A--)

7. اوجد قيمة الهبوط بالفولتية بين النقطتين b,a اي Vab اذا احتجنا الى 24J جول لتحريك (آ) 3 كولوم (ب) 4 – كولوم (ج) 20×10^{19} الكترون من نقطة a الى نقطة b

(الجواب : (آ) 8v – الاشارة السالبة تعني ان النقطة a سالبة نسبة الى b (ب) 6V (ج) 0.749V

8. اوجد الطاقة المخزونة في بطارية سيارة فولتيتها 12V وسعتها 7AH (امبير – ساعة)

(الجواب : 3.02mJ)

9. كم من الزمن يستغرق مصباح قدرته 100W ليستهلك شغلا 13kJ.

(الجواب : 130s)

10. اذا كانت اعلى قدرة يمكن الحصول عليها من الطاقة الشمسية هي $1\,kW/M^2$. واذا علمت ان كفاءة الخلايا الشمسية 13% فكم هو عدد الامتار المربعة من الخلايا الشمسية اللازمة لتجهيز سخان قدرته 1600W.

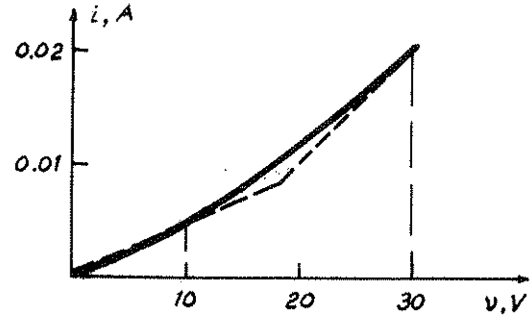
(الجواب : $12.3m^2$

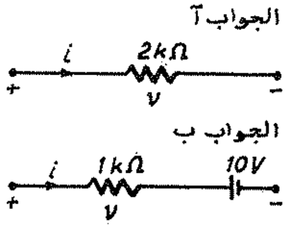
11. تمثل X و X_2 و X_3 و X_4 اربع كميات وحداتها هي الواط والاوم والجول والفولت الا انها غير مرتبة حسب التسلسل، المطلوب تحديد وحدة كل كمية منها.

$$X_4 = \frac{kgm^2}{s^2\,A^2}\,,\ X_3 = \frac{kgm^2}{s^3}\,,\ X_2 = \frac{kgm^2}{s^3\,A}\,,\ X_1 = \frac{kgm^2}{s^2}$$

(الجواب : الجول ، الفولت، الواط، الاوم على الترتيب)

12. يبين المنحني في الشكل 1.11 الخصائص اللاخطية لتغير الفولتية v مع التيار i وكذلك يوضح الشكل التقريب الخطي المنقط لهذه الخصائص، المطلوب ايجاد قيمة المقاومة ومصدر القوة الدافعة الكهربائية للمنحني التقريبي ، اذا علمت بالفولتية (آ) 10V (ب) 30V





13.اجب بصواب او بخطأ على مايلي:
(آ) يمكن ايجاد القدرة في مقاوم بأخذ حاصل ضرب التيار المار فيه والفولتية عبره
(ب) يمكن ان تكون كفاءة الجهاز اكثر ن مائة بالمائة
(ج) قدرة حصان واحد تعادلة 750 واط
(د) يقاس استهلاك الطاقة الكهربائية في المعامل والدور بالكيلو واط. ثانية
(هـ) وحدات S.I هي احدث الوحدات القياسية العالمية المتبعة في الوقت الحاضر.
(الجواب: (آ) ، (هـ) صحيحة فقط)

14. ماقيمة الشغل المبذول بالجولات لتحريك الكترون واحد خلال فرق جهد مقداره 100 فولت؟
(الجواب: $1.6\times 10^{-7}_{\mathbf{J}}$)

15. اعد كتابة المعادلات غير الصحيحة واكتبها بشكلها الصحيح.

(أ) $W = V.\,Q = Pt = Fl$

(ب) $P = I^2 R = V^2 R$

(ج) $Q = \int_{t1}^{t2} i\, dt$

16. برهن بان وحدات طرفي المعادلات التالية صحيحة $J = \sigma\mu$ حيث J كثافة التيار (امبير/ متر مربع) و σ الايصالية النوعية بالسيمنس و μ النفاذية (هنري/ متر) وكذلك اثبت صحة وحدات طرفي معادلة الطاقة الحركية والكامنة الطاقة الكهربائية من العلاقات:

$$W = 1/2\, mv^2 = qV = VI_t$$

17. اثبت صحه وحدات العلاقة $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ حيث c سرعة الضوء و μ النفاذية و ε السماحية.

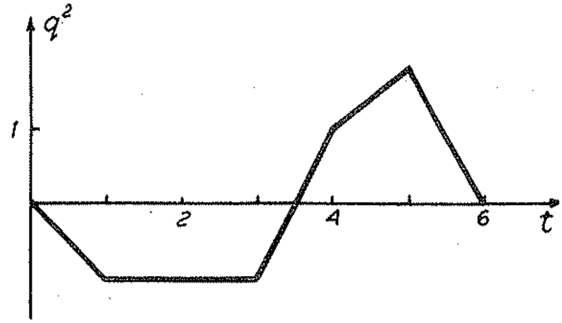
18. ارسم المنحني الذي يمر في النقاط التالية واختر خط مستقيم تقريبي بدل المنحني ثم اكتب المعادلة الرياضية للخط المستقيم وبعدها عوض X=0.2 لايجاد قيمة Y

X	0.5	0.3	0.33	0.25	0.06
Y	2	3	4	6	15

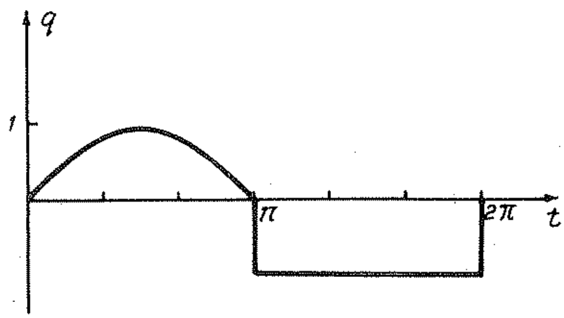
(الجواب : 9)

19. المنحني المبين عي الشكلين 1.12 (آ) و (ب) يمثل تغيير الشحنة مع الزمن ، المطلوب ايجاد منحني التيار مستفيدا من العلاقة

$i = dq / dt$



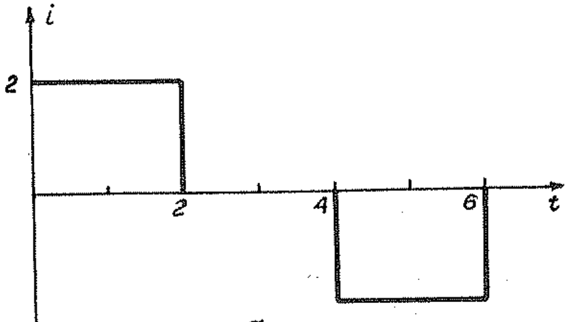
(آ)



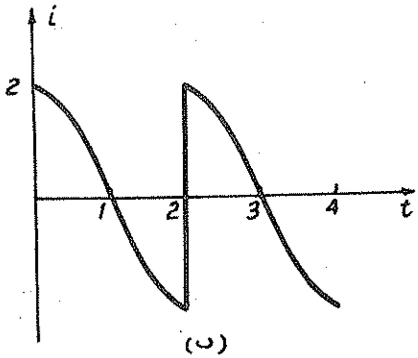
(ب)

الشكل 1.12

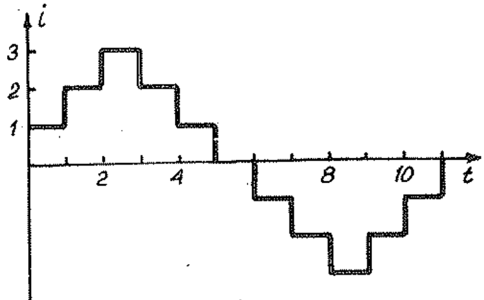
20. في الشكل 1.13 منحنيات تمثل المنحني يمثل تغيير التيار مع الزمن اوجد منحنيات الشحنة مع الزمن.



(آ)



(ب)



(ج)

21. جد التعابير الرياضية ومعادلات المنحنيات التالية :

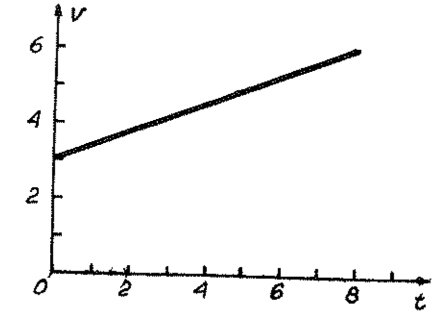
(الجواب : (آ) $y=3+(3/8)\,t$ الجواب : (ب)

a) $v = 2t$ للفترة $0 < t < 2$

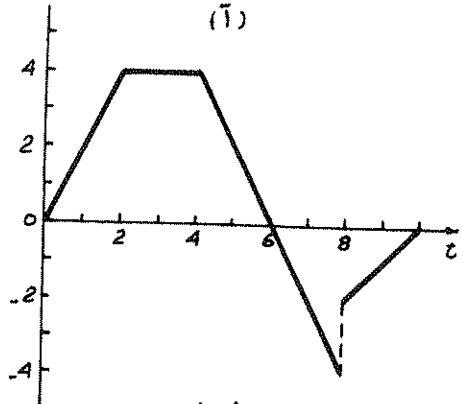
b) $v = 4$ $2 < t < 4$

c) $v = -2t + 12$ $4 < t < 8$

d) $v = t - 10$



(آ)



(ب)

الشكل 1.14

22. ارسم المنحنيات الممثلة بالمعادلات :

(a) $V = 5e^{-\frac{2}{3}t}$

(b) $i = 2e^{-2t} \cos 4\pi t$

(c) $y = 3 \ln 2t$

(d) $x = 2 \tan^{-1} y$

الفصل الثاني

المقاومة وتطبيقات قانون اوم

"علم الانسان مالم يعلم"
العلق 5

2.1مقاومة المواد المختلفة:

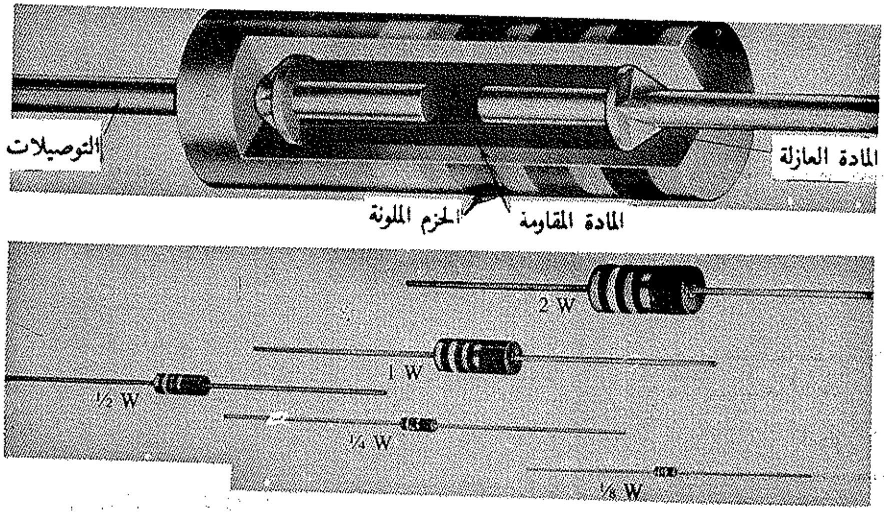
المقاومة الكهربائية لمادة ما هي مقياس للمعارضة التي تبديها تلك المادة للتيار الكهربائي . تبدي جميع المواد تقريبا مقاومة ما للتيار الكهربائي تحت الظروف الاعتيادية .

ويمكن تصنيف المواد من حيث طبيعة مقاومتها الى ثلاثة أصناف هي المواد العازلة كالخزف والزجاج والمايكا والمواد شبه الموصلة كالسيلكون والجرمانيوم والمواد الموصلة كالنحاس والألمنيوم والذهب والفضة ومن هذه المواد .

قليلة تنخفض مقاومتها الى الصفر عندما تبرد لدرجة حرارة تقرب من الصفر المطلق وتدعى بالمواد المفرطة الايصال Super conductors. وسنركز في دراستنا للمقاومة على المواد الاعتيادية والمستعملة بكثرة في الدوائر الكهربائية .

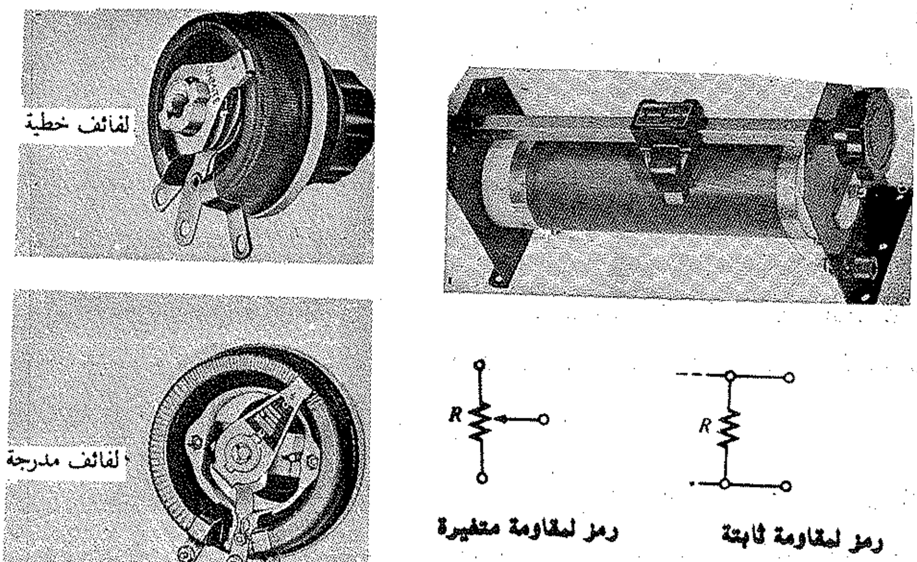
هناك أنواع عديدة من المقاومات المستخدمة في المختبرات وفي الدوائر الكهربائية والألكترونية منها المقاومات الكربونية المتكونة من مزيج مركب كاربوني وتطلى عادة بأحزمة ملونة تدل الألوان على قيمة المقاومة وفق نسق معين وهناك حجوم مختلفة من هذه

المقاومات وفق قابليتها على إستهلاك الطاقة . وهناك المقاومات الملفوفة الأسلاك المتكونة من سبائك خاصة وتتحدد قيمة المقاومة بأطوال أسلاكها ومساحة مقاطعها وتتحمل مثل هذه المقاومات قدرة أعلى من سابقتها . وهناك المقاومات المتغيرة وتحتوي على طوق متزحلق على جسم المقاومة الذي يمكن أن يكون واحداً من النوعين السابقين.



الشكل 2.1

مقاومات ثابتة



الشكل 2.2

مقاومات متغيرة

ولاتخلو أي مادة مهما كانت جيدة الأيصال من مقاومة ما .فسلك التوصيل الذي يوصل بين أحد طرفي البطارية وأحد طرفي مفتاح الدائرة ما هو الا عنصر ذي مقاومة صغيرة جداً يمكن اهمالها في كثير من الاحيان. ولكن من الضروري اخذها بنظر الاعتبار في احيان اخرى.

عند معارضة المقاومة للتيار فان مقداراً من الطاقة الكهربائية يستهلك فيها ومن ثم يتحول الى نوع آخر من الطاقة . فعنصر التسخين في السخان الكهربائي ماهو الا مقاومة تستهلك طاقة كهربائية وتحولها الى طاقة حرارية . اما المصباح الكهربائي فهو مثال على المقاومة التي تستهلك طاقة كهربائية وتحولها الى طاقة ضوئية نتيجة إعاقة جزئيات المادة لمرور التيار فيها. يبين الشكل 2.1 نوعان رئيسيان من المقاومات ، المقاومات الثابتة والمقاومات المتغيرة مع الرموز الكهربائية الممثلة لكل من النوعين فالمقاومات الثابتة تكون ذات قيمة معينة لاتختلف عن القيمة المسجلة عليها الا بنسبة ضئيلة . ويزداد سعر المقاومة كلما ازدادت دقة قيمتها. والمقاومات المتغيرة هي المقاومات التي يمكن تغيير قيمتها ضمن حدود معينة بوسيلة خارجية كمنظم الصوت في جهاز المذياع مثلا الذي هو عبارة عن مقاومة متغيرة تسبب ارتفاع او انخفاض صوت جهاز المذياع عند تغير قيمة المقاومة. هذا ومن الجدير بالذكر ان المقاومة الثابتة لاتعني انها تبقى ثابتة في جميع الظروف. فللحرارة تأثير كبير على قيمة المقاومة مثلاً ، كما سيمر بنا في الفقرة 2.2.

من الواضح انه اذا كانت مقاومة سلك معين تعادل مقداراً معيناً من الاومات ، فأن سلكاً طوله ضعف طول السلك الاول وبالمواصفات نفسها تعادل مقاومته ضعف مقاومة السلك الاول . ويعني ذلك ان المقاومة تتناسب تناسباً طردياً مع طول السلك . كما يلاحظ ان مساحة المقطع العرضي للمادة الموصلة تؤثر على حرية مرور التيار خلال السلك . فكلما ازدادت مساحة المقطع العرضي للموصل تحرك التيار بحرية اكثر ومن ثم قلت إعاقة السلك للتيار اي ان المقاومة تتناسب تناسباً عكسياً مع مساحة المقطع العرضي للموصل. ويمكن كتابة ذلك ببساطة :

$$R \alpha \frac{l}{A} \qquad ...(2\cdot1)$$

حيث l هو طول السلك و A مساحة المقطع العرضي له . ويلاحظ انه عند تحويل هذه المعادلة الى معادلة تساوي بشكل :

$$R = \frac{\rho l}{A} \qquad ...(2\cdot2)$$

فان ثابت التناسب ρ يعتمد على نوع المادة ويدعى بالمقاومة النوعية resistivity.
وبتعويض الوحدات المختلفة في المعادلة (2.2) وفق النظام القياسي الدولي للوحدات، يمكن استنتاج ان وحدة المقاومية هي اوم– متر. ويبين الجدول 2.1 المقاومة النوعية لبعض المواد الشائعة الاستخدام.

ويلاحظ التباين الشاسع في أقيام مقاوميات المواد المختلفة فسلك الجهد العالي الذي يمتد عبر أبراج نقل الطاقة الكهربائية والمصنوع من النحاس قد لاتتجاوز مقاومته جزء من الأوم لطول كيلو متر منه بينما تزيد مقاومة ورق المايكا العازل لأسلاك وملفات المحركات الكهربائية الذي لايتجاوز سمكه سمك ورق هذا الكتاب تزيد مقاومته على ملايين الأومات.

ويمكن تصور مقاومية المادة بانها عبارة عن مقاومة مكعب طول ضلعه متر واحد من تلك المادة عند مرور تيار عبر وجهين متقابلين من هذا المكعب.

جدول 2.1 مقاوميات بعض المواد الشائعة في درجة 20° م.

المادة	المقاومة النوعية ρ $\Omega - m$	الملاحظات
الفضة	1.5×10^{-8}	تعتبر مواد موصلة
النحاس	1.7×10^{-8}	
الذهب	2.4×10^{-8}	
الالمنيوم	2.8×10^{-8}	
الحديد	1.0×10^{-7}	
النايكروم	1.0×10^{-6}	
الكاربون	3.5×10^{-5}	
الجرمانيوم	4.5×10^{-1}	شبه موصلة
السيليكون	1.3×10^{3}	
البيكلايت	1.0×10^{10}	مواد عازلة
الزجاج	1.0×10^{12}	
المايكا	1.0×10^{14}	

تمارين

1. سلك ألمنيوم مساحة مقطعه 150 ملم ^{2} طوله 200 كيلو متر استبدل بسلك نحاسي بنفس القياسات أوجد المقاومة للنوعين.
الجواب $22.66\ \Omega\ ,\ 37.33\ \Omega$

2. مكعب من الفضة طول ضلعه سنتمتر واحد. تم تحويله الى سلك متجانس طوله 250 متر. أوجد مقاومة المكعب والسلك.
الجواب : $1.5\,\mu\Omega\quad ,\ 937.5\ \Omega$

مثال ((2.1)

مقاومة سلك هاتف تعادل 40 اوم لكل كيلو متر. اذا كانت مقاومية مادة السلك تعادل 2×10^{-8} اوم متر، احسب قطر السلك على فرض انه دائري الشكل.

الحل:

$$l = 1000\text{m},\quad R = 40\ \Omega,\ \rho = 2 \times 10^{-8}\ \Omega - \text{m}$$

وحيث ان $R = \dfrac{\rho l}{A}$

ولفرض ايجاد المساحة A تصبح المعادلة $A = \dfrac{\rho l}{R}$

$$= \frac{2 \times 10^{-8} \times 1000}{40} = 0{\cdot}5 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

وحيث ان المقطع دائري فان مساحته تساوي $A = \dfrac{d^2\,\pi}{4}$

لذا

$$d = \sqrt{\frac{4\,A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{\cdot}5 \times 10^{-6}}{\pi}}$$

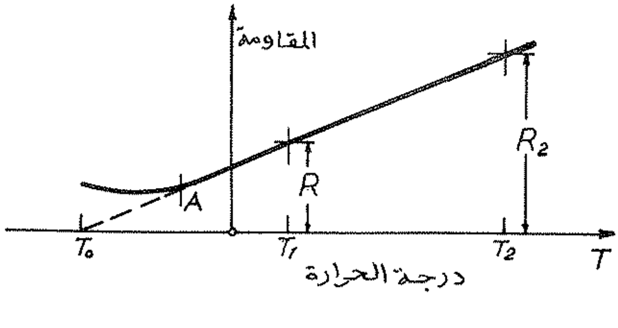
$$= 0{\cdot}798 \times 10^{-3}\ \text{m}.$$

أي أن قطر السلك يبلغ 0.798 ملمتر

2.2التأثير الحراري على المقاومة

يؤثر ارتفاع درجة الحرارة على المقاومات بأحد اشكال ثلاث. فتارة تزيد المقاومة عند ارتفاع درجة الحرارة زيادة محسوسة كما هي الحال في المعادن. وتارة تزيد المقاومة زيادة طفيفة عند زيادة درجة الحرارة كما هي الحال في بعض السبائك والتي ربما يهمل التأثير الحراري عليها. اما في حالة ثالثة فان زيادة درجة الحرارة تقلل من مقاومة بعض المواد وبالاخص المواد العازلة كالزجاج والمطاط والورق. وسنركز في دراسة التأثير الحراري على المقاومات من النوع الاول اي الموصلات المعدنية، نظراً لما لتغيّر مقاومتها مع الحرارة من تاثير سلبي او ايجابي على استخداماتها. فربما يستخدم موصل معين في تطبيق ما نظراً لان مقاومته تتغير مع الحرارة بمقدار كبير. وقد نتجنب استخدام موصل آخر نظراً لاتصاله بهذه الخاصية في تطبيق اخر.

ان الزيادة في المقاومة نتيجة ارتفاع درجة الحرارة لاتتغير على الدوام تغيراً منتظماً مع درجة الحرارة لمدى واسع من درجات الحرارة لكافة الموصلات. فقد تزداد المقاومة بمقدار معين عند ارتفاع درجة الحرارة بمقدار درجة مئوية واحدة فوق الصفر المئوي مثلا، بينما تزداد بمقدار اخر عند ارتفاع درجة الحرارة بمقدار درجة مئوية واحدة فوق درجة حرارة مائة مئوية. ويعني ذلك ان العلاقة بين الزيادة في المقاومة مع درجات الحرارة ليست علاقة تمثل بخط مستقيم على الدوام. ويتضح ذلك من الشكل 2.3.



شكل 2.3 منحني العلاقة بين المقاومة ودرجة الحرارة

يقرب جزء من المنحني المبين في الشكل 2.3 كثيراً من الخط المستقيم ولايسبب اعتباره خطأً مستقيماً سوى خطأً صغير لايكاد يظهر في الحالات الاعتيادية. ويبدو تمثيل العلاقة بين المقاومة ودرجة الحرارة بخط مستقيم ضمن حدود معينة من درجات الحرارة امراً معقولا ويسبب تسهيلا واضحاً في الحل.

اذا اعتبرنا ان التغير في المقاومة ΔR يتناسب مع التغير في درجة الحرارة ΔT كما تتناسب مع قيمة المقاومة الابتدائية R_1، فان:

$$\Delta R \propto R_1 \, \Delta T \qquad \ldots(2\cdot3)$$

والتي يمكن تحويلها الى معادلة بشكل

$$(R_2 - R_1) = \alpha R_1 (T_2 - T_1) \qquad \ldots(2\cdot4)$$

حيث ΔR تساوي $R_2 - R_1$ و ΔT تساوي $T_2 - T_1$

أوهي

$$R_2 = R_1 ((1 + \alpha (T_2 - T_1))) \qquad \ldots(2\cdot5)$$

حيث α المعامل الحراري للمقاومة Temperatufre Coefficient of resistance والتي وحدتها هي (أوم لكل درجة حرارة كلفن). ويبين الجدول 2.2 المعامل الحراري ويلاحظ أن T_0 هي نقطة تقاطع الخط المستقيم الذي يمثل تغير المقاومة ودرجة الحرارة مع الإحداثي الأفقي (درجة الحرارة) وتمثل درجة حرارة وهمية تبلغ المقاومة فيها صفراً ولكن من الناحية العملية فإن المقاومة الصغرى لاتبلغ الصفر إلاّ في درجة حرارة الصفر كلفن(273−) وإذا بلغت المقاومة صفراً لبعض المواد فوق هذه الدرجة فتدعى الخاصية فرط الإيصال Super Conductivity. وإذا أريد إيجاد المقاومة في درجة حرارة تقع على الجزء المنحني من الخواص فعند ذلك يجب إعتبار المعامل الحراري للمقاومة متغيراً مع درجة الحرارة وسنهمل هذا التغير في دراستنا هذه.

جدول 2.2 المعامل الحراري للمقاومة لعدد من المواد

المادة	المقاومة النوعية عند 20° م (اوم. متر)	المعامل الحراري للمقاومة عند 20° م	المادة	المقاومة النوعية عند 20° م أوم. متر	المعامل الحراري للمقاومة عند 20°م
الفضة	1.64×10^{-8}	0.0038	المانكانين	44×10^{-8}	0.00006
النحاس	1.72×10^{-8}	0.00393	الكونستنتان	49×10^{-8}	0.000008
الذهب	2.4×10^{-8}	0.0034	الزئبق	96×10^{-8}	0.00089
الالمنيوم	2.83×10^{-8}	0.0039	النيكروم	100×10^{-8}	0.00044
التنجستن	5.5×10^{-8}	0.0045	الكربون	33×10^{-6}	-0.0005
الزنك	6×10^{-8}	0.0037	ماء البحر	تقريبا 0.25	
النحاس الاصفر	7×10^{-8}	0.002	الجرمانيوم	0.4	
النيكل	7.8×10^{-8}	0.006	الماء المقطر	تقريبا 10^{4}	
الحديد	9×10^{-8}	0.005	الزجاج	تقريبا 10^{4}	
البلاتين	10×10^{-8}	0.003	المطاط الصلد	تقريبا 10^{15}	
القصدير	11.5×10^{-8}	0.0042	البرافين	تقريبا 10^{15}	
الرصاص	22×10^{-8}	0.0041	الميكا	تقريبا 10^{15}	
الفضة الالمانية	33×10^{-8}	0.0004	الكوارتز المنصهر	تقريبا 10^{17}	

مثال 2.2

مقاومة أحد خطوط نقل القدرة الكهربائية المصنوع من النحاس تبلغ 100 أوم عند درجة صفر مئوية . ما قيمة مقاومة الخط عندما ترتفع درجة الحرارة في فصل الصيف الى 52° مئوية .

الحل :

$$R_1 = R_o(1 + \alpha(T_1 - T_o))$$

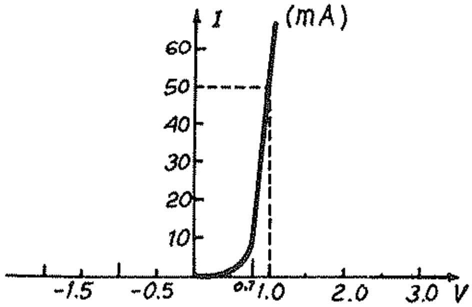
$$= 100(1 + 0{\cdot}00393(52 - 0))$$

$$= 120{\cdot}436\ \Omega$$

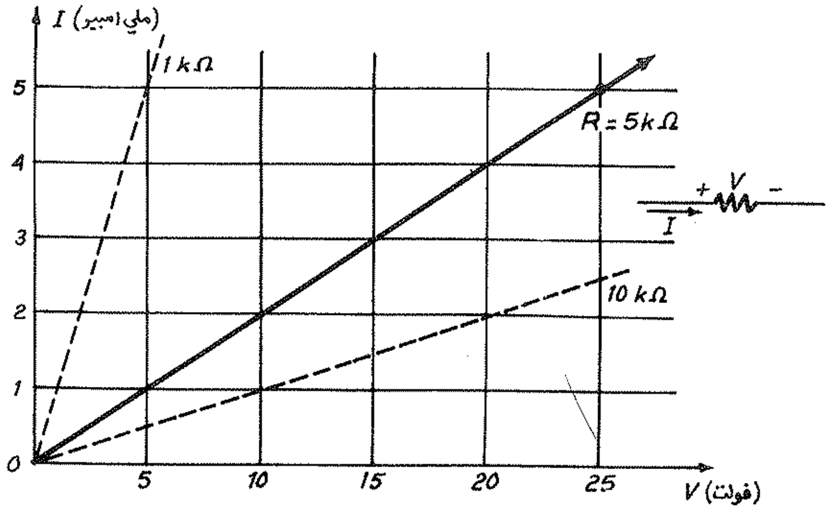
تمرين :

أوجد قيمة المقاومتين اللتين تمثل خواصهما بالشكلين 2.4 و 2.5 عند التيارات 30, 20, 10 ملي أمبير.

(الجواب) : (أ)5000, 5000, 5000 (ب) 700, 400, 300).



الشكل 2.5 منحني يمثل تغير قيمة المقاومة في الثنائي



الشكل 2.4 منحني يمثل تطبيق قانون أوم $R = \frac{V}{I}$

2.3 الأيصالية Conductance والايصالية النوعية Conductivity :

تعرف الايصالية بأنها مقلوب المقاومة ووحدتها هي السيمنس (مقلوب الأوم) ويرمز لها بالحرف G حيث:

$$G = 1 / R \qquad \text{...(2.6)}$$

لذا فإن المواد المختلفة يمكن إعتبارها موصل ايصاليته G وفي الوقت نفسه مقاومة قيمتها R.

أما الايصالية النوعية فهي مقلوب المقاومة النوعية ويرمز لها بالرمز γ ووحدتها سيمنس/ متر أي :

$$\gamma = 1 / \rho \qquad \text{...(2.7)}$$

$$G = 1 / R = A / \rho l = \gamma A / l$$

وبذلك يصبح قانون الايصالية

ويرمز للايصالية برمز المقاومة نفسه(الخط المتعرج) عند إستخدامها في رسم الدوائر الكهربائية . وتستخدم في بعض التحليلات الكهربائية حيث تسهّل الحل وخاصة في حالة الربط على التوازي.

مثال (2.3):

سلك من النحاس إيصاليته النوعية 62.9 ميكا سيمنس بحن متر استبدل بسلك من الألمنيوم مساوٍ له بالايصالية إيصاليته تساوي 39.37 ميكا سيمنس لكل متر وكان قطر سلك الالمنيوم يساوي سنتمتراً واحداً، احسب قطر السلك النحاسي لكي يحمل السلكان التيار نفسه.

الحل:

نفرض ان طول سلك الالمنيوم يساوي ايصاليته هي G_a وتوصيلية السلك النحاسي G_c

$$G_a = \frac{\gamma A_a}{l} = \frac{39{\cdot}37 \times 10^6 \times \pi \times 0{\cdot}5^2 \times 10^{-4}}{l}$$

$$G_c = \frac{\gamma A_c}{l} = \frac{62{\cdot}9 \times 10^6 \times \pi \times r^2}{0{\cdot}5\, l}$$

ولكي تكون الأيصاليتان متساويتين يجب ان تكون:

$$G_a = G_c$$

$$r^2 = \frac{0{\cdot}25 \times 10^{-4} \times 39{\cdot}37 \times 10^6 \times 0{\cdot}5}{62{\cdot}9 \times 10^6}$$

$$r = 2{\cdot}8 \times 10^{-3}$$

$$= 2{\cdot}8 \quad \text{mm}$$

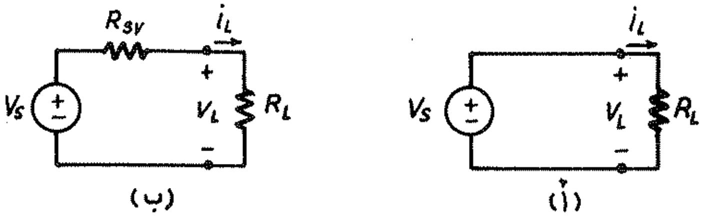
$$\therefore d = 5{\cdot}6 \quad \text{mm}$$

2.4 مصادر الفولتية (أو القوة الدافعة الكهربائية)

تتصف معظم أجهزة توليد وخزن الطاقة الكهربائية بانها مصادر ذات فولتية ثابتة بين طرفيها لذا تسمى بمصادر الفولتية. والبطارية الكهربائية هي مثال واضح على هذه المصادر.

ان ثبوت الفولتية بين طرفي مصدر الفولتية هو ثبوت تقريبي فقط. فاذا ماأخذنا نضيدة (بطارية) وربطناها مع مقاومة متغيرة وبدأنا بانقاص قيمة المقاومة، نجد ان التيار يزداد.

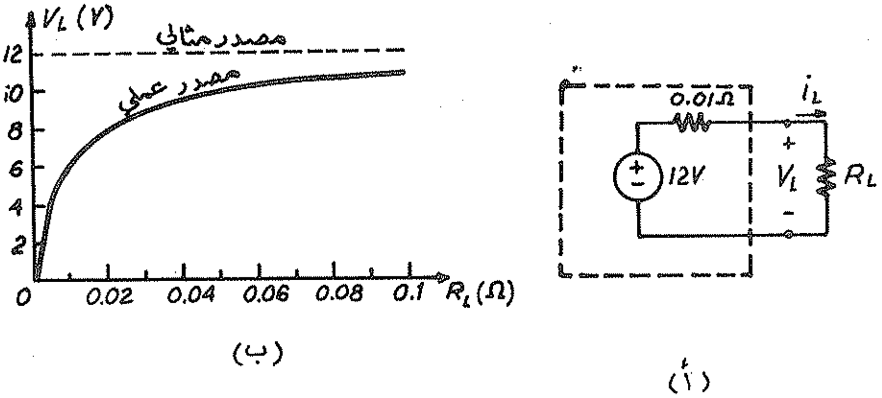
واذا ربطنا جهازاً لقياس الفولتية بين طرفي هذه المقاومة، نجد ان الفولتية تنقص مع زيادة التيار. واذا وصلت قيمة المقاومة الى الصفر أي اصبحت عبارة عن سلك يوصل طرفي النضيدة، فان مقدار التيار الذي يمر في هذا السلك لايساوي كمية لانهائية بل هو عبارة عن كمية محدودة تعتمد على مقاومة السلك مهما كانت صغيرة وعلى المقاومة التي تبديها المواد الكيمياوية في داخل النضيدة ضد مرور التيار، وهي مقاومة محدودة وليست صفراً. لذلك يمر علينا في المسائل نوعان من مصادر الفولتية مصدر الفولتية المثالي : وهو عبارة عن مصدر يعطي فولتية ثابتة بين طرفيه ولايحوي اية مقاومة ومصدر الفولتية غير المثالي او المصدر العملي وهو عبارة عن مصدر مثالي للفولتية مضافاً اليه مقاومة محدودة داخل المصدر نفسه. ويمكن تمثيله بالدائرة المكافئة المبينة في الشكل 2.6 في الدوائر التي ستمر بنا، علينا ان نأخذ الدوائر كما هي ونعتبر أن كل مصدر يظهر فيها هو مصدر مثالي. اما ان



شكل 2.6 أ – مصدر فولتية (ق.د.ك) مثالي
ب– مصدر فولتية (ق.د.ك) عملي.

وجد معه مقاومة كما مبين في الشكل 2.6 ب ، فان هذه المقاومة ربما تعود الى المقاومة الداخلية لهذا المصدر وربما تعود الى مقاومة خارجية مربوطة معه فعلاً. وقد كانت مقاومته الداخلية صغيرة جداً بالمقارنة معها الى حد انها أُهملت وأُبقيت المقاومة الخارجية لوحدها فقط.

لنرجع ثانية الى دائرة النضيدة والمقاومة المتغيرة التي ذكرناها اعلاه والمبينة في الشكل 2.7 أ فعندما تكون المقاومة الخارجية R_L كبيرة جدا، فان قيمة الفولتية V_L تكون مساوية تقريبا لفولتية المصدر. وعند تقليل قيمة هذه المقاومة الخارجية تنقص الفولتية بين طرفي النضيدة V_L الى ان تصل الى الصفر عند ربط مقاومة خارجية مقدارها صفراً بين طرفيها.



شكل 2.7 (أ) الدائرة الكهربائية (ب) منحني تغير فولتية الحمل مع مقاومة الحمل.

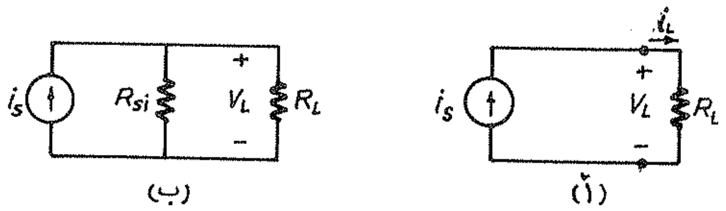
ويلاحظ ان مصدر الفولتية الذي قيمته 12 فولتاً لايزال موجوداً في الدائرة وهو المسبب لمرور التيار، الا انه ليس بامكاننا الوصول اليه او قياس فولتيته في مثل هذه الحالة الا عندما يكون مقدار التيار الذي يمر في الدائرة صفراً.

هناك انواع اخرى من مصادر الطاقة الكهربائية وهي مصادر التيار وهذه المصادر نادرة الاستخدام في الحياة اليومية، الا ان بالامكان توليد مثل هذه المصادر في المختبرات ، كما ان كثيرا من الدوائر الالكترونية المتعلقة بالترانزستر يمكن الاستعاضة عنها بدائرة مكافئة تحوي على مصادر تيار وليس على مصادر فولتية كالتي مرت بنا سابقا. لذلك وبالرغم من عدم شيوع استخدام مصادر التيار الا ان تحليلها عند دراسة الدوائر الكهربائية ضروري للمهندس الكهربائي.

وبالحقيقة فإن مصادر التيار هي مصادر فولتية لكونها منظورة من وجهة نظر أخرى ويمكن الإستعاضة بالواحدة عن الأخرى كما سيمر بنا فيما بعد.

مصدر التيار هو عبارة عن مصدر للطاقة يعطي تياراً ثابتاً. وكما كانت الحالة في مصادر الفولتية للتيار هو عبارة عن مولد يعطي تياراً ثابتاً بغض النظر عن المقاومة المربوطة بين طرفيه وعن الفولتية التي تظهر .

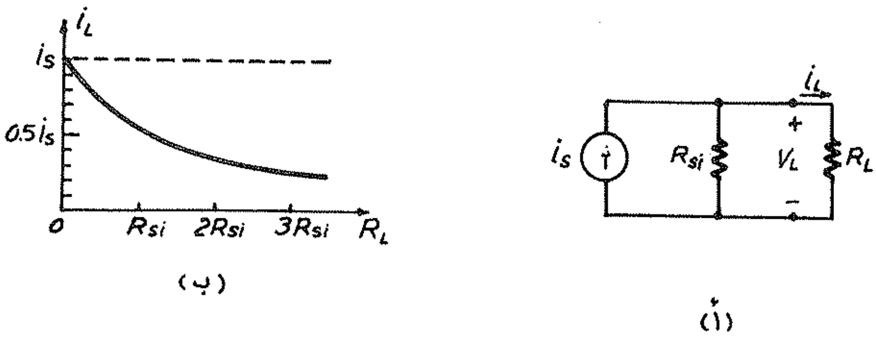
ولاينخفض هذا التيار مهما كانت قيمة المقاومة المربوطة به. اما المصدر العملي للتيار فهو عبارة عن مصدر مثالي كالذي شرحناه تواً ويحوي على مقاومة داخلية تمثل بالدائرة المبينة في الشكل . 2.8.



شكل 2.8 أ– مصدر تيار مثالي ب– مصدر تيار عملي

يبين الشكل 2.8 أ ان المصدر المثالي اذا فتحت دائرته (اي لم تربط به اية مقاومة) كانت الفولتية عبر طرفيه لانهائية . وهو امر غير واقعي ولايتصور وجوده في الحياة العملية . اما المصدر العملي في الشكل 2.8 ب فهو عبارة عن مصدر مثالي مربوط معه مقاومة معينة تمثل بالشكل المبين. فاذا فتح طرفا المصدر من اي ربط خارجي ، مرّكل تيار المصدر خلال هذه المقاومة وانتج فولتية محدودة بين طرفيها .

يبين الشكل 2.9 دائرة مصدر تيار عملي ربطته معه مقاومة خارجية R_L .



شكل 2.9 (أ) الدائرة الكهربائية (ب) منحني تغير تيار الحمل مع مقاومة الحمل.

عندما تكون المقاومة الخارجية صغيرة جداً ،ولنفرض انها تساوي صفراً ، فان تيار المصدر يمر كله خلالها دون ان يمر تيار في المقاومة الداخلية ، حيث ان التيار في هذه الحالة يسلك الطريق السهل. اما عند زيادة المقاومة الخارجية عن الصفر، فان تيار المصدر ينقسم بين المقاومة الخارجية والمقاومة الداخلية فيظهر التيار في المقاومة الخارجية اقل من التيار المثالي. يبين الشكل 2.9 ب منحني تغير التيار في المقاومة الخارجية عند زيادة هذه المقاومة. ويلاحظ بان مصدر التيار المثالي لايمكننا الوصول اليه وقياسه الا بربط دائرة ذات مقاومة مقدارها صفرا ، مباشرة بين طرفيه.

2.5قانون اوم

في عام 1827 نشر الفيزياوي الالماني جورج اوم كتيباً ادرج فيه ملاحظاته بان فرق الجهد بين طرفي موصل يتناسب مع التيار الذي يمر فيه وان ثابت التناسب هو أحد خصائص الموصل والذي سمي بالمقاومة. وقد شاع استخدام هذا القانون فيما بعد كثيراً واصبح من اهم القوانين الكهربائية ان لم يكن اهمها على الاطلاق. يطبق هذا القانون في شتى الدوائر الكهربائية وباشكال متعددة ويعتمد أساساً على العلاقة التناسبية التي مر ذكرها والتي عند تحويلها الى معادلة رياضية تصبح.

$$V \propto I \qquad \ldots (2\cdot8)$$

$$\therefore V = RI \qquad \ldots (2\cdot9)$$

ويمكن كتابة المعادلة (2.9) بشكلين اضافيين هما :

$$R = \frac{V}{I}, I = \frac{V}{R} \qquad \ldots (2\cdot10)$$

وعند استخدام التوصيلية بدل المقاومة تؤول الاشكال الثلاثة السابقة الى

$$V = \frac{I}{G}, G = \frac{I}{V}, I = GV \qquad \ldots (2\cdot11)$$

وبالرغم من ان المقاومة في المعادلة 2.9 ظهرت كثابت للتناسب، الا ان تغيرها مع الزمن او مع التيار الذي يمر فيها او مع درجة حرارتها لايغير من واقع قانون اوم. حيث يبقى

سارياً في كافة الأحوال. ففي كل لحظة اوكل درجة حرارة ، نجد ان حاصل قسمة الفولتية على التيار الذي يمر في مقاوم ما يساوي قيمة مقاومتها بالاوم. ويعني ذلك انه اذا كانت المقاومة غير خطية فان قانون اوم ينطبق ايضا دون اي اختلاف.

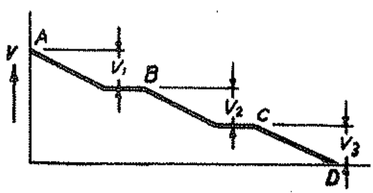
(المقاومة غير الخطية هي المقاومة التي تتغير مع قيمة التيار الذي يمر فيها ، وسنعتبر أن المقاومات هي خطية إلا أذا ذكر خلاف ذلك .

2.6 ربط المقاومات

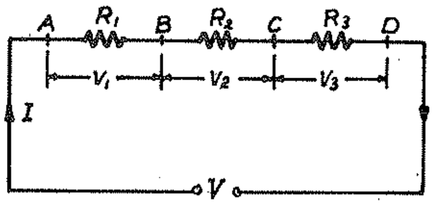
2.6.1ربط المقاومات على التوالي

يقال لعدد من المقاومات (او حتى المصادر) انها مربوطة على التوالي series اذا مر التيار عينه فيها جميعا دون مبالاة بما يتسبب عن فولتيات عبرها. يبين الشكل 2.10 عدداً من المقاومات المربوطة على التوالي ، حيث تمثل V_1, V_2, V_3 الفولتيات التي تظهر عبر كل منها ، بينما يمر التيار I نفسه خلال كل منها. ويمكن بسهولة التأكد من ان الفولتية الكلية V عبر هذه المقاومات مجتمعة جميعاً تساوي مجموع الفولتيات الثلاث التي تظهر عبر كل منها. * اي ان :

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$



(ب)



(أ)

شكل 2.10 (أ) الدائرة الكهربائية (ب) منحني الفولتيات

* يستند ذلك الى قانون الفولتية لكرشوف كما سيتم ايضاحه في الفصل الثالث

وبتطبيق قانون أوم على كل من هذه المقاومات الثلاث فان ،

$$V = IR_1 + IR_2 + IR_3 \qquad (2.12)$$

$$V = I(R_1 + R_2 + R_3)$$

وحيث ان حاصل قسمة الفولتية الكلية على التيار يعادل مقاومة مجموعة المقاومات المبينة في الشكل ، لذا

$$V = IR_s$$

حيث R_s هي المقاومة المكافئة للمقاومات الثلاث المربوطة على التوالي . او بكلمة اخرى :

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3 \qquad (2.13)$$

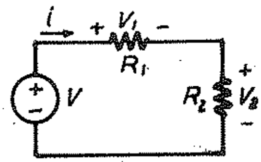
ومن الواضح ان مثل هذا القانون كان يمكن الوصول اليه لاي عدد من المقاومات المربوطة على التوالي .

ويمكن ان يوضح بالصيغة التالية " ان المقاومة المكافئة لعدد من المقاومات المربوطة على التوالي يعادل مجموع قيم تلك المقاومات " .

2.6.2 تقسيم الفولتية

بالرجوع الى المعادلة (2.12) يتبين ان مرور التيار في المقاومات المربوطة على التوالي نفسه يتسبب في ان تكون الفولتية الكلية مكونة من مجموع عدد من الفولتيات كل من هذه الفولتيات تتناسب مع التيار كما يتناسب مع قيمة المقاومة نفسها . فاذا كان هناك مقاومتان مربوطتين على التوالي كما في الشكل 2.11 ، فالتيار الذي يمر فيها يكون :

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}$$



الشكل 2.11 تقسيم الفولتية بين مقاومتين متواليتين

والفولتية عبر اولاهما V_1 تكون :

$$V_1 = IR_1 = V\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \dots (2\cdot14)$$

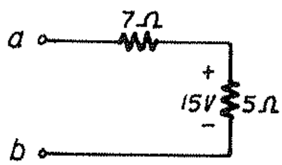
كما ان V_2 تكون :

$$V_2 = V\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \dots (2\cdot15)$$

وتعني هاتان المعادلتان ان الفولتية عبر اي من المقاومتين المربوطتين على التوالي تساوي الفولتية الكلية مقسومة على مجموع المقاومتين ومضروبة في تلك المقاومة . او بكلمة اخرى ان الفولتية عبر كل مقاومة من المقاومتين تتناسب مع قيمة تلك المقاومة .

مثال (2.4)

في الدائرة المبينة في الشكل 2.12 كانت الفولتية عبر المقاوم 5Ω تساوي 15 فولتاً . اوجد الفولتية الكلية بين a و b .



الشكل (2.12)

الحل :

التيار الذي يمر في المقاوم 5Ω وفق قانون اوم يساوي

$$I = \frac{15}{5} = 3A$$

وهو التيار نفسه الذي يمر في المقاومات جميعا . لايجاد المقاومة المكافئة لهذه المقاومات المربوطة على التوالي تجمع قيمها اي

$$R_s = 5 + 7 = 12\,\Omega$$

فتكون الفولتية الكلية بين a و b عبارة عن المقاومة المكافئة 12Ω مضروبة في التيار 3A وفق قانون اوم ايضاً :

$$V_{ab} = 3 \times 12 = 36V$$

او بطريقة أخرى يمكننا التوصل الى النتيجة بخطورة واحدة فقط وذلك بتطبيق قانون تقسيم الفولتية الممثل في المعادلة (2.14) او (2.15). فلو اعتبرنا R_1 هي 7Ω و R_2 هي 5Ω فان V_2 ستكون 15 فولتاً . ومن العلاقة 2.15

$$V_2 \doteq V \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

اي بتعويض القيم ، وينتج

$$15 = V \frac{5}{7 + 5}$$

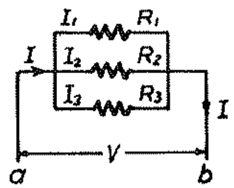
لذا فان

$$V = 36V$$

2.6.3 المقاومات على التوازي

يقال لعدد من المقاومات (وحتى المصادر) أنها مربوطة على التوازي paralhl اذا كانت الفولتية عبر طرفي كل منها هي الفولتية عينها دون مبالاة بمقدار التيارات التي تمر في كل منها . يبين الشكل 2.13 عدداً من المقاومات المربوطة على التوازي حيث تمر فيها التيارات I_3, I_2, I_1 من اليسير تبيان ان التيار الكلي المار بين الطرفين a و b والذي يمثل بـ I هو عبارة عن مجموع التيارات I_3, I_2, I_1 * ، اي ان

* ان ذلك وفق قانون التيار لكرشوف . وسيتم ايضاح ذلك مفصلاً في الفصل الثالث .



الشكل (2.13)
ثلاث مقاومات متوازية

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \qquad \text{... (2·16)}$$

وحيث ان كل من هذه التيارات الثلاثة هو عبارة عن حاصل قسمة الفولتية V على المقاومة التي يمر فيها ، وفق قانون اوم ، اي ان :

$$I = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3}$$

ومن تطبيق قانون اوم مرة اخرى على الدائرة باكملها فان حاصل قسمة الفولتية الكلية على المقاومة المكافئة Rp هو عبارة عن التيار الكلي I. اي ان

$$\frac{V}{R_p} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) \qquad \text{... (2·17)}$$

والتي تبين بوضوح ان مقلوب المقاومة المكافئة لعدد من المقاومات المربوطة على التوازي يساوي مجموع مقلوبات المقاومات اي :

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \ldots (2{\cdot}18)$$

سبق وان عّرفنا التوصيلية بانها مقلوب المقاومة ، لذا فان المعادلة (2.18) يمكن وضعها بسهولة بشكل

$$G_p = G_1 + G_2 + G_3 \qquad \ldots (2{\cdot}19)$$

حيث G_p هي التوصيلية المكافئة للتوصيليات G_3, G_2, G_1 المربوطة على التوازي .

وباختصار عند ايجاد المقاومة المكافئة لعدد من المقاومات المتوالية تجمع اقيام تلك المقاومات .

اما عند ايجاد مكافئ المقاومات المربوطة على التوازي فتجمع توصيلياتها لتعطي التوصيلية المكافئة .

هناك حالة خاصة ترد بكثرة ، الا وهي حالة ربط مقاومتين على التوازي حيث تكون المقاومة المكافئة (نطبق المعادلة (2.18)) هي

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

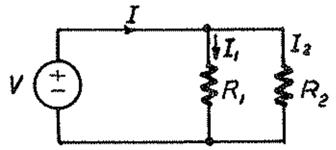
لذا فان

$$R_p = \frac{R_1 \quad R_2}{R_1 + R_2} \qquad \ldots (2{\cdot}20)$$

والتي هي عبارة عن حاصل ضرب المقاومتين مقسومة على حاصل جمعها . ويستحسن للطالب ان يتذكر هذه العلاقة لكثرة ورودها .

2.6.4 تقسيم التيار

في الدائرة المبينة في الشكل 2.14 ، تظهر مقاومتان مربوطتان على التوازي. وكان التيار الكلي I . بينما التياران في المقاومتين هما I_1 و I_2 . فالفولتية الكلية عبر المقاومتين



الشكل 2.14 توصيليتان متوازيتان مجهزتان من مصدر

تساوي
$$V = IR_p$$

حيث R_p هي المقاومة المكافئة للمقاومتين، فيكون التيار في المقاومة R_1

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{IR_p}{R_1}$$

ومن تعويض المعادلة (2.20) في العلاقة الاخيرة نحصل على :

$$I_1 = I\frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{... (2·21)}$$

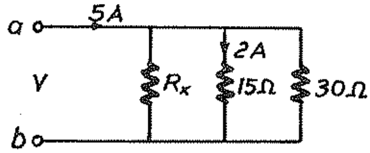
وبالطريقة نفسها

$$I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{... (2·22)}$$

وتعني هاتان المعادلتان ان التيار المار في احدى المقاومتين يساوي التيار الكلي مقسوماً على مجموع المقاومتين ومضروباً في المقاومة الاخرى. او بكلمة اخرى ان التيار يتناسب مع المقاومة الاخرى، حيث ان التيار الكبير يمر في المقاومة الصغيرة وبالعكس.

مثال (2.5)

في الدائرة المبينة في الشكل 2.15 كانت قيمة التيار الكلي 5A والتيار المار خلال المقاوم 15Ω قيمته 2A . ماقيمة المقاومة R_x ؟



الشكل 2.15. دائرة المثال (2.5)

الحل :

الفولتية عبر طرفي المقاوم الوسطي تساوي :

$$2 \times 15 = 30\ V$$

وهي الفولتية نفسها بين طرفي الدائرة ، فتكون المقاومة المكافئة عبارة عن حاصل قسمة هذه الفولتية على التيار 5A ، اي :

$$R_p = \frac{30}{5} = 6\Omega$$

وبالتعويض في قانون التوازي (2.18)

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{1}{R_x}$$

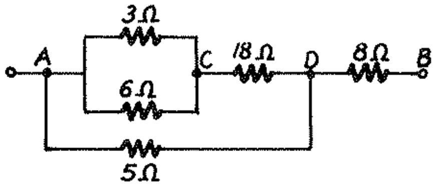
وبحل هذه المعادلة نجد أن :

$$R_x = 15\Omega$$

يصادق المرء في كثير من الاحيان عند تبسيط الدوائر المعقدة ان تحتوي هذه الدوائر على ربط على التوالي وربط على التوازي بوقت واحد. وليس في تبسيط مثل هذه الدوائر اي جديد ، حيث ان خطوات التبسيط لاتتعدى تطبيق قانوني التوالي والتوازي السالف ذكرهما بشكل متعاقب وحسب ماتقتضي الدائرة المعينة. اما اختيار نقطة البداية في التبسيط فيتم من اي مكان مناسب في الدائرة نرى فيه وجود تطبيق القانونين الآنفي الذكر متيسراً.

مثال (2.6)

اوجد المقاومة المكافئة بين A و B في الشكل 2.16



شكل 2.16 دائرة المثال (2.6)

الحل :

المقاومة المكافئة بين A و C المربوطتين على التوازي تساوي

$$\frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\Omega$$

وهذه المقاومة هي على التوالي مع المقاومة 18 اوم فتساوي مقاومة المسار D C A

$$18 + 2 = 20\Omega$$

وهذه المقاومة المكافئة مربوطة على التوازي مع المقاومة 5Ω ومن ثم تساوي المقاومة المكافئة بين A و D

$$\frac{20 \times 5}{20 + 5} = 4\Omega$$

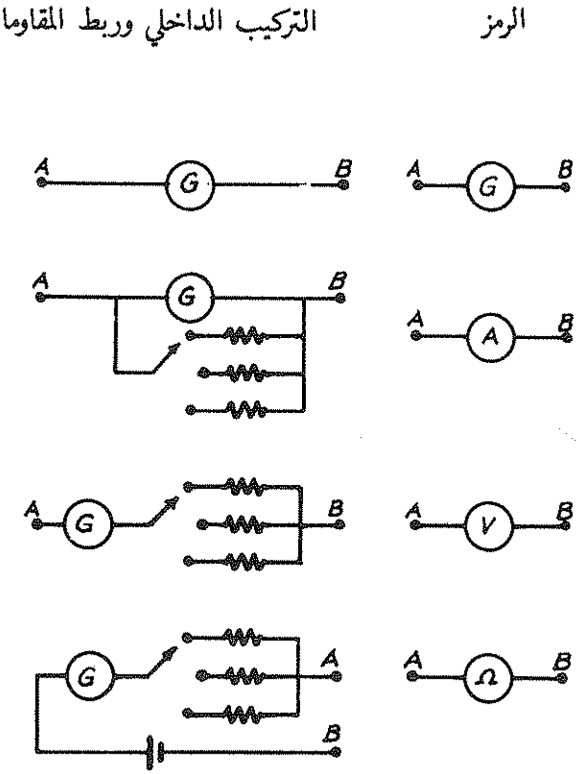
واخيراً لايجاد المقاومةالكلية بين A و B تجمع المقاومة 4Ω مع المقاومة 8Ω . لكونهما على التوالي فتكون المقاومة الكلية :

$$4 + 8 = 12\Omega$$

2.7 أجهزة القياس :

2.7.1 الكلفانوميتر :

إن الجزء الأساس في تركيب أجهزة قياس التيار والفولتية والمقاومة هو الملف المتحرك في مجال مغناطيسي والذي يدعى بالكلفانوميتر. يبين الشكل 2.17 صورة تركيبة الجهاز وهو أساساً جهاز يتحسس التيار الكهربائي الواطئ (بحدود ملي أمبير واحد) ويتحرك مؤشره بمقدار يتناسب مع شدة التيار الذي يمر فيه وتكون مقاومة ملفه عالية (بحدود مائة أوم).

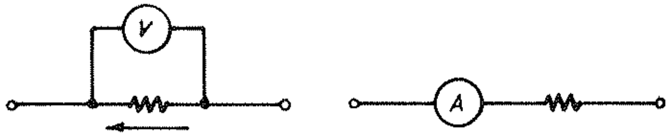


الشكل 2.17 التركيب الداخلي وربط المقاومات عند إستخدام الكلفانوميتر في مقايس مختلفة مع رموزها

إن هذا الجهاز قليل الفائدة بشكله البسيط لذلك تركبّ معه مجموعة مقاومات على التوازي لكي يستخدم لقياس التيارات الكبيرة (يصبح أميتر) وتركب معه مجموعة مقاومات على التوالي لكي يستخدم لقياس الفولتيات الكبيرة (يصبح فولتميتر) وعند تركيب نضيدة ومجموعة مقاومات على التوالي معه يمكن إستخدامه كمقياس مقاومة (أوميتر) وتكون أقيام هذه المقاومات المركبة مع جهاز الكلفانوميتر محسوبة لكي تعطي التدريج المناسب لمدى القراءة المطلوب القياس ضمنها.

2.7.2 قياس التيار والفولتية (او الجهد)

من الواضح انه لقياس تيار ما في دائرة ما فإن هذا التيار يجب ان يدخل بطريقة ما الى جهاز القياس لكي يتحسس بمقدار ذلك التيار. وحيث ان الدائرة التي تمرر أجزاءها المختلفة التيار نفسه هي الدوائر المتوالية ، لذلك فإن جهاز الاميتر يربط على التوالي مع عنصر الدائرة المراد قياس التيار فيه. يوضح الشكل 2.18 أ طريقة ربط الاميتر لقياس التيار في فرع ما وفيه يظهر رمز الاميتر الذي هو دائرة داخلها الحرف A.



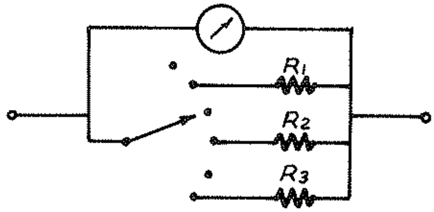
الشكل 2.18 ربط الاميتر والفولتميتر

أما قياس الفولتية ، فيتم بربط طرفي جهاز الفولتميتر الى النقطتين المراد قياس الفولتية بينها . فاذا اريد قياس الفولتية عبر حمل ما فإن الفولتميتر يربط على التوازي مع ذلك الحمل . يبين الشكل 2.18 ب كيفية ربط الفولتميتر الذي يرمز له بدائرة داخلها الحرف v . مع مراعاة اتجاه الفولتية ونظراً لأن اضافة مقاومة على الدائرة المراد قياس تيارها او فولتيتها يؤثر على قيمتي هاتين الكميتين ، لذلك من الضروري ان لايؤثر ربط الاميتر والفولتميتر على التيارات والفولتيات بشكل محسوس . ولهذا من البديهي ان تكون مقاومة الاميتر صغيرة جداً وتعتبر نظريا مساوية للصفر لكي لاتغيّر من قيم المقاومات المربوطة معه على التوالي . أما الفولتميتر فتعتبر مقاومته كبيرة جداً . ومن الناحية النظرية تعتبر لانهائية وذلك لئلا يسحب أي تيار ملموس عند ربطه على التوازي مع اي جزء في الدائرة الكهربائية .

إن قيم التيار والفولتية المراد قياسها عادة تختلف من دائرة لأخرىٰ . فقد يبلغ التيار مثلاً في محطات القوة الكهربائية الآف الامبيرات ، بينما ينخفض في الدوائر الالكترونية مثلاً الى حدود الميكروامبير . وكذلك الحال بالنسبة للفولتية . وعليه اما ان تستخدم اجهزة مختلفة لقياس كل مدى range من التيار وكل مدى من الفولتية ، او ان يستخدم الجهاز نفسه بمساعدة بعض الاجزاء الاضافية له لغرض تغيير القياس من مدى لآخر كما اوضحنا في الامثلة السابقة .

مثال (2.7)

كلفانوميتر ذو مقاومة 20Ω مربوط كما مبين في الشكل 2.19 يعطي تأشيراً تاماً على راجهة الاميتر حينما يمر تيار مقداره 1 ملي أمبير . اوجد قيم المقاومات R_1 و R_2 و R_3 التي يجب ان تربط معها على التوازي لتغيير مدىٰ تأشير الكلفانوميتر الى 10 ملي امبير و 100 ملي امبير و 1 امبير على الترتيب .



الشكل 2.19 مقياس للتيار بثلاث مديات

الحل :

حينما يتم أقصى تأشير للكلفانوميتر، فإن فرق الجهد عبر طرفي المؤشر يساوي .

$$20 \times 1 \times 10^{-3} = 0.02 \text{ V}$$

أ– حينما يراد قياس تيار مقداره 10 ملي امبير، فإن 1 ملي امبير سيمر في الكلفانوميتر فقط ، بينما تمر الـ 9 ملي امبير الأخرىٰ خلال المقاومة R_1 ، والتي تسلط عليها الفولتية اعلاه نفسها .

إذاً

$$R_1 = \frac{0{\cdot}02}{9 \times 10^{-3}} = 2{\cdot}22\Omega$$

ب– حينما يراد قياس 100 ملي أمبير فانه بالطريقة نفسها يمكن ان نستنتج ان التيار الذي يمر في المقاومة R^2 يساوي 99 ملي امبير.

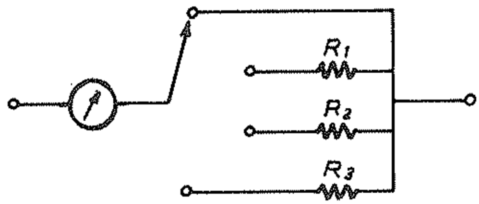
$$R_2 = \frac{0{\cdot}02}{99 \times 10^{-3}} = 0{\cdot}202\Omega$$

جـ– وبالطريقة نفسها حينما يقاس تيار مقداره 1 امبير فإن

$$R_3 = \frac{0{\cdot}02}{0{\cdot}999} = 0{\cdot}02002\Omega$$

مثال 2.8

للكلفانوميتر في المثال السابق . احسب قيم المقاومات R_1 وR_2 وR_3 المبينة في الشكل 2.20 لكي يستخدم كفولتميتر لقياس 20 mV الىٰ V / و 100 V و 500 V .



الشكل 2.20 مقياس للفولتية بثلاث مديات

الحل :

لحصول أقصى تأشير على جهاز القياس فإن التيار الذي يجب ان يمر في الكلفانوميتر يساوي

$$\frac{20 \times 10^{-3}}{20} = 1\text{mA}$$

أ- يراد ربط مقاوم R_1 على التوالي مع مقاومة الكلفانوميتر التي هي 20Ω لكي تكون الفولتية الكلية 1V . والفولتية عبر الكلفانوميتر لوحدة $1 \times 20\text{ mA} = 20\text{m V}$ ، لذا فإن الفولتية عبر المقاومة R_1 تساوي 0.98V وتكون قيمتها عند مرور 1mA :

$$R_1 = \frac{0{\cdot}98}{1 \times 10^{-3}} = 980\Omega$$

ب- حينما يراد زيادة المدى الى 100 V ، فإن 99.98 فولت ستسلط على المقاوم R_2 ، وتسلط 0.02V الباقية على الكلفانوميتر. لذا فإن قيمة المقاومة R_2 عند مرور 1 ملي امبير.

$$R_2 = \frac{99{\cdot}98}{1 \times 10^{-3}} = 99980\Omega$$

جـ – وبالطريقة نفسها يمكن حساب R_3 ، حيث

$$R_3 = \frac{499{\cdot}98}{1 \times 10^{-3}} = 499980\Omega$$

مثال 2.9 لمقياس الكلفانوميتر السابق يُطلب إيجاد المقاومات التي تربط معه على التوالي لكي يصلح لقياس مقاومات بمدى $10\ \Omega$ و $100\ \Omega$ و $1000\ \Omega$ مع العلم أن مصدر الفولتية هو نضيدة $1.5V$.

الحل : لكي يمر 1 ملي أمبير في الكلفانوميتر من نضيدة مقدارها $1.5V$ يجب أن تكون مقاومة الدائرة الكلية :

$$\frac{1{\cdot}5}{1 \times 10^{-3}} = 1500\Omega$$

وحيث أن مقاومة الدائرة الكلية تتألف من مقاومة الكلفانوميتر $20\ \Omega$ ومقاومة جهاز الأوميتر والمقاومة الخارجية المراد قياسها كلها مربوطة على التوالي لذلك فإنه في مدي $10\ \Omega$ ستكون المقاومة الداخلية للأوميتر هي :

$$1500 - (20 + 10) = 1470\ \Omega$$

وفي مدى 100 ستكون :

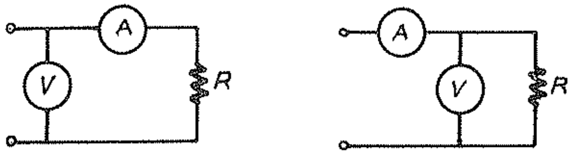
$$1500 - (20 + 100) = 1380\ \Omega$$

وفي مدى 1000 ستكون :

$$1500 - (20 + 1000) = 480\ \Omega$$

2.7.3 قياس المقاومة

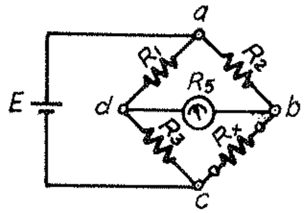
حيث ان المقاومة هي حاصل قسمة الفولتية على التيار، لذا فإن قياسها في ابسط صورة لايتعدى قياس الفولتية والتيار وقسمة الاول على الثاني . ويمكن أن يتم باستخدام دائرة واحدة كالمبينة في الشكل 2.21 أ.



الشكل 2.21 طريقتا ربط المقاييس لايجاد المقاومة R

اذا كان كل من الفولتميتر والاميتر مثاليين (مقاومة الاميتر تساوي صفرا ومقاومة الفولتميتر تساوي مالانهاية فليس هناك اي خطأ في قيمة المقاومة المحسوبة بقسمة قراءة الفولتميتر على قراءة الاميتر. اما من الناحية العملية فليس هناك اميتر ذا مقاومة تساوي صفراً ولافولتميتر ذا مقاومة تساوي مالانهاية ، كما مر بنا في الفقرة 2.7.2 . لذلك فانه لابد وان يحدث خطا في حساب المقاومة نتيجة استخدام اميتر وفولتميتر عمليين.

مما سبق يتبين ان استخدام الاميتر والفولتميتر لقياس المقاومة لايخلو من خطأ نتيجةوجود مقاومة داخلية لكل منها ، لذلك برزت طرق اخرى لقياس المقاومات لغرض تجنب تاثير المقاومات الداخلية لاجهزة القياس على دقة حساب المقاومة المراد قياسها . احدى هذه الطرق هي طريقة قنطرة ويتستون Wheatstone Bridge وهي مبينة في الشكل 2.22 حيث ان التيار الذي يمر في المقاومة R_5 صفرا . فاذا كانت المقاومة R_5 تمثل جهاز قياس حساس يؤثر عند مرور اي تيار فيه كجهاز الكلفانوميتر او الميكروأميتر ، فانه عند تغيير اي من المقاومات الاربعة R_1 و R_2 و R_3 و R_4 يحدث اختلال في الدائرة يؤدي الى مرور مثل هذا التيار. لقد اتضح ان سبب عدم مرور تيار في المقاومة R_5 ، هو ان الفولتية عبر R_1 تساوي الفولتية عبر R_2 وكذلك الفولتية عبر R_3 تساوي الفولتية عبر R_4 . فاذا فرضنا ان التيار في R_1 هو I_1 وهو التيار في R_3 نفسه والتيار في R_2 هو I_2 وهو التيار في R_4 نفسه كما موضح في الشكل 2.22



الشكل 2.22 قنطرة ويتستون

في حالة قراءة الكلفانوميتر تاشيراً يساوي صفراً (يقال عن القنطرة انها متزنة) في هذه الحالة.

$$R_1I_1 = R_2I_2 \qquad (2.33)$$

$$R_3I_1 = R_4I_2$$

وبقسمة المعادلة (2.33) على (2.34) واختزال التيارات نجد (2.35)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \qquad \text{... (2.35)}$$

فاذا علمت اقيام ثلاث من المقاومات أمكن حساب المقاومة الرابعة بهذه العلاقة البسيطة، والتي لاتتاثر باية مقاومة داخلية لاجهزة القياس. وتجدر الاشارة أخيراً الى ان الخطأ الوحيد في هذا الاسلوب من اساليب قياس المقاومة هو في دقة قيم المقاومات المعلومة. فاذا كانت اقيامها مضبوطة، كانت النتيجة صحيحة، اما اذا كانت اقيامها تقريبية فربما يتضاعف الخطأ نتيجة تطبيق العلاقة (2.35)

2.8 الخطأ في أجهزة القياس :

تتوفر في المختبرات والمعامل أجهزة قياس مختلفة ومن الضروري عند إجراء أي قياس اختيار: الجهاز المناسب للحصول على الدقة المطلوبة وفي الوقت نفسه المحافظة على سلامة

جهاز القياس من العطب ويعتمد ذلك بشكل رئيسي على قيمة المقاومة الداخلية لجهاز القياس بالمقارنة مع مقاومة الدائرة الخارجية التي سيربط معها.

لأن جهاز القياس بعد ربطه سيكون جزءاً من الدائرة الكلية وبذلك سيضيف لها مقاومة جديدة (مقاومته الداخلية) لم تكن في الحسبان أصلاً. فإذا كانت قيمة تلك المقاومة تغير من قيمة التيار أو الفولتية في الدائرة الأصلية فإن خطأً سيظهر في القيمة المطلوب قياسها.

اذا امعنا النظر في الشكل 2.21 أ ، نجد ان الاميتر يقرأ التيار الذي يمر في المقاومة مضافا اليها التيار القليل الذي يمر في الفولتميتر. لذا فقراءة الاميتر في هذه الحالة تكون غير دقيقة. اما الفولتميتر فيقرأ الفولتية عبر المقاومة بشكل دقيق وعلى العكس من ذلك ففي الشكل 2.21 ب يقرأ الاميتر التيار الذي يمر في المقاومة بشكل دقيق ، بينما قراءة الفولتميتر غير دقيقة لانها تساوي مجموع الفولتية عبر المقاومة والفولتية عبر الاميتر مهما كانت صغيرة.

اذا كانت المقاومة المراد قياسها صغيرة ، فان مقاومتها ربما تكون ذات قيمة متقاربة مع مقاومة الاميتر المربوط معها على التوالي في الشكل 2.21 ب. لذلك فان قراءة الفولتميتر تحوي خطأ كبيرا اذا كانت المقاومة المراد قياسها صغيرة في هذا الربط ولهذا فمن الافضل استخدام هذا الربط فقط في حالات المقاومة الكبيرة. وعلى العكس من ذلك في الشكل 2.21 أ اذا كانت المقاومة المراد قياسها كبيرة جدا فان التيار الذي تسحبه يكون صغيرا وربما يكون مقارباً للتيار الذي يسحبه الفولتميتر ، لذلك فان قراءة الاميتر في هذه الحالة تكون دقيقة ، لذا يجب تجنب هذا الربط في حالات قياس مقاومة كبيرة واستخدامه فقط في قياس المقاومات الصغيرة.

مثال 2.10 :

في الدائرة المبينة في الشكل 2.23 يراد قياس قيمة التيار والفولتية ومقارنتها مع قراءتي الأميتر والفولتميتر المبينتين في الدائرتين ب و ج على فرض أن مقاومة الأميتر تساوي 10 أوم.

الحل :

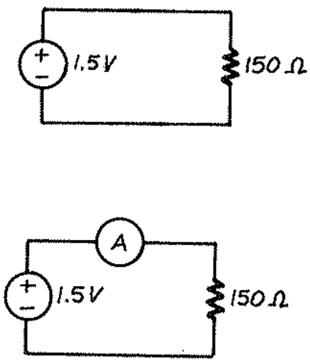
(أ) التيار الحقيقي بدون ربط الأميتر $10mA = \frac{1\cdot5}{150}$

(ب) التيار بعد ربط الأميتر (القراءة الظاهرية للتيار)

$$\frac{1\cdot5}{150 + 10} = 9\cdot375 \text{ mA}$$

نسبة الخطأ

$$\frac{10 - 9\cdot375}{10} \times 100 = 6\cdot25 \%$$



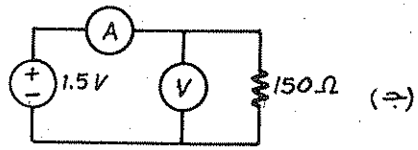
(أ)

(ب)

الشكل 2.23 أ و ب

(ج) وإذا ماتم ربط فولتميتر (مقاومته الداخلية تساوي 1500Ω) كما في الشكل ج فإن مقاومة الحمل مع الفولتميتر على التوازي ستكون

$$\frac{1500 \times 150}{1500 + 150} = 136\cdot36\Omega$$



الشكل 2.23 حـ

والتي ستكون على التوالي مع مقاومة الأميتر البالغة 10Ω . أي أن التيار الكلي الذي سيمرره الأميتر سيكون :

$$I = \frac{1{\cdot}5}{136{\cdot}3 + 10} = 10{\cdot}25\text{mA}$$

أما الفولتية التي سيقرأها الفولتميتر فستكون :

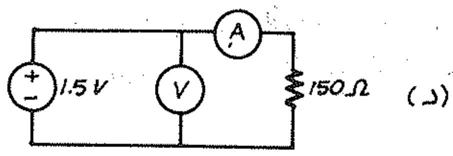
$$V = 1{\cdot}5 \times \frac{136{\cdot}36}{136{\cdot}36 + 10} = 1{\cdot}3975\text{V}$$

وهكذا يتضح أن نسبة الخطأ في قياس التيار قد أصبح :

$$\frac{10{\cdot}25 - 10}{10} \times 100\ \% = 2{\cdot}5\ \%$$

وفي قياس الفولتية :

$$\frac{1{\cdot}5 - 1{\cdot}3975}{1{\cdot}5} \times 100\ \% = 6{\cdot}8\ \%$$



الشكل 2.23 د

(د) أما إذا تم الربط وفق الدائرة د فإن الفولتميتر سيشير الى قراءة 1.5V وهي فولتية المصدر وليس الفولتية عبر المقاومةالمطلوبة أما الأميتر فسيقرأ القراءة الحقيقية للتيار المار فيها وهو نفس التيار المحسوب في ب أعلاه.

وستكون الفولتية الحقيقية عبر المقاومة 150Ω تساوي :

$$V = 150 \times 9.375mA = 1.40625\ V.$$

أي أن نسبة الخطأ في قراءة الفولتميتر ستكون :

$$\frac{1{\cdot}5 - 1{\cdot}40625}{1{\cdot}5} \times 100 = 6{\cdot}25\ \%$$

(هـ) ولو كان المطلوب قياس المقاومة (أي أن المقاومة 150Ω هي مقاومة مجهولة) من خلال قسمة الفولتية التي يقيسها الفولتميتر على التيار الذي يقيسه الأميتر فستكون قيمة المقاومة المحسوبة وفق الربط ج

$$R = \frac{1{\cdot}3975}{10{\cdot}25mA} = 136{\cdot}34\Omega$$

أما وفق الربط د فستكون القيمة المحسوبة :

$$R = \frac{1{\cdot}5}{9{\cdot}375mA} = 160\Omega$$

ويلاحظ وجود خطأ محسوس في كلا الطريقتين ويعود السبب الى أن مقاومة الأميتر والفولتميتر كلاهما كانتا محسوستين بالنسبة الى المقاومة المراد قياسها.

لذلك يجب عند قياس مثل هذه المقاومة إختيار أميتر ذي مقاومة أقل بكثير منها.

2.9 قياس القدرة

يمر بنا اصطلاح القدرة في موقعين متميزين : الاولل هو القدرة المجهرية والتي تصاحب المصادر الكهربائية. اما الموقع الثاني فهو بشكل القدرة الممتصة او المستهلكة او المفقودة في المقاومات ، سواء أكانت مقاومات حقيقية او مقاومات داخل المصادر. وقد تمتص بعض المصادر كالبطاريات السائلة قدرة وتحولها الى طاقة كيمياوية كامنة بامكانها اعادة تجهيزها عند الحاجة.

تقاس القدرة بحاصل ضرب التيار والفولتية بصورة عامة . وحيث ان الفولتية والتيار مرتبطين بقانون اوم ، لذا فانه بالامكان استخدام اي من العلاقات الثلاثة :

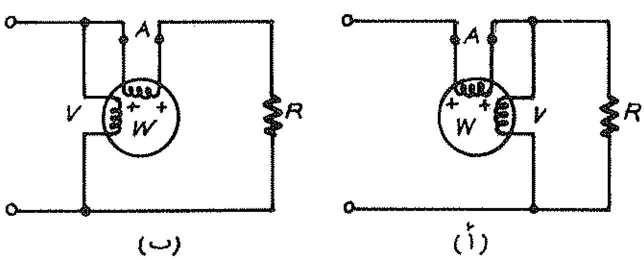
$$P = VI = I^2R = V^2/R \qquad (2.36)$$

ولكن من الضروري اتخاذ الحيطة والحذر في استخدام العلاقة الاخيرة ، حيث يجب التاكد من ان الفولتية المستخدمة هي فقط الفولتية عبر المقاومة المراد قياس القدرة المستهلكة فيها ، ولا يجوز استخدام اي فولتية اخرى .

وتجدر الاشارة الى انه في دائرة معينة يجبب ان يكون مجموع القدرة المستهلكة مساويا لمجموع القدرة المجهزة .

يمكن قياس القدرة عملياً باستخدام جهاز واحد هو جهاز الواطميتر Wattmeter الذي يحوي بداخله على ملفين لكل منها نهايتان . احدهما هو ملف التيار والاخر هو ملف الفولتية .

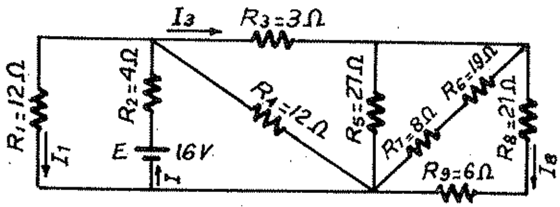
ولايقوم الواطميتر الا بضرب هاتين القيمتين وتاشير حاصل ضربها بتركيب كهرومغناطيسي خاص ، لذلك يمكن اعتبار الواطميتر انه عبارة عن فولتميتر واميتر بوقت واحد . وقد مرينا استخدام هذين المقياسين معا عند قياس المقاومة في الفقرة 2.7.3 والتي يتبين منها ان هناك طريقتان للربط كما مرفي الشكل 2.21 ويشبه ذلك ربط الواطميتر المبين في الشكل 2.24 ، حيث يستخدم الربط 2.24 أ لقياس القدرة في المقاومات ذات القيم الصغيرة . اما الربط 2.24 ب فيستخدم لقياس القدرة في المقاومات ذات القيم الكبيرة .



الشكل 2.24 طريقتا ربط جهاز الواطميتر

مثال (2.12):

لدائرة الشكل 2.25 والمتكونة من عدد من المقاومات المربوطة على التوالي والتوازي مع مصدر تيار مستمر. اوجد (أ) التيار I كما مؤشر (ب) كذلك التيارات I_8, I_3, I_1 . (ج) القدرة المبددة في المقاومة $21\ \Omega$ والقدرة المجهزة من المصدر.



الشكل 2.25

الحل:

نبدأ بدمج المقاومات من الجهة اليمنى حيث المقاومات 6و 21 اوم على التوالي مجموعها 27 اوم وكذلك المقاومات 19 و 8 اوم على التوالي مجموعها 27 اوم وهي على التوازي مع المقاومة الثالثة 27 اوم لذا فان دمجها يؤول الى:

$$\frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{R}$$

$$R_1 = 9$$

وهذه المقاومة على التوالي مع المقاومة $3\ \Omega$ فيكون مجموعها:

$$R_2 = 9 + 3 + 12$$

وهذه على التوازي مع مثيلتها 12 اوم وان مجموعها يكون

$$R_3 = \frac{12 \times 12}{12 + 12} = 6$$

واخيرا تكون هذه المقاومة على التوازي مع المقاومة على يسار المصدر 12 ويكون مجموعها.

$$R_4 = \frac{6 \times 12}{6 + 12} = 4$$

ويكون دمجها مع المقاومة 4 اوم يساوي 8 اوم وعليه فان التيار I يساوي :

$$I = 16/8 = 2A$$

وبموجب توزيع التيار بين المقاومتين 12 اوم R_3 المربوطتين على التوازي يصبح I_1 يساوي :

$$I_1 = 2 \times \frac{6}{12 + 6} = \frac{2}{3} A$$

وتيار المقاومة R_4 يكون :

$$I_4 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3} A$$

والفولتية بين النقطتين المؤشرتين على الشكل A و B هي :

$$V_{AB} = \frac{4}{3} \times 6 = 8V$$

$$I_1 = I_3 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{3} A$$

يقسم الى ثلاثة اقسام متساوية وعليه فان :

$$I_8 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9} A$$

وتكون القدرة المبددة في المقاوم 21 اوم.

$$P_{21} = I^2R \left(\frac{2}{9} \right)^2 \times 21 = \frac{12}{27} \text{ Watt}$$

والقدرة المجهزة في المصدر

$$P = IV = 2 \times 16 = 32 \text{ Watt}$$

مثال (2.13) :

في المثال السابق 2.10 [راجع الصفحة 66 الفقرة 2.8] احسب القدرة المجهزة التي يقيسها جهاز الواطميتر اذا ما تم ربطه بكلا الطريقتين المبينتين في الشكل على اعتبار ان مقاومتي ملف التيار والفولتية مساويتين لمقاومتي الاميتر والفولتميتر في المثال (2.10).

الحل:

للربط ج ستكون قيمة القدرة التي يقيسها الواطميتر:

$$P_1 = 1.3975 \times 10.25 \times 10^{-3} = 0.0141 \text{ W}$$

اما للربط د فستكون قيمة القدرة :

$$P = 1.5 \times 9.375 \times 10^{-3} = 0.0141 \text{ W}$$

حيث ان قراءة التيار ستكون القيمة الحقيقية للتيار الذي يمر في المقاومة كما موضح في الربط ب ان القيمة الحقيقة للقدرة المستهلكة بدون واطميتر فستكون :

$$P = 1.5 \times 10 \times 10^{-3} = 0.015 \text{ W}$$

البرنامج الأول : قانون أوم وحساب القدرة

يقوم هذا البرنامج بإختيار إثنين من الكميات P.R.I.V وإظهار هاتين القيمتين على الشاشة . ثم يطلب البرنامج من الطالب حساب القيمتين الاخريتين وإدخالها بواسطة لوحة المفاتيح . فإن كان الجواب صحيحاً إنتهى البرنامج وإن كان خاطئاً أعاد طلب القيم الصحيحة .

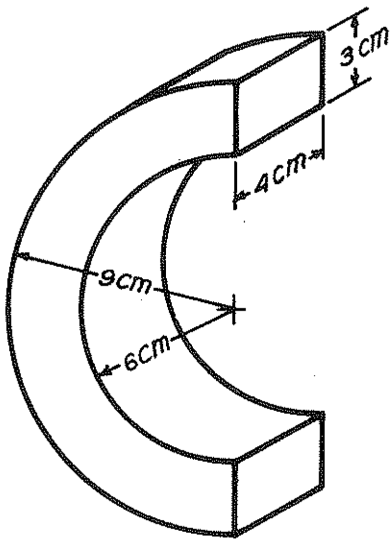
```
10 CLS
20 LOCATE 1,25:PRINT"BISMILLAHI ARRAHMAN ARRAHIM"
30 LOCATE 3,25:PRINT"OHMS LAW AND POWER CALCULATIONS"
40 LOCATE 4,25:PRINT"==============================="
50 READ A$,B$,C$
50 DATA"OHMS LAW STATES THAT THE RATIO OF THE VOLTAGE TO THE CURRENT IS CONSTANT
 AND IS EQUAL TO THE RESISTANCE"
70 DATA "IT IS POSSIBLE TO PUT IT IN ONE OF THE FOLLOWING THREE FORMS:
            V = I * R     or     I = V / R     or    R = V / I"
80 DATA "POWER CONSUMED IS GIVEN BY ONE OF THE FOLLOWING :
            P = I * V     or     P = I ^ 2 * R      or    P = V ^ 2 / R"
90 LOCATE 7,5:PRINT A$
100 LOCATE 12,5:PRINT B$
110 A=1:B=100:GOSUB 440:I=X
120 A=1:B=1000:GOSUB 440:R=X
130 A=1:B=5:GOSUB 440:K=X
140 V=I*R:P=I*V
150 ON K GOTO  160,220,280,340
160 PRINT "CURRENT = ";I;"AMPERE           RESISTANCE=";R;"OHM"
170 PRINT"WHAT IS THE VOLTAGE":INPUT V1
180 IF V1><V THEN  400
190 PRINT "CORRECT. WHAT IS THE VALUE OF POWER":INPUT P1
200 IF P1><P THEN 400
210 GOTO 410
220 PRINT "VOLTAGE = ";V;"VOLT        RESISTANCE = ";R;"OHM"
230 PRINT"WHAT IS THE CURRENT":INPUT I1
240 IF I1><I THEN  400
250 PRINT "CORRECT. WHAT IS THE VALUE OF POWER":INPUT P1
260 IF P1><P THEN 400
270 GOTO 410
280 PRINT "POWER = ";P;"WATT       RESISTANCE = ";R;"OHM"
290 PRINT"WHAT IS THE VOLTAGE":INPUT V1
300 IF V1><V THEN  400
310 PRINT "CORRECT. WHAT IS THE VALUE OF CURRENT":INPUT I1
320 IF I1><I THEN 400
330 GOTO 410
```

```
340 PRINT "POWER = ";P;"WATT        CURRENT = ";I;"AMPERE"
350 PRINT"WHAT IS THE VOLTAGE":INPUT V1
360 IF V1><V THEN  400
370 PRINT "CORRECT. WHAT IS THE VALUE OF RESISTANCE":INPUT R1
380 IF R1><R THEN 400
390 GOTO 410
400 PRINT" SORRY YOU GAVE THE WRONG ANSWER. TRY AGAIN":GOTO 150
410 PRINT"CORRECT"
420 PRINT "ASSALAMU ALAIKUM"
430 END
440 REM : Random generator
450 RANDOMIZE TIMER
460 C=RND
470 X=(B-A)*C
480 X=INT(X)
490 RETURN
```

مسائل الفصل الثاني

1 – نصف حلقة نحاسية كالمبينة في الشكل 2.26 شكلها نصف دائري ونصف قطرها الداخلي 6 سم وسمكها القطري 3 سم وسمكها المحوري 4 سم. اوجد مقاومة نصف الحلقة في درجة حرارة 50^o مئوية بين اوجه النهايات ، مفترضا مقاومية النحاس في $20°C$ هي 1.724×10^{-6} اوم. سم ومعامل درجة الحرارة لمقاومة النحاس في $0°$ درجة مئوية هو 0.0043 لكل درجة مئوية.

الجواب $3{\cdot}75 \times 10^{-6}\Omega$



الشكل 2.26 توضيح المسألة 1

2 – مقاومة مصنوعة من سلك قطره 0.2 mm ومن مادة الكونستانتان ملفوف على اسطوانة قطرها 1 cm . كم هو عدد اللفات اللازمة لكي تصبح مقاومة السلك $50\ \Omega$ في درجة الحرارة 20^oC.

(الجواب : 102 لفة)

3 – سلك نحاسي طوله 20 cm ومساحة مقطعه 4 mm.

أ – احسب مقاومة هذا السلك في درجة حرارة $20\ ^{o}C$ اذا علمت أن مقاومية النحاس في هذه الدرجة تساوي $1.72 \times 10^{-8}\ \Omega.m$.

ب – كم تصبح مقاومة السلك إذا سخن الى درجة $80^{o}C$ علماً بأن المعامل الحراري لمقاومة النحاس هو $0.0039^{o}C^{-1}$ (لكل درجة مئوية)

(الجواب : أ: $0.086\ \Omega$ ، ب : $10.65 \times 10^{-2}\ \Omega$ مع إهمال الزيادة في الطول بسبب الحرارة)

4 – إذا كانت مقاومة سلك نحاسي $5.7\ \Omega$ إحسب مقاومة سلك من الألمنيوم طوله ضعف طول السلك النحاسي وقطره ثلاث مرات أكثر. علماً أن النسبة بين مقاومية الألمنيوم والنحاس هي 1.7.

(الجواب $2.15\ \Omega$)

5 – قطعة من النحاس حجمها 2 cm فإذا جعل منها سلك ذو مقطع دائري منتظم مقاومته $2\ \Omega$. إحسب أبعاد هذا السلك ، علماً بأن مقاومية النحاس هي $1.7 \times 10^{-8} \Omega.m$

(الجواب $15.3 m \times 4.08 \times 10^{-4} m$)

6 – سلكان أحدهما مصنوع من النحاس والآخر من النيكل. فإذا كانت مقاومة الأول 12.7Ω والثاني $11.6\ \Omega$ في درجة الحرارة الإعتيادية $20^{o}C$. فعند أية درجة حرارة تتساوى مقاومتاهما ؟ علماً بأن المعامل الحراري للنحاس 0.0039 لكل درجة مئوية وللنيكل 0.006 لكل درجة مئوية.

(الجواب : $75^{o}C$).

7 – إحسب النسبة المئوية للزيادة الحاصلة في كل من (أ) المقاومية ، (ب) الطول ، (ج) مساحة المقطع. لسلك نحاسي عند إرتفاع درجة الحرارة بمقدار درجة مئوية واحدة. إذا علمت أن معامل التمدد الطولي للنحاس $1.7 \times 10^{-5}\ C^{-1}$ ماذا تستخلص من النتائج التي تحصل عليها؟ هل تجد أنه من الضروري عملياً الإهتمام بالتغيير الحاصل في طول السلك ومساحة المقطع بسبب الزيادة في الحرارة لغرض حساب قيمة المقاومة؟

(الجواب : 0.0034%, 0.0017% , 0.39 % نسبة قليلة)

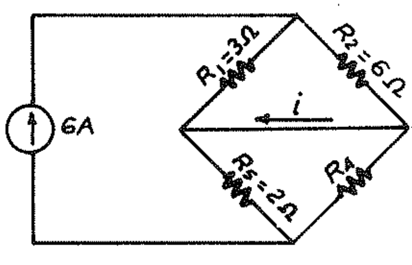
8- قيمة مقاومة الكيبل الذي يوصل جهاز التلفزيون بالهوائي 10 أوم لكل مائة متر طول . إذا علمت أن طول الكيبل 20 m ما قيمة توصيليته؟
(الجواب : 0.5 S)

9- سلط فرق جهد مقداره 250v على ملف مجال نحاسي في درجة حرارة 15^{o} مئوية ، وكان التيار 5.A . كم سيكون معدل درجة حرارة الملف ، اذا هبط التيار الى 3.91A والفولتية المسلطة بقيت نفسها؟
الجواب : $85^{o}C$

10- معدنان A و B معاملا درجة حرارتيها 0.004 و 0.0004 على التعاقب بدرجة حرارة معينة . بأي نسبة يجب ايصال A و B على التوالي لتكوين دائرة لها معامل درجة حرارة مقداره 0.001؟
الجواب $A : B = 1 : 5$

11- سلك توصيليته 2.5 سيمنس وسلك آخر من نفس المادة إلا أن قطره يساوي ربع قطر السلك الأول وطوله يساوي الضعف وعند نفس درجة الحرارة . أوجد مقدار توصيلية السلك الثاني .
(الجواب : 78.15 S)

12- في درجة حرارة الصفر المئوي قيمة التيار $i = 0A$ كما موضح في دائرة الشكل (2.27) مفترضاً بأن المقاومات R_3, R_2, R_1 لا تتغير بالحرارة وأن المعامل الحراري للمقاومة R_4 هو $\alpha = 0.0075^{o}C^{-1}$ في اي درجة يصبح التيار $i = 0.4\ A$؟
(الجواب : $50^{o}\ C$)



الشكل 2.27

13 – الجدول التالي يبين النتائج المختبرية لقياس التيار والفولتية لمصباح حيث :
الفولتية v بالفولت 250 , 200 , 150 , 100
التيار I بالأمبير 0.4 ,0.28 , 0.19 ,0.12
ارسم منحني يبين العلاقة بين الفولتية والتيار ثم احسب قيمة المقاومة عند قراءته وعلق على النتائج وماذا نسمي مثل هذه المقاومة ؟
(الجواب Ω 833.3 , Ω 789.5, Ω 714.3’Ω 625 المقاومة غير خطية)

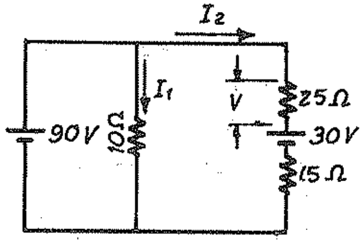
14 – مقاوم غير خطي علاقة الفولتية والتيار لهذا المقاوم بموجب المعادلة : $v = 2I^2 + 3I + 10$
اوجد قيمة التيار اذا كانت الفولتية المسلطة على المقاوم 77v
(الجواب : 5.5A)

15 . مصباح إنارة لِمزْوَلَة جهاز المذياع يعمل بفولتية 3V وتياره 300 mA فإذا كانت الفولتية التي يعمل بها المذياع 120V
إحسب قيمة المقاومة اللازم ربطها على التوالي مع المصباح لكي يعمل ضمن تقنينه المحدد بالفولتية والتيار المناسبين.
(الجواب : Ω 390)

16 . يُراد تحويل جهاز المذياع الذي يعمل بفولتية مقدارها 6V وتيار 3.33 A الى سيارة أخرى فولتية نضيدتها 12V ، إحسب المقاومة الواجب ربطها على التوالي لكي يعمل المذياع بنفس تقنيني الفولتية والتيار.
(الجواب : Ω 1.8)

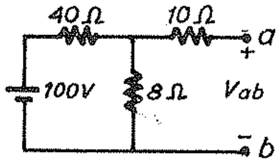
17 . ثلاث مقاومات R_1, R_2, R_3 ربطت على التوالي مع مصدر 100 V . قيمة الفولتية عبر R_1, R_2 هي 50V وعبر R_2, R_3 هي 80V . أوجد قيم كل مقاومة على إنفراد علماً بأن مجموع أقيامها 50 Ω .
(الجواب : 10 Ω , 15 Ω , 25 Ω على التعاقب)

18 . أوجد قيم التيار والفولتية V المؤشرة في الشكل 2.28
(الجواب : $V = 67.5V, I_2 = 105A, I = 9A$)



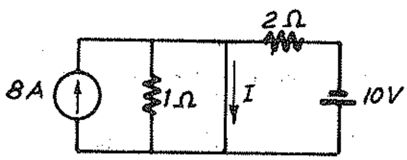
الشكل 2.28

19. أوجد قيمة الفولتية Vab في دائرة الشكل 2.29
(الجواب : 60V)



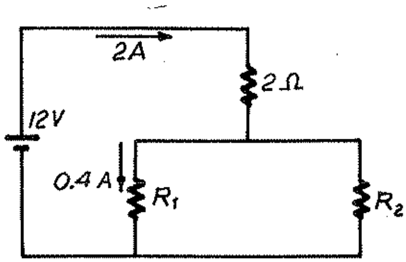
الشكل 2.29

20. أوجد قيمة التيار I المؤشر في دائرة الشكل 2.30
(الجواب : 3A)



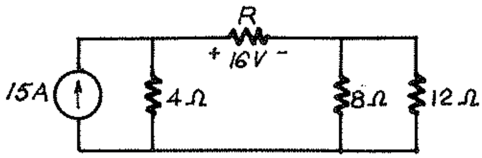
الشكل 2.30

21 . أوجد قيم R_1, R_2 من المعلومات المبنية في دائرة الشكل 2.3
(الجواب : $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$)



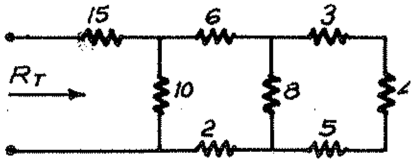
الشكل 2.31

22 . ماذا يجب أن تكون قيمة المقاومة R في الدائرة المبنية في الشكل 2.32
(الجواب : $3.27\ \Omega$)



الشكل 2.32

23 . أوجد المقاومة الكلية R_T للدائرة المبنية في الشكل 2.33
(الجواب : $26.6\ \Omega$)



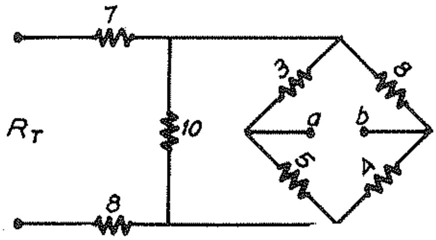
الشكل 2.33

24 . في الشكل 2.34 أوجد المقاومة الكلية R_T عندما :

آ. النهايات b,a مفتوحة .

ب . النهايات b,a مربوطة بدائرة قصر.

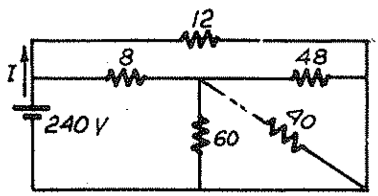
(الجواب (آ) $18.2\ \Omega$ (ب) $18.1\ \Omega$)



الشكل 2. 34

25 . أوجد تيار الدائرة الكلي المبين في الشكل 2.35

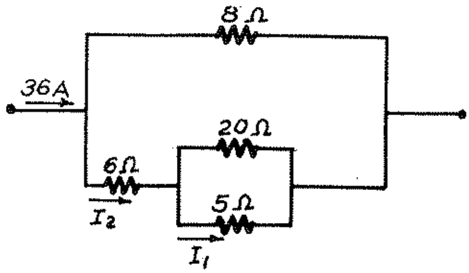
(الجواب : 30A)



الشكل 2.35

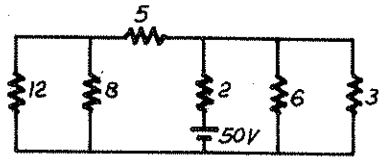
26 . باستخدام قاعدة تقسيم التيار مرتين ، أوجد قيمة I_1 في الدائرة المبنية في الشكل 2.

36. (الجواب : 12.8A)



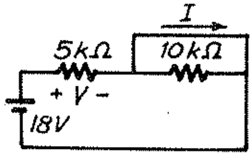
الشكل 2.36

27 . إحسب التيار الذي يخرج من المصدر 50V في الدائرة المبنية في الشكل 2.37
(الجواب : 13. 7A)



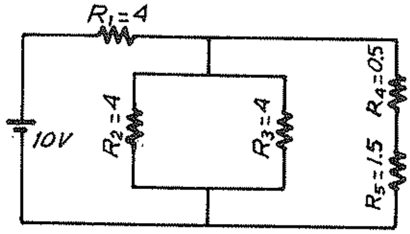
الشكل 2. 37

28 . أحسب قيمة التيار I وكذلك الفولتية V للدائرة المبنية في الشكل 2.38
(الجواب : 18,3.6 mA)



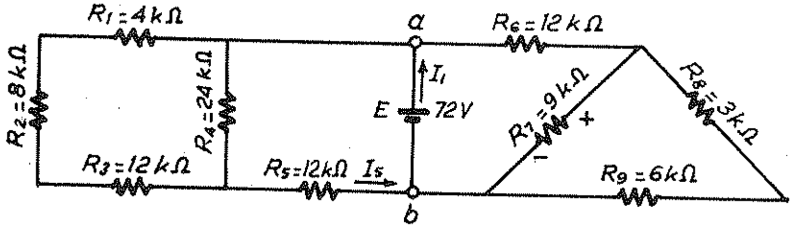
الشكل 2. 38

29 . للدائرة المبنية في الشكل 2.39 أوجد التيارات في كل مقاومة .
(الجواب : 2, 0.5,0.5,2 أمبير على التعاقب)



الشكل 2.39

30 . للدائرة المبنية في الشكل 2.40 أوجد التيار I_T للبطارية .
(الجواب : 7.36A)



الشكل 2.40

31 . أوجد قيم المقاومات اللازمة لتحويل الكلفانومتر الذي مقاومته 50 Ω وتيار ملفه 1mA الى أميتر يقرأ تدريجه 100A, 10A, 1A وبعدها الى فولتميتر يقرأ تدريجه 100V, 50V, 10V .
(الجواب : (0.0005,0.005, 0.05Ω) (99950, 49950, 9950Ω))

32. كلفانومتر ذو ملف متحرك (دي أرسنفال) مقاومة ملفة Ω 50 وتيار الانحراف الكلي μA 500 إحسب (آ) مقاومة المجزئ اللازم لتحوير هذا الكلفانوميتر الى أميتر يقرأ تدريجه من الصفر الى خمسة أمبيرات (ب) كذلك المقاومة اللازمة ليقرأ تدريجه 50 أمبير.

(الجواب : $0.001\,\Omega$, $0.05\,\Omega$)

33. إحسب المقاومات الواجب إضافتها الى ملف الكلفانوميتر الذي مقاومة ملفة Ω 50 وتيار إنحرافه الكلي1mA لكي يقرأ 0.1A و 0.5A و 1.0A على التعاقب.

(الجواب : 0.50505، 0.1002، 0.005005)

34 احسب مقاومة المضاعف اللازم لتحوير الكلفانوميتر الذي مقاومة ملفه Ω 50 وتيار انحرافه الكلي μA 500 الى فولتميتر الصفر الى 50V.

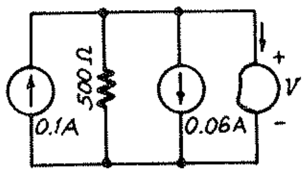
(الجواب : Ω 99950)

35. احسب قيم المضاعفات اللازمة لتحوير كلفانوميتر مقاومة ملفه $1.5k\ \Omega$ وتيار انحرافه الكلي μA 50 الى فولتميتر متعدد المديات يتكون من أربعة تدريجات ,100V, 50V 10V, 5V

(الجواب : 1999.9985, 999.9985, 199.9985, 99.9985

36. أوجد ا و V والقدرة الممتصة من قبل عنصر الدائرة المجهول في الشكل 2.41، اذا كان المصدر 0.1A يجهز (أ) 1W (ب) 3W

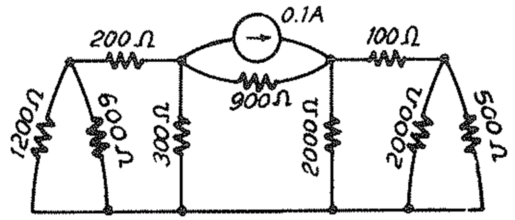
«الجواب −0.6W ، و 0.02A − و 30V (b) و 0.2W و 0.02A و 10 α »



الشكل 2.41 دائرة المسالة 36

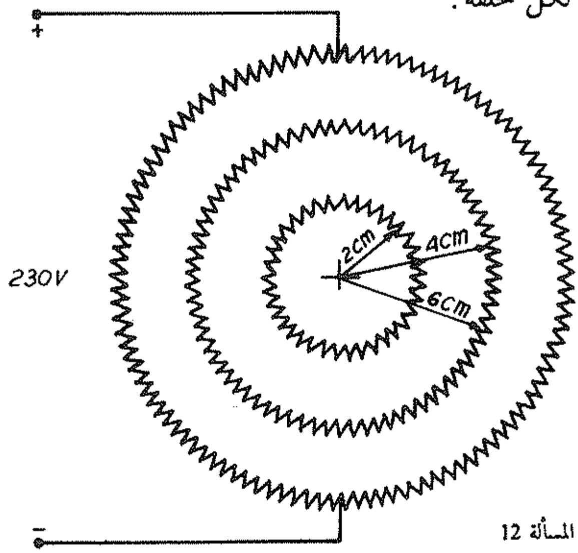
37– بدمج المقاومات في دائرة الشكل 2.42 ، اوجد القدرة المجهزة من قبل المصدر وكذلك القدرة الممتصة من قبل المقاوم 900Ω

الجواب 1.44W ، 3.6)



الشكل 2.42 دائرة المسألة 37

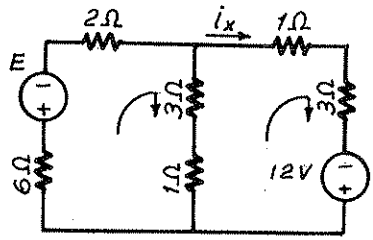
38– افرض ان عنصر التسخين لسخان كهربائي يتكون من ثلاثة دوائر مركزية . انصاف اقطارها 2 و 4 و 6 سم . افرض كذلك باننا ربطنا مصدر تيار مستمر مثالي ذا 230V على النقاط المتقابلة قطريا لكل حلقة كما مبين في الشكل 2.43 . يطلب تزويد قدرة مقدارها 10 واط لكل سنتمتر طول لكل حلقة . اوجد تيار المصدر الكلي والمقاومة لوحدة الطول لكل حلقة .



الشكل 2.43 دائرة المسألة 12

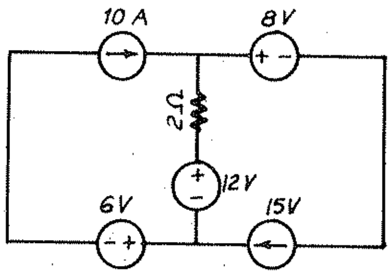
الجواب 3.28A الداخلي 134 cm الوسطي 14.9 /cm 33.5 الخارجي 14·9 Ω/cm

39 – في دائرة الشكل 2.44 اذا كانت القدرة المفقودة في المقاوم 1 اوم ، تساوي 2.25 واط . ماقيمة فولتية المصدر E .
(الجواب 6V)



الشكل 2.44 دائرة المسألة 39

40 – أوجد القدرة المتصة من قبل كل عنصر في دائرة الشكل (2.45) كيف ستتغير النتائج إذا جعلت المقاومة Ω 2 صفراً .
(الجواب : 80W– ، 120 ، 90–)



الشكل 2.45

41– اوجد قيمة القدرة في مصادر دائرة المسألة 18 السابق .
(الجواب : $-45W, q45W$)
42– أوجد قيمة القدرة المجهزة من مصدر التيار في دائرة المسألة 20 .
(الجواب : صفر)
43– مشغل سيارة (ستارتر) عبارة عن محرك قدرة نصف حصان كفاءة المحرك 85 بالمائة ويتغذى المحرك من نضيدة السيارة التي فولتيتها 12V . ماقيمة المقاومة الداخلية للنضيدة إذا كانت فولتية النهايات للنضيدة 10.5V عند بدء تشغيل السيارة .
(الجواب : $0.036\ \Omega$)
44– نضيدة سيارة 12V تجهز 0.5A لمدة 100 ساعة . إحسب المدة التي تعمل بها النضيدة فيما لو ربطت على حمل يستهلك 30mV .
(الجواب : 2000 ساعة)

45– دار تحوي الأحمال الكهربائية التالية :
إنارة 1.5 kW وتسخين 2.0 kW ومكوى كهربائي 1.0 kW وأجهزة أخرى متنوعة 2 kW .
إحسب التيار الذي تسحبه الدار من مؤسسة الكهرباء ، إذا كانت فولتية التجهيز 230V . وكذلك إحسب كلفة اشتغال هذه الأحمال مدة ثلاث ساعات إذا كان سعر الكيلو واط – ساعة الواحدة 10 فلوس .
(الجواب : 29.5A و 24 فلس)
46– مامعدل الطاقة المجهزة الى مقاوم $500\ \Omega$ في دائرة المسألة 36 .
(الجواب : 1.8W)
47– إحسب القدرة المنبعثة من المصدر في دائرة المسألة 27 .
(الجواب : 685W)

الفصل الثالث

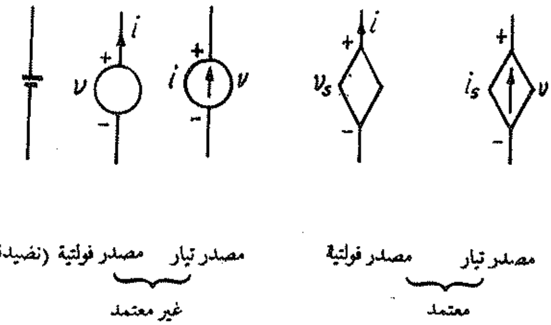
حل الدوائر الكهربائية باستخدام قانوني كرشوف

ومن كل شيء خلقنا زوجين لعلكم تذكّرون
الذاريات الآية 49

3.1 المصادر المُعتَمِدة وغير المُعتمِدة :

مربنا نوعان من مصادر القدرة الكهربائية هما مصادر الفولتية ومصادر التيار وقد ذكرنا أن مصادر الفولتية العملية هي عبارة عن مصدر فولتية مثالي (ثابت الفولتية) مربوط على التوالي مع مقاومة تمثل المقاومة الداخلية للمصدر. أما مصدر التيار العملي فهو عبارة عن مصدر تيار مثالي (ثابت التيار) مربوط على التوازي مع مقاومة تمثل المقاومة الداخلية للمصدر.

وكانت قيمتا مصدر التيار ومصدر الفولتية فيما مضى ثابتتين. إلا أن الدوائر الألكترونية العملية والتي تتكون في غالبيتها من دوائر الترانسستور تمثّل بدوائر مكافئة تتألف من مصدر فولتية أو مصدر تيار مع عناصر أخرى. وقد وجد أن هذه المصادر لايمكن تحديد قيم الفولتية والتيار بصورة مستقلة وثابتة على الدوام بل يجب تحديد أقيامها بدلالة عناصر أخرى في الدائرة. وتسمى مثل هذه المصادر بالمصادر المعتمدة ويبين الشكل 3.1 رموز الأنواع الأربعة من المصادر.

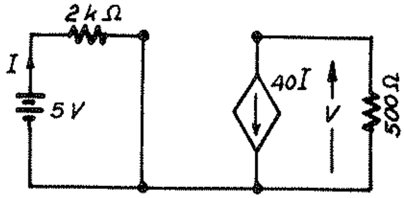


الشكل 3.1

ويمكن التعامل مع المصادر المعتمدة في تطبيقات قانوني كرشوف بالطريقة نفسها التي يتم التعامل بها مع المصادر غير المعتمدة. عدا ماسيتم الأشارة اليه حولها من خصوصيات. وتجدر الاشارة الى أن المصادر المعتمدة غالباً ماتكون غير منظورة بل هي مكافئات للاستعاضة عن العناصر شبه الموصلة بدوائر الكترونية يسهل التعامل معها تحليلياً.

مثال 3.1

للدائرة المبينة في الشكل 3.2 إيجاد قيمة الفولتية V عبر المقاوم $2k\Omega$.



الشكل 3.2

الحل : لايجاد I نستغل الجزء الأيسر من الدائرة حيث :

$$I = \frac{5}{2k} = 2{\cdot}5mA$$

تيار المصدر المعتمد i يساوي :

$$i = 40I = 2.5 \times 40 \times 10^{-3} = 0.1A$$

وعليه فإن الفولتية المطلوبة تكون :

$$V = -500 \times 0.1 = -50V$$

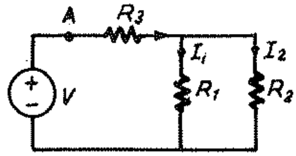
الاشارة السالبة تعني عكس الاتجاه المبين بالشكل.

3.2 قانون التيار لكرشوف Kirchhoffs current law

ينسب قانونا كرشوف للعلم الالماني كوستاف كرشوف المتوفي سنة 1887 . صاغ هذا العالم قانوني التيار والفولتية المعروفين باسمه . وبالرغم من انها قانونين عامين يمكن تطبيقهما في الحياة العملية بمجالات شتى كشبكات المياه ومجاري توزيع الهواء في انظمة التكييف وغير ذلك .

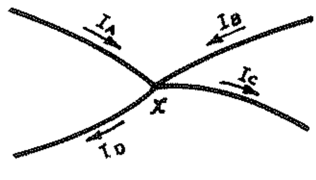
يتعلق القانون الاول بمجموع التيارات في اي نقطة من نقاط الدوائر الكهربائية . ويمكن صياغته بالشكل التالي :
"" مجموع التيارات الداخلة الى اي نقطة توصيل في دائرة كهربائية يساوي مجموع التيارات الخارجة منها . ""

ولغرض فهم منطوق هذا القانون يمكننا الرجوع الى ترع توزيع الماء في الحدائق مثلاً . فاذا كانت هناك ترعة كبيرة تتفرع منها ترعتان صغيرتان ، فمن البديهي ان يساوي الماء الذي يدخل الى نقطة الالتقاء من الترعة الكبيرة مجموع الماء الذي يخرج من الترعتين الصغيرتين . كما انه عند ربط مقاومتين على التوازي كالمبينتين في الشكل 3.3 ، فأن التيار الكلي I يساوي مجموع التيارين I_1 و I_2 المارين في المقاومتين المربوطتين على التوازي R_1 و R_2 . ويعود السبب في انطباق هذا القانون الى عدم امكان تجمع الشحنة في نقطة ما في الدوائر الكهربائية اي لايمكن ان يدخل اليها التيار ولايخرج منها .



الشكل3.3 دائرة توضيح قانون التيار لكرشوف

لقد اوضح هذا القانون لدائرة تحتوي على نقطة توصيل ذات ثلاثة افرع ولايعني ذلك عدم انطباقه على اي عدد آخر من الأفرع. فكل نقطة توصيل في الدائرة الكهربائية كالنقطة A في الشكل 3.3 مثلاً يدخل اليها التيار I ويخرج منها التيار I نفسه. لذا فالقانون ينطبق هنا ايضاً. وفي نقطة التوصيل x المبينة في الشكل 3 .2 تلتقي اربعة افرع يدخل فيها تياران ويخرج منها تياران اخران. وتدعى مثل هذه النقطة (اي النقطة التي يلتقي عندها ثلاث تيارات فأكثر) بالعقدة.



شكل 3.4 ملتقى لأربع تيارات

ينص القانون في مثل هذه الحالة على أن مجموع التيارين الداخلين I_A و I_B يساوي مجموع التيارين الخارجين I_c و I_D.

عند تطبيق قانون لكرشوف على كثير من الدوائر الكهربائية يكون التطبيق مصحوباً باجراء عمليات رياضية لايكون فهمها واضحاً بمجرد النظر الى الدائرة. لذلك تبرز ضرورة

اعطاء اصطلاح رياضي لأتجاه التيارات. فاذا فرضنا ان اتجاه التيار المبتعد عن العقدة موجباً فمن البديهي أن يكون الاتجاه نحوها سالباً، والعكس بالعكس. ومن ذلك يمكن اعتبار أن جميع التيارات في الأفرع متجهة نحو العقدة ولكن بعضها موجب الاشارة وبعضها سالب. كما أن بالامكان اعتبار أن جميعها تبتعد عن العقدة ولكن بعضها يبتعد باشارة موجبة والبعض الاخر يبتعد باشارة سالبة (أي يتجه نحوها) وعلى هذا يمكن صياغة قانون التيار لكرشوف بالصيغة الرياضية التالية:

""المجموع الجبري للتيارات المتجهة نحو اي عقدة في دائرة كهربائية يساوي صفراً "".

ودون اي تردد يمكن استبدال عبارة المتجهة نحو بعبارة المبتعدة عن مع بقاء القانون صحيحاً على الدوام. ففي الشكل 2.3.5

$$I_A + I_B - I_C - I_D = 0 \quad \dots (3\cdot1)$$

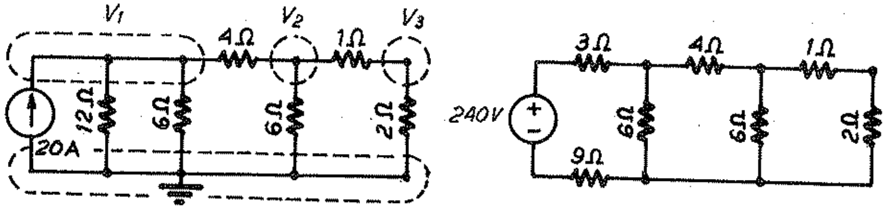
أو أن

$$I_A + I_B = I_C + I_D \quad \dots (3\cdot2)$$

وتجدر الاشارة الى ضرورة الالتزام بالفرضية الاولى لاشارة اتجاه التيار. فاذا فرضنا ان التيار المتجه نحو العقدة موجب الاشارة وجب علينا الالتزام بذلك طيلة المسألة واعتباراً اتجاه التيار المبتعد عن العقدة سالباً. وبالرغم من عدم وجود اي فرق بين هذا الاصطلاح ومعكوسه (حيث أن ذلك يعني رياضيا ضرب الطرفين في (1−) والذي لايغير من صحة المعادلة)، الا اننا سنصطلح في المسائل التي ستمر بنا في هذا الكتاب على اعتبار المبتعد عن العقدة بانه موجب والمتجه اليها سالب.

مثال 3.2

للدائرة المبنية يطلب تحديد العقد فيها وتطبيق قانون كرشوف للتيار على هذه العقد.



(ب) (أ)

الشكل 3.5

الحل : تحوّل مصدر الفولتية الى مصدر تيار كالمبين في الشكل 3.5ب ونؤشر العقدة المرجعية أسفل الدائرة وباقي العقد . وتصبح المعادلات

$$\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)V_1-\left(\frac{1}{4}\right)V_2+0=20 \quad \text{... (1)}$$ العقدة

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{1}\right)V_2-\left(\frac{1}{4}\right)V_1-\left(\frac{1}{1}\right)V_3=0 \quad \text{... (2)}$$ العقدة

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)V_3-\left(\frac{1}{1}\right)V_2+0=0 \quad \text{... (3)}$$ العقدة

ونبسط المعادلات الى :

$$5.5\ V_1 - 0.25\ V_2 + 0 = 20$$

$$-\ 0.25\ V_1 + \frac{17}{12} V_2 - 1V_3 = 0$$

$$0 - 1V_2 + 1.5V_3 = 0$$

والحل يؤول الى

$$V_3 = 0.667V_2$$

لغرض إيجاد قيمة الفولتيات V_1, V_2, V_3 نلاحظ أن :

$$V_1 = 15 - V_3$$

أو أن

$$V_3 = 15 - V_1$$

وكذلك

$$V_1 = 20 - V_2$$

أو أن

$$V_2 = 20 - V_1$$

وإن مجموع التيارات في العقدة يساوي صفر، أي أن :

$$i_1 + i_2 = i_3$$

وبالتعويض بالفولتيات فإن :

$$\frac{15 - V_1}{3} + \frac{20 - V_1}{4} = \frac{V_1}{5}$$

وبحلها نحصل على :

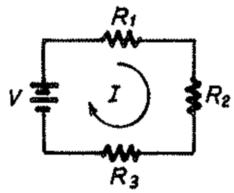
$$V_1 = 12.77V$$

$$V_2 = 20 - 12.77 = 7.23V$$

$$V_3 = 15 - 12.77 = 2.23V$$

3.3 قانون الفولتية لكرشوف Kirchhoff's voltage law

مر بنا في الفصل الثاني حل بعض الدوائر التي تحتوي على مقاومات مربوطة على التوالي كالمبينة في الشكل 3.6 إن مجموع فروق الجهد عبر المقاومات الثلاث يساوي فرق الجهد الكلي المسلط من قبل النضيدة V_1 . وماذلك سوى تطبيق قانون الفولتية لكرشوف ، والذي ينص على مايلي :



الشكل 3.6
دائرة توضح قانون الفولتية لكرشوف

« مجموع الهبوط في الفولتية حول اية دائرة مقفلة يساوي مجموع الارتفاع بالفولتية » في الشكل 3.6 كانت فروق الجهد عبر كل من المقاومات انخفاضا في الفولتية ، بينما فرق الجهد عبر مصدر الفولتية هو ارتفاع في الجهد. وعلى ذلك يكون :

$$V_1 + V_2 + V_3 = E \qquad (3.3)$$

حيث V_1 و V_2 و V_3 هي الفولتيات عبر المقاومات الثلاثة R_1 و R_2 و R_3 على التعاقب و E هي فرق الجهد عبر النضيدة.

وبطريقة مشابهة لقانون التيار ، يمكننا الاصطلاح على اعتبار الهبوط في الفولتية موجباً والارتفاع فيها سالباً (اوبالعكس) . وعلى ذلك يمكن اعادة صياغة قانون الفولتية باسلوب رياضي كما يلي :

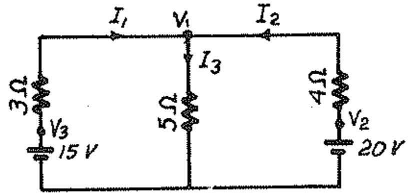
« المجموع الجبري لفروق الجهد حول دائرة مقفلة عند اخذه باتجاه متسلسل يساوي صفراً» . ويمكن تطبيق هذا النص على دائرة الشكل 3.6 على اساس ان الهبوط في الفولتية موجب والارتفاع في الفولتية سالب كمايلي :

$$V_1 + V_2 + V_3 - E = 0 \qquad (3.4)$$

وهي المعادلة (3.3) نفسها . وتبقى هذه المعادلة صحيحة فيما لو اصطلح على ان الهبوط في الفولتية ذو اشارة سالبة والارتفاع فيها ذو اشارة موجبة حيث يشبه ذلك ضرب المعادلة في (1−) .

مثال (3.3)

يطلب حل الدائرة المبينة في الشكل 3.7 .



الشكل 3.7 دائرة المثال 3.3

الحل :

يراد بحل الدائرة عادة ايجاد التيارات المجهولة فيها نظراً لانه عند ايجاد التيارات يمكن حساب كل الفولتيات المطلوبة او القدرات . لقد تم تاشير التيارين I_1 و I_2 خارجين من القطب الموجب للنضيدين ويلتقيان في العقدة العليا مكونين التيار I_3 الذي يمر في المقاومة 5Ω ، أي أنه عند تطبيق قانون التيار لكرشوف بشكله الرياضي :

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \qquad ...(3\cdot5)$$

واذا حاولنا الدوران حول الدارة اليمنى في الشكل ، باعتبار ان الهبوط في الجهد موجب والارتفاع في الجهد سالب ، نجد ان

$$4I_2 + 5I_3 - 20 = 0 \qquad (3\cdot6)$$

وكذلك بالنسبة للدارة اليسرى :

$$3I_1 + 5I_3 - 15 = 0 \qquad ...(3\cdot7)$$

فالمعادلات الثلاثة (3.5) و (3.6) و (3.7) تحوى على ثلاث مجاهيل هي I_1 و I_2 و I_3 لذا فهي كافية عند حلها لايجاد التيارات المجهولة . باعادة كتابة المعادلة (3.5) ، نجد

$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad \dots (3{\cdot}8)$$

وبتعويض ذلك في المعادلتين (3.6) و (3.7) يختفي التيار I_3 ويبقى هناك مجهولان بمعادلتين هما

$$5I_1 + 9I_2 = 20 \qquad \dots (3{\cdot}9)$$

$$8I_1 + 5I_2 = 15 \qquad \dots (3{\cdot}10)$$

وبتعويض I_1 من المعادلة (3.9) في المعادلة (3.10) وتبسيط الناتج نحصل على :

$$I_2 = \frac{17}{9{\cdot}4} = 1{\cdot}81A$$

وبالتعويض في (3.9) نحصل على

$$I_1 = 0{\cdot}74A$$

وبالتعويض في (3.8) نجد

$$I_3 = 2{\cdot}55A$$

لاحظ أن إشارة قطبية الفولتيات عبر المقاومات يعتمد على إتجاه التيار حيث تمر التيارات فيها من القطبية الموجبة الى القطبية السالبة .

مثال (3.4)

اعد حل المثال (3.3) باستبدال النضيدة 15 V في الشكل 3.7 باخرى قيمتها 5 V بالقطبية نفسها . ثم اوجد القدرة المجهزة من قبل كل بطارية .

الحل :

تبقى المعادلتان (3.5) و (3.6) نافذتان . اما المعادلة (3.7) فتصبح

$$3I_1 + 5I_3 - 5 = 0 \qquad \dots (3.11)$$

وبحل المهعادلات (3.5) و (3.6) و (3.11) نحصل على

$I_1 = -1{\cdot}17A$

$I_2 = 2{\cdot}87A$

$I_3 = 1{\cdot}7A$

لاحظ ان اشارة التيار I_1 سالبة . ويعني انه يسير بعكس الاتجاه الذي فرضناه . اي انه يدخل الى النضيدة 5V من القطب الموجب ويغادرها من القطب السالب ، وهو عكس الامر المعتاد عند استخدام النضائد لتجهيز قدرة معينة . لكنه امر اعتيادي عند شحن النضائد ، حيث تزود بالقدرة من مصدر خارجي . فدائرة المثال (3.4) يمكن تصورها عند ربط نضيدتين معا لتزويد قدرة معينة الى مقاومة مشتركة . اما دائرة المثال 3.4 فيمكن تصورها بان النضيدة 20V تقوم بشحن النضيدة 5V ، اضافة لتزويدها المقاومات الاخرى بالقدرة .

لغرض حساب القدرة المجهزة من كل نضيدة ، نجد حاصل ضرب الفولتية في التيار المار بها فالنضيدة 20V يمر بها تيار مقداره 2.78 ؛ اي، انها تجهز قدرة مقدارها :

(قدرة مجهزة) $20 \times 2.87 = 57.35W$

اما النضيدة 5V ، فنظراً لان التيار الذي يمر بها سالب ، لذا فهي لاتجهز قدرة بل تستهلك قدرة مقدارها :

(قدرة مجهزة) $5 \times (-1.17) = -5.85W$

(قدرة مستهلكة) $= 5.85\ W$

ولغرض تحقيق النتائج سنقوم بحساب القدرات المستهلكة في المقاومات الثلاثة الموجودة في الدائرة . فالقدرة المستهلكة في المقاوم 4Ω تساوي

$$P_{4\Omega} = I_2^2 \times 4 = (2{\cdot}87)^2 \times 4 = 32{\cdot}9W \qquad \text{(قدرة مستهلكة)}$$

وكذلك

$$P_{5\Omega} = I_3^2 \times 5 = (1{\cdot}7)^2 \times 5 = 14{\cdot}45W \qquad \text{(قدرة مستهلكة)}$$

والقدرات المستهلكة في المقاوم $3\,\Omega$ تساوي

$$P_{3\Omega} = I_3^2 \times 3 = (-1.17)^2 \times 3 = 4.1W$$ (قدرة مستهلكة)

مجموع القدرات المستهلكة في الدائرة هي

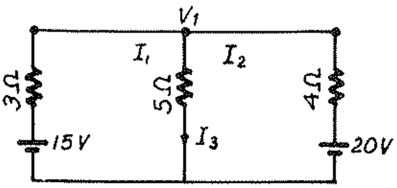
$$5.85 + 32.9 + 14.45 + 4.10 = 57.35W$$ (قدرة مستهلكة)

وهي بذلك تساوي القدرة المجهزة من المصدر 20V.

مثال 3.5 أعد حل المثال السابق بطريقة التحليل العقدي :

الحل : في حالة إيجاد الفولتية V يمكن إيجاد كافة المجاهيل من تيارات في فروع الدائرة المختلفة فعند العقدة 1 تكون المعادلة :

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1 - 15}{3} + \frac{V_1 - 20}{4} = 0$$



الشكل 3.8

بتبسيط المعادلة بالضرب × 60 وضم الكميات المتشابهة نحصل على :

$$V_1 = 12.77$$

ومنها نجد التيارات حيث :

$$I_1 = \frac{15 - 12{\cdot}77}{3} = 0{\cdot}74 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{20 - 12{\cdot}77}{4} = 1{\cdot}81 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{12{\cdot}77}{5} = 2{\cdot}55 \text{ A}$$

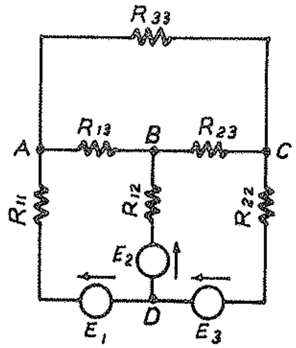
لاحظ السرعة والبساطة في إستخدام هذه الطريقة بالمقارنة مع طريقة المثال السابق

3.4 استعمال تيارات ماكسويل (الشبيكات)*

لاتتضمن هذه الفقرة معلومات جديدة فوق قانوني كرشوف ، الا ان هناك امكانية لتطبيق هذين القانونين بطريقة عملية وسهلة اكثر مما سبق . فقد لوحظ في المثال (3.1) ان عدد المعادلات المتكونة هو ثلاثة . اشتق اثنان منها من قانون الفولتية لكرشوف والثالثة من قانون التيار. وحيث ان قانون التيار لكرشوف هو قانون بسيط ، بالامكان تطبيقه مباشرة ، وربما التغاضي عن كتابته بشكل معادلة مستقلة ، لذابالامكان اختزال المعادلات المتكونة الى عدد مساوٍ لعدد الحلقات او الدارات المقفلة التي تبينها الدائرة . كما ان هناك اشكالاً اخرى في الطريقة السالفة ، حيث انه من الضروري تعيين اتجاهات للتيارات واتجاهات للدوران حول الدارة . وقد يكون الدوران باتجاه موافق او معاكس لاتجاه التيار. تسمى أحياناً طريقة كريمر أو الدارات لذا فطريقة حل الدوائر باستخدام تيارات اكسويل Maxweel currents تعتمد على افتراض ان هناك تياراً وهمياً يدور في كل دارة loop مقفلة (شبيكة) بشكل مستقل شرط ان تحقق هذه التيارات قانوني كرشوف .

---

* الشبيكة (Mesh) تعرف الشبيكة بأنها وحدة الدائرة الكهربائية التي لايتقاطع اي فرع فيها تقاطعاً غير متصل كهربائياً مع الفروع الاخرى في الدائرة . فالدائرة في الشكل 3.5 تحوي على ثلاثة شبيكات



شكل (3.9)

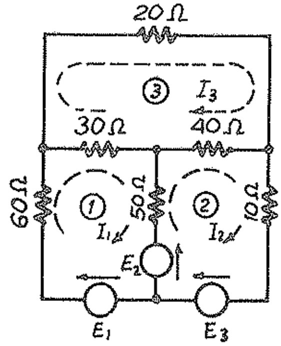
في الشكل 3.9 هناك ستة فروع يراد ايجاد التيارات فيها. ويعني ذلك وجود ستة مجاهيل. لذا نحتاج الى ستة معادلات: ثلاث منها بتطبيق قانون الفولتية لكرشوف على الدارات الثلاث الموضحة في الشكل وثلاث منها تأتي من تطبيق قانون التيار في العقد A و B و C. لاحظ بانه اذا اضيفت معادلة اخرى بتطبيق قانون التيار لكرشوف على العقدة D فانها تكون زائدة عن الحاجة.

من ذلك يتبين مقدار تعقد مسألة من هذا القبيل عند احتوائها على عدد اكبر من الفروع. اما باستخدام تيارات ماكسويل، فيمكن اختزال ذلك الى ثلاث معادلات فقط. ففي الشكل 3.10 افترض وجود ثلاث تيارات دوارة مرقمة I_1 و I_2 و I_3. وقد افترضت اتجاهاتها كلها باتجاه دوران عقارب الساعة، بالرغم من ان ذلك ليس ضرورياً في كل الاحوال. فالمهم هو ان تعتبر التيارات اطارية تدور في اطارات. ولكن اتفاقها في اتجاه الدوران يسهل الحل بعض الشيء.

$E_1 = 100V$

$E_2 = 20V$

$E_3 = 50V$



شكل (3.10)

يلاحظ ان بعض هذه التيارات تمر لوحدها في بعض الفروع ، بينما تجتمع (بأتجاه عقارب الساعة مثلاً لكافة الدارات) مع بعضها البعض عند مرورها في فروع اخرى . فاذا كان اتجاه تاشير دورانها بالاتجاه نفسه ، كانت كافة التيارات المشتركة تمر باتجاهين متعاكسين. لذا تكون محصلتها عبارة عن الفرق بينها وليس مجموعها. تساوي المحصلة مجموعها احيانا عند عدم التقيد بتاشير الاتجاهات بالترتيب نفسه .

لاحظ بان المقاومات المشتركة بين دارتين متجاورتين قد سميت برمزين رقميين يدلان على الدارتين المتجاورتين مثل R_{12} . اما المقاومة التي لاتشترك باكثر من تيار ماكسويل واحد فسميت برمز يدل على تلك الدارة مرتين مثل R_{11} .

وبهذا الاسلوب تم تطبيق قانون التيار لكرشوف ضمنياً. ولم يبق سوى تطبيق قانون الفولتية لكرشوف ثلاث مرات على الدارات الثلاث والتي يمكن صياغتها بسهولة كما يلي :

$$R_{11} I_1 + R_{12} (I_1 - I_2) + R_{13} (I_1 - I_3) - E_1 + E_2 = 0 \quad \text{... (3·12)}$$

$$R_{22} I_2 + R_{12} (I_2 - I_1) + R_{23} (I_2 - I_3) - E_2 - E_3 = 0 \quad \text{... (3·13)}$$

$$R_{33} I_3 + R_{13} (I_3 - I_1) + R_{32} (I_3 - {}_2) = 0 \quad \text{... (3·14)}$$

وبتبسيط هذه المعادلات يمكن كتابتها بالشكل :

$$(R_{11} + R_{12} + R_{13}) I_1 - R_{12} I_2 - R_{13} I_3 = E_1 - E_2 \qquad ... (3.15)$$

$$- R_{12} I_1 + (R_{22} + R_{12} + R_{13}) I_2 - R_{23} I_3 = E_2 + E_3 \qquad ... (3.16)$$

$$- R_{13} I_1 - R_{23} I_2 + (R_{33} + R_{13} + R_{23}) I_3 = 0 \qquad ... (3.17)$$

ويلاحظ ان انتظام هيئة هذه المعادلات قد نتج من افتراض دوران التيارات بالاتجاه نفسه ، حيث يلاحظ ان معامل I_1 في المعادلة (3.15) ومعامل I_2 في المعادلة (3.16) ومعامل I_3 في المعادلة (3.17) هي كميات موجبة وتعبر عن مجموع المقاومات الموجودة في الدارات الاولى والثانية والثالثة على التعاقب . اما بقية الحدود في المعادلات الثلاث فهي ذات اشارات سالبة تعبر عن المقاومات المشتركة بين الدارات . كما يتضح ان الجهة اليمنى من المعادلات تعطي القوى الدافعة الكهربائية الموجودة في كل دارة على اساس ان اشارتها موجبة عندما يدخلها الدوران من قطبها السالب واشارتها سالبة عند دخول الدوران من قطبها الموجب .

مثال (3.6)

اوجد تيارات الدائرة المبينة في الشكل 3.10

الحل :

في الدارة 1
$$100 - 20 = I_1 (60 + 30 + 50) - I_2 50 - I_3 30$$

$$\therefore 80 = 140 I_1 - 50 I_2 - 30 I_3 \qquad ... (1)$$

في الدارة 2
$$50 + 20 = I_2 (50 + 40 + 10) - I_1 50 - I_3 40$$

$$\therefore 70 = - 50 I_1 + 100 I_2 - 40 I_3 \qquad ... (2)$$

في الدارة 3
$$0 = I_3 (30 + 20 + 40) - I_1 30 - I_2 40$$

$$\therefore 0 = - 30 I_1 - 40 I_2 + 90 I_3 \qquad ... (3)$$

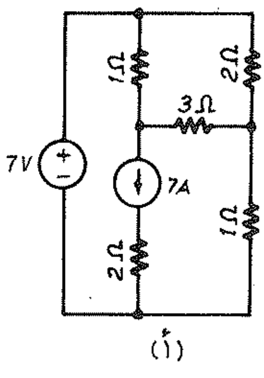
من حل هذه المعادلات ينتج

$I_1 = 1.65A, I_2 = 2.16A, I_3 = -1.5A$

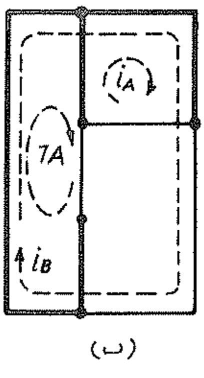
التيار في المقاوم 60 $\Omega = I_1 = 1.65$ امبير باتجاه I_1
التيار في المقاوم 30 $\Omega = I_1 - I_3 = 0.15$ امبير باتجاه I_1
التيار في المقاوم 50 $\Omega = I_2 - I_1 = 0.51$ امبير باتجاه I_2
التيار في المقاوم 40 $\Omega = I_2 - I_3 = 0.66$ امبير باتجاه I_2
التيار في المقاوم 10 $\Omega = I_2 = 2.16$ امبير باتجاه I_2
التيار في المقاوم 20 $\Omega = I_3 = 1.5$ امبير باتجاه I_3

طريقة رياضية للحل:

حيث ان تطبيق قانوني كرشوف بطريقة ماكسويل تؤول الى معادلات عددها يساوي عدد الدارات لذلك فان استخدام طريقة سهلة في حل المعادلات بعد كتابتها بشكل صحيح امر مفيد. والطريقة الشائعة لذلك هي طريقة المحددات. يبين الملحق (آ) في نهاية الكتاب تفاصيل يمكن الرجوع اليها عن هذه الطريقة. وقد تم حل هذا المثال ضمن الملحق بطريقة المحددات كما مبين في الصفحة ٥٨٣ وبشكل مفصل.



(أ)



(ب)

الشكل (3.11)

مثال 3.7

اكتب معادلات الدارات لدائرة الشكل 3.11.

الحل:

معادلة الدارة A

$$i(i_A - 7) + 2(i_A + i_B) + 3i_A = 0$$

ومعادلة الدارة B

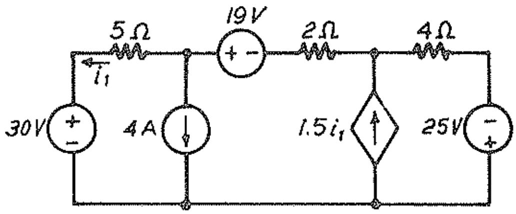
$$-7 + 2(i_A + i_B) + 1i_B = 0$$

ويظهر اننا وفرنا معادلة واحدة بسبب وجود مصدر التيار 7A وان نتيجة الحل للمعادلتين اعلاه:

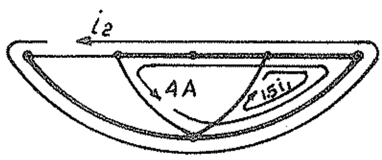
$$i_B = 2A, \; i_A = 0{\cdot}5A$$

مثال 3.8

للدائرة في الشكل 3.12 ادناه التي تحوي مصادر معتمدة اكتب معادلات الدارات.



(أ)



(ب)

الشكل (3.12)

الحل:

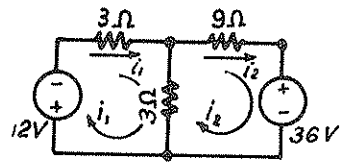
نختار الدارات المبينة مستفيدين من مصادر التيار المعروفة حيث يتطلب الحل كتابة معادلة واحدة فقط للدارة الخارجية حيث ان تيار هذه الدارة هو التيار i_1 المجهول وعليه وابتداءا من المصدر غير المعتمد الايسر والدوران باتجاه عقرب الساعة فان:

$-30 + 5(-i_1) + 19 + 2(-i_1 - 4) + 4(-i_1 - 4 + 1.5i_1) - 25 = 0$ ونتيجة الحل فان :

$$i_1 = -12A$$

مثال 3.9 :

للدائرة المعطاة في الشكل 3.13 إستخدام طريقة التحليل بالدارات لإيجاد قيمة I_x .



الشكل (3.13)

الحل:

نؤشر التيارات للدارتين i_1 ، I_2 ونعتبر تيار الدارة التي نجمع فولتياتها هو المتغلب على تيارات الدارات المجاورة وعليه تكون معادلات الدارات:

$$8i_1 - 5i_2 = -12$$
$$-5i_1 + 14i_2 = -36$$

للتخلص من i_1 بطريقة الحذف نضرب المعادلة الاولى في خمسة والثانية في ثمانية ونجمعها فيكون الناتج:

$$(-25 + 112)i_2 = -12 \times 5 - 36 \times 8$$
$$87i_2 = -343$$
$$i_2 = -4A$$

بتعويض قيمة i_2 في المعادلة الاولى:

$$8i_1 + 20 = -12$$

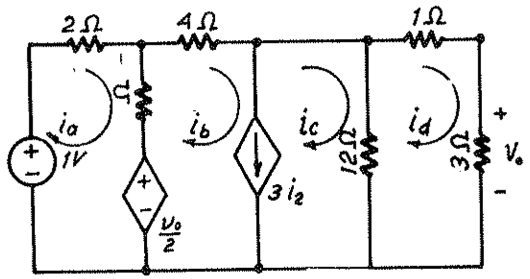
$$i_1 = -4A$$

واخيرا فان : $i_x = i_1 - i_2$

$$= -4 - (-4) = 0$$

مثال : 3.10

للدائرة المبينة في الشكل 3.14 اكتب معادلات الدارة فقط بأبسط حالاتها دون الحل.



الشكل 3.14 دائرة المثال 3.10

الحل:

نؤشر الدارات ونقوم بترميز تيار كل دارة ونجمع الفولتيات باعتبار تيار الدارة التي تكون معادلات هو المتغلب نسبة الى تيار الدارات المجاورة.

كما يلاحظ عند تكوين المعادلة يعتبر الانتقال من الاشارة الموجبة الى السالبة موجبا وبالعكس.

للدارة التي تيارها i_a فان المعادلة تؤول الى:

$$-1 + 2i_a + 3(i_a - i_b) + V_o/2 =$$

للدارة التي تيارها i_6

$$-V_o/2 + 3(i_3 3 - i_2) + 4i_6 = 12 (i_c - i_d) = 0$$

للدارة التي تيارها i يلاحظ بانه لاداعي لكتابة المعادلة ويمكن الاكتفاء بتعريف تيار المصدر المعتمد بدلالة تيار الدارات المجاورة ومن ثم تعريف i_2 ايضا.

$$i_6 - i_c = 3i_2 = 3(i_2 - i_6)$$

الدارة الاخيرة التي تيارها i_d

$$12(i_d - i_c) 4i_d = 0$$

ولدينا $V_o = 3i_d$

وإن $i_2 = i_a - i_b$

وبعد التعويض وتبسيط الحدود وضمها نحصل على التالي :

$$5i_a - 3i_b + (3/2)\, i_d = 1$$

$$-3i_a + 7i_b + 12i_c - (27/2)i_d = 0$$

$$-12i_c + 16i_d = 0$$

$$3i_a - 4i_b = 0$$

3.5 التحليل العقدي Nodal Analysis

لقد كان تحليل الدائرة باستخدام تيارات ماكسويل معتمداً على اساس اختزال قانون التيار لكرشوف وتطبيقه بشكل ذاتي اثناء خطوات الحل ومن ثم تبقى المعادلات معتمدة على تطبيق قانون الفولتية لكرشوف. وحيث انه ليس هناك اي تمايز في اهمية احد قانوني كرشوف على الاخر، فبالامكان تطبيق قانون الفولتية لكرشوف بشكل ذاتي مع ابتكار طريقة تكتب بها معادلات التيار. وتدع هذه الطريقة بالتحليل العقدي نظراً لان تطبيق قانون التيار لكرشوف يجب ان يتم عند عقد الدائرة.

لقد كانت الكميات المجهولة في الحل بطريقة تيارات ماكسويل هي التيارات الدوارة. اما المجاهيل في التحليل العقدي فتكون فولتيات العقد. وحيث ان الفولتية يجب ان تؤخذ بين نقطتين، لذلك من الضروري تعيين نقطة أساسية تدعى عقدة المرجع Reference

Node . ويمكن اختيار اي عقدة في الدائرة (تلتقي بها ثلاثة فروع فما فوق) كعقدة مرجع . الا انه من الافضل اختيار العقدة التي يلتقي عندها اكبر عدد من الفروع واعتبارها عقدة مرجع . اما العقد الاخرى فتؤثر عليها الفولتيات المجهولة وهي عبارة عن فروق الجهد بين تلك العقد وعقدة المرجع . وبذلك يكون عدد المجاهيل في الدائرة أقل من عدد العقد بواحد .

وتجدر الاشارة الى أن غالبية الدوائر الألكترونية ودوائر القدرة الكهربائية لها مرجع (عادة متصل بالأرض) لذلك تنسب الفولتيات للعقد الأخرى بالمقارنة مع عقدة المرجع التي تعتبر فولتيتها صفراً .

عند تعيين الفولتية المصاحبة لعقدة ما ، تعتبر العقدة المعنية موجبة بالنسبة لعقدة المرجع . لذلك ان كانت هناك مقاومة مربوطة بين تلك العقدة وعقدة المرجع ، كان التيار يسري باتجاه مبتعد عن تلك العقدة ويتجه نحو عقدة المرجع . اما ان كان هناك مصدر تيار مربوط مع احدى العقد ، اعتبر اتجاهه معلوماً ، سواء اكان متجهاً نحو العقدة او مبتعداً عنها . اما التيار الذي يمر في مقاومة بين عقدتين ، فيعتبر اتجاهه مبتعداً عن العقدة المعنية . والفولتية التي تسيره هي عبارة عن الفرق بين الفولتيتين باعتبار فولتية العقدة المعنية اعلى من كافة فولتيات العقد المجاورة لها .

كما يمكن الاصطلاح على اتجاه معين للتيار خلال مقاومة ما . وعند ذلك يجب علينا الالتزام بذلك الاصطلاح عند حل المسألة كلها . ولكن يفضل عدم فرض اتجاه لاي تيار لكي تكون المعادلات الناتجة متناسقة وذات خواص مشابهة لخواص المعادلات التي نتجت عند تطبيق تيارات ماكسويل الدوارة .

من المناسب في التحليل العقدي ان توضع المقاومات بشكل إيصاليات وذلك لكي يكون تطبيق قانون اوم اكثر طواعية ، حيث تظهر المجاهيل في المعادلات مضروبة بالأيصاليات وليست مقسومة على المقاومات .

أي $I = VG$

كما يلاحظ ان الدوائر المناسبة للتحليل العقدي هي الدوائر التي تحوي على مقاومات متوازية مع مصادر للتيار بعكس حالة تيارات ماكسويل الدوارة والتي تناسب مصادر

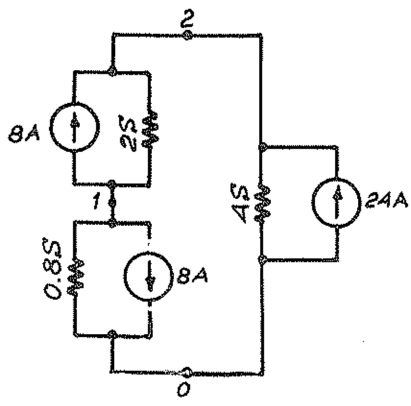
الفولتية المربوطة على التوالي مع المقاومات . وسيمر بنا فيما بعد طريقة سهلة لتحويل مصادر التيار الى مصادر الفولتية وبالعكس عند الحاجة . لذا يمكن القول ان التحليل العقدي يمكن تطبيقه بشكل مباشر او بعد تحوير بسيط على كافة الدوائر الكهربائية . ولكن من الضروري التأكد من كافة العقد الموجودة في الدائرة ، نظراً لان رسم الدائرة يوهم القارئ أحياناً حيث يخيل اليه ان الدائرة تحوي عدداً من العقد اكبر من العقد الموجودة فعلاً . فربما يكون هناك بعض النقاط المتباعدة والمتصلة بخطوط توصيل لايفصل بينها أي عنصر والتي هي بالحقيقة عقدة واحدة لكنها تظهر وكأنها عقدتين منفصلتين.

إن إستخدام التحليل العقدي يتيسر إستخدامه في الحالات الآتية بصورة عامة :

1. إذا كانت مصادر القدرة هي مصادر تيارات .
2. إذا كان المطلوب إيجاد قيم الفولتيات في الدائرة .
3. إذا كان هناك كميات في الدائرة يطلب حسابها .
4. إذا كان هناك مصدرا قدرة في الدائرة .
5. إذا كان عدد العقد المستغلة أقل من عدد الدارات .

مثال (3.11)

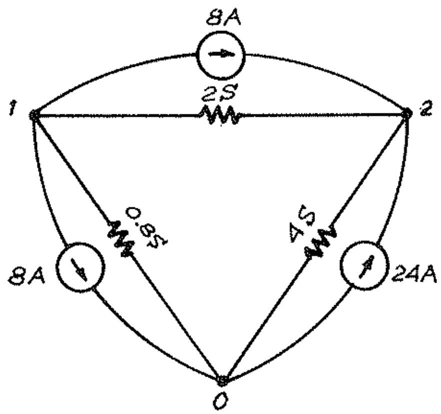
حل الدائرة المبينة في الشكل 3.15 باستعمال طريقة التحليل العقدي .



شكل 3.15 دائرة المثال 3.11

الحل :

ليس هناك أي عقدة متميزة عن غيرها في هذه الدائرة لكي تؤخذ كعقدة مرجع . وحيث أن منطوق المسألة لم يحدد حساب فولتية معينة لذلك يستوي إتخاذ أي عقدة من العقد الثلاثة كمرجع . أما لو طلب حساب إحدى الفولتيات مثلاً V فيلاحظ عندئذٍ أن أخذ العقدة o كمرجع سيكون أفضل . لنأخذ العقدة O كمرجع ونرمز للعقدتين الأخريتين بالرقمين 1 و 2 . ولتوضيح ذلك أعيد رسم الدائرة في الشكل 3.16



الشكل 3.16 اعادة رسم الشكل 3.15 مبيناً فيها العقد

ويتطبيق قانون التيار لكرشوف على العقدة 1 ذات الفولتية V_1 :

$$0{\cdot}8V_1 + 2(V_1 - V_2) + 8 + 8 = 0 \qquad \dots (3{\cdot}18)$$

وعلى العقدة 2 :

$$4V_2 + 2(V_2 - V_1) - 8 - 24 = 0 \qquad \dots (3{\cdot}19)$$

وبحل المعادلتين (3.18) و(3.19) ، نجد أن $V_1 = -2.5V$ وأن $V_2 = 4.5V$ ويلاحظ أن كون الناتج سالباً لقيمة V_1 يعني ان العقدة 1 سالبة بالنسبة للعقدة O فيكون التيار في الايصالية 0.8S متجهاً الى الاعلى وقيمته

$$2.5 \times 0.80 = 2A$$

كما ان التيار خلال الايصالية 4S يساوي

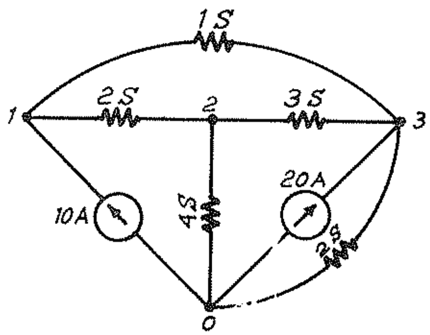
$$4.5 \times 4 = 18A$$

متجهاً نحو الاسفل . اما التيار خلال الايصالية 2S فاتجاهه من العقدة 2 الى العقدة 1 ، وقيمته

$$[4.5 - (-2.5)] \times 2 = 14A$$

مثال (3.12)

اوجد القدرة المجهزة من مصدري التيارين في الدائرة المبينة في الشكل 3.17



الشكل 3.17 دائرة المثال 3.12

يلاحظ أن المطلوب هو إيجاد القدرة للمصادر والتي لايمكن الحصول عليها إلا بحساب فولتيتي النقطتين V_{10}, V_{30} لذلك نتخذ العقدة O كعقدة مرجع .

عند العقدة 1

$$1(V_1 - V_3) + 2(V_1 - V_2) - 10 = 0 \qquad \dots (3.20)$$

عند العقدة 2

$$4V_2 + 2(V_2 - V_1) + 3(V_2 - V_3) = 0 \qquad \dots (3{\cdot}21)$$

عند العقدة 3

$$2V_3 - 20 + 3(V_3 - V_2) + 1(V_3 - V_1) = 0 \qquad \dots (3{\cdot}22)$$

وبتبسيط هذه المعادلات تؤول الى :

$$(1 + 2)V_1 - 2V_2 - V_3 = 10 \qquad \dots (3{\cdot}23)$$

$$-2V_1 + (4 + 3)V_2 - 3V_3 = 0 \qquad \dots (3{\cdot}24)$$

$$-1V_1 - 3V_3 + (3 + 2)V_3 = 20 \qquad \dots (3{\cdot}25)$$

ويلاحظ ان هذه المعادلات هي بشكل

$$G_{11}V_1 - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 = I_1 \qquad (3.26)$$

$$G_{21}V_1 + G_{22}V_2 - G_{23}V_3 = I_2 \qquad (3.27)$$

$$G_{31}V_1 - G_{32}V_2 + G_{33}V_3 = I_3 \qquad (3.28)$$

والتي تشابه معادلات تيارات ماكسويل (3.12) الى (3.14) ، حيث تقابل الفولتيات المجهولة التيارات في تلك المعادلات كما تقابل الايصاليات المقاومات في المعادلات ماكسويل. وتمثل المعاملات G مجموع الايصاليات المرتبطة بالعقدة المعنية ، (وعندها يرمز لها برقمي العقدة مكرراً مثل G_{22}) او المرتبطة بين عقدتين (وعندها يرمز لها برقمي العقدتين مثل G_{12}).

وتكون اشارة الحد في الحالة الاولى موجبة دائماً وفي الحالة الثانية سالبة دائماً ، هذا اذا كان الاصطلاح على اتجاهات الفولتيات والتيارات متناسقاً كما وصفنا اعلاه.

وبحل المعادلات (3.23) و (3.24) و (3.25) .

تكون النتائج (كما مبين في الملحق (أ) في آخر الكتاب).

$$V_1 = 7{\cdot}679V,\ V_2 = 2{\cdot}886V,\ V_3 = 7{\cdot}267V.$$

وتكون القدرة في التوصيلية 10℧

$$P_{10\Omega} = GV_2^2 = 10\,(2{\cdot}886)^2 = 83{\cdot}333\ W$$

وفي التوصيلية 3℧

$$P_{3\Omega} = 3\,(V_3 - V_2)^2 = 3\,(7{\cdot}267 - 2{\cdot}886)^2 = 68{\cdot}918\ W$$

وفي التوصيلية 2℧

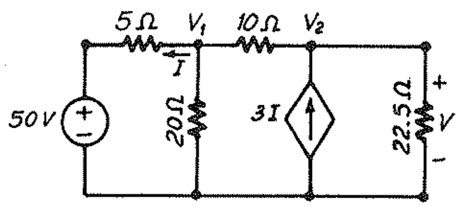
$$P_{2\Omega} = 2\,(V_1 - V_2)^2 = 2\,(7{\cdot}679 - 2{\cdot}886)^2 = 45{\cdot}945\ W$$

وفي التوصيلية 1℧

$$P_{1\Omega} = 1\,(V_1 - V_3)^2 = 1\,(7{\cdot}679 - 7{\cdot}267) = 0{\cdot}169\ W$$

مثال 3.13

يطلب إيجاد قيمة V في الدائرة المبينة في الشكل :



الشكل 3:.18

الحل :

إن الحل بطريقة التحليل العقدي مناسب حيث أن فولتية العقدة 2 ستكون هي الجواب وعليه عند العقدة 1 تكون المعادلة :

$$\frac{V_1 - 50}{5} = I$$

وأن :

$$I + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0 \qquad \text{... (1)}$$

وعند العقدة 2 تصبح المعادلة :

$$\frac{V_2}{22{\cdot}5} + \frac{V_2 - V_1}{10} - 3I = 0 \qquad \text{... (2)}$$

وبعد تعويض قيمة I تتحول المعادلة (1) الى :

$$\frac{V_2 - 50}{5} + \frac{V_1}{20} + \frac{V_1 - V_2}{10} = 0$$

وعند التبسيط تصبح :

$$3V_1 + 2V_2 = 20$$

وبتعويض قيمة I في المعادلة (2) تصبح :

$$\frac{V_2}{22{\cdot}5} + \frac{V_2 - V_1}{10} - 3\,\frac{V_1 - 50}{5} = 0$$

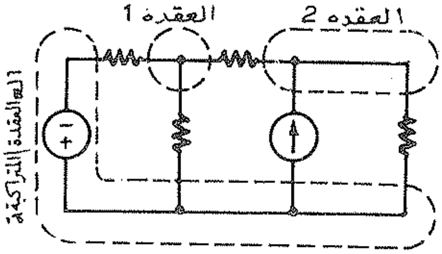
وعند التبسيط تصبح :

$$- 35\, V_1 + 9\, V_2 = - 1500$$

والحل يؤدي الى الجواب :

$$V_2 = V = 180\ V$$

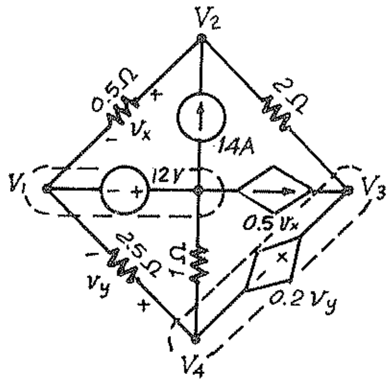
يلاحظ أن العقدة 3 لم يكتب لها معادلة وذلك لأنها تكوّن مع العقدة O ما يسمى بالعقدة المتراكبة Super node وهي عبارة عن عقدتين أو أكثر بينها فولتية ثابتة (مصدر فولتية مثالي) معتمد أو غير معتمد كما موضح شكل هذه العقدة أدناه.



الشكل 3.19

مثال 3.14

بيِّن العقدة المتراكبة الموجودة في الشكل 3.20 ثم أكتب المعادلات العقدية المطلوبة لكل دائرة.



الشكل 3.20

المعادلات للعقدة 1

$$V_1 = -12V$$

وللعقدة 2

$$\frac{V_2 - V_1}{0.5} + \frac{V_2 - V_3}{2} = 14$$

بينما للعقدتين المتراكبتين 4, 3 المعادلة :

$$\frac{V_3 - V_2}{2} - 0{\cdot}5V_x + \frac{V_4}{1} + \frac{V_4 - V_1}{2{\cdot}5} = 0$$

وبعمل علاقة بين الفولتيتين V_4, V_3 نحصل على المعادلة الرابعة :

$$V_3 - V_4 = 0.2\ V_9$$

وكذلك :

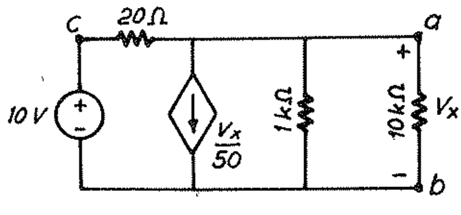
$$0.5\ V_x = 0.5\ (V_2 - V_1)$$

ومنها نستطيع الحل لإيجاد فولتيات العقد الأربعة حيث قيمها :

$$V_1 = -12V,\ V_2 = -4V,\ V_3 = 0,\ V_4 = -2V$$

مثال (3.15)

حل دائرة الشكل 3.21 باستعمال التحليل العقدي .



الشكل 3.21 دائرة المثال 3.14 فيها مصدر تيار معتمد

الحل :

تحوي الدائرة على ثلاثة عقد فقط . وباخذ نقطة b كعقدة مرجع تصبح فولتية العقدة C معلومة وهي 10 V ، فتكون معادلة التيارات في العقدة a

$$\frac{V_x}{10{,}000} + \frac{V_x}{1000} + \frac{V_x}{50} + \frac{V_x - 10}{20} = 0 \qquad (4.9)$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على :

$$\frac{V_x}{10,000} + \frac{V_x}{1000} + \frac{V_x}{50} + \frac{V_x}{20} - \frac{10}{20} = 0$$

$$\therefore V_x \left(\frac{1}{10,000} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{20} \right) = \frac{1}{2}$$

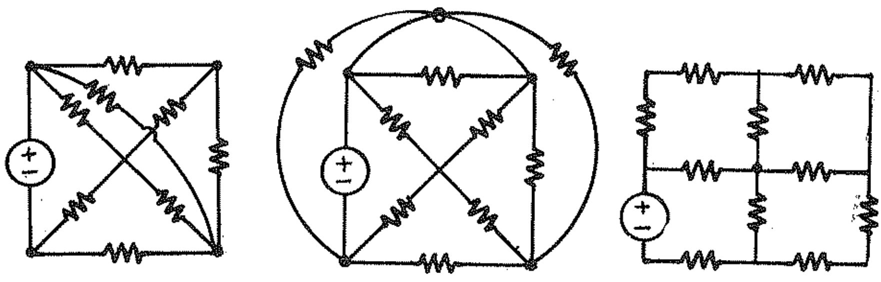
$$V_x = 7{\cdot}032 \text{ V}$$

وتكون قيمة مصدر التيار المعتمد

$$\frac{V_x}{50} = \frac{7{\cdot}032}{50} = 0{\cdot}14 \text{ A}$$

3.6 الدوائر المستوية وغير المستوية Planer Circuits and Nonplaner Circuits

يصادف عند تحليل الدوائر المعقدة أن يلاحظ وجود بعض الفروع التي تقطع فروعاً أُخرى دون ان يكون هناك تماس كهربائي بينها ، وكأن الدائرة موضوعة في الفراغ وليست على مستوي الورقة . تدعى مثل هذه الدوائر بالدوائر غير المستوية .اما الدوائر التي يمكن رسمها على مستوى الورقة دون تقاطع فتدعى بالدوائر المستوية . ويلاحظ بان هنالك بعض الدوائر التي تظهر في بعض الرسوم وكأنها غير مستوية، الا ان بالامكان اجراء تغيير في رسمها يؤدي الى ان تصبح بمستوى الورقة . لذا فهي مستوية لكنها رسمت كأنها غير مستوية . يبين الشكل 3.22 ثلاث دوائر الاولى منها (أ) مستوية والثانية (ب) غير مستوية والثالثة (جـ) مستوية لكنها تظهر كانها غير مستوية .



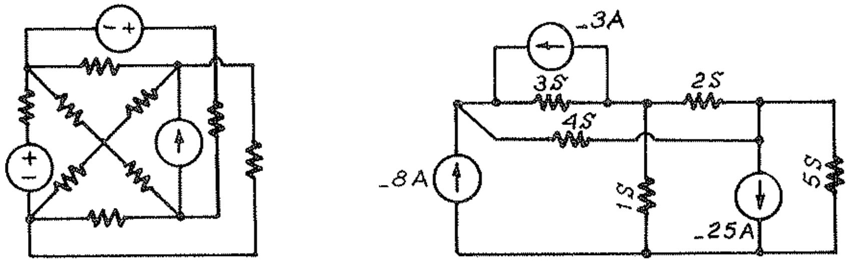
(جـ) (ب) (أ)

شكل 3.22 أ– دائرة مستوية ب– دائرة غير مستوية
جـ– دائرة مستوية تظهر كأنها غير مستوية

لقد مر بنا تحليل الدوائر المستوية بطرق التطبيق المباشر لقانون كرشوف وتيارات ماكسويل والتحليل العقدي . ويمكن تطبيق هذه الطرق على الدوائر المستوية. أما للدوائر غير المستوية فيمكن تطبيق قانوني كرشوف عليها مباشرة او التحليل العقدي . اما تيارات ماكسويل فمن غير الممكن تطبيقها مباشرة ، **نظراً** لعدم وضوح الاطارات (او الشبيكات) .

مثال (3.16)

اي الدائرتين التاليتين مستوية وايها غير مستوية؟ بّسط المستوية منها بشكل يمكن من كتابة معادلاتها .

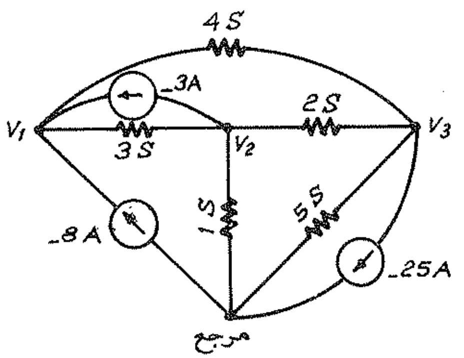


(ب) (أ)

الشكل 3.23

الحل :

الشكل 3.23 أ يمثل دائرة مستوية تظهر وكأنها غير مستوية ، لذا يمكن اعادة رسمها بالشكل 3.24 .



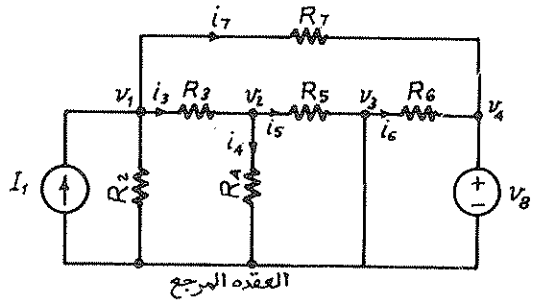
الشكل 3.24

اما الشكل 3.23 ب فلا يمكن رسمه بشكل مستوٍ، وللطالب ان يحاول التأكد من ذلك.

مثال 3.17

لمقارنة الحل بطريقة العقد والدارات:

للدائرة المبينة في الشكل 3.25 أدناه اكتب معادلات العقد ثم معادلات الدارات مبيناً الفرق في الإختيار.



الشكل 3.25

الحل:

بالنظر لوجود مصدر فولتية V_8 فيمكننا دمج العقدة V_4 مع العقدة المرجع وجعلها عقدة واحدة سوف ندعوها بالعقدة المتراكبة، وبذلك نتخلص من العقدة V_4 ولكننا لانفقد الفولتية V_4 وتكون المعادلات للعقد الباقية كالتالي:

$$i_2 + i_3 + i_7 = I_1 \qquad \text{للعقدة } V_1$$

$$-i_3 + i_4 + i_5 = 0 \qquad \text{للعقدة } V \qquad (1)$$

$$-i_5 + i_6 = 0 \qquad \text{للعقدة } V$$

$$V_4 = V_8 \qquad \text{ومعادلتنا الرابعة ستكون}$$

ولدى كتابة تيارات الفروع (أي تيارات العناصر) بدلالة فولتيات العقد نحصل على :

$$i_2 = V_1 / R_2 \qquad i_5 = (V_2 - V_3) / R_5$$

$$i_3 = (V_1 - V_2) / R_3 \qquad i_6 = (V_3 - V_4) / R_6 \quad \ldots (2)$$

$$i_4 = V_2 / R_4 \qquad i_7 = (V_1 - V_4) / R_7$$

وبتعويض معادلات المجموعة (2) في معادلات المجموعة (1) نحصل على :

$$\frac{V_1}{R_2} + \frac{(V_1 - V_2)}{R_3} + \frac{(V_1 - V_4)}{R_7} = I_1$$

$$\frac{-(V_1 - V_2)}{R_3} + \frac{V_2}{R_4} + \frac{(V_2 - V_3)}{R_5} = 0 \qquad \ldots (3)$$

$$\frac{-(V_2 - V_3)}{R_5} + \frac{(V_3 - V_4)}{R_6} = 0$$

$$V_4 = V_8$$

ومن الملاحظات المفيدة عن معادلات (3) هي ان V_1 في المعادلة الأولى و V_2 في المعادلة الثانية و V_3 في المعادلة الثالثة موجبة الإشارة ، وأما المعادلة الأخيرة فهي ليست ضمن مجموعة معادلات كرشوف للتيار لذا فهي معادلة مساعدة تختلف عن انماط المعادلات الثلاثة الاولى.

وبعد ضم الحدود وتعويض المعادلة الرابعة في المعادلات الثلاث الأخر نحصل على:

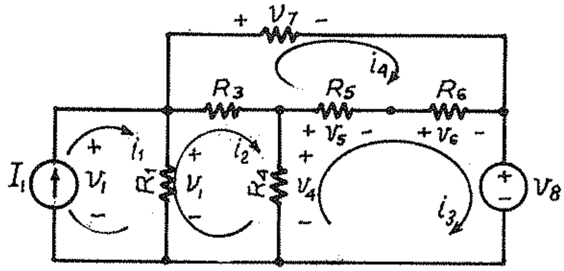
$$V_1 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_7} \right) - V_2 \left(\frac{1}{R_7} \right) = I_1 + \frac{V_8}{R_7}$$

$$-V_1\left(\frac{1}{R_3}\right)+V_2\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)-V_3\left(\frac{1}{R_5}\right)=0 \qquad ...(4)$$

$$-V_2\left(\frac{1}{R_5}\right)+V_3\left(\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)=\frac{V_8}{R_6}$$

ولغرض ايجاد التيار i يجب حل المعادلات في (4) ثم ايجاد V_3, V_2, V_1 ثم كتابة معادلة كرشوف للتيار عند العقدة 4 ومن ثم ايجاد i_8

والان نكتب معادلات كرشوف للفولتيات ونعيد رسم الدائرة مع تأشير فولتيات العناصر وتيارات الدارات كما موضح.



الشكل 3.26

وبالنظر لوجود مصدر للتيار فاننا نستبدل مصدر التيار ذهنيا بدائرة مفتوحة وبها نتخلص من الدارة الاولى ولكن التيار i_1 يبقى وان باقي المعادلات لباقي الدارات تكون كما يلي:

$$-V_2+V_3+V_4+0$$

$$-V_4+V_5-V_6+V_8=0 \qquad ...(1)$$

$$-V_6-V_5-V_3+V_7=0$$

وان المعادلة الرابعة هي $i_1 = I_1$

والان نكتب علاقة فولتيات الفروع (العناصر) بالتيارات وكما يلي:

$$
\begin{aligned}
V_2 &= R_2 (i_1 - i_2) & V_5 &= R_5 (i_3 - i_4) \\
V_3 &= R_3 (i_2 - i_4) & V_6 &= R_6 (i_3 - i_4) & \quad ...(2) \\
V_4 &= R_4 (i_2 - i_3) & V_7 &= R_7 i_4
\end{aligned}
$$

وبتعويض معادلات المجموعة (2) بمعادلات المجموعة (1) نحصل على :

$$
\begin{aligned}
& - R_2 (i_1 - i_2) + R_3 (i_2 - i_4) + R_4 (i_2 - i_3) = 0 \\
& - R_4 (i_2 - i_3) + R_5 (i_3 - i_4) + R_6 (i_3 - i_4) + V_8 = 0 \qquad ...(3) \\
& - R_6 (i_3 - i_4) - R_5 (i_3 - i_4) - R_3 (i_2 - i_4) + R_7 i_4 = 0 \\
& \qquad\qquad i_1 - I_1
\end{aligned}
$$

وان نفس الملاحظة يمكن تمييزها في هذه المجموعة حيث ان قيمة i_1 اول معادلة وقيمة i_2 في ثاني معادلة وقيمة i_3 في ثالث معادلة موجبة دائمًا. وعند ضم الحدود وتبسيط المعادلات نحصل على:

$$
\begin{aligned}
& (R_2 + R_3 + R_4) i_2 - R_4 i_3 - R_3 i_4 = R_2 I_1 \\
& - R_4 i_2 + (R_4 + R_5 + R_6) i_3 - (R_5 + R_6) i_4 = - V_8 \qquad ...(4) \\
& - R_3 i_2 - (R_5 + R_6) i_3 + (R_3 + R_5 + R_6 + R_7) i_4 = 0
\end{aligned}
$$

والخلاصة ان في معادلات العقد:

آ. عدد المجاهيل $N-1$ حيث N عدد العقد والمجاهيل هي فولتيات العقد.

ب. ان فولتية اي فرع (اوعنصر) يمكن ان يكتب بدلالة فولتيات العقد ولذا يكون عدد المعادلات هذه $B-N-1$ حيث B تمثل عدد الفروع.

جـ . ثم تعاد كتابة المعادلات في آ بدلالة الفولتيات في ب ويكون صافي عدد المعادلات $N-1$

وأما في معادلات الدارات:

آ. عدد المجاهيل يساوي $B-N+1$ والمجاهيل هي تيارات الدارات.

ب. ان تيار الفرع (او العنصر) يمكن ان يكتب بدلالة تيارات الدارات ولذا يكون عدد المعدلات هذه $N-1$

جـ. ثم يعاد كتابة المعادلات في آ بدلالة التيارات المعرفة في ب. ويكون صافي عدد المعادلات $B-N+1$.

3.7 البرنامج الثاني : حل دائرة باستخدام قانوني كرشوف:

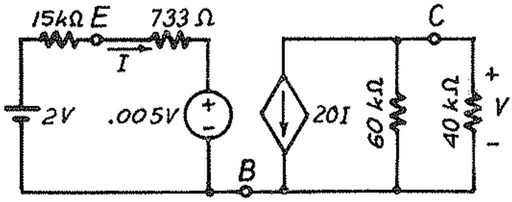
يرسم البرنامج شكل دائرة تحتوي على ثلاث دارات ذات طبيعة عامة. وبعد ان يدخل الطالب قيم المقاومات الستة والفولتيات الثلاثة، يقوم البرنامج بحل الدائرة بايجاد التيارات في كافة الفروع. ويمكن استخدام هذه المسألة من قبل الطالب لتدقيق حلوله لمسائل متعددة.

```
10 PRINT"     ------------- R1 --------------"
20 PRINT"     I    ---->I1                   I"
30 PRINT"     I                              I"
40 PRINT"     ---- R2 -------------- R3 ----"
50 PRINT"     I                I             I"
60 PRINT"    --- E1           ---E2         ---E3"
70 PRINT"     -                -             -     "
80 PRINT"     I     ^ I2       I    ^ I3     I"
90 PRINT"     R4    l          R5   l        R6    "
91 PRINT"     I                I             I"
100 PRINT"     ------------------------------"
200 DIM N$(9),V(9)
210 FOR I=1 TO 9
220 READ N$(I)
230 PRINT "WHAT IS THE VALUE OF ";N$(I)
240 INPUT V(I)
250 NEXT I
260 DATA "R1","R2","R3","R4","R5","R6",E1","E2","E3"
270 R1=V(1):R2=V(2):R3=V(3):R4=V(4):R5=V(5):R6=V(6)
```

```
280 E1=V(7):E2=V(8):E3=V(9)
290 E12=E1-E2:E23=E2-E3
300 R11=R1+R2+R3:R22=R2+R4+R5:R33=R3+R5+R6
320 K2=1-R2^2/R11/R22:K3=R5/R22+R2*R3/R11/R22
330 K5=1-R3^2/R33/R11
340 I2=(E21/K2/R22+K3*E23/K2/K5/R33)/(1-K3*(R5+R2*R3/R11)/K5/K2/R3)
350 I3=(E23/R33+I2*(R5+R3*R2/R11)/R3)/K5
360 I1=(R2*I2+R3*I3)/R11
370 IR(1)=I1
380 IR(2)=I2-I1
390 IR(3)=I3-I1
400 IR(4)=I2
410 IR(5)=I3-I2
420 IR(6)=-I3
430 PRINT "Loop currents in clockwise direction are:"
440 PRINT"Upper loop=";I1;" ampere        Left loop= ";I2;" ampere"
450 PRINT"Right loop= ";I3
460 FOR I=1 TO 6
470 PRINT"Current in the resistance ";N$(I);"=  ";IR(I)
480 NEXT I
```

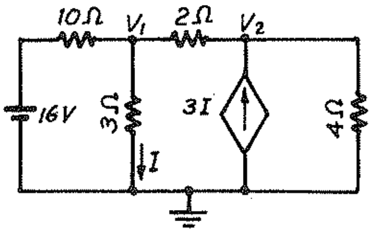
مسائل الفصل الثالث

1. تمثل الدائرة المبينة في الشكل 3.27 دائرة مكافئة لدائرة الكترونية تحوي ترانسستور. اوجد الفولتية V
(الجواب : $-27\ V$)



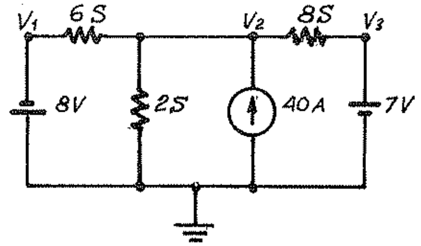
الشكل 3.27

2. اوجد قيمة V لدائرة الشكل المبينة ادناه :
(الجواب : $-24\ V$)



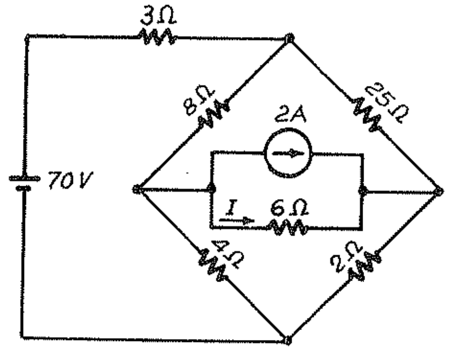
الشكل 3.28

3. باستخدام قانون كرشوف للفولتية اوجد V_2 المبينة في الشكل :
(الجواب : $3V$)



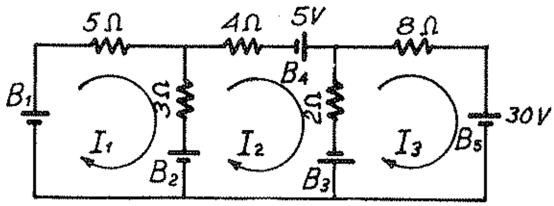
الشكل 3.29

4. باستخدام قانون كرشوف للتيار اوجد I المبينة في الشكل 3.30
(الجواب : 0.375 A)



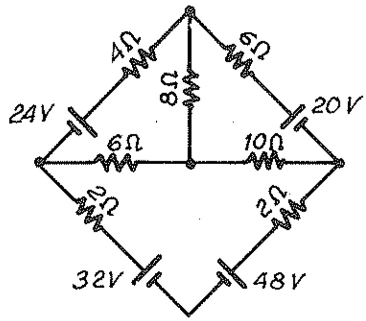
الشكل 3.30

5. اوجد التيار المجهز من كل نضيدة من النضائد المبينة في الشكل 3.31
الجواب 2.558; 0.736; 1.823; −1.313A



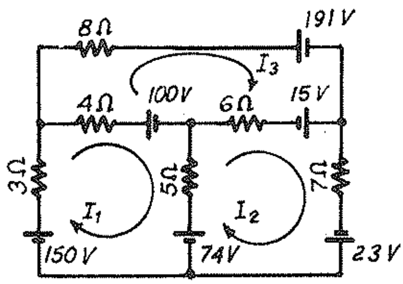
الشكل 3.31 دائرة المسألة 5

6. باستخدام التيارات الدوارة لماكسويل ، اوجد التيار المار في المقاومة 8 اوم المبينة في دائرة الشكل 3.32
(الجواب 38.3A)



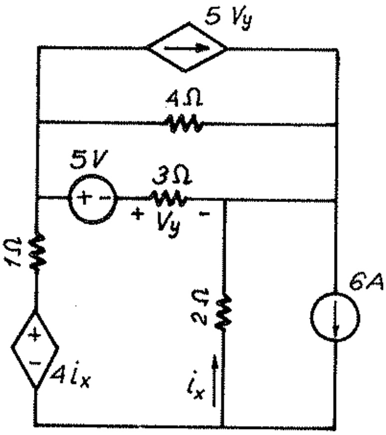
الشكل 3.32 دائرة المسألة 6

7. اوجد تيارات الشبكيات لماكسويل المبينة في الشكل 3.33
(الجواب : −5A, 4A, −2A)



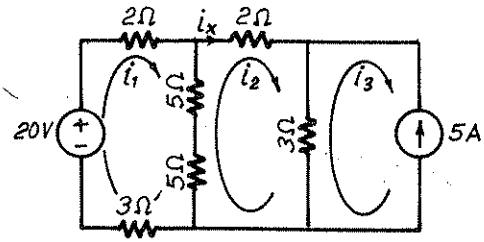
الشكل 3.33

8. اكتب معادلات ماكسويل لدائرة الشكل 3.34 ثم اوجد القدرة المستهلكة من قبل كل عنصر من عناصر الدائرة
(الجواب : i_x , V_y 1.66V, 2.85A)



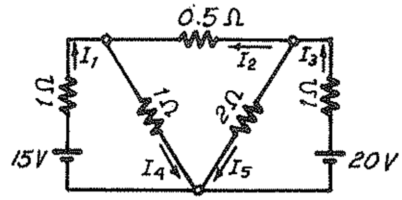
الشكل 3.34

9. باستخدام طريقة التيارات الدوارة لماكسويل اوجد التيار I_x في الدائرة المبينة في الشكل 3.35 (الجواب 0.2A−)



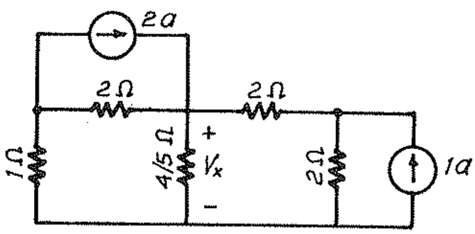
الشكل 3.35 دائرة المسألة 9

10. اوجد التيار في المقاومة 0.5 اوم المبينة في الشكل 3.36 باستخدام التحليل العقدي.
(الجواب 3.5A)



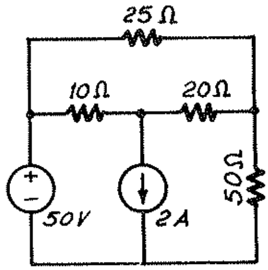
الشكل 3.36 دائرة المسألة 5

11. اوجد V_x المؤشرة في الشكل 3.37 باستخدام التحليل العقدي.
(الجواب V)



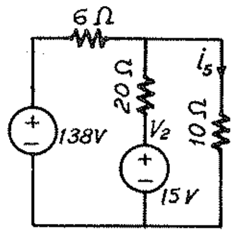
الشكل 3.37. دائرة المسألة 11

12 – لدائرة الشكل 3.38 ، اوجد الفولتية عبر مصدر التيار.
(الجواب 30.8V)



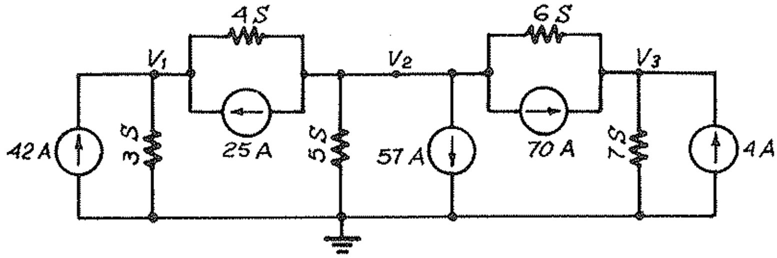
الشكل 3.38دائرة المسألة 12

13 – للدائرة المبينة في الشكل 3.39 ، اوجد التيار المار في المقاومة 10 اوم باستخدام تيارات ماكسويل الدوارة وطريقة التحليل العقدي ثم اوضح اي الطريقتين اسهل من الاخرى .
(الجواب 7.5A)



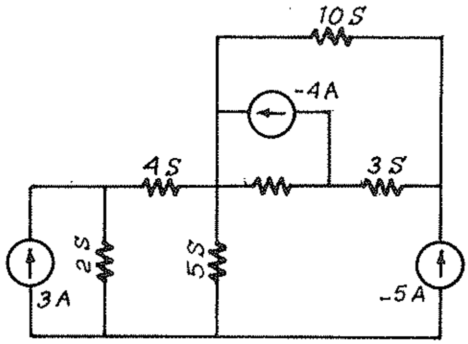
الشكل 3.39 دائرة المسألة 13

14 – اكتب معادلات العقد للدائرة المبينة في الشكل 3.40 ثم أوجد قيم الفولتيات V_3, V_2, V_1 بطريقة المحددات .
(الجواب : 5 ,8− ,2 فولت)



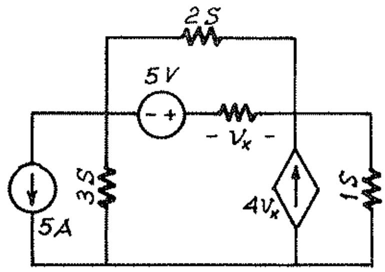
الشكل 3.40

15– أشر فولتيات العقدة بعد إختيار عقدة المرجع لدائرة الشكل 3.41 ثم اكتب معادلات هذه العقد ومامقدار القدرة المجهزة من قبل المصدر 4A.
(الجواب : 2.62W)



الشكل 3.41

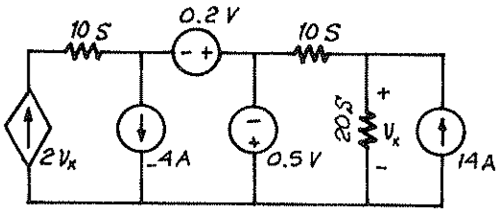
16– اكتب معادلات العقد في دائرة الشكل 3.42 ومن ثم أوجد القدرة المجهزة من قبل المصدر 5V.
(الجواب : 13.3W, 0.58V, 3.85V)



الشكل 3.42

17– لدائرة الشكل 3.43 إجعل العقدة في قاعدة الشكل هي العقدة المرجع ، ثم اكتب معادلة عقدية واحدة فقط لإيجاد قيمة v_x. ثم أوجد قدرة جميع المصادر في الدائرة.

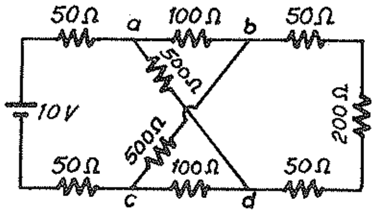
(الجواب $-0.7W, 6.3W, 4.2W, 0.3V-$)



الشكل 3.43

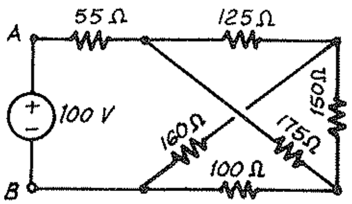
18– حَوّل الدائرة المبينة في الشكل 3.44 الى دائرة مستوية ، ثم اوجد التيار في المقاومة 100 اوم باستخدام التيارات الدوارة لماكسويل.

(الجواب : 35.5 mA)



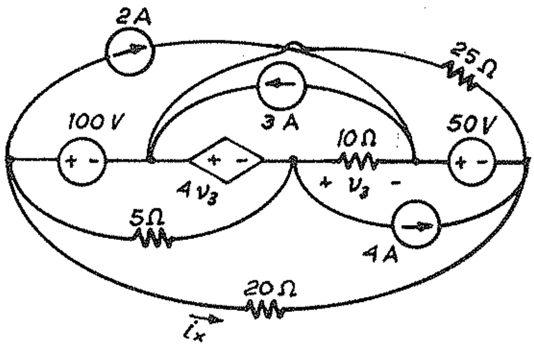
الشكل 3.44 دائرة المسألة 18

19– اوجد التيار المار في المقاومة 150 اوم المبينة في الشكل 3.45
(الجواب 0.05A)



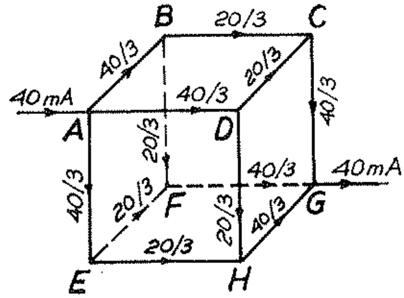
الشكل 3.45 دائرة المسألة 19

20– بإستخدام التحليل العقدي أوجد قيمة i لدائرة الشكل 3.46 غير المستوية .
(الجواب : 1.818A 6Ω)



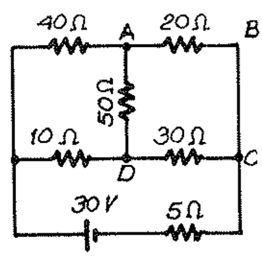
الشكل 3.46

21– اثنا عشر سلكا متشابها ، كل منها مقاومته 6Ω . رتبت لتشكل حافات مكعب . كالمبين في الشكل 3.47 . ادخل تيار 40mA في المكعب من احد زواياه وخرج من الزاوية المقابلة . احسب فرق الجهد الناتج بين هاتين الزاويتين والمقاومة المكافئة للشبكة .
(الجواب 0.2V ، 5Ω)



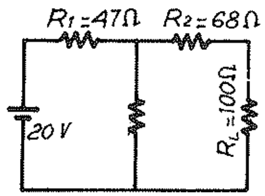
الشكل 3.47 دائرة المسألة 21

22– اذا كانت المقاومة 50 اوم المبينة في الشكل 3.48 تمثل مقاومة كلفانوميتر في قنطرة ويتستن ، اوجد مقدار التيار الذي يمر في الكلفانوميتر باستخدام قانوني كرشوف مباشرة او باستخدام التيارات الدوارة لماكسويل .
(الجواب 0.14A نحو الاعلى)



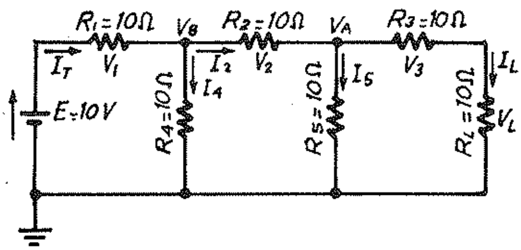
الشكل 3.48 دائرة المسألة 22

23– في الدائرة المبينة في الشكل 3.49 . إفرض أن التيار المار في المقاومة R يساوي وحدة التيار (1 أمبير) أوجد التيار الرئيسي في الدائرة بإتجاه عكسي مبتدءاً من تيار الحمل R_L المفترض . ثم صحح قيمة تيار الحمل لغرض إيجاد القيمة الحقيقية لهذا التيار.
(الجواب : 68.03mA)



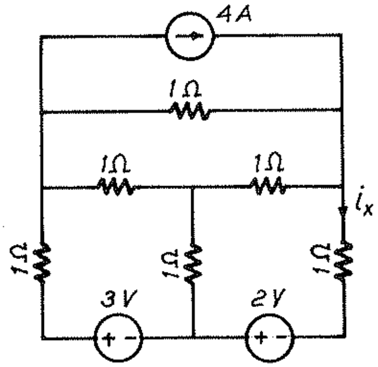
الشكل 3.49

24– بإتباع الطريقة المبينة في السؤال السابق أوجد قيمة فولتية المصدر في الشكل 3.50 وكذلك تيار الحمل.
(الجواب 0.0769A, 130V)



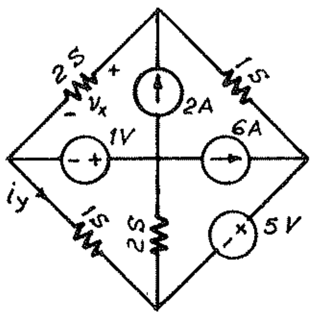
الشكل 3.50

25– اوجد التيار i_x في الشكل 3.51 بطريقة (أ) التحليل العقدي (ب) معادلات ماكسويل (ج) بتحويل مصادر الفولتية الى مصادر تيار ثم بإستخدام التحليل العقدي (د) بتحويل مصدر التيار الى مصدر فولتية وكذلك بإستخدام التحليل العقدي.
(الجواب 4.75)



الشكل 3.51

26– مستخدماً معادلات ماكسويل والتحليل العقدي. أوجد قيم v_x و i_y المبينة في دائرة الشكل 3.52
(الجواب: 2.54V ، 0.62A–)



الشكل 3.52

الفصل الرابع

تبسيط الدوائر الكهربائية

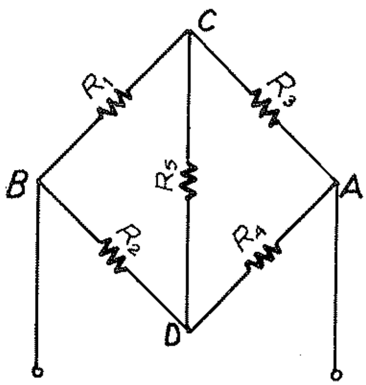
قل انظروا ماذا في السموات والأرض
يونس 101

4.1مقدمة

لقد اعتمد تحليل الدوائر البسيطة في الفصل الثاني بالدرجة الاولى على تطبيق قانون اوم ، بينما اوضحنا في الفصل الثالث ضرورة استخدام قانوني كرشوف لتحليل الدوائر الاكثر تعقيدا. بالرغم من ان جميع الدوائر الكهربائية الخطية يمكن تحليلها باستخدام قانوني كرشوف بالاساليب التي مرت في الفصل الثالث ، الا ان هذا التحليل يكون احيانا طويلا ومعقدا، لذا فان هذا الفصل سيتركز على محاولة تطبيق بعض النظريات لغرض الوصول الى الحل بسرعة اكثر من تطبيق قانوني كرشوف. كما انه في بعض الاحيان يكون المطلوب ايجاد مجهول ما كالفولتية او التيار في فرع معين دون غيره. وهذه النظريات تساعد كثيرا في الوصول الى هذا المطلب بينما يتطلب تطبيق قانوني كرشوف حل الدائرة باجمعها للوصول الى التيار او الفولتية المطلوبة.

4.2 ربط النجم والدلتا

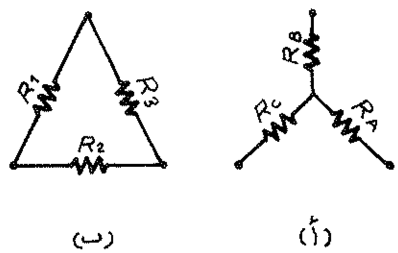
عند تبسيط بعض الدوائر لايجاد المقاومة المكافئة لها ربما يمر بنا بعض الدوائر التي لانجد فيها اي موقع مناسب للبدء بتطبيق أحد قانوني التوالي والتوازي، كالدائرة المبينة في الشكل 4.1.



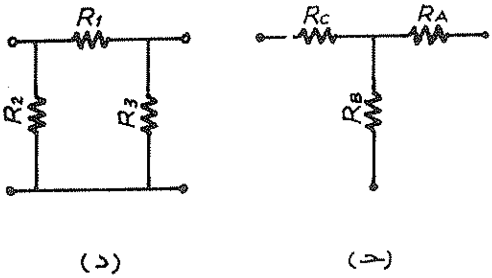
الشكل 4.1

يلاحظ في هذا الشكل ان هناك بعض النقاط مثل D, C يتصل بها ثلاث مقاومات الى جهات مختلفة كما يلاحظ وجود دارتين مغلقتين، كل منها تتصل بثلاث نقاط مختلفة اي DCA و BDC.

لذا يمكن تمييز نوعين مختلفين من الربط في مثل هذه الدوائر بين اي ثلاث نقاط مشابهين للربطين المبينين في الشكل (4.2).



الشكل 4.2 (أ) ربط النجم (ب) ربط الدلتا



تابع الشكل 4.2
(جـ) ربط T وهو ربط النجم (د) ربط π وهو ربط الدلتا

يدعى الربط 4.2 أ بربط النجم Star او ربط Y ، حيث انه شعاعي يشبه النجم او الحرف اللاتيني الكبير Y. وربما يرسم بصيغة مختلفة قليلاً، كما في الشكل 4.2 جـ ، ويسمى حينئذ ربط T. اما الشكل 4.2 ب فيوضح ربطاً مختلفاً يدعى بربط الدلتا Delta والمشتق من الحرف اللاتيني الكبير Δ . وقد يظهر مختلفاً عن ذلك بقليل كما في الشكل 4.2 د. وعندها يسمى ربط π

من التمعن في الشكلين 4.2 (أ) و (ب)، نجد ان كلا منها يربط ثلاثة نقاط يمكن ان تتصل خارجياً مع اية دائرة كان. فاذا كانت التيارات التي تمر في ربط الشكل 4.2 أ والفولتيات عبر اطرافها الثلاث هي نفسها بالنسبة للشكل 4.2 ب ، قيل عن ربطي النجم والدلتا انها متكافئان. وبكلمة أخرى انه لكي يكونا متكافئين فان قياس المقاومة بين أي نقطتين من ربط النجم يجب ان يكافيء قياس المقاومة بين النقطتين المناظرتين لربط الدلتا. وباتباع هذا الاسلوب يمكن ايجاد علاقات التحويل من النجم الى الدلتا وبالعكس.

من اليسير التأكد ان المقاومة المكافئة بين A وB (مع ابقاء C سائبة) لربط النجم تساوي $R_A + R_B$ ، بينما لربط الدلتا تكون R_1 وR_2 مربوطتين على التوالي ومكافئهما بدوره مربوط على التوازي مع R_3. اي ان المكافيء بين A وB هو

$$\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot1)$$

وبمساواة هاتين الكميتين بين النجم والدلتا

$$R_A + R_B = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot2)$$

وبتكرار الطريقة نفسها بين الطرفين A وC مع ابقاء B سائبة ، نجد.

$$R_A + R_C = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot3)$$

وكذلك بين B وC مع ترك A سائبة ، فان

$$R_B + R_C = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot4)$$

وبحل المعالادت الثلاثة (4.2) و (4.3) و (4.4) لايجاد R_A, R_B وR_c ، نجد

$$R_A = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot5)$$

$$R_B = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot6)$$

$$R_C = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \qquad ...(4\cdot7)$$

وهذه القوانين الثلاثة هي القوانين التي تفيد لتحويل ربط الدلتا والاستعاضة عنه بربط النجم . فان كل مقاومة من مقاومات اشعة النجم تساوي " حاصل ضرب المقاومتين المربوطتين بتلك النقطة فربط الدلتا مقسوماً على حاصل جمع المقاومات الثلاثة".

* يمكن حل هذه المعادلة بجمع (4.2) و (4.3) وطرح (4.4) ثم القسمة على 2، نجد R_A والتي بتعويضها في (4.3) تعطي R_B وفي (4.2) تعطي R_C.

اما للاستعاضة عن ربط النجم بربط الدلتا، فمن الضروري اشتقاق ثلاث معادلات اخرى يمكن الحصول عليها بحل المعادلات ** (4.5) و (4.6) و (4.7) آنفة الذكر ولكن هذه المرة للمتغيرات R_1وR_2وR_3 بدلالة R_A و R_B و R_C.

وتكون النتيجة هذه المرة:

$$R_1 = R_B + R_C + \frac{R_B R_C}{R_A} \qquad ...(4\cdot8)$$

$$R_2 = R_C + R_A + \frac{R_A R_C}{R_B} \qquad ...(4\cdot9)$$

$$R_3 = R_A + R_B + \frac{R_A R_B}{R_C} \qquad ...(4\cdot10)$$

ويمكن تذكر هذه المعادلات من التمعن في صيغتها بالمقارنة مع الشكل 4.2 أ و ب حيث ان مقاومة الفرع الذي يربط بين B, A في الدلتا يساوي "حاصل جمع المقاومتين المربوطتين بهذين الفرعين R_B، R_A مجموعاً معه حاصل ضربها المقسوم على المقاومة الثالثة في ربط النجم" وربما يمكن وضع المعادلة 4.8 بصيغة أخرى وذلك بتوحيد مقاماتها فتكون.

$$R_1 = \frac{R_A R_C + R_B R_C + R_A R_B}{R_A} \qquad ...(4\cdot11)$$

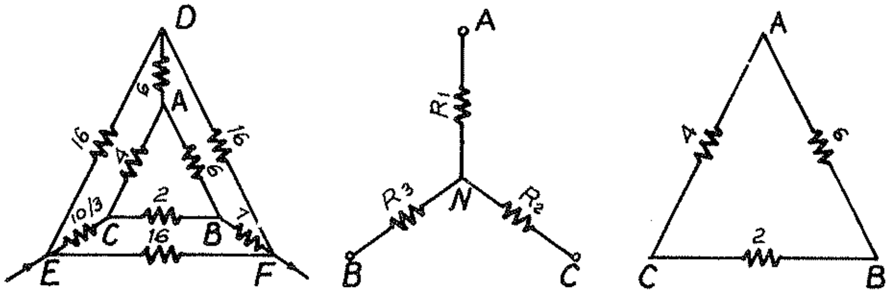
والتي يمكن تذكرها بان "بسطها يعادل مجموع حاصل ضرب كل مقاومتين في الربط مقسوماً على المقاومة المقابلة للمقاومة المطلوب حسابها":

** يترك للطالب محاولة اشتقاق هذه المعادلات.

ويلاحظ انه كان بالامكان اشتقاق المعادلات التي تستعمل للتحويل من النجم الى الدلتا باستخدام التوصيليات بدل المقاومات وربط دائرة قصر بين طرفين متجاورين في كل مرة. ويترك للطالب اكمال هذه المحاولة ومقارنة النتائج مع ماتقدم.

مثال (4.1)

في الدائرة المبينة في الشكل 4.3، اوجد المقاومة المكافئة بين E وF ، علماً بان كافة المقاومات معطاة بالأومات .



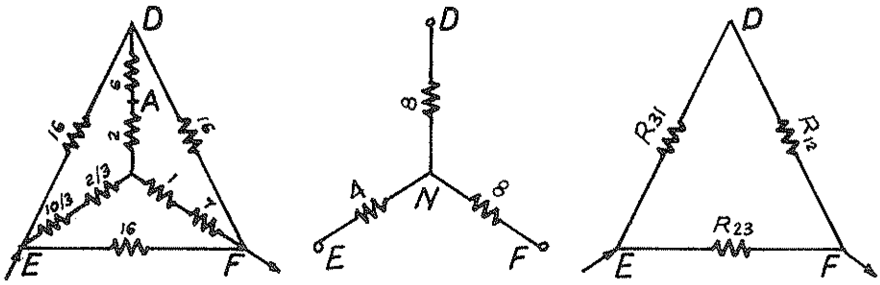
الشكل 4.3 دائرة المثال 4.1

الحل:

نحول الدلتا CBA الى نجم CBA؛ حيث

$$R_1 = \frac{6 \times 4}{6+4+2} = 2\Omega \text{ و } R_2 = \frac{6 \times 2}{6+4+2} = 1\Omega \text{ و } R_3 = \frac{4 \times 2}{6+4+2} = \frac{2}{3}\Omega$$

تجمع المقاومات المتوالية في الفروع DAG و FBG و ECG كما مبين في الشكل 4.4 أدناه.



الشكل 4.4 دائرة حل المثال 4.1

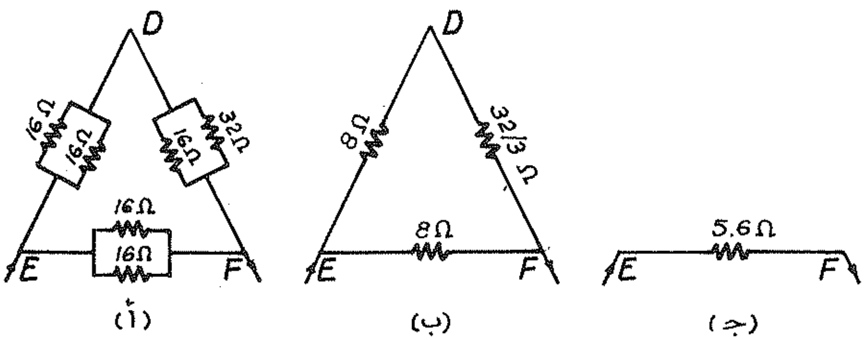
فتكون هذه المقاومات 4, 8, 8 اوم على التعاقب. ثم نقوم بتحويل النجم المربوط بين FED والذي مركزه G، الى دلتا فتكون:

$$R_{12} = 8 + 8 + \frac{8 \times 8}{4} = 32\ \Omega$$

$$R_{23} = 8 + 4 + \frac{8 \times 4}{8} = 16\ \Omega$$

$$R_{31} = 8 + 4 + \frac{8 \times 4}{8} = 16\ \Omega$$

وبذا يصبح هناك ربطان بشكل دلتا على التوازي نهايتها D سائبة، لذا فهما ليسا بربط دلتا بل يمكن تبسيطها بالشكل 4.5 أ.



الشكل 4.5

المقاومة ED تساوي $\frac{16 \times 16}{16 + 16} = 8\ \Omega$

وكذلك FE تساوي $8\ \Omega$ و FD تساوي $\frac{32 \times 16}{32 + 16} = \frac{32}{3}\ \Omega$

المقاومتان DE و FD على التوالي مكافئتها يساوي

$$8 + \frac{32}{3} = \frac{56}{3}\ \Omega$$

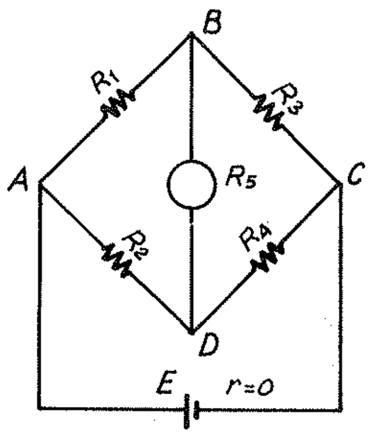
فتكون المقاومة الكلية المكافئة للدائرة بين FE تساوي

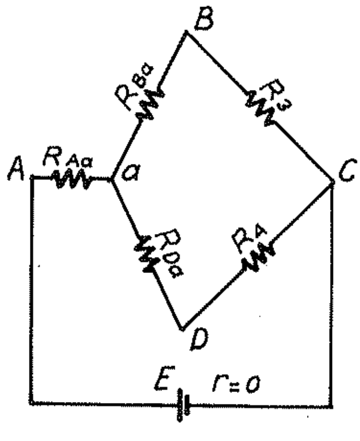
$$\frac{8 \times 56/3}{8 + 56/3} = 5{\cdot}6\ \Omega$$

مثال 4.2

في الدائرة المبينة في الشكل 4.6 والتي تمثل قنطرة ويتستون لقياس المقاومات، تمثل المقاومة R_S مقاومة الاميتر. اوجد التيار الذي يمر في الاميتر لقيم المقاومات والفولتية المبينة أدناه.

$R_1 = 10\ \Omega$ و $R_2 = 20\ \Omega$ و $R_3 = 20\ \Omega$ و $R_4 = 40\ \Omega$ و $R_5 = 1\Omega$ و $E = 10V$





شكل 4.6 دائرة المثال 4.2 وتبسيطاتها

الحل:
نحول الدلتا DBA الى نجم فتكون:

$$R_{AO} = \frac{10 \times 20}{10 + 20 + 1} = 6{\cdot}45\ \Omega$$

$$R_{BO} = \frac{1 \times 10}{10 + 20 + 1} = 0{\cdot}323\ \Omega$$

$$R_{DO} = \frac{1 \times 20}{10 + 20 + 1} = 0{\cdot}645\ \Omega$$

وبدمج المقاومات المتوالية ينتج

$$R_{OB} + R_{BC} = R_{OBC} = 20 + 0{\cdot}323 = 20{\cdot}323\ \Omega$$

$$R_{OD} + R_{DC} = R_{ODC} = 40 + 0{\cdot}645 = 40{\cdot}645\ \Omega$$

مكافىء المقاومتين المتوازيتين R_{OBC} و R_{ODC} هو

$$\frac{20{\cdot}323 \times 40{\cdot}645}{20{\cdot}323 + 40{\cdot}645} = 13{\cdot}55\ \Omega$$

فتكون المقاومة COA

$$R_{AOC} = 6{\cdot}45 + 13{\cdot}55 = 20\ \Omega$$

فيكون التيار المار فيها

$$I = \frac{10}{20} = 0{\cdot}5\ A$$

وحيث ان الغاية هي ايجاد التيار في المقاوم R_5 المربوط بين D, B ، لذا يمكننا الوصول الى الحل بايجاد الفولتية بين B وD والتي هي الفرق بين الفولتيتين CB وCD كما يتضح من الشكل 4.6 ب.

ان التيار الذي يمر في CBO هو حاصل قسمة الفولتية CO على المقاومة CBO، لذا فالفولتية CE هي:

$$13.55 \times 0{\cdot}5 = 6{\cdot}77\ V$$

والتيار المار في CBO يكون

$$\frac{6{\cdot}77}{20{\cdot}323} = 0{\cdot}333\ A$$

والتيار في CDO يكون

$$\frac{6{\cdot}77}{40{\cdot}645} = 0{\cdot}167\ A$$

وعليه فالفولتية CB

$$0{\cdot}333 \times 20 = 6{\cdot}67\ V$$

والفولتية CD

$$0{\cdot}167 \times 40 = 6{\cdot}67\ V$$

لذا فالفولتية DB تساوي صفراً ومن ثم يكون التيار المار في المقاومة R_5 يساوي صفراً ايضا .

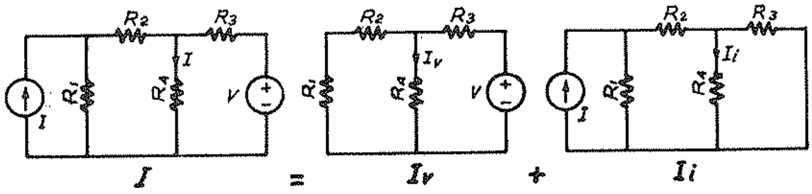
4.3 نظرية التراكيب superposition theorem

اذا ربطنا دائرة بسيطة تحتوي على مصدر فولتية وكانت قيمة هذا المصدر خمسة فولتات ، وكان مقدار التيار الذي يمر في الدائرة امبيرا واحدا مثلاً ، فمن البديهي انه عند استبدال مصدر الفولتية باخر ذي عشرة فولتات ان يتسبب ذلك في امرار تيار مقداره امبيرين ، طالما كانت عناصر الدائرة كلها خطية . اذا تصورنا ان المصدر الثاني هو عبارة عن مصدرين مربوطين على التوالي كل منها ذو فولتية مقدارها خمسة فولتات فيعني ذلك ان كلا من المصدرين ذوي خمسة فولتات قد تسبب في امرار تيار مقداره امبيرا واحدا ، وكان التيار الكلي عبارة عن مجموعة التيارين الناتجين من كل من المصدرين . كما ان فولتية المصدر المكافيء للمصدرين المربوطين على التوالي هي مجموع فولتيتيهما . من ذلك يمكننا القول ان تراكب مصدرين ذوي فولتيتين معينتين قد يتسبب في امرار تيارين متراكبين كل منها يعود الى احد المصدرين ويكون التيار الكلي عبارة عن مجموع التيارين وبالرغم من ان هذا المثال قد افترض ربط درجة تعقيدها شرط ان تكون كافة العناصر فيها خطية .

واستناداً لما سبق يمكن كتابة نص نظرية التراكيب بالشكل التالي :

"في اية دائرة كهربائية تحتوي على اكثر من مصدر واحد (فولتية او تيار) يمكن ايجاد التيار في اي فرع او فرق الجهد عبره باخذ كل مصدر على انفراد ، ثم بعد ذلك جمع

تأثيرها مع اخذ الاتجاه بنظر الاعتبار ملاحظة انه عند حذف مصدر الفولتية يجب ان يستبدل بدائرة قصر وعند حذف مصدر التيار يجب ان يستبدل بدائرة مفتوحة".



الشكل 4.7 (أ) الدائرة الاصلية (ب) حذف مصدر التيار (جـ) حذف مصدر الفولتية

يمكن توضيح مضمون هذه النظرية بالرجوع الى الشكل 4.7أ الذي يحوي على دائرة فيها مصدر فولتية ومصدر تيار مربوطين في فروع مختلفة في الدائرة. فاذا طلب ايجاد التيار في المقاومة R_4 ولنفرض انه يساوي I ، تنص النظرية على انه بالامكان حل دائرتي الشكل 4.7ب و 4.7جـ لايجاد التيارين I_v و I_i على التعاقب ثم اضافتها لبعض للحصول على I ، اي :

$$\text{open circuit } I = I_v + I_i \qquad (4.12)$$

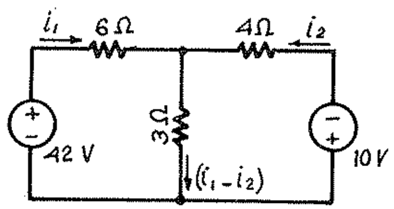
هذا مع ملاحظة ان دائرة الشكل 4.7ب قد رسمت بحذف مصدر التيار (اي باستبداله بدائرة مفتوحة بينما رسم الشكل 4.7جـ بحذف مصدر الفولتية (اي باستبداله بدائرة قصر short circuit). ومن الواضح ان حل اي من الدائرتين اللتين في الشكلين 4.7ب و 4.7جـ يكون اسهل بكثير من حل الدائرة الاصلية. كما ان عملية الاضافة عملية سهلة ويجب ان تراعي فيها الاتجاهات.

مما سبق يتبين ان نظرية التراكب هي نظرية عامة ناتجة من الخاصية الخطية وهي تنطبق على كثير من العلوم الاخرى غير الكهربائية طالما انطبقت الخاصية الخطية. فمثلا

يتمدد القبان الحلزوني بطول معين نتيجة تسليط ثقل ما ويتمدد ضعف ذلك الطول ان اضيف ثقل آخر مساوٍ للثقل الاول ، وهكذا يقال عن تشغيل مبردات الهواء في انظمة تكييف الهواء مع بعضها او في تشغيل مضخات الماء في شبكة توزيع المياه وغير ذلك من الانظمة الخطية المألوفة .

مثال (4.3)

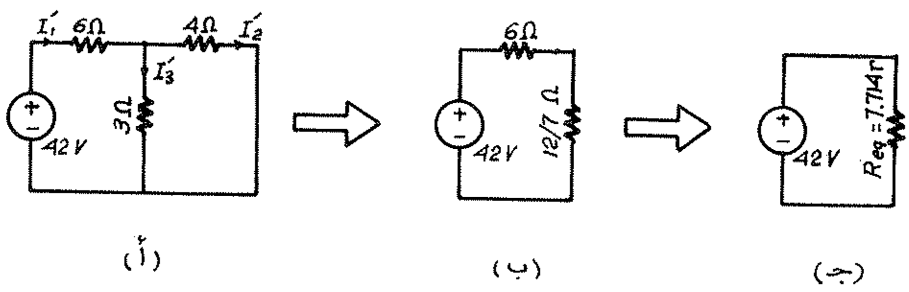
اوجد التيار في المقاومة 3Ω باستخدام نظرية التراكيب لدائرة الشكل 4.8 .



الشكل 4.8 دائرة المثال (4.3)

الحل :

عند استبدال المصدر بدائرة قصر تظهر الدائرة كما مبين في الشكل 4.9أ. المقاومة المكافئة R_{eq} تساوي :



الشكل 4.9 (أ) استبدال المصدر 10V بدائرة قصر (ب) دمج المقاومات المتوازية 3, 4 اوم (جـ) دمج المقاومات المتوالية .

تيار المصدر 42v يساوي

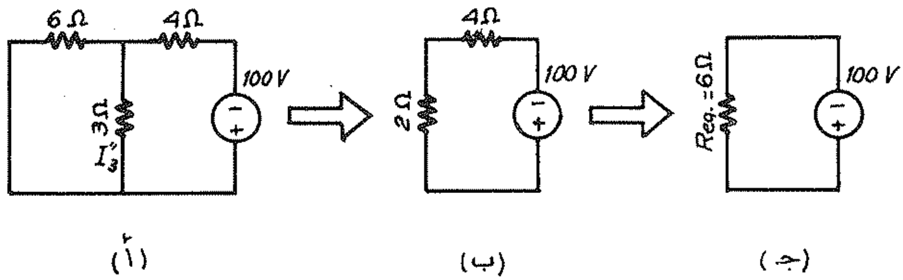
$$R_{eq} = \frac{3 \times 4}{3 + 4} + 6 = 7.714\ \Omega$$

تيار المقاوم 3 Ω بساوي

$$I_1' = \frac{42}{7.714} = 5.444\ \text{A}$$

$$I_2' = \frac{5.444 \times 4}{3 + 4} = 3.111\ \text{A}$$

وعند استبدال مصدر الفولتية 42V بدائرة قصر نحصل على دائرة الشكل 4.10أ.



الشكل 4.10 (أ) استبدال المصدر 42 بدائرة قصر (ب) دمج المقاومات المتوازية 3,6 أوم (جـ) دمج المقاومات المتوالية 4.2 أوم.

المقاومة المكافئة تساوي

$$R_{eq} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} + 4 = 6\ \Omega$$

تيار المصدر 10v – يساوي

$$I_2'' = \frac{-10}{6} = -1.666\ \text{A}$$

تيار المقاوم 3Ω يساوي

$$I_3'' = \frac{-1.666 \times 6}{3 + 6} = -1.111\ \text{A}$$

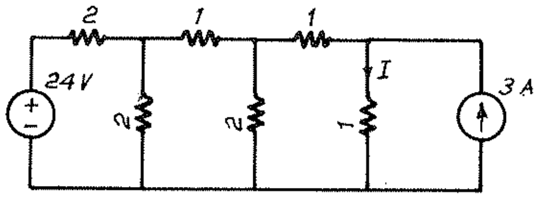
وعليه يكون التيار المقاوم 3 Ω عند ربط كل من المصدرين معاً

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 3.111 - 1.111 = 2\text{A}$$

يمكن للطالب التأكد من الناتج باستخدام التيارات الدوارة لماكسويل.

مثال (4.4)

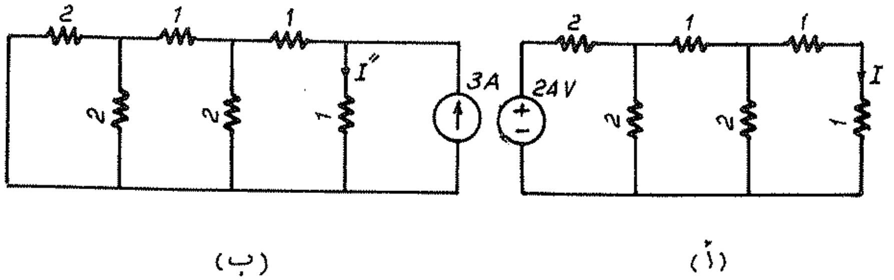
في الشكل 4.11 اوجد التيار I بطريقة التراكيب.



الشكل 4.11 دائرة المثال (4.4)

الحل:

عند حذف المصدر 3A ، نحصل على دائرة الشكل 4.12أ فتكون المقاومة المكافئة بدمج المقاومات من الجهة اليمنى على التوالي وعلى التوازي بصورة متعاقبة هي



الشكل 4.12 (أ) حذف المصدر 3A (ب) حذف المصدر 24V ويكون التيار الكلي للمصدر 24V

$$I_{24} = \frac{24}{3} = 8A$$

وبتقسيم التيار مرتين بين المقاومات المتسلسلة ابتداءً من اليسار الى اليمين يكون التيار I' مساوياً 2A. وبالرجوع الى الشكل 4.12ب الذي حذف فيه مصدر الفولتية وبدمج المقاومات من اليسار الى اليمين تكون المقاومة المكافئة $\frac{2}{3}\,\Omega$ ، فتكون الفولتية عبر مصدر التيار 2 فولت وباستخدام تقسيم التيار يكون التيار I''.

$$I'' = 3 + \frac{2}{3} = 2A$$

لذا فالتيار الكلي I يساوي

$$I = I' + I'' = 2 + 2 = 4A$$

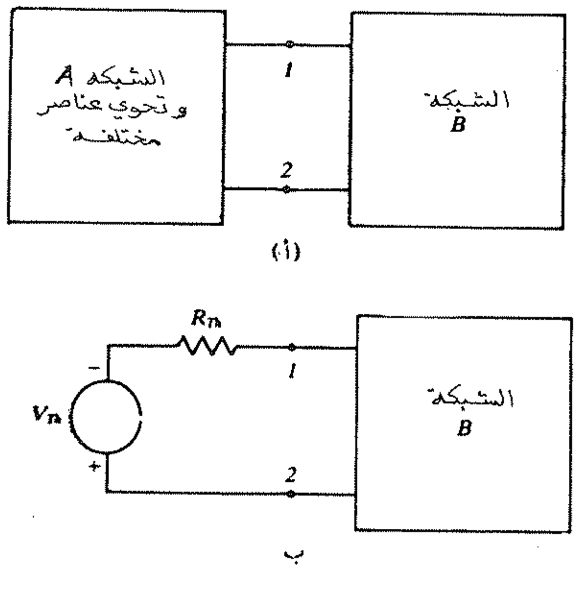
4.4 نظرية ثيفنن

سميت هذه النظرية على اسم المهندس الفرنسي ثيفنن Thevenin الذي نشر هذه النظرية عام 1883. وتكمن فائدة هذه النظرية في تطبيقاتها الخاصة عند محاولة ايجاد تيار في مقاومة ما في الدائرة او الفولتية عبرها، دون ان يكون حل الدائرة باكملها مطلوباً. كما يزيد من فائدتها واستخدامها سهولة نتائجها عند استبدال ذلك المقاوم في الدائرة بمقاوم اخر، حيث كما سيتضح، لايحتاج تطبيق هذه النظرية الى اعادة حل الدائرة باكملها استنادا الى القيم الجديدة، بل يكفي الاعتماد على جزء كبير من الحل مع استبدال المقاومة في الخطوة الاخيرة من الحل.

تشير النظرية الى ان اية دائرة خطية مهما كانت معقدة يمكن تجزئتها الى جزئين مرتبطين مع بعضهما بنقطتين. وكل من هذين الجزئين يمكن الاستعاضة عنه بدائرة بسيطة تحوي مصدرا للفولتية ومقاومة مرتبطين على التوالي. اما ان كان احد الجزئين من الدائرة الاصلية لايحوي سوى مقاومة واحدة مثلا فليس هناك امكانية لتبسيطة اكثر من ذلك. وهذا المجال الاخير هو الذي تجد النظرية فيه تطبيقات كبيرة ويمكن وضع النظرية بالشكل التالي :

ني دائرة خطية يمكن استبدال اي جزء مرتبط مع بقية الاجزاء بواسطة طرفي توصيل مثل 2,1 فقط منها (مثل الشبكة A في الشكل 4.13أ) بمصدر فولتية مثالي على التوالي مع مقاوم كما في الشكل 4.13ب . وقيمة فولتية المصدر تعادل الفولتية التي تظهر عبر طرفي جزء الدائرة المستعاض عنه عند فتح هذين الطرفين (أي فولتية الدائرة المفتوحة بين 2,1) . وقيمة المقاومة تعادل مقاومة ذلك الجزء من الدائرة والتي تظهر عبر طرفيها (b,a) عند الغاء المصادر فيها (الغاء مصدر الفولتية المثالي يعني الاستعاضة عنه بدائرة قصر والغاء مصدر التيار المثالي يعني الاستعاضة عنه بدائرة مفتوحة)""

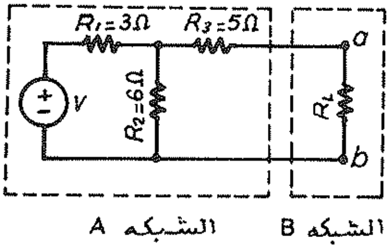
ان الدائرتين المبينتين في الشكلين ا و ب متكافئتان حسب هذه النظرية اي انه مهما كانت محتويات الشبكة ب ومهما كانت محتويات الشبكة ا من عناصر خطية ومصادر فولتية او تيار فان التيار الذي يسري بين الشبكتين ا و ب متساوي في الشكلين كما ان الفولتية بين الطرفين 1 و 2 متساويـــة في الشكلين ايضاً وبذلك يمكن القول ان الاستعاضة عن الشبكة ا المعقدة بما يكافؤها في الشكل ب (مصدر ومقاومة على التوالي) هو مضمون نظرية ثفنن لهذه



الشكل 4.13
تمثيل دائرة ثفنن

مثال (4.5)

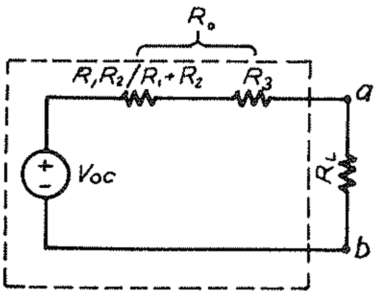
لنأخذ الدائرة المبينة في الشكل 4.14أ والتي يطلب فيها ايجاد التيار في المقاوم R_L لعدد من قيم هذه المقاومة.



الشكل 4.14أ دائرة المثال (4.5)

الحل:

يمكن تجزئة الدائرة الى جزئين: الجزء الايمن ويحوي المقاوم R_L فقط والجزء الايسر ويحوي المقاومات الثلاثة الباقية مع مصدر الفولتية. تنص نظرية ثفنن على ان دائرة الشكل 4.14أ يمكن الأستعاضة عنها بدائرة الشكل 4.14ب. والتي بقي فيها الجزء الأيمن على ما هو عليه حاوياً المقاوم R_L



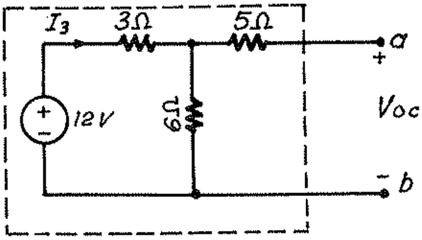
(ب)

الشكل 4.14ب خطوات تحوير دائرة المثال (4.5) لايجاد دائرة ثفنن المكافئة

بينما استعيض عن الجزء الايسر بمصدر الفولتية V_{OC} على التوالي مع المقاوم R_o. وتبين من ذلك ان الدائرة الجديدة هي دائرة بسيطة يمكن حلها بسهولة ان كانت قيمتا R_O، V_{OC} معلومتين. لايجاد قيمة مصدر الفولتية نرجع الى الجزء الايسر من دائرة الشكل 4.13

ونفترضه مفتوحاً عن الجزء الايمن كما مبين في الشكل 4.15. فالفولتية V_{OC} يمكن ايجادها من هذه كما يلي :

$$I_{3\Omega} = \frac{12}{3 + 6} = 1{\cdot}33\ \text{A}$$

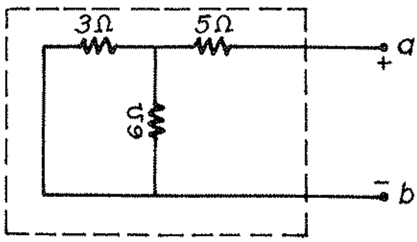


الشكل 4.15 دائرة المثال (45) فيها الجزء الايسر مفتوحاً.

ولايجاد V_{OC} تحسب قيمة الفولتية عبر المقاوم 6Ω لعدم مرور التيار في المقاوم 5Ω

$$V_{OC} = V_{6\Omega} = 1{\cdot}33 \times 6 = 8\ \text{V}$$

اما المقاومة R_o فتحسب من دائرة الشكل 4.16 والتي هي دائرة الشكل 4.15 نفسها مع الأستعاضة عن مصدر الفولتية المثالي بدائرة قصر لايجاد المقاومة R_o والتي هي المقاومة



الشكل 4.16 دائرة المثال (4.5) مع قصر مصدر الفولتية

بين النقطتين a و b ، نجد ان المقاومتين 6Ω و 3Ω مربوطتان على التوازي وتكونان مقاومة مقدارها

$$\frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2\,\Omega$$

والتي هي على التوالي مع المقاومة 5Ω . فتكون النتيجة 7Ω والتي هي قيمة المقاومة R_o .

يلاحظ بان دائرتي الشكلين 4.15 و 4.16 هما دائرتان مشتقتان من جزء الدائرة الايسر المبين في الشكل 4.13. حيث فتحت الدائرة في النقطتين a و b فحصلنا على الشكل 4.15 ، بينما استبدلت مصادر الفولتية بدائرة قصر فحصلنا على الشكل 4.16 ويجب عدم الالتباس بينهما.

وتجدر الإشارة الى أن إيجاد V_{OC} , R_O عمليتان مستقلتان ولامانع من إيجاد أي منها قبل الأخر.

بعد ايجاد قيمتي V_{oc} و R_o للدائرة المبينة في الشكل 4.13 د يمكن ايجاد التيار في المقاوم R_L بسهولة مهما كانت قيمة R_L . فالمقاومة الكلية تساوي $7 + R_L$ ويكون التيار المار فيها .

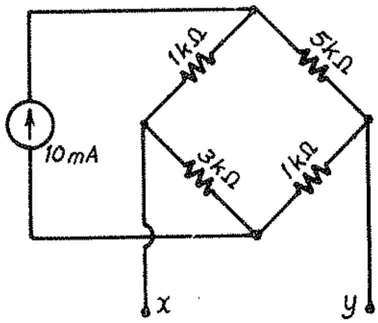
$$I_{RL} = \frac{V_{OC}}{R_O + R_L} = \frac{8}{7 + R_L}$$

والذي يمكن تطبيقه لاية قيمة لـ R_L . فالتيار يساوي امبيراً واحداً ان كانت R_L تساوي اوما واحداً ويساوي نصف امبير ان كانت R_L تساوي 7 اوم وكما يظهر من تطبيق العلاقة (4.2) وهكذا لاي قيمة اخرى لـ R_L . كما يمكن حساب الفولتية عبر R_L والقدرة المصروفة فيها بالطريقة نفسها.

تجدر الاشارة هنا الى ان الجزء الايسر من دائرة الشكل 4.14 قد إختفت عناصره كلها في دائرة ثيفنن المبينة في الشكل 4.15 ولم يبق منه اي عنصر. بل إستبدلت بمصدر فولتية ومقاومة كما في الشكل. ولذلك فان التيارات والفولتيات في الشكل 4.14 ليست ذات اهمية عدا الفولتية عبر النقطتين 1 و 2 والتيار المار في الموصلين المؤديين الى هاتين النقطتين. ويعني ذلك إهمال حساب التيارات او الفولتيات في بقية اجزاء الدائرة 4.14 عند تغيير قيمة R_L .

مثال (4.6)

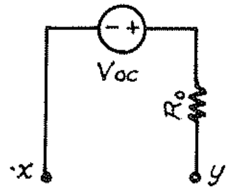
اوجد دائرة ثيفنن المكافئة للشكل 4.17 بين النقطتين x و y (أ) للدائرة كما هي (ب) عند استبدال مصدر التيار بمصدر فولتية قيمته 10V اشارته الموجبة الى الاعلى.



الشكل 4.17 دائرة المثال (4.6) الفرع (أ)

الحل:

يستعاض عن الدائرة بدائرة الشكل 4.18 والتي تحوي مصدر فولتية V_{oc} مع مقاومة R_o وهي تمثل دائرة ثيفنن المكافئة للشكل 4.17.



الشكل 4.18 دائرة ثيفنن المكافئة لدائرة الشكل 3.4

(أ) عندما تكون الدائرة مفتوحة بين x و y يتوزع التيار بين فرعين متوازيين قيمتا مقاومتيها $4k\Omega$, $6k\Omega$ أي :

$$i_{1k\Omega} = \frac{10 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{3}}{(6+4) \times 10^{3}} = 6\ \text{mA}$$

وان

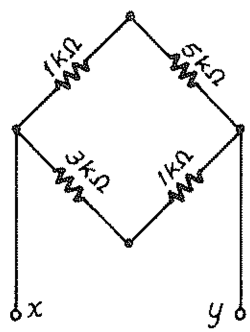
$$i_{5k\Omega} = \frac{10 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{3}}{(6+4) \times 10^{3}} = 4\ \text{mA}$$

فتكون V_{oc} عبارة عن الفرق بين فرقي الجهدين عبر $1k\Omega$, $4k\Omega$

$$V_{OC} = 5 \times 10^{3} \times 4 \times 10^{-3} - 1 \times 10^{3} \times 6 \times 10^{-3} = 14\ \text{V}$$

ويكون اتجاه الفولتية بحيث تكون النقطة القريبة من x موجبة بالنسبة للنقطة القريبة من y.

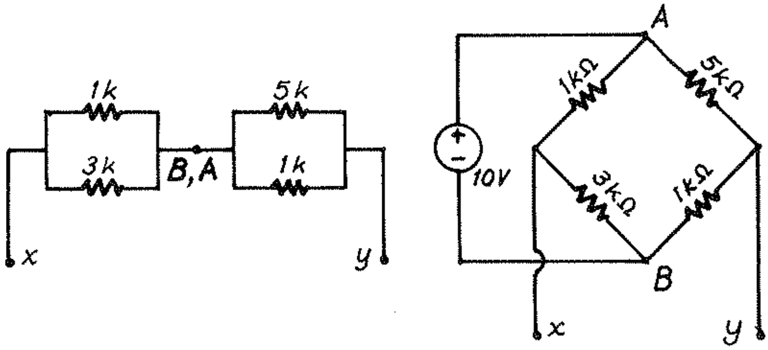
اما قيمة R_O فتحسب بالنظر بين النقطتين x و y على اعتبار ان مصدر التيار مستعاض عنه بدائرة مفتوحة كما في الشكل 4.19 ، فتكون المقاومة الكلية عبارة عن محصلة مقاومتين



الشكل 4.19 دائرة الشكل 4.17 وقد فتح فيها مصدر التيار (الغي)

$$R_O = \frac{6 \times 10^{3} \times 4 \times 10^{3}}{(6+4) \times 10^{3}} = 2{\cdot}4\ k\Omega$$

(ب) باستبدال مصدر التيار بمصدر فولتية مقدارها 10V تصبح الدائرة كالمبينة في الشكل 4.20



الشكل 4.20 دائرة المثال (4.6) الفرع (ب)

متوازيتين: قيمة الاولى $(5+1)k\Omega$ اي $k\Omega$ والاخرى $(3+1)k\Omega$ اي $4k\Omega$، لذا.

فتكون الفولتية عبر المقاوم $5k\Omega$

$$\frac{10 \times 5 \times 10^3}{(5+1) \times 10^3} = 8{\cdot}33 \text{ V}$$

والفولتية عبر المقاومة $1k\Omega$ اليسرى

$$\frac{10 \times 1 \times 10^3}{(1+3) \times 10^3} = 2{\cdot}5 \text{ V}$$

فتكون الفولتية المفتوحة بين α, y

$$V_{OC} = 8{\cdot}333 - 2{\cdot}5 = 5{\cdot}833 \text{ V}$$

حيث النقطة x موجبة بالنسبة للنقطة y.

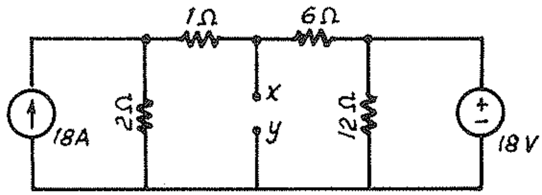
اما R_o في هذه الحالة فتحسب بالاستعاضة عن مصدر الفولتية بدائرة قصر، فتكون المقاومة $5\ k\Omega$ على التوازي مع المقاومة $1k\Omega$ اليمنى وتكون المقاومة $1k\Omega$ اليسرى على التوازي مع المقاومة $3k\Omega$ وهاتان المجموعتان مربوطتان على التوالي فتساوي المقاومة الكلية R_o.

$$R_O = \frac{5 \times 10^3 \times 1 \times 10^3}{(5+1) \times 10^3} + \frac{3 \times 10^3 \times 1 \times 10^3}{(3+1) \times 10^3} = (0{\cdot}833 + 0{\cdot}75) \times 10^3$$

$$= 1{\cdot}5833 \text{ k}\Omega$$

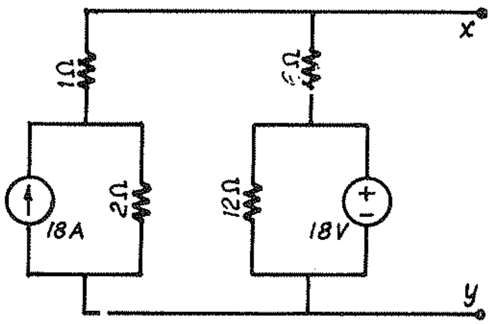
مثال 4.7

أوجد مكافئ ثيفنن للدائرة المبينة في الشكل 4.21 بين النقطتين x, y .



الشكل 4.21

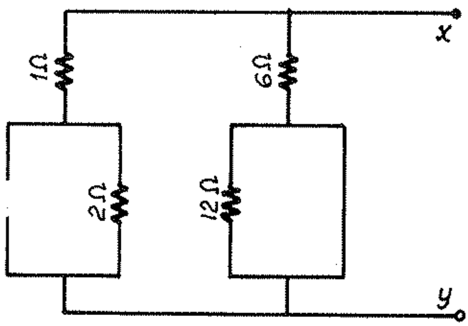
يمكن رسم الدائرة لكي تصبح كما مبين في الشكل 4.22 حيث يبدو توازي الفروع بشكل أوضح .



الشكل 4.22

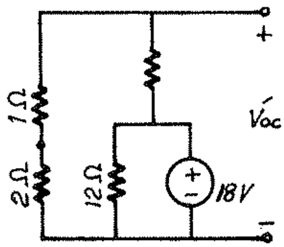
لإيجاد R_0 تصبح الدائرة بعد إلغاء المصادر (دائرة مفتوحة لمصدر التيار ودائرة قصر لمصدر الفولتية)

$$R = \frac{(1 + 2) \times 6}{1 + 2 + 6} = 2\,\Omega$$



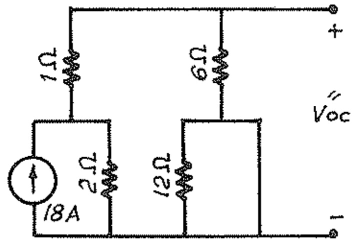
الشكل 4.23

أما لإيجاد V_{OC} فيلاحظ أن هناك حاجة لحل الدائرة بإستخدام ثلاث معادلات لماكسويل أو ثلاث معادلات عقدية. ويمكن حلها كذلك بإستخدام طريقة التراكب وهو ماسنختاره أدناه.



(أ)

الشكل 4.24أ



(ب)

الشكل 4.24 ب

في الدائرة (أ) تكون المقاومات 6 ,1 ,2 على التوالي عبر الفولتية 18 فولت وبذلك تكون V_{OC} تساوي :

$$V_{OC} = \frac{18}{1 + 2 + 6} \times (1 + 2) = 6V$$

أما في الدائرة (ب) تكون المقاومتان 6 ,1 على التوالي أي مجموعها 7 أوم وهذه على التوازي مع المقاومة 2 أوم وبتقسيم التيار:

$$I_6 = 18 \times \frac{2}{2 + 7} = 4A$$

وبذلك تكون V_{OC}

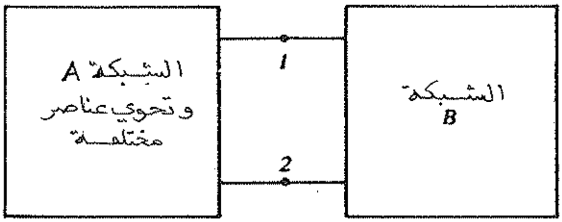
$$V''_{OC} = 4 \times 6 = 24 \text{ V}$$

وبجمع V''_{OC} ، V'_{OC}

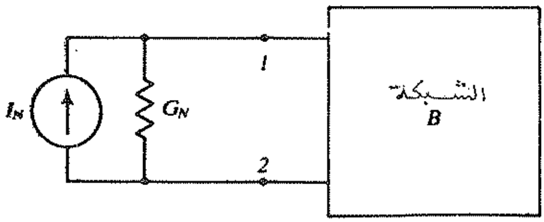
$$V_{OC} = 24 + 6 = 30 \text{ V}$$

4.5 نظرية نورتن :

ليس هناك فرق كبير بين نظريتي ثيفنن ونورتن Norton . فلم يات العالم نورتن سوى بتحوير الدائرة المكافئة التي سبق ذكرها في نظرية ثيفنن والاستعاضة عنها بمصدر تيار على التوازي مع مقاومة بدلاً من مصدر الفولتية المربوط على التوالي مع المقاومة في نظرية ثيفنن. لذا يمكن وضع صياغة نظرية نورتن بالشكل التالي :



(أ)



(ب)

الشكل 4.25 تمثيل دائرة نورتن

"في دائرة خطية يمكن استبدال اي جزء منها مثل الشبكة A في الشكل 4.25 أ مرتبط مع بقية الاجزاء بواسطة طرفي توصيل (مثل a ، b) بمصدر تيار مثالي على التوازي مع مقاوم كما في الشكل 4.25 ب . قيمة تيار المصدر تساوي التيار الذي يمر في دائرة قصر عبر طرفي جزء الدائرة المستعاض عنه . وقيمة المقاومة تعادل مقاومة ذلك الجزء من الدائرة والتي تظهر عبر طرفيها عند الغاء المصادر فيها (والتي تساوي قيمة المقاومة المحسوبة في نظرية ثيفنن) . "

ويمكن اجراء المقارنة بين نظريتي ثيفنن ونورتن بالنقاط الاساسية التالية : —

1 — تحوي الدائرة المكافئة لنظرية ثيفنن على مقاوم ومصدر فولتية مثالي على التوالي ، بينما تحوي الدائرة المكافئة لنظرية نورتن على مصدر تيار مثالي مع مقاوم على التوازي كما مبين في الشكل 4.26 ادناه .

2 — تتساوى قيمتا R_o بين الدائرتين المكافئتين لثيفنن ونورتن .

3 — قيمة فولتية المصدر في نظرية ثيفنن تعادل فولتية دائرة مفتوحة عبر الطرفين a و b . بينما قيمة تيار المصدر في نظرية نورتن تعادل تيار دائرة القصر عبر الطرفين a و b .

4 — اذا كانت دائرتا ثيفنن ونورتن المكافئتان عائدتين للدائرة نفسها ، يمكن بسهولة ايجاد العلاقة بين القيم المكافئة . بمقارنة الشكلين 4.26 أ و ب ، نجد ان الفولتية المفتوحة عبر ba في دائرة ثيفنن هي عبارة عن V_{OC} وفي دائرة نورتن عبارة عن $I_{sc}R_o$. وبمساواة هاتين القيمتين نحصل على العلاقة المباشرة بين الدائرتين. اي ان

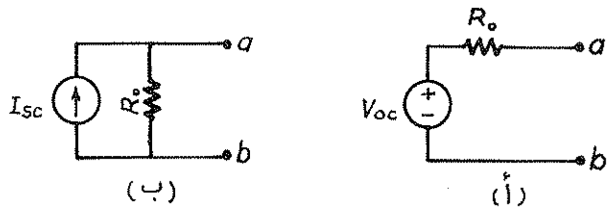
$$V_{oc} = I_{sc}R_o \tag{4.13}$$

من الملاحظة 4 اعلاه يتبين ان الحصول على مكافئ نورتن من مكافئ ثيفنن او بالعكس لايحوي صعوبة ما . لذا يمكن ايجاد اي منها ثم استنتاج الاخر منه وهكذا يجند حساب المكافئ الاسهل ثم استنتاج الدائرة الاخرى منه .

وتجدر الإشارة الى أن المعادلة 4, 3 يمكن وضعها بشكل $R_o = V_{oc}/I_{sc}$ أي أن قيمة المقاومة الداخلة للدائرة تساوي حاصل قسمة فولتية الدائرة المفتوحة V_{oc} على تيار دائرة القصير I_{sc} والتي يمكن أن يكون لها بعض الإستخدامات المفيدة في الدوائر التي تحتوي على مصادر معتمدة .

مثال (4.8)

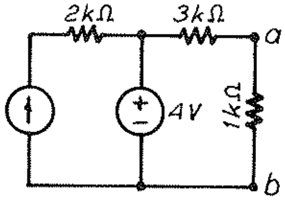
اوجد مكافئ نورتن لدائرة الشكل 4.26 يسار المقاومة $1k\Omega$



الشكل 4.26

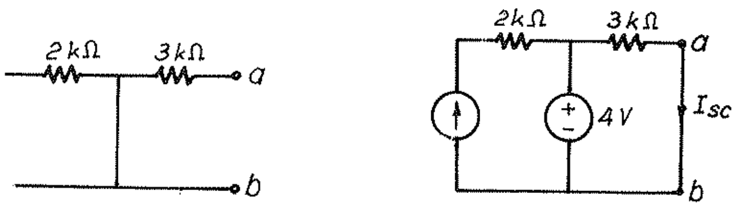
الحل :

لايجاد R_o ترسم الدائرة كما مبين في الشكل 4.27 فتكون



الشكل 4.27 أ الغاء المصادر لايجاد R_o

وتكون قيمة تيار دائرة القصر بين a و b هي عبارة عن مصدر الفولتية 4V مقسومة على المقاومة 3kΩ كما مبين في الشكل 4.28 ب

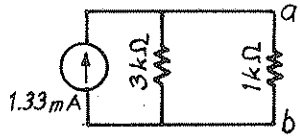


الشكل 4.28 قصر الدائرة عبر النقطتين a و b

وعليه

$$I_{SC} = \frac{4}{3 \times 10^3} = 1{\cdot}33 \text{ mA.}$$

فتكون الدائرة المكافئة كما مبين في الشكل 4.29

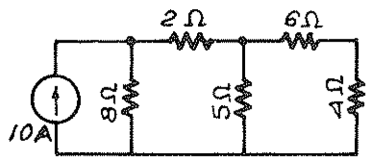


الشكل 2.29 دائرة ثيفنن المكافئة لدائرة الشكل 18.4

وتجدر الإشارة الى أنه كان بالإمكان إيجاد مكافئ ثيفنن حيث R_o نفسها و V_{oc} تساوي 4V أي فولتية المصدر نفسها.

مثال (4.9)

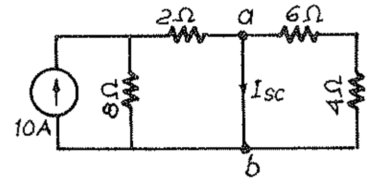
اوجد التيار في المقاوم 5Ω المبين في الشكل 4.30.



الشكل 4.30 دائرة المثال (4.9)

الحل :

بقصر الدائرة عبر طرفي الفرع المحتوى على المقاوم 5Ω تنتج الدائرة المبينة في الشكل 4.31 ويلاحظ عدم ادخال المقاومتين 4 و 6 اوم في الحل ، نظراً لعدم مرور تيار فيهما . فالتيار يمر في دائرة القصر عبرهما .



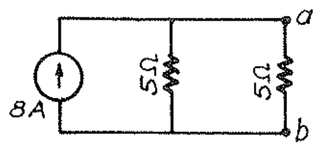
الشكل 4.31 قصر الدائرة عبر طرفي المقاوم 5Ω

$$I_{SC} = 10 \times \frac{8}{8+2} = 8A$$

اما المقاومة التي تظهر عند النظر بين طرفي المقاوم 5Ω عند فتح دائرته واستبدال مصدر التيار بدائرة مفتوحة فتساوى .

$$R_O = \frac{(2+8)(6+4)}{2+8+6+4} = 5\Omega$$

لذا تكون دائرة نورتن المكافئة لدائرة الشكل 4.31 كما مبين في الشكل 4.32



الشكل 4.32 دائرة نورتن المطلوبة

ويكون التيار المار في المقاوم 5Ω عبر النقطتين a و b

$$I_{5\Omega} = \frac{5 \times 5}{5 \times 5} \times 8 = 4A$$

وتلاحظ في هذا المثال الفائدة الاساسية من تطبيق نظريتي ثيفنن ونورتن ، حيث لم نتطرق الى حساب تفاصيل التيارات والفولتيات في اجزاء الدائرة الاخرى غير المطلوبة في اصل المسألة ، بل تم حساب الدائرة المكافئة كما تظهر للعنصر المطلوب حساب التيار فيه ثم حسبت التيارات والفولتيات في الدائرة المكافئة البسيطة .

4.6 تحويل المصادر Source Transformation

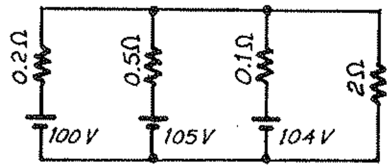
سبق ان بينا في الفقرة 4.5 عند مقارنة نظرية نورتن مع نظرية ثيفنن في النقطة الرابعة ان بالامكان الحصول على مكافئ نورتن من مكافئ ثيفنن وبالعكس بسهولة باستعمال العلاقة $V_{OC} = I_{sc}R_o$. وحيث ان مكافئ ثيفنن لايحوي سوى مصدر فولتية مثالي ideal source مع مقاوم على التوالي ومكافئ نورتن لايحوي سوى مصدر تيار مثالي مع مقاوم على التوازي فان تحويل احد المكافئين للاخر يعني بصيغة اخرى تحويل مصدر تيار عملي practical source (مصدر تيار مثالي مع مقاومة على التوازي معه) الى مصدر فولتية عملي (مصدر فولتية مثالي مع مقاومة على التوالي معه) او بالعكس . ولايحوي هذا التحويل سوى استخدام العلاقة (4.13) نفسها ، حيث V_{oc} هي فولتية مصدر الفولتية المثالي و I_o هو تيار مصدر التيار المثالي و R_o هي مقاومة كل من المصدرين في احدهما على التوالي وفي الآخر على التوازي وهاتان المقاومتان متساويتان من الناحية الرقمية وليس من ناحية الربط .

يمكن استخدام تحويل المصادر لتبسيط الدائرة ، حيث ان بعض الدوائر يكون حلها سهلاً ان كان فيها مصدر فولتية بدلاً من مصدر تيار وفي دوائر اخرى يكون العكس صحيحاً. لذا يمكن استخدامها لتبسيط كثير من الدوائر، وربما تغني عن تطبيق النظريات السابقة حيث بعد تطبيقها تتبسط الدائرة الى حد كبير.

وتجدر الإشارة الى أن هذا التحويل لاينطبق على المصادر المعتمدة حيث لايجوز تحويل مصدر فولتية معتمد مع مقاومة على التوالي الى مصدر تيار معتمد مع مقاومة على التوازي وبالعكس .

مثال (4.10)

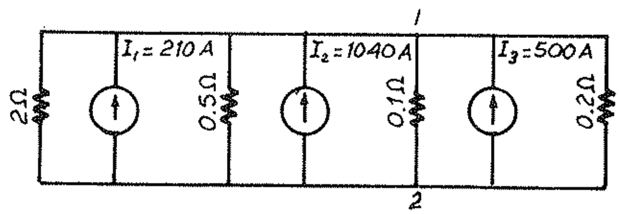
للدائرة المبينة في الشكل 4.33 ، اوجد التيار في المقاوم 2Ω باستخدام تحويل المصادر.



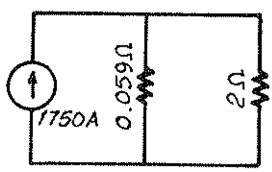
الشكل 4.33 دائرة المثال 4.10

الحل :

يمكن اعادة رسم الدائرة بعد تحويل مصادر الفولتية الى مصادر تيار كما مبين في الشكل 4.34



الشكل 4.34 تحويل مصادر الفولتية الى مصادر تيار



الشكل 4.35

حيث

$$I_1 = \frac{100}{0{\cdot}2} = 500\ A$$

$$I_2 = \frac{105}{0{\cdot}2} = 210\ A$$

$$I_3 = \frac{104}{0{\cdot}1} = 1040\ A$$

يلاحظ من الشكل 4.34 ان المقاومات 2 و 0.1 و 0.5 و 0.2 مربوطة على التوازي نظراً لارتباط طرفي كل منها بالعقدتين 1 و 2، كما ان مصادر التيارات 500A و 210A و 1040A كلها مرتبطة على التوازي للسبب نفسه. لذا يمكن ايجاد مصدر التيار المكافئ للمصادر الثلاثة باستخدام قانون كرشوف الاول حيث ان تيار المصدر المكافئ سيكون :

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 500 + 210 + 1040 = 1750\ A$$

وتكون المقاومة المكافئة لمقاومات المصادر. التي تكون مرتبطة على التوازي مع المقاوم 2Ω كما في الشكل 27.4، فيكون التيار في المقاوم هو 50A.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{0{\cdot}2} + \frac{1}{0{\cdot}5} + \frac{1}{0{\cdot}1} = 17$$

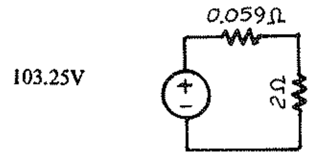
$$\therefore\ R_{eq} = \frac{1}{17} = 0{\cdot}059\Omega$$

ويمكن حل هذه الدائرة لايجاد التيار في المقاوم 2Ωبتوزيع التيار 1750A بين المقاومتين بطريقة تقسيم التيارات بين مقاومين متوازيين. كما يمكن اعادة تحويل مصدر التيار الى مصدر فوية لتصبح الدائرة كما مبين في الشكل 4.36 حيث

$$V = 1750 \times 0{\cdot}059 = 102{\cdot}9\ V$$

فيكون التيار في المقاوم 2Ω

$$I_{2\Omega} = \frac{102{\cdot}9}{2 + 0{\cdot}059} = 50\ A$$



الشكل 4.36

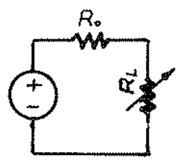
ملاحظة :

يمكن حل المثال باستخدام نظرية نورتن وربما تطبيق نظرية التراكب عند ايجاد مصدر التيار في مكافئ نورتن ، وعلى الطالب محاولة ذلك وتقدير اي الطرق اسهل للحل .

4.7 القدرة القصوى Maximum Power

سبق ان بينا ان الفولتية التي تظهر عبر طرفي مصدر فولتية هي ليست كل القوة الدافعة الكهربائية المتولدة في المصدر بل انها جزء من تلك القوة الدافعة الكهربائية . اما الجزء الاخر فيكون عبارة عن هبوط فولتية عبر المقاومة الداخلية لذلك المصدر. وفي الاحوال الاعتيادية تكون هذه المقاومة صغيرة وقد تهمل احياناً. اما اذا ازداد التيار المحسوب من قبل المصدر (اي قلت مقاومة الحمل انظر الشكل (4.37) في تلك الحالة من الضروري اخذ المقاومة الداخلية بنظر الاعتبار فيكون التيار

$$I = \frac{E}{R_L + R_O} \qquad ...(4\cdot14)$$



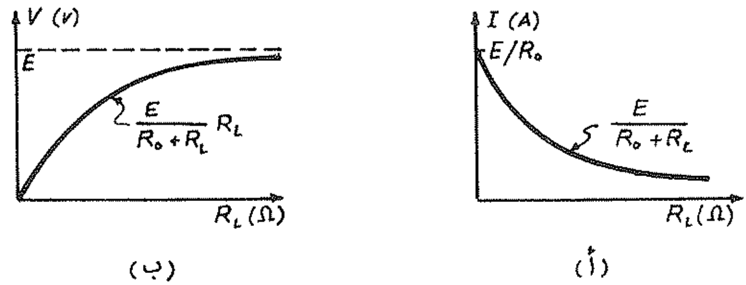
الشكل 4.37

حيث تمثل R_o المقاومة الداخلية للمصدر و E قوته الدافعة الكهربائية و R_L مقاومة الحمل. اما الفولتية عبر المصدر فتكون عبارة عن حاصل ضرب هذا التيار في مقاومة الحمل R_L

$$VR_L = \frac{ER_L}{R_O + R_O} \qquad ...(4\cdot15)$$

يبين الشكل 4.38 منحنياً التيار المار في الحمل والفولتية عبره مع تغيير الحمل R_L ، حيث يتبين بان التيار عند قصر الدائرة (حمل مقداره صفر) يساوي $\frac{E}{R_O}$ ، بينما الفولتية تساوي صفراً. اما عند فتح الدائرة (حمل مقداره مالا نهاية) فيكون التيار صفراً بينما الفولتية تساوي E .

ومن ذلك يتبين ان القدرة في كل من الحالتين تساوي صفراً نظراً لان القدرة هي حاصل ضرب التيار في الفولتية.



الشكل 4.38 (أ) منحني تيار الحمل مع مقاومة الحمل (ب) منحني فولتية الحمل مع مقاومة الحمل.

ويعني ذلك انه عند زيادة الحمل R_L من الصفر، تبدأ القدرة بالازدياد من الصفر حتى تصل قيمة قصوى عند حمل ما ، ثم تعود فتنخفض عند ازدياد مقاومة الحمل الى ان تصل الصفر مرة اخرى حينما تصبح مقاومة الحمل مالا نهاية . ولايجاد قيمة المقاومة التي تصل عندها القدرة قيمتها القصوى فان القدرة .

$$P = I^2R_L = \left(\frac{E}{R_L + R_O} \right)^2 R_L \qquad ...(4{\cdot}16)$$

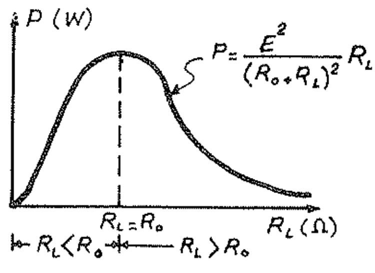
ولغرض ايجاد القيمة القصوى للقدرة P يمكن اشتقاق المعادلة (4.6) بالنسبة الى R_L ومساواة المشتقة للصفر، ثم ايجاد قيمة R_L عند تلك الحالة .

$$\frac{dP}{dR_L} = E\,\frac{(R_L + R_O)^2 - R_L[\,2\,(R_L + R_O)\,]}{(R_L + R_O')^2} = 0 \qquad ...(4{\cdot}17)$$

$$\therefore (R_L + R_O)^2 = R_L[\,2\,(R_L + R_O)\,]$$

$$\therefore R_L = R_O \qquad ...(4{\cdot}18)$$

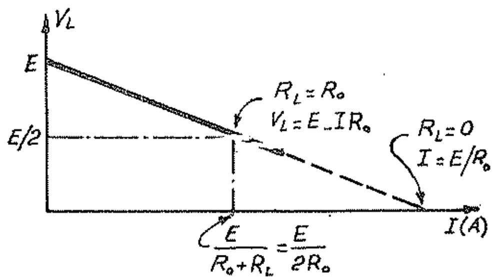
والنتيجة الاخيرة ذات اهمية بالغة ، حيث انها تعني ان القدرة القصوى تحدث حينما تكون مقاومة الحمل مساوية للمقاومة الداخلية للمصدر. ويبين الشكل 4.39 منحني القدرة .



الشكل 4.39 منحني القدرة مع مقاومة الحمل R_L

مع مقاومة الحمل ، حيث يتبين ان القيمة القصوى للقدرة تحدث حينما $R_L = R_o$ وحيث انها مربوطتان على التوالي ، فيعني ذلك انها تستهلكان القدرة نفسها في تلك الحالة ، او بكلمة اخرى ان القدرة المجهزة من المصدر في هذه الحالة : نصفها يستهلك في الحمل ونصفها الاخر يستهلك داخل المصدر في مقاومته الداخلية . اما ان كانت مقاومة الحمل اقل من مقاومة المصدر فان الجزء الاكبر من قدرة المصدر تستهلك داخل المصدر نفسه في مقاومته الداخلية (كل قدرة المصدر تستهلك في مقاومته الداخلية عند قصر الدائرة) . اما اذا كانت مقاومة الحمل اكبر من المقاومة الداخلية للمصدر فان الجزء الاكبر من القدرة يستهلك في الحمل .

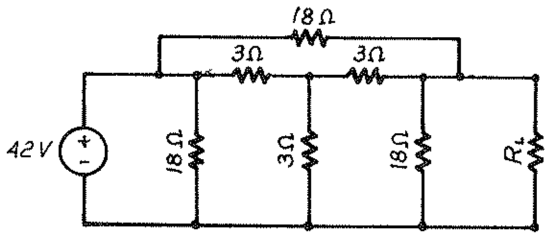
ولغرض مقارنة التيار المار في الحمل مع الفولتية عبره ، يمكن الرجوع الى الشكل 4.38 والذي يبين تغير الفولتية عبر الحمل مع التيار المار فيه بشكل خط مستقيم يقطع المحوريين في حالة الدائرة المفتوحة وحالة قصر الدائرة ، بينما تنخفض فولتية الحمل الى نصف فولتية المصدر $\left(\frac{E}{2}\right)$ حينما تساوي مقاومة الحمل المقاومة الداخلية للمصدر ويكون مقدار التيار حينئذ نصف تيار القصر كما موضح في الشكل . وتجدر ملاحظة ان المقاومة R_o لاتعني بالضرورة المقاومة الداخلية لمصدر بل ربما تكون المقاومة الداخلية لدائرة معقدة كما تظهر عبر طرفين بالنسبة لمقاومة حمل ما ، ومثل هذه الدائرة يمكن تمثيلها بمكافئ نورتن وفي كلتا الحالتين تكون المقاومة الداخلية للمصدر المكافئ هي نفسها .



الشكل 4.40 منحني تغير فولتية الحمل مع التيار

مثال (4.11)

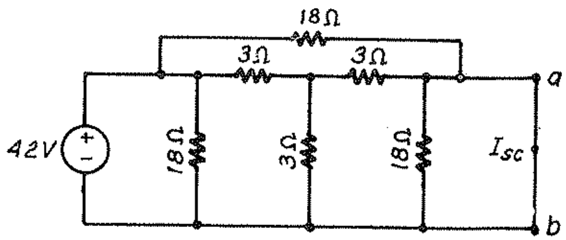
احسب قيمة المقاومة R_L التي تسحب اقصى قدرة من مصدر الفولتية المبين في الشكل 4.33.



الشكل 4.41 دائرة المثال (4.11)

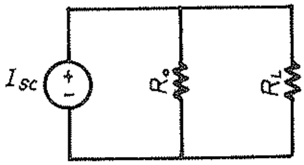
الحل :

نحاول ايجاد مكافئ نورتن للدائرة كما مبين في الشكل 4.42 * حيث I_{sc} هو تيار القصر بين النقطتين a و b والذي يمكن ايجاده من الدائرة في الشكل 4.42 والتي يمكن إعادة رسمها بالشكل 4.44



الشكل 4.42 قصر الدائرة بين النقطتين a و b

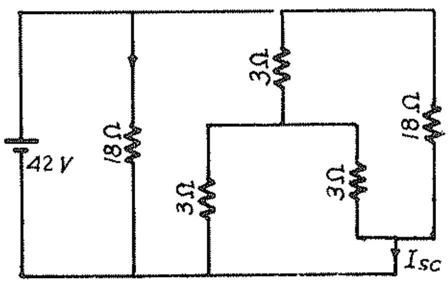
* حاول إعادة حل المسألة بطريقة ثفنن وستحتاج حينئذ الى تحويل Y – Δ لغرض إيجاد V_{OC} وهي أصعب من طريقة نورثن أعلاه.



الشكل 4.43 مكافئ نورتن لدائرة المثال 4.11

فالمقاومات 3Ω اثنتان منها على التوازي مع الثالثة على التوالي ، فيكون المجموع

$$3 + \frac{3 \times 3}{3 + 3} = 4{\cdot}5\ \Omega$$



الشكل 4.44

وهذه المقاومة على التوازي مع المقاومين 18Ω وكلها مربوطة عبر المصدر 42V ، فيكون التيار في المقاوم 4·5Ω .

$$\frac{42}{4{\cdot}5} = 9{\cdot}333\ \text{A}$$

والذي يقسم بالتساوي بين المقاومين 3Ω فيكون تيار احدهما .

$$\frac{9{\cdot}333}{2} = 4{\cdot}666\ \text{A}$$

اما التيار الذي يمر في المقاوم 18Ω العلوي فهو

$$\frac{42}{18} = 2{\cdot}333\ \text{A}$$

فيكون تيار دورة القصر I_{SC} مجموعها ، اي

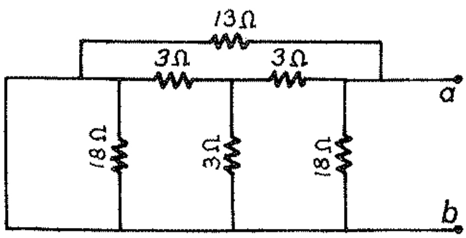
$$4{\cdot}666 + 2{\cdot}333 = 7\ \text{A}$$

اما مقاومة دائرة نورتن المكافئة فيمكن ايجادها باستبدال النضيدة 42V بدائرة قصر والتي تحول الدائرة كما مبين في الشكل 4.44 والتي أعيد رسمها في الشكل 4.45 فتكون المقاومات 3Ω : اثنان منها على التوازي مع الثالثة على التوالي اي ان مكافئها

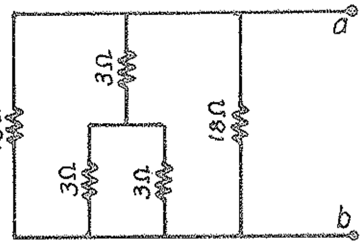
$$\frac{3 \times 3}{3 + 3} + 3 = 4{\cdot}5\ \Omega$$

والاخيرة مرتبطة على التوازي مع المقاومتين 18Ω ، وعليه

$$\frac{1}{R_o} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4{\cdot}5} = \frac{1}{3}$$



الشكل 4.45 لايجاد مقاومة دائرة نورتن يلغى المصدر



الشكل 4.46

اي ان

$R_o = 3\ \Omega$

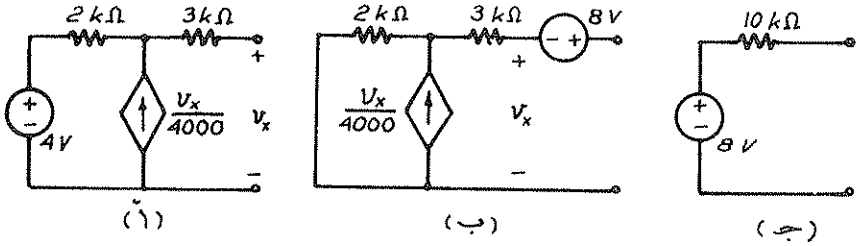
فتكون قيمة R_L التي تسحب اقصى قدرة من الدائرة مساوية لـ .R_o وهي 3Ω ويكون مقدار تيار الحمل نصف تيار المصدر، اي $\frac{7}{2}$ A وتكون القدرة المستهلكة في الحمل

$$P = I_L^2 R_L = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 3 = 36.75\ \text{W}.$$

4.8 إيجاد مكافئ ثفنن ونورتن عند وجود مصادر معتمدة :

عند التعامل مع المصادر المعتمدة لإيجاد مكافئ ثيفنن أو نورتن ينبغي الإنتباه الى بعض النقاط الرئيسية التي يمكن أن تكون دليلاً للحل يضمن عدم ارتكاب أخطاء وكالآتي :

1. إذا احتوت الدائرة على مصادر معتمدة وغير معتمدة معاً . يمكن إيجاد I_{SC}, V_{OC} بشكل مستقل وبدون حذف أي من المضادر ثم إيجاد R_o بقسمة V_{OC} على I_{SC} كما مبين في المثال الأول أدناه :



الشكل 4.47

1 . لإيجـــاد V_{oc} نطبق قانون كرشوف على دائرة الشكل 4.47 أ حيث يلاحظ أن التيار للمصدر المعتمد سيمر في الدارة اليسرى فقط لأن الدارة اليمنى مفتوحة وعليه تصبح المعادلة :

$$- 4 + 2 \times 10^3 \left(\frac{- V_x}{4000} \right) + 3 \times 10^3 (O) + V_x = 0$$

$$\therefore V_x = 8 = V_{OC}$$

ولإيجاد i_{sc} فإن $V_x = 0$ لذا يحذف المصدر المعتمد وبنطبق قانون كرشوف مرة أخرى تكون قيمة تيار الدورة القصيرة .

$$i_{sc} = \frac{4}{5 \times 10} = 0{\cdot}8 \text{ mA}$$

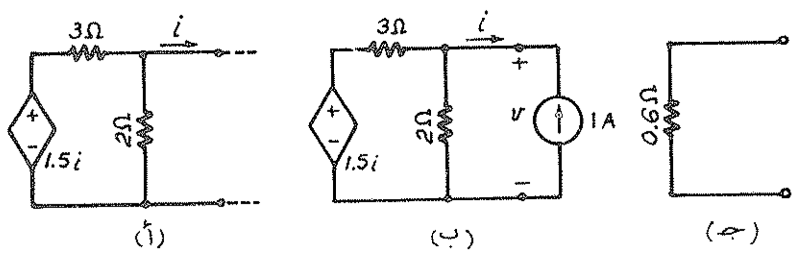
ولذا فإن مقاومة ثيفنن كما أسلفنا تكون نتيجة حاصل قسمة الفولتية Voc على التيار i_{sc} لذا :

$$R_O = \frac{8}{0{\cdot}8 \times 10} = 10\text{k}\Omega$$

وإن رسم الدائرة المكافئة كما موضح في الشكل 4.47 ب

2. إذا إحتوت الدائرة على مصادر معتمدة فقط فعند ذلك يجب إضافة مصدر تيار قيمته وحدة واحدة لغرض تشغيل الدائرة (حيث أن المصدر المعتمد لوحدة مقاومة موجبة أو سالبة) ثم إيجاد الفولتية عبر طرفي الدائرة ثم تقسيم الفولتية على التيار لإيجاد R وهي مكافئ ثفنن (لعدم وجود مصدر) كما يمكن الإستعاضة عن مصدر التيار بمصدر فولتية ثم إيجاد التيار ويعتمد ذلك على أي الطريقتين أسهل للحل حسب شكل الدائرة والمثال 4.12 التالي يوضح طريقة الحل.

مثال 4.12 : اوجد مكافىء ثفنن للدائرة المبينة في الشكل 4.48



الشكل 4.48

بتطبيق قانون كرشوف للفولتية نكتب معادلة العقدة العليا حيث في الدائرة 4.48 ب.

$$-1 + \frac{V}{2} + \frac{V - 1{\cdot}5i}{3} = 0$$

وأن

$$i = -1A$$

لذا

$$-1 + \frac{V}{2} + \frac{V + 1{\cdot}5}{3} = 0$$

وبحل المعادلة نجد أن :

$$V = 0.6V$$

وعليه تكون مقاومة ثفنن

$$R = V/1 = 0.6$$

وهو مكافئ ثفنن لعدم وجود فولتية بسبب كون الدائرة تحوي مصادر معتمدة فقط .

4.9 البرنامج الثالث التحويل من ربط النجم الى الدلتا وبالعكس

يقوم هذا البرنامج بإعطاء خيار للطالب هل يريد تحويل النجم الى الدلتا أم الدلتا الى النجم. ثم بعد ذلك يطلب قيم المقاومات الثلاثة في الأفرع الثلاثة ويعطي بعد إدخالها رسمين للنجم والدلتا المتكافئتين والتي أعطيت أقيام مقاومات أحدهما.

```
10 PRINT"                                        STAR DELTA TRANSFORMATION"
20 PRINT"                                        ========================="
30 PRINT"ENTER     1= STAR TO DELTA TRANSFORMATION"
40 PRINT"ENTER     2= DELTA TO STAR TRANSFORMATION"
50 INPUT N
60 ON N GOTO 100,200
100 PRINT "GIVE THE THREE RESISTANCES OF THE STAR CONNECTION"
110 INPUT R1,R2,R3
120 R9=R1*R2+R2*R3+R3*R1
130 R4=R9/R1
140 R5=R9/R2
150 R6=R9/R3
160 PRINT "THE DELTA EQUIVALENT RESISTANCES ARE:";R4;"   ";R5;"   ";R6
170 GOTO 300
200 PRINT "GIVE THE THREE RESISTANCES OF THE DELTA CONNECTION"
210 INPUT R4,R5,R6
220 R9=R5+R4+R6
230 R1=R4*R5/R9
240 R2=R5*R6/R9
250 R3=R6*R4/R9
260 PRINT "THE STAR EQUIVALENT RESISTANCES ARE:";R1;"   ";R2;"   ";R3
300 PRINT ""
310 PRINT "       STAR CONNECTION                                DELTA CONNECTION"
320 PRINT ""
330 PRINT ""
340 PRINT "            O                                        O"
350 PRINT "            I                                      /   \"
360 PRINT "            I                                    /       \"
370 PRINT "         ";R1;"                                /           \"
380 PRINT "            I                           ";R6;"               ";R5
390 PRINT "          /   \                           /                   \"
400 PRINT "     ";R2;"     ";R3
410 PRINT "      /             \                  /                          \"
420 PRINT "  O                   O          O - - - - - -";R4;"- - - - - - .
```

4.10 البرنامج الرابع : القدرة العظمى

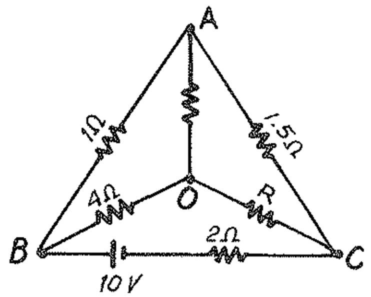
• يطلب هذا البرنامج قيمتي القوة الدافعة الكهربائية والمقاومة الداخلية لمصدر فولتية ثم برسم منحني تغير القدرة مع المقاومة الخارجية .

```
10 PRINT"This program is to plot the variation of power with"
20 PRINT"load resistance."
30 PRINT "Give value of source emf and its internal resistance"
40 INPUT E,R
50 PM=E^2/R/2
60 PQ=PM
70 IF PQ<1 THEN 140
80 IF PQ>10 THEN 150
90 K=1
100 IF PQ<2 THEN K=.4
110 IF PQ>5 THEN K=2
120 L=PM/PQ*K
130 GOTO 160
140 PQ=PQ*10:GOTO 70
150 PQ=PQ/10:GOTO 70
160 FOR I=0 TO 5
170 X(I)=  L  *I
180 NEXT I
190 CLS
200 SCREEN 8
210 FOR I=5 TO 0 STEP -1
220 Y=21-4*I
230 LOCATE Y,1:PRINT     X(I)
240 NEXT I
250 LINE(6C,0)-(60,165)
260 LINE (60,165)-(460,165)
270 FOR K=1 TO 5
280 LINE(58,K*33)-(62,K*33)
290 LINE(60+80*K,163)-(60+80*K,167)
300 NEXT K
310 RQ=R*3
320 IF RQ<1 THEN 390
330 IF RQ>10 THEN 400
340 S=1
350 IF RQ<2 THEN S=.4
360 IF RQ>5 THEN S=2
370 T=R /RQ*S*3
380 GOTO 410
390 RQ=RQ*10:GOTO 320
400 RQ=RQ/10:GOTO 330
410 FOR I=0 TO 5
420 Y(I)=  T  *I
430 LOCATE 22, 7+10*I:PRINT Y(I)
440 NEXT I
450 FOR M=0 TO 250
460 I=.02*T*M
470 P=(E/(R+I))^2*I/L  *66.6
480 PSET  (60+M*8/5,165-P)
490 NEXT M
500 LOCATE 20,20:PRINT"Power against load resistance"
```

مسائل الفصل الرابع

1- اوجد قيمة R والتيار الذي يمر فيها في الشبكة المبينة في الشكل 4.49، اذا كان تيار الفرع OA صفرا

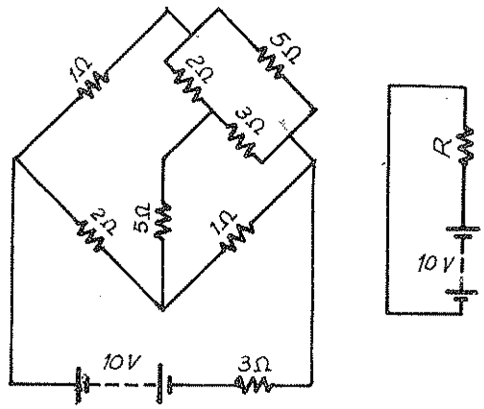
(الجواب 6Ω , $0.5\ A$)



الشكل 4.49 دائرة المسألة 1

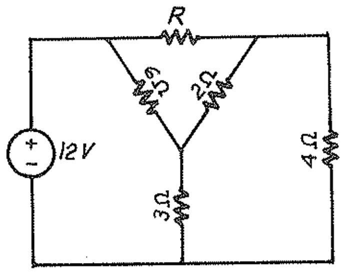
2- اوجد التيار الذي تعطيه النضيدة المبينة في الشكل 4.50

(الجواب 2.168A)



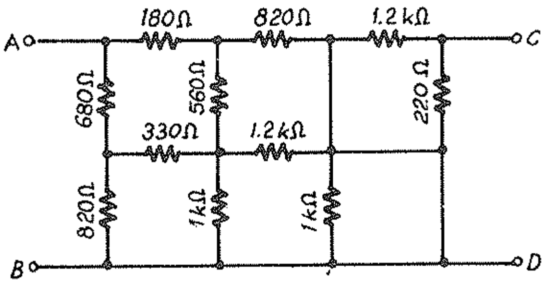
الشكل 4.50 دائرة المسألة 2

3- مامقدار المقاومة التي تسحب اقصى قدرة ممكنة لدائرة الشكل 4.51.
ومامقدار هذه القدرة و القدرة المجهزة من النضيدة حينئذ.
(الجواب 2Ω , 12.5 W, 43W)



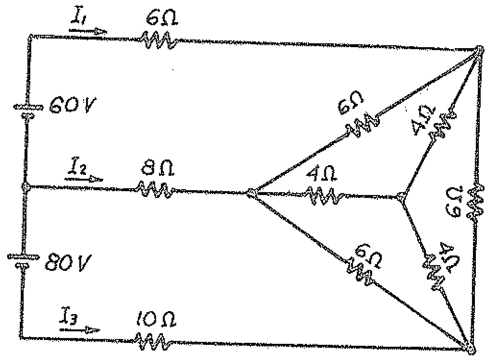
الشكل 4.51 دائرة المسألة 3

4- بسط دائرة الشكل 4.52 الى أبسط ما يمكن:
(الجواب : 446.5)



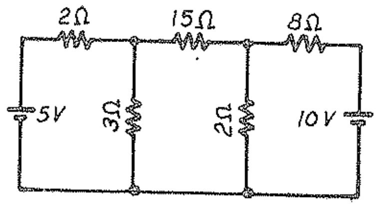
الشكل 4.52

5- بإستخدام تحويلات Y − Δ أوجد التيارات المؤشرة في الدائرة:
(الجواب : I=7.72A و I= −0.36A و I= −7.36A)

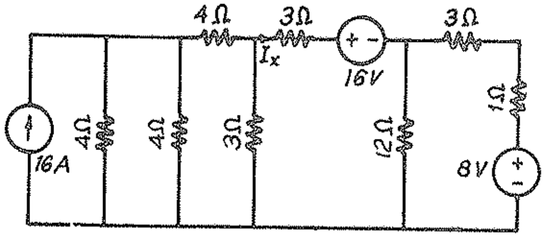


الشكل 4.53

6- احسب التيار المار في المقاوم 15 اوم المبين في الشكل 4.54. باستخدام نظرية التراكب
(الجواب 56.2mA)

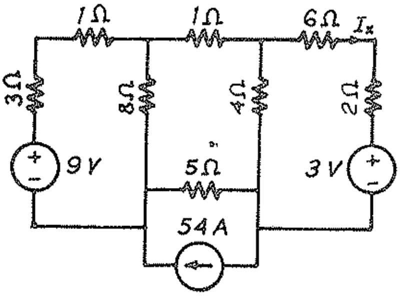


7- اوجد التيار I_x في الدائرة المبينة في الشكل 4.55 باستخدام التراكب
(الجواب 1.417-)



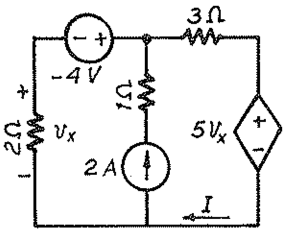
الشكل 4.55 دائرة المسألة 7

8- اوجد الفولتية عبر المقاوم، اوم في الدائرة المبينة في الشكل 4.56 باستخدام نظرية التراكب.
(الجواب 5.4V)



الشكل 4.56 دائرة المسألة 8

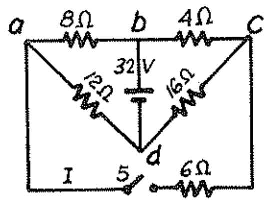
9– للدائرة المبينة في الشكل 4.57 تحوي مصدر معتمد. بإستخدام نظرية التراكب، أوجد التيار I (تذكر بأن المصدر المعتمد لايحذف)
(الجواب: 4A)



الشكل 4.57

10– بالرجوع الى دائرة المسألة في الفصل الثاني. اذا ربطت مقاومة مقدارها 10 اوم بين النقطتين Xو Y احسب التيار الذي يمر فيها باستخدام نظرية ثيفنن.
(الجواب 0.283A)

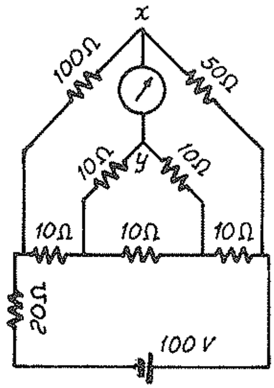
11– اوجد التيار الذي يمر في المفتاح S عند قفله باستخدام نظرية ثيفنن. وعين اتجاهه.
(الجواب 0.457A)



شكل 4.58 دائرة المسألة 11

12– تمثل الدائرة المبينة في الشكل 4.59 قنطرة كلفن لقياس المقاومات . في حالة عدم توازنها اوجد مكافىء ثيفنن الدائرة بين طرفي الكلفانوميتر y, x

(الجواب $43,54\,\Omega$, 92V)

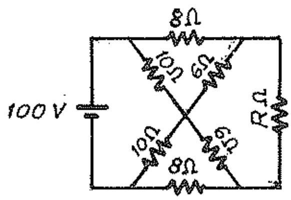


الشكل 4.59 دائرة المسألة

13– في الدائرة المبينة في الشكل 4.60 اوجد التيار المار في المقاومة R حينما (أ) $R=0$

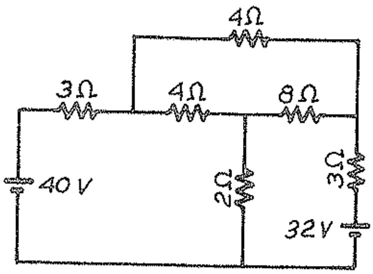
(ب) $R = 1\Omega$ بإستخدام مكافىء ثفنن

(الجواب 3.12A و 6.3A)



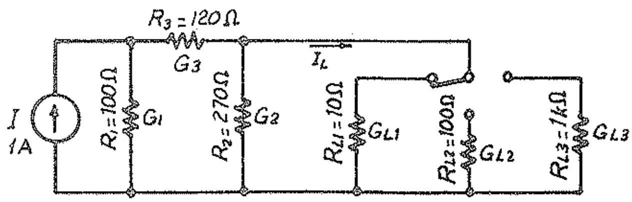
الشكل 4.60 دائرة المسألة

14– في الدائرة المبينة في الشكل 4.61 اوجد تياري المقاومتين 3 اوم بإستخدام نظرية ثفنن أو نورتن .
(الجواب 1.714A و 4.143A)



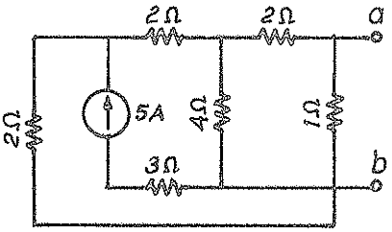
الشكل 4.61 دائرة المسألة 14

15– دائرة معقدة بسطت الى مكافىء π أو Δ المبين في الشكل 4.62 حيث ربطت بين مصدر تيار ومجموعة من الأحمال R أقيامها 1K, 100, 10 ربطت كل منها على إنفراد. إحسب التيار في كل حالة .
(الجواب : 0.0493A, 0.2492A, 0.2492A)



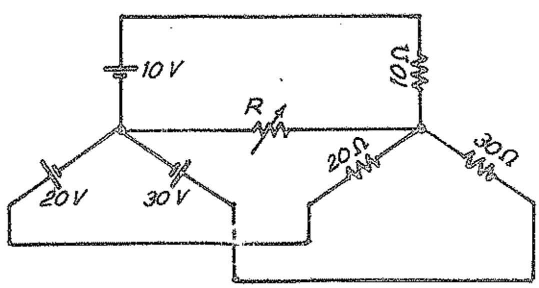
الشكل 4.62

16– اوجد دائرة ثيفنن المكافئة لدائرة الشكل 4.63 بين النقطتين b, a (ملاحظة اوجد مكافىء نورتن ثم حوله الى مكافىء ثيفنن)
(الجواب $1V ; 0.8\ \Omega$)



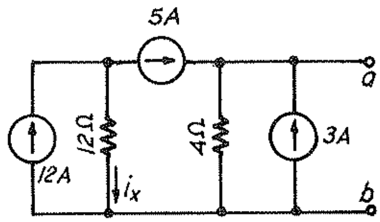
الشكل 4.63 دائرة المسألة 16

17– للشكل 4.64 باستخدام نظرية نورتن اوجد التيار في المقاومة R والفولتية عبرها حينما
(أ) $R = 0\ \Omega$ (ب) $R = 10\ \Omega$ (جـ) $R = \infty$
الجواب : 3A, oV; 1.058A, 10.58V; CA, 16.35V



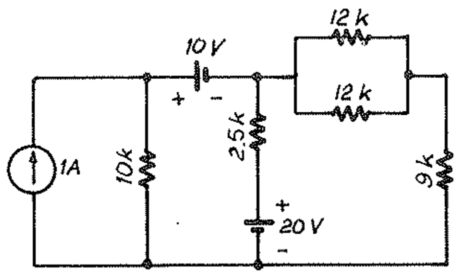
الشكل 4.64 دائرة المسألة 17

18– (أ) أوجد مكافىء ثيفنن ومكافىء نورثن عند النهايات b,a المبينة في الشكل 4.65
(ب) إستبدل المصدر 5A بمصدر معتمد قيمته 5i (الموجب جهة اليمين) بعدها أوجد مكافىء ثيفن ومكافىء نورثن.
(الجواب: (أ) 32V, 4, 8A
(ب) 48.6 V, 3.24, 15A, 3.24



الشكل 4.65

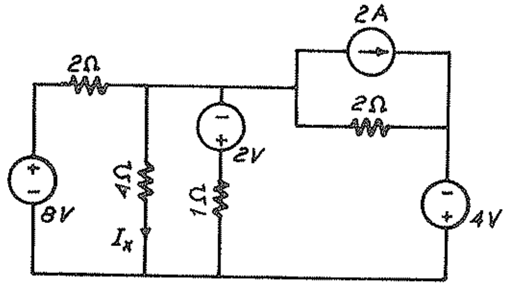
19 – أوجد مكافيء الدائرة بالنسبة للمقاوم 2·5 kΩ في دائرة الشكل 4. 66 باستخدام علاقات تحويل المصادر.
(الجواب 6kΩ , 20V)



الشكل 4.66 دائرة المسألة 19

20– باستخدام علاقات تحويل المصادر، قيمة التيار I_x في الدائرة المبينة في الشكل 4.67

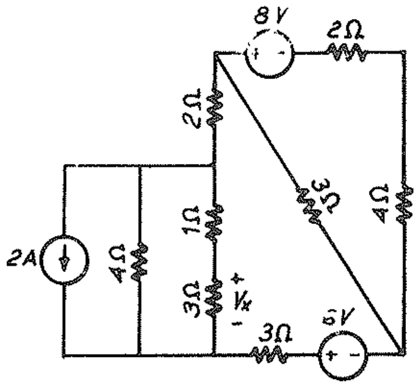
(الجواب $-0.22A$)



الشكل 4.67 دائرة المسألة 20

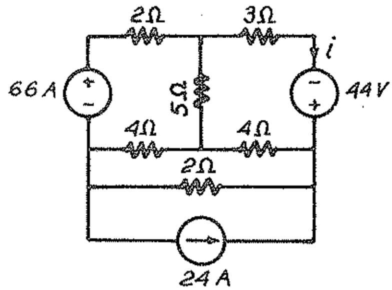
21– اوجد قيمة الفولتية V_x في الشكل 4.68

(الجواب $-2.12V$)



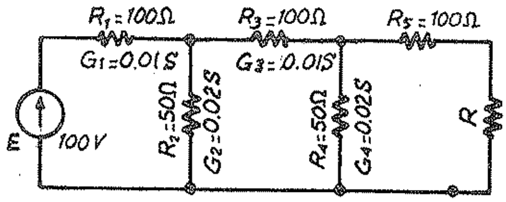
الشكل 4.68 دائرة المسألة 21

22– اوجد التيار I_1 في الشكل 4.69 باستخدام تحويل المصادر وتحويل الربط النجمي الى دلتا او بالعكس .
(الجواب 15A)



الشكل 4.69 دائرة المسألة 22

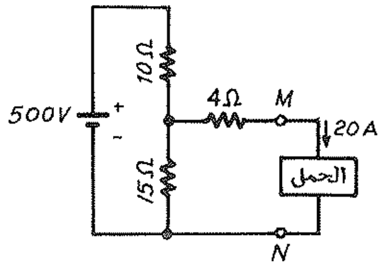
23– لدائرة الشكل 4.70 أوجد مكافىء ثيفنن بطريقة تحويل المصادر .
(الجواب : 9.1 V, 136.4 Ω)



الشكل 4.70

24– للدائرة المبينة في الشكل 4.71 اوجد قيمة مقاومة الحمل التي تسحب اقصى قدرة ممكنة من الدائرة ومامقدار هذه القدرة ثم اوجد مقدار القدرة المجهزة من النضيدة 500V لهذا الحمل.

10Ω , 2250 W



الشكل 4.71 دائرة المسألة 24

25– أوجد قيمة القدرة العظمى لدائرة الشكل 4.70

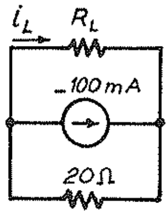
26– (أ)في الشكل 4.73 إفرض أن قيمة R = 80 أوجد قيمة i.

(ب) حول مصدر التيار الحقيقي الى مصدر فولتية حقيقي ثم أوجد i إذا كانت R = 80

(ج) أوجد القدرة المجهزة من قبل المصدر المثالي في الحالتين السابقتين.

(د) ماقيمة R لإمتصاص أقصى قدرة وماقيمة هذه القدرة .

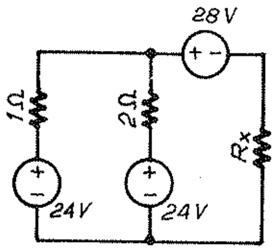
(الجواب (أ) 20mA (ب) 20mA (ج) 160mw ، 40mw (د) 50mw, 20



الشكل 4.72

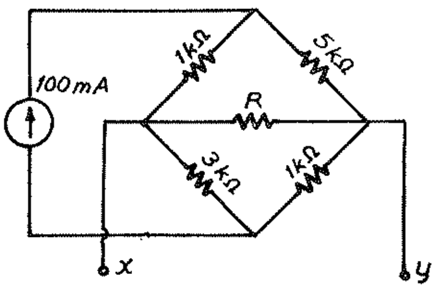
27. حول كلاً من المصدرين الحقيقيين 24V في الشكل 4.73 الى مصدري تيار حقيقيين. إدمج مصدري التيار المثاليين والمقاومات ثم حول مصدر التيار الحقيقي الناتج الى مصدر فولتية حقيقي وقم بدمج مصادر الفولتية المثالية.

(أ) إذا كانت R = 2 أوجد القدرة المجهزة الى R.
(ب) ماقيمة أقصى قدرة يمكن تجهيزها الى R.
(ج) ماهي قيمة R التي يمكن أن تجهز ب 5w
(الجواب : 4.5, 6w, 0.280, 1.587)

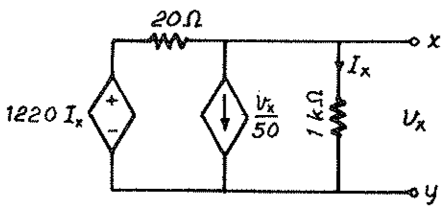


الشكل 4.73

28- أوجد مكافئي ثيفنين ونورتن لدائرة الشكلين أ و ب علماً بأن قيمة R في الشكل (ب) تساوي تارة، وتساوي 1.6 K تارة أخرى.
(الجواب : 100Ω , 0Ω , 0V , 0·96kΩ , 131V)



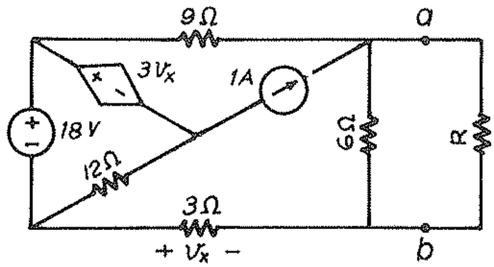
(ب)



(أ)

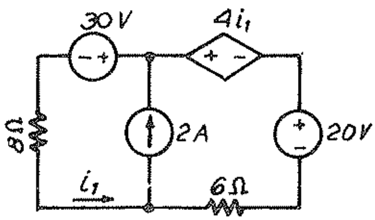
الشكل 4.74

29– لدائرة الشكل 4.75 ما قيمة R التي تجعل القدرة بين a وb أقصى قدرة .
(الجواب : 4Ω , 2·25A , 9V)



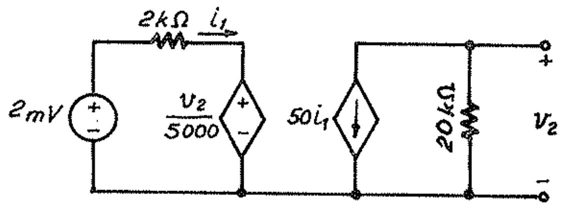
الشكل 4.75

30– لدائرة الشكل 4.76 أوجد i .
(الجواب : 0.2A)



الشكل 4.76

31– الدائرة المبينة في الشكل 4.77 تمثل أحد دوائر المضخم . ما قيمة V عندما تكون مفتوحة وماهي قيمة المقاومة الخارجة للمضخم R.
(الجواب: 0·9 MΩ , 1μA – , 0·9V –)



الشكل 4.77

الفصل الخامس

مبادئ الكهربائية الساكنة

الله نور السماوات والأرض
النور 35

5.1 الكميات المتجهة Vector quantities وغير المتجهة Scaler quantities

يتميز بين الكميات الفيزياوية نوعان واضحان من الكميات. يمكن وصف بعض الكميات كالزمن والشحنة الكهربائية مثلا بارقام تحدد مقدار الزمن بالثانية والشحنة الكهربائية بالكولوم على التعاقب.

وهاتان الكميتان هما كميتان ليس للاتجاه دخل فيها. اما اذا قلنا بان جسماً يزن عددا من النيوتنات ، فيعني ذلك ان قوة جذب الارض له تعادل ذلك الوزن. او بكلمة اخرى ان الوزن هو قوة متجهة نحو مركز الارض. وهذه الكمية المتجهة تتميز بان لها مقداراً معيناً يوصف بعدد النيوتنات واتجاهاً يتحدد باتجاه الخط الواصل بين الجسم ومركز الارض. ومن ذلك يتضح ان هناك كميات غير متجهة كالزمن وشدة الاستضاءة وهناك كميات متجهة لها مقدار معين واتجاه معين ايضا ، كالقوة مثلاً.

يمكن تمثيل الكميات المتجهة بحاصل ضرب مقدارين احدهما غير متجه ويمثل مقياس الكمية والاخر متجه ذو مقياس يعادل وحدة واحدة. فاذا مثَّلنا وزن جسم بـ F ، امكن كتابة F بشكل

$$\bar{F} = F\,\bar{a} \tag{5.1}$$

حيث $\bar{F}$ كمية متجهة مقدارها F واتجاهها باتجاه $\bar{a}$. وتمثل $\bar{a}$ متجهاً ذا مقدار يساوي وحدة واحدة.

من المعلومات الاولية يمكن الاستنتاج بسهولة ان جمع الكميات غير المتجهة جمعاً بسيطاً هو امر لا لبس فيه. اما الكميات المتجهة فلايمكن تطبيق ذلك عليها مباشرة ، لان كلا منها يؤثر باتجاه معين ، وبالتالي يتعين علينا اخذ الاتجاه بنظر الاعتبار. ان جمع المتجهات vectors قد تمت معالجته في دراسة الطالب لمبادئ الفيزياء بتحليل الكمية المتجهة الى اتجاهين في مستوي او ثلاثة اتجاهات ان كانت تلك الكمية ممثلة في الفراغ. ومن المفهوم ان الكمية المتجهة ذات الاتجاه المتفق يمكن جمعها جمعاً جبرياً بسيطاً (باخذ الاشارات بنظر الاعتبار) بينما لايمكن جمع الكميات الاتجاهية المختلفة الاتجاه سواء أكانت متعامدة ام غير متعامدة بالطريقة نفسها. الا ان العلاقات المثلثية تمكننا من جمع المتجهات المتعامدة باستخدام نظرية فيثاغورس. كما سبق للطالب ان اطلع على تمثيل الكميات المتجهة بيانياً بجمع المتجهات المتفقة بالاتجاه جمعاً جبرياً بسيطاً. اما المتجهات المتعامدة فتجمع باخذ محصلتها بطريقة الرسم. وكلتا الطريقتين تعتمد على جمع المتجهات جمعاً اتجاهياً باخذ المقدار والاتجاه بنظر الاعتبار في الوقت نفسه.

مثال (5.1)

يطلب جمع ثلاث متجهات كالآتي :

أ- المتجه الاول مقداره خمس وحدات ومتجه بزاوية تصنع (37°) مع الاتجاه الموجب للمحور السيني في مستوى الورقة.

ب- المتجه الثاني مقداره ثلاث وحدات بالاتجاه السالب لمحور السينات.

جـ- المتجه الثالث مقداره اربع وحدات بالاتجاه السالب لمحور الصادات.

الحل :

يعبر عن المتجهات رياضيا كما يلي :

$$\overline{F}_A = 5 (\cos 37^o \, \overline{x} + \sin 37^o \, \overline{y}) = 4\overline{x} + 3\overline{y} \qquad (5.2)$$

حيث $\overline{x}$ هي متجه مقداره وحدة الطول بالاتجاه الموجب لمحور السينات و $\overline{y}$ هو متجه مقداره وحدة الطول وبالاتجاه الموجب لمحور الصادات .

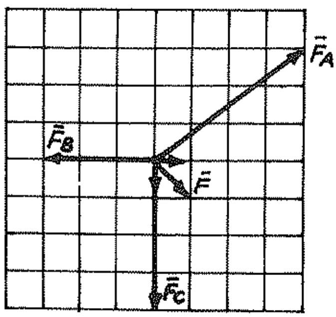
ومن ثم

$$\overline{F}_B = -3\overline{x} \qquad \dots (5.3)$$

$$\overline{F}_C = -4\overline{y}$$

فتكون المحصلة

$$\overline{F} = \overline{F}_A + \overline{F}_B + \overline{F}_C = 4\overline{x} + 3\overline{y} - 3\overline{x} - 4\overline{y} = \overline{x} + \overline{y}$$



الشكل 5.1 انظر المثال 5.1

اي ان المحصلة resultant تصنع زاوية مقدارها 45° بين الاتجاه الموجب لمحور السينات والاتجاه السالب لمحور الصادات وبمركبة تعادل وحدة لكل من هذين الاتجاهين. اي ان مقدار المحصلة يساوي $\sqrt{2}$ سم واتجاهها يصنع زاوية مقدارها 315° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند الدوران بعكس عقارب الساعة.

ويمكن حل السؤال عن طريق الرسم كما مبين في الشكل (5.1). ويتم ذلك بايجاد محصلة كل متجهين على التعاقب او بتحليل المتجهات جميعها الى مركباتها المتعامدة ثم جمع المركبات مع بعضها مراعين الاشارات فيكون الناتج عبارة عن مركبتين متعامدتين يمكن بعد ذلك بسهولة معرفة محصلتها مقداراً واتجاهاً.

5.2 قانون كولوم Coulombs Law

لقد كان اول احساس بوجود ظاهرة الكهربائية بحدود عام 55 ، قبل الميلاد حيث عرف الاغريق ظاهرة انجذاب الجسيمات الخفيفة نحو قطع الكهرب عند مسحها ببعض الاقمشة. ولم تجر اية تجارب تستحق الذكر لغاية عام 1600م حيث قام الدكتور جلبرت باجراء بعض التجارب على مواد اخرى كالزجاج والكبريت. وبعد ذلك قام العالم الفرنسي شارل كولوم باجراء تجارب اعمق واستنتج في عام 1785 بعض النتائج التي سميت فيما بعد باسمه ويمكن تلخيص نتائج كولوم بما يلي :

1. الشحنات المتشابهة تتنافر مع بعضها والشحنات المختلفة تنجذب نحو بعضها البعض.
2. تتناسب قوة التجاذب او التنافر بين شحنتين تناسباً طردياً مع حاصل ضرب كميتي الشحنتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما.
3. يمتد تأثير قوة التجاذب او التنافر على امتداد الخط المستقيم الواصل بين الشحنتين لذلك يمكن كتابة قانون كولوم بالصيغة الرياضية التالية :

$$F \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \qquad (5.4)$$

حيث Q_1 , Q_2 هما قيمتا الشحنتين و r هي المسافة بينهما، على فرض ان كل من الشحنتين تقع في نقطة واحدة. اما اذا لم تقع في نقطة واحدة اي كانت موزعة على سطح

او جسم مثلا اخذ مركز ثقل ذلك السطح او الجسم واعتبر كأن الشحنة مركزة فيه . و F هي القوة الناتجة ، وتكون بشكل تجاذب او تنافر باتجاه الخط المستقيم الواصل بين الشحنتين باتجاه مبتعد عن الشحنتين ، ان كانتا كلتاهما متشابهتي الشحنة ، وباتجاه نحو بعضهما البعض ان كانتا مختلفتي الشحنة ويمكن وضع ذلك باسلوب رياضي باعتبار ان F هي كمية اتجاهية وان المقدار في الجهة اليمنى من المعادلة (5.4) مضروب بكمية اتجاهية طولها وحدة واحدة ويلاحظ استخدام السهم للاشارة الى ان الكمية اتجاهية .

فتصبح المعادلة (5.4) كما يلي :

$$\vec{F} = K \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r} \qquad (5.5)$$

حيث ثابت التناسب K ، عند استخدام بقية الكميات بالوحدات العالمية SI ، يساوي $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ويساوي تقريباً 9×10^9 حيث ϵ_0 هي سماحية الفراغ المطلق permittivity of free space وتساوي تقريبا $\frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ فراد لكل متر.

يلاحظ ان ثابت التناسب اعتمد على سماحية الفراغ المطلق ، لذا فان المعادلة (5.5) بصيغتها المبينة تنطبق فقط في الفراغ المطلق . اما فيما عدا ذلك فتصبح :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r} \qquad (5.6)$$

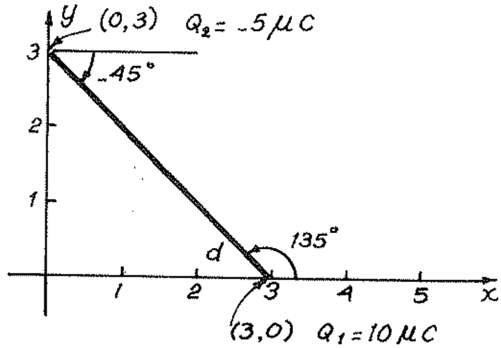
حيث ϵ هي سماحية permittivity الوسط الذي توجد فيه الشحنتان ، واذا كان الوسط هواء تكون سماحيته قريبة من سماحية الفراغ المطلق المذكورة اعلاه .

من السهل ملاحظة ان قانون كولوم المبين في العلاقة (5.6) اعلاه يشبه لحد كبير قانون الجذب العام لنيوتن والذي تتناسب فيه قوة التجاذب مع حاصل ضرب الكتلتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما هذا فيما عدا الفرق في اتجاه القوى بين القانونين وثابت التناسب .

مثال (5.2)

شحنتان موضوعتان في الفراغ المطلق في مستوٍ ، بحيث كانت احداثياتها بالامتار (0,3) و (3,0) وكانت الشحنة الاولى موجبة قيمتها 10 ميكروكولوم والثانية سالبة قيمتها 5 ميكروكولوم .
اوجد قيمة واتجاه القوة المسلطة على الشحنتين.

الحل :
يبين الشكل 5.2 موقع الشحنتين واتجاه القوة المسلطة عليها.



الشكل (5.2) انظر المثال 5.2

المسافة بين الشحنتين تساوي

$$d = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}\ \text{m}$$

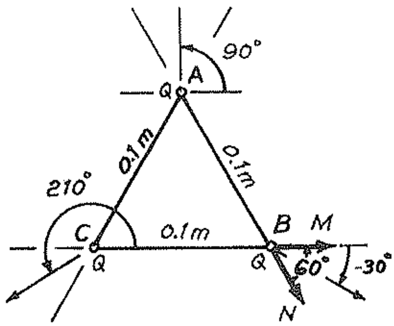
فالقوة المسلطة على كل منها

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \epsilon_0 r}\vec{r} = \frac{10 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^{-6}}{\frac{1}{9} \times 10^{-9}(3\sqrt{2})^2}\vec{r}^{\,2} = 0.025\ \vec{r}\ \text{N}$$

حيث $\vec{r}$ هو وحدة المتجهات ويصنع زاوية مقدارها $135°$ مع المحور السيني بالنسبة للشحنة Q_1 ويصنع زاوية مقدارها $45°-$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات بالنسبة للشحنة Q_2.

مثال (5.3)

ثلاث شحنات متساوية في الفراغ المطلق موضوعة على رؤوس مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه 10 سم وقيمة كل منها 1 ميكروكولوم كما مبين في الشكل 5.3. اوجد قيمة واتجاه القوى المسلطة على كل من هذه الشحنات.



الشكل 5.3 للمثال (5.3)

الحل:

لنأخذ الشحنة Q في النقطة B ونحسب تأثير الشحنتين اللتان في النقطتين C, A عليها فالقوة الناتجة من كل منها.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = 9 \times 10^9 \frac{1 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-6}}{(0{\cdot}1)^2} = 0{\cdot}9\ N$$

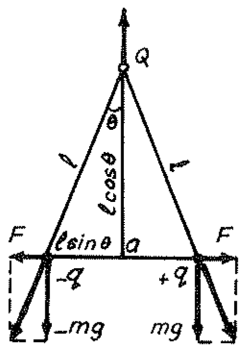
أما إتجاه تأثير A فيكون بالإتجاه BN واتجاه تأثير C هو بإتجاه BM كما مبين في الشكل 5.3 حيث هي على امتداد اضلاع المثلث وباتجاهات مبتعدة عن بعضها فتصنع المحصلات $30°-$ وتكون قيمتها

$$F_r = 2\,(0{\cdot}9 \cos 30) = 1{\cdot}56\ N$$

أما القوى على الشحنتين الأخريتين A (الناتجة من C, B) و C الناتجة من (B, A) فتصنعان °90 ,°210 على التعاقب مع الإتجاه الموجب لمحور السينات وقيمتاهما مساويتان للقيمة أعلاه. ويبين الشكل 5. إتجاهات القوى الثلاثة.

مثال (5.4)

كرتان صغيرتان مشحونتان بشحنتين متساويتين ومتشابهتين مقدارها q كولوم كتلة كل منها m كيلوغرام. علقتا بخيطين رفيعين، طول كل منها l متر. اوجد زاوية انفراج كل من الخيطين عن المستوى الشاقولي نتيجة تنافر الكرتين عن بعضها، على فرض ان طول كل من الخيطين اكبر بكثير من المسافة بين الكرتين عند انفراجها.



الشكل 5.4 للمثال (5.4)

الحل:

عند وضع الاتزان تكون القوى المسلطة على كل من الكرتين هي قوة التنافر حسب قانون كولوم وقوة جذب الارض mg المتجهة نحو الاسفل حسب قانون نيوتن حيث g هو

التعجيل الارضي وقوة توتر الخيط التي تكون باتجاه الخيط نفسه . وحيث ان محصلة القوى الثلاث تساوي صفراً حسب قوانين الاتزان فان محصلة القوتين الاولى والثانية يجب ان تكون بعكس اتجاه القوة الثالثة ، اي على امتداد اتجاه الخيط . لذا تساوي النسبة بينهما ظل الزاوية التي يصنعها الخيط مع الشاقول ، اي ان :

$$\frac{F}{mg} = \tan\theta \tag{5.7}$$

حيث

$$F = \frac{q \times q}{4\pi\epsilon_0 (2x)^2} \tag{5.8}$$

حيث x تساوي $l \sin\theta$ من العلاقات المثلثية للشكل لذا من تعويض (5.8) في (5.7) نحصل على :

$$\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0\, l\, mg \sin^2\theta} = \tan\theta \tag{5.9}$$

اي ان

$$\tan\theta \sin^2\theta = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0\, l\, mg} \tag{5.10}$$

وحيث ان المسافة بين الكرتين (2n) اصغر بكثير من طول الخيط e فان الزاوية θ هي زاوية صغيرة والتي يكون مقدارها بالزوايا نصف القطرية مساوٍ تقريباً لظلها وجيبها . اي ان :

$$\theta \simeq \sin\theta = \tan\theta$$

لذا من العلاقة (5.10)

$$\theta^3 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg} \tag{5.11}$$

$$\therefore \theta = \sqrt[3]{\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l^2 mg}} \quad \text{rad} \tag{5.12}$$

5.3 شدة المجال الكهربائي :

اتضح من قانون كولوم ان اي شحنتين موجودتين قريباً من بعضهما تؤثر احداهما على الاخرى بقوة تنافر او تجاذب . ويعني ذلك ان كل شحنة لوحدها لها القابلية على ان تسلط قوة (تجاذب او تنافر) على اي شحنة جديدة توضع بالقرب منها . ان هذه القابلية موجودة في كل شحنة لكن تأثيرها يظهر فقط عندما توضع الشحنة الاخرى على مقربة منها . او بكلمة اخرى ان كل شحنة تحاط بحيز تظهر فيه آثار وجود تلك الشحنة . ويدعى هذا الحيز بالمجال الكهربائي لتلك الشحنة . ويلاحظ ان مدى المجال لاتتحدد بحجم معين في الفضاء بل هي كبيرة ، لكن تأثير الشحنة في نقطة بعيدة عنها هو تأثير ضعيف . لذا فان المجال الكهربائي Electrictield يضعف عند الابتعاد عن الشحنة كثيراً لدرجة امكانية اهماله . وعلى ذلك فان مايعنينا من المجال الكهربائي المحيط بشحنة هو ذلك الحيز الذي يمكن فيه التحسس بتأثير الشحنة . ولغرض مقارنة وقياس شدة المجال Electric Field Inteusity في اية نقطة في المجال ، فقد اصطلح على ان يكون قياس المجال الكهربائي بقياس شدته ، والتي تعرف بانها القوة المؤثرة على شحنة مقدارها وحدة واحدة عند وضعها في المجال في النقطة التي يراد معرفة المجال فيها . وقد اتفق على ان تكون وحدة الشحنات المستخدمة لقياس المجال موجبة . فشدة المجال الكهربائي هي اذاً حاصل قسمة القوة على الشحنة اي

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_t}{Q_t} \tag{5.13}$$

حيث $\vec{E}$ هي شدة المجال الكهربائي في النقطة التي وضعت فيها شحنة نقطية للفحص عند وضعها في مجال الشحنة Q . ويكون اتجاه $\vec{E}$ هو اتجاه F نفسه نظراً لأن

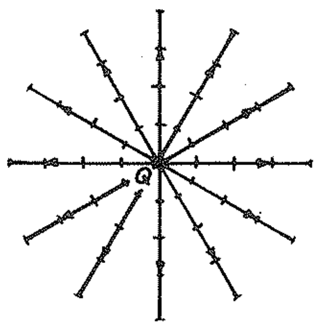
الشحنة Q_1 موجبة وهي ليست كمية متجهة. ومن تعويض المعادلة (5.6) في (5.13) على اساس ان قوة التجاذب او التنافر هي بين الشحنتين Q و Q_1 ، فتكون شدة المجال

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r}\vec{r} \tag{5.14}$$

عند وجود عدد من الشحنات قرب بعضها فان مجالاتها تتداخل مع بعضها البعض ويكون المجال النهائي هو محصلة تأثيراتها جميعاً، او بكلمة اخرى ان شدة المجال في نقطة معينة هي محصلة القوى الناتجة من الشحنات المختلفة على وحدة الشحنات الموجبة الموضوعة في تلك النقطة.

ويكون جمع هذه القوى جمعاً اتجاهياً كما هي العادة عند ايجاد محصلة القوى.

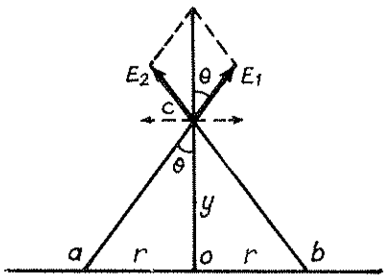
تحتوي شدة المجال على مقدار واتجاه. ولغرض تبيان اتجاه شدة المجال فقد اصطلح على ان يتم ذلك برسم خطوط تنبعث من الشحنة (ان كانت الشحنة موجبة) او تتجه نحوها (ان كانت الشحنة سالبة)، على ان تكون اتجاهات هذه الخطوط في كل نقطة باتجاه شدة المجال الكهربائي في تلك النقطة. وتدعى هذه الخطوط بخطوط المجال الكهربائي. ويمكن تصور هذه الخطوط على انه لو وضعت وحدة الشحنات النقطية الموجبة على اي من هذه الخطوط لكانت القوة المسلطة عليها او شدة المجال الكهربائي في تلك النقطة متجهة باتجاه هذه الخطوط. يبين الشكل 5 خطوط المجال الكهربائي حول شحنة نقطية موجبة واحدة والتي تكون بهيئة خطوط مستقيمة مبتعدة عن الشحنة.



الشكل5.5 خطوط المجال الكهربائي

مثال (5.5)

شحنتان موجبتان متساويتان مقدار كل منها q والمسافة بينهما 2r. اوجد شدة المجال في اي نقطة في المستوي العمودي على الخط الواصل بين الشحنتين على فرض ان احداثيات الشحنتين هي (r,0) و (−r,0) وان النقطة تبعد بـ y من نقطة الاصل.



الشكل 6.5 للمثال (5.5)

الحل:

لنأخذ نقطة مثل C على الاحداثي الصادي والذي يمثل مقطع للمستوي الذي يمكن ان تقع فيه النقطة المطلوبة . فالمسافة بين c وكل من النقطتين b,a تساوي

$$ac = bc = \sqrt{r^2 + y^2} \qquad ...(5\cdot15)$$

فتكون شدة المجال الناتجة من كل من الشحنتين

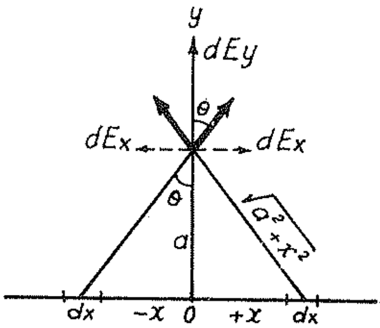
$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{q}{4\pi\epsilon(r^2 + y^2)} \quad \text{باتجاه } ac \\ E_2 &= \frac{q}{4\pi\epsilon(r^2 + y^2)} \quad \text{باتجاه } bc \end{aligned}\right\} \qquad ...(5\cdot16)$$

ونظرا لان هاتين الكميتين المتجهتين ليستا باتجاه واحد ، لذا يجب جمعها اتجاهياً. بتحليل كل منها الى مركبيتها العمودية والأفقية ان المركبتين الافقيتين متساويتان ومتعاكستان ، لذا تحذف احداهما تاثير الاخرى بينما تجمع المركبتان العموديتان (والمتساويتان بالمقدار بسبب تناظر الشكل) مع بعضها فتكون قيمة محصلة شدة المجال

$$E = 2E_1 \cos\theta = 2E_1 \frac{y}{\sqrt{r^2 + y^2}} = 2\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + y^2)^{3/2}} \quad ...(5\cdot17)$$

مثال (5.6)

سلك طويل جدا مستقيم الشكل يحمل شحنة منتظمة مقدارها q كولوم لكل متر. اوجد شدة المجال على نقطة تبعد عنه بمسافة a .



الشكل 5.7 للمثال (5.6)

الحل:

حيث ان السلك المفترض طويل جدا(بالمقارنة مع المسافة a) لنفرض انه يقع على محور السينات ويمتد في كلا الاتجاهين لمسافات بعيدة جدا (تقترب من اللانهاية) .

ولنفرض ان النقطة المطلوب حساب شدة المجال فيها تقع على محور الصادات على بعد a من نقطة الاصل. لنجزىء السلك الى عدد كبير من الاجزاء الصغيرة طول الواحدة منها d_x، وليكن على بعد x من نقطة الأصل. او نحاول ايجاد شدة المجال الناتجة عن هذا الجزء الصغير ثم نجمع (تكامل) شدة المجال الناتجة من كافة هذه القطع الصغيرة على امتداد السلك. ان تناظر الشكل يوحي بان شدة المجال dE ذات مركبتين احداهما عمودية dEy: والاخرى افقية : $d\,E_x$. والإخيرة تحذف مع بعضها منتجة محصلة عمودية فقط. هذا بالرغم من انه يمكن برهنة ذلك رياضياً ايضا ان لم يكن النظر الى الشكل مقنعاً (للطالب ان يحاول برهان ذلك). اما المركبة العمودية فتساوي

$$dE_y = dE \cdot \cos\theta = dE \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \qquad ...(5{\cdot}18)$$

ان الشحنة على الجزء من السلك طوله d^x تساوي qdx حيث أن q هي الشحنة لوحدة الطول ، لذا تكون

$$dE = \frac{qdx}{4\pi\epsilon\,(x^2 + a^2)}$$

فتصبح المركبة العمودية

$$dE_y = \frac{aqdx}{4\pi\epsilon\,(x^2 + a^2)^{3/2}} \qquad ...(5{\cdot}19)$$

ولغرض جمع كافة هذه المركبات لكافة اجزاء السلك الممتد من $+\infty$ الى $-\infty$ نأخذ تكامل المعادلة (5.19) ويناظر ذلك عملية الجمع تماماً وعليه:

$$E_y = \int_{-\infty}^{+8} \frac{aqdx}{4\pi\epsilon\,(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

لأخذ هذا التكامل نفرض ان

$$x = a \tan\theta$$

$$\therefore x^2 + a^2 = a^2 \tan\theta = a^2 \sec^2\theta = \frac{a^2}{\cos\theta}$$

وان

$$dx = a \sec^2\theta \, d\theta$$

وبتعويض ذلك في E.

$$E_y = \frac{aq}{4\pi\epsilon}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{a \sec^2\theta \, d\theta}{\left(\frac{a^2}{(\cos^2\theta)}\right)^{3/2}} = \frac{aq}{a^2 . 4\pi\epsilon}\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \cos\theta \, d\theta$$

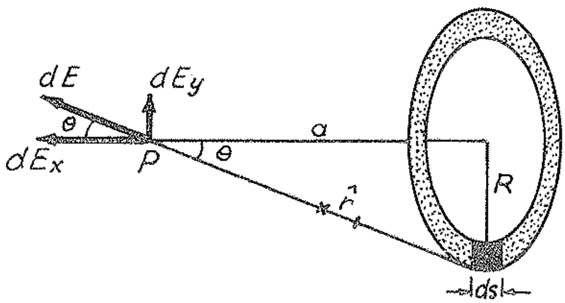
$$= \frac{q}{4\pi a\epsilon}\sin\theta\Big]_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \frac{q}{4\pi a\epsilon}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\Big]_{-\infty}^{+\infty} = 2\frac{q}{4\pi a\epsilon}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2}}}\Big]_0^{\infty}$$

$$= 2\frac{q}{4\pi\epsilon a} = \frac{q}{2\pi\epsilon a} \qquad \text{... (5·20)}$$

مثال (5.7)

شحنة مقدارها Q موزعة بانتظام على حلقة نصف قطرها R يطلب إيجاد شدة المجال الكهربائي الذي تنتجه على اي نقطة تقع على محور الحلقة وعلى بعد a من مركزها (النقطة p).



الشكل 5.8 شحنة بشكل حلقة

الحل :

باتباع اسلوب المثال (5.6) ، نأخذ جزءاً صغيراً من محيط الحلقة ولنفرض ان طوله ds فهو يحمل شحنة مقدارها $\frac{Q}{2\pi R}ds$ نظراً لان محيط الحلقة يساوي $2\pi R$ ومن التناظر يمكن بسهولة استنتاج ان المركبة العمودية لشدة المجال الكهربائي في النقطة p يحذف بعضها البعض فتبقى مركبة شدة المجال الافقية فقط والتي تساوي

$$dE_x = \frac{Q}{2\pi R} \quad \frac{ds}{4\pi\in(a^2 + R^2)}$$

وحيث ان كافة نقاط محيط الحلقة تبعد عن p بالمسافة نفسها ، كما يصنع الخط الواصل بينها وبين النقطة p الزاوية θ نفسها مع محور السينات ، لذا فأن.

$$dE = \frac{Q\cos\theta}{8\pi^2 R\in(a^2 + R^2)}ds$$

$$E = \int dE = \frac{Q\cos\theta}{8\pi R\in(a^2 + R^2)} \int_0^{2\pi R} ds$$

$$= \frac{Q\cos\theta \times 2\pi R}{8\pi^2 R\in(a^2 + R^2)} = \frac{Q\cos\theta}{4\pi\in(a^2 + R^2)}$$

وحيث أن $\cos\theta = \frac{a}{(a^2 + R^2)^{1/2}}$

$$= \frac{Qa}{4\in(a^2 + R^2)^{3/2}} \qquad \text{... (5·21)}$$

ومن هذه النتيجة يتضح ان شدة المجال في مركز الحلقة $a = 0$ تساوي صفراً . اما اذا كانت النقطة p بعيدة جدا عن الحلقة ، اي ان $a >> R$ فيمكن اهمال R في مقام النتيجة 5.21 وتصبح

$$E = \frac{Q}{4\pi\in a^2} \qquad (5.22)$$

حيث تظهر الحلقة كلها وكأنها شحنة بسيطة واقعة في مركز الحلقة وهي تشبه العلاقة (5.14).

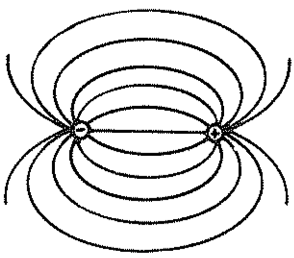
تمرين

اشتق معادلة شدة المجال الكهربائي داخل وخارج كرة نصف قطرها r وشحنتها 2 كولوم للمتر المكعب موزعة بشكل منتظم على حجم الكرة.

من نتيجة هذا المثال أي المعادلة (5.21) يمكن اعتبار اي سطح مستو كبير جداً (يمتد الى اللانهاية من جميع الاتجاهات) عبارة عن حلقات متداخلة سمك الواحدة منها dp ومساحتها $2\pi r\ dr$ وبجمع (اخذ تكامل) شدة المجال الناتجة عن كل حلقة من هذه الحلقات، يمكن ايجاد شدة المجال الناتجة عن صفيحة مستوية عليها شحنة منتظمة في نقطة تبعد عن الصفيحة بمسافة ما. وللطالب ان يحاول اشتقاق ذلك ليحصل على النتيجة $E = \frac{q}{2\epsilon}$ حيث q هي مقدار الشحنة للمتر المربع الواحد.

5.4 الفيض الكهربائي Electric Flux

سبق ان بينا في الفقرة 5.3 ان خطوط المجال الكهربائي تنبعث من الشحنة المنفردة الموجبة وتتجه نحو الشحنة السالبة. وان وجد اكثر من شحنة او اي جسم مشحون انبعثت خطوط المجال منه الى الحيز المحيط به أو إتجهت اليه في ذلك الحيز وتكون اتجاهات هذه الخطوط كما مر بنا باتجاه شدة المجال الكهربائي في تلك النقطة، او باتجاه القوة المسلطة على وحدة الشحنات الموجبة ان وضعت في تلك النقطة. يبين الشكل 5.9 مخططاً للمجال الكهربائي في مستوي الورقة ناتج عن شحنتين: احداهما موجبة والاخرى سالبة وتدعى هذه الوضعية بذات النقطتين dipole.



الشكل 5.9 المجال الكهربائي بين شحنتين مختلفتين

يلاحظ ان الخطوط بين الشحنتين مباشرة متكاثفة ، بينما في الاعلى والاسفل متباعدة عن بعضها وذلك لأن شدة المجال الكهربائي بين الشحنتين مباشرة اعلى منها عند الطرفين العلوي والسفلي. ويعني ذلك ان كثافة خطوط المجال الكهربائي ان رسمت بمقياس منتظم تشير الى مقدار شدة المجال في تلك النقطة.

بالرجوع الى الشحنة المنفردة المبينة في الشكل 5.6 يتضح في ابسط وضعية للشحنات ان خطوط المجال المنبعثة قد اعطت شدة مجال وفق المعادلة (5.14) والتي عند ضرب طرفيها في ϵ ينتج.

$$\epsilon\vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{r} \qquad ...(5\cdot23)$$

والتي هي عبارة عن حاصل قسمة الشحنة على المساحة السطحية لكرة تمر بالنقطة المراد معرفة شدة المجال فيها. اي ان الطرف الايمن من المعادلة هو عبارة عن الكثافة السطحية للشحنة ، لذلك فان الكمية ϵE في الطرف الايسر تدعى بكثافة الفيض الكهربائي ويرمز لها بالرمز $\vec{D}$ ووحدتها هي الكولوم لكل متر مربع . اما الفيض الكهربائي فهو عبارة عن مقدار كثافة الفيض الكهربائي مضروبة في مساحة السطح اي :

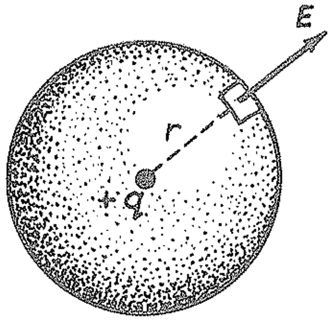
$$\psi = DS \qquad ...(5\cdot24)$$

حيث S هي المساحة السطحية و ψ هو الفيض والذي يمكن استنتاج وحدته من المعادلة ، فتكون وحدته هي الكولوم. ويلاحظ ان الكميتين D, E هما كميتان متجهتان ولها الاتجاه نفسه وهو اتجاه وحدة المتجهات $\vec{r}$ ، فيكون اتجاه الفيض باتجاه E, D ايضاً. أي أن

$$\psi = \vec{D}\cdot\vec{S} \qquad ...(5\cdot25)$$

5.5 قانون كاوس Gauss's Law

من المعادلة (5.25) اتضح ان الفيض على سطح ذا وحدة هي الكولوم. كما يتبين من المعادلة (5.23) ان كثافة الفيض D تعادل الشحنة مقسومة على المساحة السطحية للكرة المارة بتلك النقطة كما مبين في الشكل 5.10



الشكل (5.10) شحنة نقطية 2 محاطة بسطح كروي خيالي نصف قطره r

فعند ضرب كثافة الفيض D في المساحة الصغيرة ds المبينة في الشكل نحصل على الفيض الذي يقطع تلك المساحة. وعند شمول المساحة لكل السطح الكروي ، او بكلمة اخرى عند اخذ التكامل على كل السطح الكروي ، يكون المجموع هو الفيض الكلي الذي يقطع هذا السطح وهو الفيض الذي ينبعث من الشحنة Q اي ان

$$d\psi = Dds$$

$$\psi = DS = \epsilon ES$$

وبالتعويض عن S بـ $4\pi r$ وعن E بالمعادلة (5.14) نحصل على

$$\psi = \epsilon \quad \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} 4\pi r^2 = Q \qquad (5.26)$$

تدعى النتيجة الاخيرة المبينة في المعادلة (5.26) بقانون كاوس والذي يمكن صياغته كما يلي :
"المجموع الكلي على سطح (او التكامل السطحي) لمركبات كثافة الفيض الكهربائي D على اي سطح مقفل يساوي الشحنة الموجودة داخله".
ويكتب رياضياً بشكل :

$$\epsilon \underbrace{\int \vec{E} \cdot \vec{ds}}_{\text{تكامل سطحي}} = Q \qquad (5.27)$$

ومن العلاقة (5.26) ومن نص القانون نستنتج مايلي :

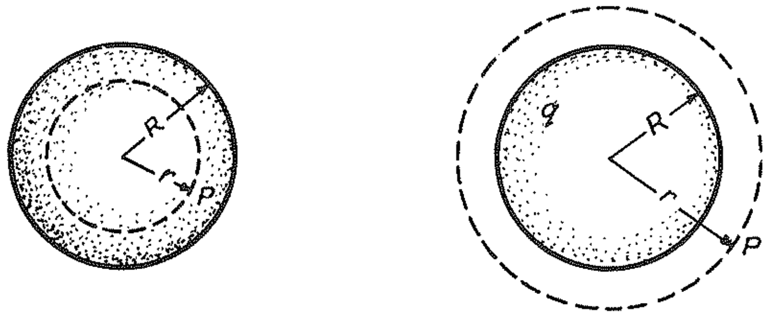
1– لايعتمد تطبيق القانون على نصف قطر او شكل السطح الذي يحيط بالشحنة. فالقانون صحيح سواء اكان السطح الكروي مثلا ذا قطر كبير او صغير ولايشترط ان يكون السطح كروياً او حتى منتظماً فالمهم أن يكون السطح مغلق.
2– اذا وجد عدد من الشحنات داخل السطح المذكور فيؤخذ مجموعها الجبري وتكون المحصلة هي الشحنة المؤثرة.
3– يشترط في كثافة الفيض عند جمعها مع بعضها على امتداد السطح ان تكون عمودية على السطح. فان لم تكن كذلك حللت الى مركبتين احداهما عمودية على السطح والاخرى مماسة للسطح ولاتؤخذ الاخيرة بنظر الاعتبار في الحل لأنها تختزل بعضها البعض.
4– يستخدم قانون كاوس لايجاد شدة المجال في حالات كثيرة ويمتاز بسهولة اعطاء النتائج شرط اختيار السطح المغلق المناسب.

مثال (5.8)

جسم كروي مشحون بشحنة كلية مقدارها Q ، موزعة بانتظام في حجم الكرة التي نصف قطرها R . اوجد شدة المجال الكهربائي في اي نقطة داخل الكرة وخارجها.

الحل :

أ- يبين الشكل 5.11أ كرة ذات نصف قطر R وقد احاط بها سطح كروي مغلق نصف قطره r حيث $r > R$ بتطبيق قانون كاوس على هذا السطح نجد



(ب) (أ)

الشكل 5.11 التوزيع الكروي للشحنة

$$Q = \epsilon \int E x ds$$

تكامل سطحي

فالشحنة المحصورة داخل السطح هي Q في هذه الحالة والتكامل السطحي هو عبارة عن E مضروبة في مساحة سطح الكرة التي قطرها r. اي ان

$$Q = \epsilon \pi E x 4 \pi r^2$$

اي ان شدة المجال الكهربائية على سطح الكرة التي نصف قطرها r

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \qquad (5.28)$$

والتي هي العلاقة (5.14) نفسها ، حيث يمكن استنتاج ان تأثير الشحنة الموزعة على سطح كروي بانتظام هو عبارة عن تأثير شحنة موضوعة في مركز الكرة نفسه .

ب- لايجاد شدة المجال الكهربائي في نقطة داخل الكرة نختار سطحا كرويا مقفلا ذا نصف قطر r بحيث ان $r < R$ كما مبين في الشكل 12.5ب فتكون الشحنة المحصورة داخل هذا السطح عبارة عن كثافة الشحنة مضروبة في حجم الكرة التي تنحصر داخل ذلك السطح الكروي . ان كثافة الشحنة تساوي $\dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

وحجم الكرة التي نصف قطرها r هو $\frac{4}{3}\pi r^3$ فتكون الشحنة الداخلية

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Qr^3}{R^3}$$

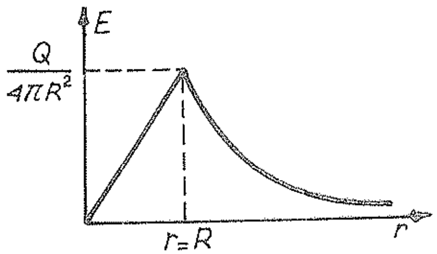
وبتطبيق قانون كاوس على هذا السطح

$$\underset{\text{الشحنة محصورة}}{Q} = \epsilon \underset{\text{تكامل سطحي}}{\int} E\,ds$$

$$\frac{Qr^3}{R^3} = \epsilon E 4\pi r^2$$

$$\therefore\ E = \frac{Qr^3}{R^3}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon R^3} \qquad \text{...(5·29)}$$

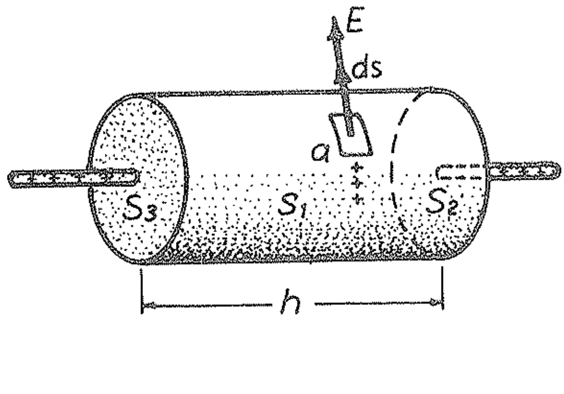
تصف المعادلتان (5.28) و (5.29) المجال الكهربائي داخل وخارج الكرة على التتالي . ففي داخلها تكون شدة المجال في المركز صفراً ثم تزداد بانتظام بزيادة نصف القطر الى ان تصل سطح الكرة ($r = R$) حيث تكون شدة المجال في اقصى قيمة لها وتساوي $\dfrac{Q}{4\pi\epsilon R^2}$ اما خارج الكرة فتبدأ شدة المجال الكهربائي بالنقصان الى ان تتلاشى عند مسافات بعيدة . يبين الشكل 5.12 منحني شدة المجال مع البعد عن مركز الكرة .



الشكل 5.13 سلك مشحون لانهائي الطول شحنته g كولوم/ سم

مثال (5.9)

اعد حل المثال (5.6) لايجاد شدة المجال الناتجة عن تيار مار في سلك مشحون طويل جدا باستخدام قانون كاوس (وكأن السلك مشحون)



الشكل 5.12 منحني العلاقة بين E و r لشحنة كروية

الحل :

يعتمد حل مسائل من هذا النوع باستخدام قانون كاوس على حسن أختيار السطح المغلق اللازم لتطبيق قانون كاوس . في هذه الحالة سنختار سطحاً اسطوانياً يحيط بالسلك ويمتد على طوله ، نصف قطره a متراً . وتجدر الاشارة الى ان الجزء الذي يهمنا هو السطح المنحني الاسطواني الشكل دون قاعدتيه ، لأن قاعدتيه قد افترضنا بعيدتين في اللانهاية . كما ان خطوط المجال المنبعثة من السلك تمس القاعدتين ولاتتعامد عليها ، حيث ان تطبيق قانون كاوس يشمل المركبة العمودية على السطح فقط .

عند تطبيق قانون كاوس على السطح الاسطواني نجد

$$Q = \epsilon \int E \, ds$$

تكامل سطحي

لنفرض ان طول السلك يساوي l فتكون الشحنة داخل السطح الاسطواني ql كولوم كما ان مساحة السطح الاسطواني تساوي $2\pi a l$ فنحصل على

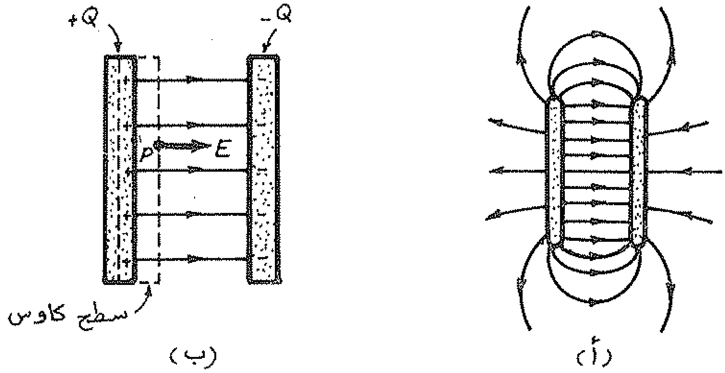
$$ql = E \times 2\pi a l$$

$$\therefore E = \frac{q}{2\pi \epsilon a} \quad N / c \qquad ...(5\cdot30)...$$

ويلاحظ ان هذه هي نتيجة المثال (5.6) نفسها ولكن طريقة الحل اقصر بكثير كما ان هذه النتيجة تنطبق فقط حينما $l >> a$. او بكلمة اخرى أن l تساوي لانهاية . اما ان كان الطول محددا فلا يمكن تطبيق قانون كاوس ويجب عند ذلك اتباع طريقة حل المثال (5.9) .

مثال (5.10)

يطلب ايجاد شدة المجال في اي نقطة بين صفيحتين مستويتين كبيرتين كل منها مساحتها A والمسافة بينها صغيرة جدا بالمقارنة مع ابعادهما . شحنت احدى الصفيحتين بشحنة مقدارها $+Q$ والاخرى $-Q$.



الشكل 5.14 المجال الكهربائي بين صفيحتين متوازيتين

الحل :

يبين الشكل 5.14 صفيحتين مشحونتين بشحنتين متعاكستين حيث تتجه شدة المجال الكهربائي بينهما من الصفيحة الموجبة الشحنة الى الصفيحة سالبة الشحنة بخطوط منتظمة ومستقيمة يمكن اخذ السطح المقفل اللازم لتطبيق قانون كاوس بشكل اسطوانة (ان كان شكل الصفيحتين دائريا) او بشكل منشور (ان كان شكل الصفيحتين مضلعا) بحيث يكون احد قاعدتي هذا الشكل ضمن احدى الصفيحتين. وحيث ان مايهمنا هو المركبة العمودية على السطح المقفل لذلك فان قاعدتي السطح الاسطواني او المنشورى هما اللذان يؤخذان بنظر الاعتبار.

ان شدة المجال داخل الصفيحة تساوي صفراً ، لذا لم يبق من السطح الاسطواني سوى القاعدة الاخرى التي تقع بين الصفيحتين.

بتطبيق قانون كاوس تكون الشحنة داخل الشكل الاسطواني او المنشوري Q ومساحة السطح المقفل التي تتعامد مع شدة المجال بين الصفيحتين هي A لذلك :

$$Q = \epsilon \int_{\text{تكامل سطحي}} E \, , ds$$

$$= \epsilon EA$$

$$\therefore\ E = \frac{Q}{\epsilon A} \qquad ...(5\cdot31)$$

اي ان شدة المجال بين صفيحتين مشحونتين تعادل كثافة الشحنة على كل من الصفيحتين (بالكولوم لكل متر مربع) مقسومة على E . أو أن

$$D = \epsilon E = \frac{Q}{A} \qquad ...(5\cdot32)$$

5.6 الجهد الكهربائي Electric Potential

ان وجود مجال كهربائي حول شحنة مايتسبب في وجود قوة على اية شحنة نقطية اختبارية توضع في ذلك المجال. وقد سبق ان عرفنا شدة المجال الكهربائي على انها القوة المسلطة على شحنة نقطية اختبارية موجبة مقدارها وحدة الشحنات النقطية والناتجة عن الشحنة النقطية الاصلية. ان هذه القوة تحاول تحريك وحدة الشحنات النقطية باتجاه تاثير القوة. لذلك فان ايقاف هذه الحركة يحتاج الى جهد ما. او بكلمة اخرى ان مقاومة تاثير القوة المسلطة على الشحنة النقطية الاختبارية يحتاج الى جهد. هذا بالاضافة الى ان اي حركة داخل المجال الكهربائي تقاوم اتجاه القوة المذكورة تحتاج الى بذل جهد ما او صرف طاقة لتحريك الشحنة النقطية الاختبارية.

تشبه القوة المسلطة على وحدة الشحنات النقطية قوة الجذب الارضي المسلطة على الاجسام الساقطة. نحتاج في كلتا الحالتين الى تحديد نقطة اصل او مستوٍ معين لاعتبار ان الطاقة فيه تساوي صفرا. ففي الجذب الارضي نعتبر عادة مستوي سطح الارض او سطح البحر ذا طاقة تساوي صفراً. فعند رفع جسم من سطح البحر الى ارتفاع معين فأنه يكتسب طاقة كامنة نتيجة وضعه الجديد ويمكن استعادة هذه الطاقة بشكل طاقة حركية عند سقوطه من موقعه المرتفع الى سطح البحر ثانية. اما في الاجسام المشحونة الموجودة في المجال الكهربائي فنحتاج الى نقطة لايظهر فيها تأثير الشحنة لكي تعتبر كنقطة أصل. ويمكن عملياً اعتبار اي نقطة بعيدة جداً (نظرياً تعتبر مسافتها لانهاية) كنقطة أصل (اي مايعادل سطح البحر في المجال الارضي) يعتبر فيها جهد وحدة الشحنات

الموجبة صفراً. عند نقل وحدة الشحنات هذه الى أية نقطة داخل المجال الكهربائي فأن جهدها يزداد وتكتسب طاقة كامنة يمكن استعادتها عند عودة الشحنة الى مكانها الاصلي أو أي مكان أخر خارج تأثير المجال الكهربائي. لذلك يمكن تعريف الجهد الكهربائي عند اية نقطة داخل المجال الكهربائي بأنه الشغل اللازم لنقل وحدة الشحنات النقطية الموجبة من سكان بعيد جداً (تقع في اللانهاية) الى تلك النقطة.

نظرا لان الشغل هو عبارة عن حاصل ضرب القوة في المسافة، لذلك فان الشغل الذي تنجزه وحدة الشحنات هو عبارة عن القوة المسلطة على وحدة الشحنات (شدة المجال الكهربائي) مضروبة في المسافة. ونظرا لان مقدار هذه القوة يتغير عادة من نقطة لاخرى داخل المجال فان الشغل يجب ان يوضع بشكل تكامل. اي

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} E \cdot dl \qquad ...(5\cdot33)$$

حيث يتبين ان حدود التكامل تبدأ من نقطة الاصل التي جهدها صفرا (اللانهاية) الى النقطة المطلوب ايجاد جهدها (النقطة A) كما ان l تمثل المسافة. والاشارة السالبة تشير الى عكس الاتجاه بسبب حدود التكامل:

عند تحريك وحدة الشحنات من نقطة معينة داخل المجال الى نقطة اخرى فان شغلا يبذل في ذلك. وحيث ان جهد كل من هاتين النقطتين يتحدد بالشغل اللازم لنقل وحدة الشحنات الموجبة من نقطة بعيدة جدا الى النقطة المعينة، فان فرق الجهد بين النقطتين هو عبارة عن الشغل اللازم لنقل وحدة الشحنات من النقطة الاولى الى النقطة الثانية، حيث من المعادلة (5.33)

$$V_A - V_B = -\int_{\infty}^{A} E \cdot dl + \int_{\infty}^{B} E \cdot dl$$

$$= -\int_{B}^{A} E \cdot dl = \int_{A}^{B} E \cdot dl \qquad ...(5\cdot34)$$

يستوجب التكامل المار في المعادلتين (5.33) و (5.34) ان تكون شدة المجال باتجاه المسار الخطي (باتجاه dl) . اما ان لم تكن هاتان الكميتان باتجاه واحد فيجب تحليل E الى مركبتين احداهما باتجاه dl وهي التي تؤخذ بنظر الاعتبار والاخرى عمودية على dl والتي لايمكن ان تنجز اي شغل وليست ذات تأثير على جهد النقطة وهذه تشبه فرق الطاقة الكامنة بين نقطتين في مجال الجاذبية الارضية حيث ان هذا الفرق هو فرق ثابت بغض النظر عن المسار الذي يمكن ان تسلكه عند نقل كتلة من النقطة الاولى الى النقطة الثانية . كذلك هي الحال في فرق الجهد بين نقطتين داخل المجال الكهربائي فلا تحدد المعادلة (5.34) المسار الذي يجب ان يتم التكامل خلاله . بل يمكن اخذ اي مسار وتكون النتيجة واحدة في كل الاحوال . لذا فالجهد الكهربائي هو كمية غير متجهة بخلاف شدة المجال .

من العلاقة (5.33) يتبين ان وحدة الجهد هي حاصل ضرب وحدتي شدة المجال الكهربائي والمسافة . اي انها تساوي $\frac{\text{نيوتن} \times \text{متر}}{\text{كولوم}}$. وحيث ان وحدة الجهد هي الفولت كما مر بنا في فصول التيار المستمر. لذلك يمكن استنتاج ان وحدة شدة المجال الكهربائي التي مرت سابقا (نيوتن لكل كولوم) ما هي الا فولت لكل متر وهي وحد اسهل من الوحدة الاولى كما هو واضح . اي ان

$$\frac{\text{نيوتن . متر}}{\text{كولوم}} = \frac{\text{جول}}{\text{كولوم}} = \text{فولت}$$

ان ابسط المجالات الكهربائية هو المجال الناتج من شحنة نقطية واحدة ، حيث شدة المجال حولها معرّفة بالعلاقة (5.14) والتي يمكن ان توضع بحذف وحدة المنجهات بالصيغة

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (5.33) ، تصبح

$$V_A = -\int_{\infty}^{A} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\left[\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{\infty}^{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \qquad \text{...(5.35}$$

أي أن الجهد الكهربائي في نقطة داخل المجال المحيط بشحنة كهربائية مركزة في نقطة يتناسب تناسباً عكسياً مع بعد تلك النقطة عن الشحنة . ومن الواضح أن جهد النقطة البعيدة جداً (التي تكون R لها تساوي اللانهاية) يساوي صفراً. أما فرق الجهد بين نقطتين داخل المجال فتساوي

$$V_B - V_A = -\left[\frac{-Q}{4\pi\epsilon r}\right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right] \qquad ...(5\cdot36)$$

مثال (5. 11)

يطلب ايجاد الجهد الكهربائي في المستوي بين الشحنتين الموصوفتين في المثال (5.5)

الحل :

من المعادلة (5. 17) كانت شدة المجال الكهربائي بأتجاه عمودي على الخط ab في منتصفه تساوي

$$E = \frac{2qy}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + y^2)^{3/2}}$$

لغرض تحريك وحدة الشحنات من نقطة بعيدة جداً الى النقطة (o,y) في المجال يمكن أن تكون الحركة على محور الصادات من اللانهاية الى هذه النقطة . أي أن

$$V = -\int_{\infty}^{y} \frac{qy}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + y^2)^{3/2}} dy$$

$$= \left.\frac{2q}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + y^2)^{1/2}}\right]_{\infty}^{y} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + y^2)^{1/2}} \qquad ...(5\cdot37)$$

مثال (5.12)

جسم كروي موصل نصف قطره R . يحمل شحنة مقدارها Q (موزعة بانتظام على سطحه فقط) أوجد شدة المجال الكهربائي والجهد داخل وخارج الكرة .

الحل :

باتباع أسلوب حل المثال (5.9) وبتطبيق قانون كاوس نجد أن شدة المجال داخل الكرة في هذه الحالة تساوي صفراً نظراً لعدم وجود شحنة داخلها ، بينما شدة المجال خارجها هي شدة المجال المعطاة بالمعادلة (5.28) نظراً لان الشحنة داخل سطح كاوس في الفرع (أ) من المثال المذكور هي شحنة المثال الحالي نفسها .

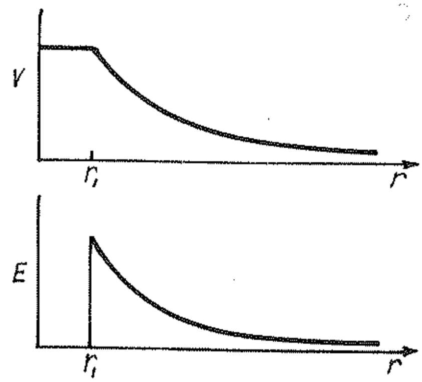
أما الجهد في اي نقطة خارج الكرة فتعادل

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \left.\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad ...(5\cdot38)$$

أما داخل الكرة فنظراً لعدم وجود اي مجال كهربائي داخل الكرة فأن حركة وحدة الشحنات داخل الكرة لايتسبب في اي شغل أضافي فوق الشغل الذي بذل لنقلها من نقطة بعيدة جداً الى نقطة داخل الكرة . لذا فأن الجهد الكهربائي داخل الكرة يساوي الجهد على سطحها حيث $r = R$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \qquad ...(5\cdot39)$$

يبين الشكل 5.15 توزيع الجهد وشدة المجال الكهربائي داخل وخارج الكرة . كما عّرف في المعادلات أعلاه .



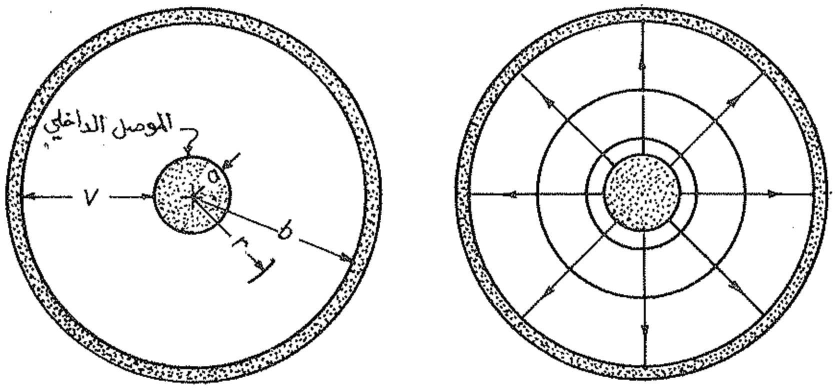
الشكل 5.15 توزيع الجهد الكهربائي وشدة المجال داخل وخارج الكرة المشحونة

مثال (5.13)

يطلب ايجاد توزيع شدة المجال الكهربائي والجهد الكهربائي بين موصلين طويلين جداً أسطوانيين متمركزين. يمثل الداخلي منها اسطوانة صلدة ذات نصف قطر a والخارجي منها اسطوانة فارغة ذات نصف قطر داخلي b مع اعتبار سمك الاسطوانة الخارجية قليل جداً. اذا كانت شحنة الموصل الداخلي موجبة وتساوي q كولوم لكل متر طول والاسطوانة الخارجية ذات شحنة q كولوم لكل متر طول سالبة.

الحل :

بتطبيق قانون كاوس بحيث يكون السطح الأسطواني ذا نصف قطر يعادل r حيث $a<r<b$ كما مبين في الشكل 5.16 تكون الشحنة المحصورة داخل هذا السطح q كولوم لكل متر طول. لذا



الشكل 4.16 موصلين اسطوانيين متمركزين

$$Q = ql = \epsilon \underbrace{\int E \, . \, ds}_{\text{تكامل سطحي}}$$

$$= \epsilon E \, . \, 2\pi r l$$

$$\therefore E = \frac{q}{2\pi \epsilon r} \qquad ...(5\cdot40)$$

فيكون الجهد

$$V = -\int_b^r E \cdot dr$$

$$= -\int_b^r \frac{q}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{-q}{2\pi\epsilon} \ln r \Big]_b^r$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon}(\ln b - \ln r) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{r} \qquad ...(5\cdot41)$$

ويلاحظ أن b قد أعتبرت هي مسافة اللانهاية بالنسبة لأي نقطة بين b و a نظراً لان الاسطوانة الخارجية تحمل شحنة سالبة تعادل الشحنة الموجبة الداخلية فيكون الجهد عند $r = b$ صفراً. كما يلاحظ أن الجهد على سطح الاسطوانة الداخلية يعادل

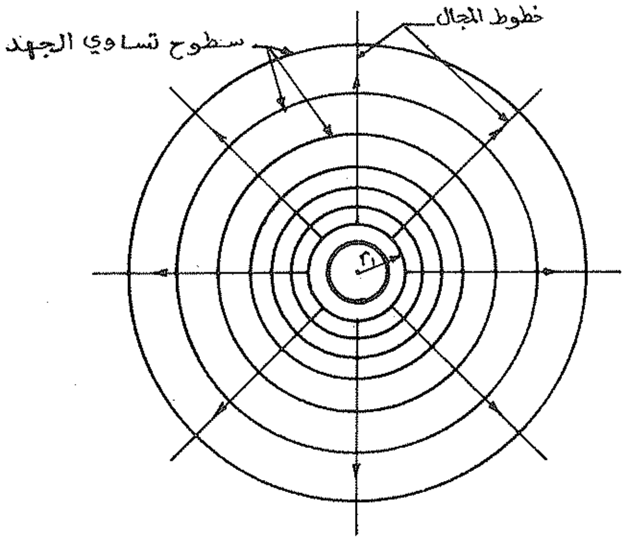
$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \qquad ...(5\cdot42)$$

5.7 سطوح تساوي الجهد Equipotential Surfaces

سبق أن بينا أن الحركة في مجال كهربائي بأتجاه شدة المجال يولد فرقاً في الجهد أو أن شغلاً يجب أن يبذل على وحدة الشحنات الموجبة عند حركتها بأتجاه معاكس لشدة المجال. أما الحركة بأتجاه عمودي على شدة المجال فلا يحتاج الى بذل شغل أو الى تغيير في الجهد. لذلك فالخط أو السطح الواصل بين النقاط ذات الجهد المتساوي يسمى بخط أو مستوي تساوي الجهد. ومن تعريف خطوط أو مستويات تساوي الجهد يمكن أن نستنتج أنها خطوط أو مستويات عمودية على خطوط المجال الكهربائي وبالحقيقة في الأجسام ذات الأبعاد الثلاثة تكون مستويات تساوي الجهد هي الموجودة وليست خطوط تساوي الجهد. أما خطوط تساوي الجهد فهي عبارة عن مساقط مستويات تساوي الجهد على سطح الورقة عند محاولة تمثيلها تخطيطياً.

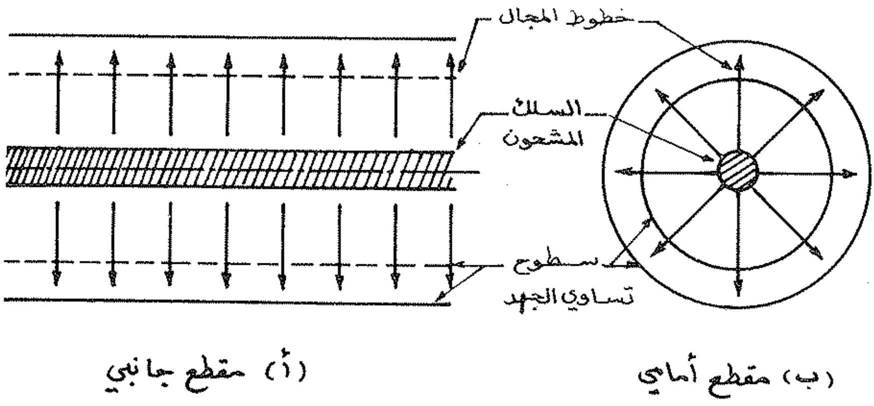
للشحنة المنفردة تكون خطوط الجهد عبارة عن مستقيمات تنبعث من الشحنة في كل الاتجاهات فتكون سطوح تساوي الجهد عبارة عن سطوح كروية متداخلة (مقاطعها على

سطح الورقة دوائر متداخلة) كما مبين في الشكل (17 .5) والذي يمكن ايضاحه مع المنحنيات المبينة في الشكل (5.15)



الشكل 17 .5 سطوح تساوي الجهد وخطوط المجال المنبعثة من شحنة كروية

أما أن كان الجسم المشحون عبارة عن سلك موصل طويل جداً فيمكن تصور خطوط المجال بأنها أسهم منبعثة من هذا السطح على أمتداد طوله وبكافة الأتجاهات بحيث تكون عمودية عليه. لذا يمكن استنتاج أن سطوح تساوي الجهد تكون عبارة عن سطوح اسطوانية متداخلة ومحيطة بالسلك (مقاطعها الطولية عبارة عن خطوط مستقيمة موازية للسلك. أما مقاطعها العرضية فهي عبارة عن دوائر متداخلة مع السلك كما مبين في الشكل 18 .5.



الشكل 5.18 سطوح تساوي الجهد وخطوط المجال لسلك طويل مشحون

5.8 حركة الالكترونات في مجال كهربائي

تمثل حركة الالكترونات في مجال كهربائي احد التطبيقات الشائعة والواضحة على تأثير الاجسام المشحونة على مايحيط بها من مجال أو تأثير المجال الكهربائي على الاجسام المشحونة الصغيرة التي تمر به. فالالكترون هو جسم صغير جداً. لذا يمكن أهمال حجمه واعتباره شحنة مركزة في نقطة واحدة.

عند وضع صفيحتين مستويتين كبيرتين جداً قرب بعضهما بحيث توازي احداهما الاخرى (المسافة بينها أصغر بكثير من أبعاد اي منها) وشحنت أحداهما بشحنة موجبة والاخرى بشحنة سالبة مساوية لها، فمن البديهي أن يكون بينها فرق جهد. وحيث أنهما متوازيتان فأن سطوح تساوي الجهد بينها هي عبارة عن مستويات متوازية بين الصفيحتين. أما خطوط المجال الكهربائي فتكون عبارة عن خطوط عمودية تنبعث من الصفيحة ذات الشحنة الموجبة وتنتهي بالصفيحة ذات الشحنة السالبة. فاذا فرضنا أن فرق الجهد بين الصفيحتين هو V كانت شدة المجال في أية نقطة بين الصفيحتين.

$$V = -\int_a^b E \cdot dl$$

$$= E(b-a) \qquad ...(5\cdot 43)$$

حيث أن $b-a=d$ عبارة عن المسافة بين الصفيحتين او بكلمة أخرى

$$E = \frac{V}{d} \qquad ...(5\cdot 44)$$

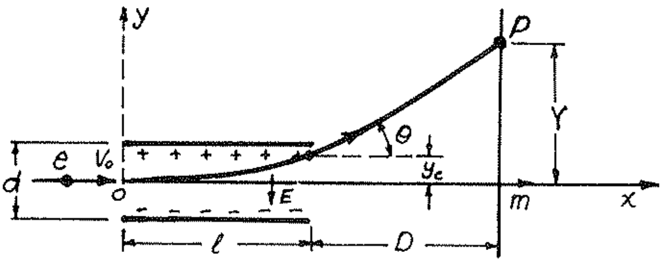
عند وضع الكترون في مجال كهربائي كهذا فأن شدة المجال تؤثر عليه وتجذبه نحو الصفيحة الموجبة نظراً لأن شحنته سالبة شأنه شأن الاجسام الساقطة على سطح الارض بفعل الجاذبية الارضية. اما اذا دخل الالكترون المجال الكهربائي بسرعة أفقية (عمودية على شدة المجال) فان حركته تتأثر بمركبتين أحداهما افقية نتيجة سرعته الابتدائية قبل دخوله المجال (وتبقى ثابتة طول المسار) وأخرى عمودية تتأثر بالمجال الكهربائي. ويشبه ذلك اطلاق الرصاصة من فوهة البندقية بأتجاه أفقي من فوق مرتفع حيث يكون المسار منحنياً

نظراً لتأثر وزن الرصاصة بقوة جذب الارض بالسرعة الأبتدائية للرصاصة عند أنطلاقها من الفوهة وعلى فرض أهمال مقاومة واحتكاك الهواء في المقذوفات. كما تجدر الاشارة الى أهمال وزن الالكترون (قوة جذب الارض) عند حركته في المجالات الكهربائية نظراً لأن هذه القوة صغيرة جداً بالمقارنة مع القوة الناتجة عن المجال الكهربائي عادة.

أن حركة الالكترونات في المجالات الكهربائية ذات تطبيقات مفيدة منها جهاز مرسمة الذبذبات oscilloscope والذي تقذف فيه الالكترونات على شاشة مطلية بمادة تبعث ضوءاً عند سقوط الالكترونات عليها. فاذا تغيرت الفولتية المسلطة على الصفيحتين المشار اليها اعلاه تغيرت شدة المجال الكهربائي وفق العلاقة (5.44) ومن ثم تغيرت القوة المسلطة على حزمة الالكترونات فتؤدي بها الى أن تسقط على موقع جديد من سطح الشاشة المرئية ويمكن بهذه الوسيلة رسم أشكال فولتيات الموجات الكهربائية المسلطة بين الصفيحتين.

مثال (5.13)

قذف الكترون بين صفيحتين فرق الجهد بينها V بسرعة مقدارها v. وكانت المسافة بين الصفيحتين d وطول كل من الصفيحتين l (أ) أوجد موقع سقوط الالكترون على لوح يبعد بمسافة عن نهاية الصفيحتين كما مبين في الشكل 5.19. (ب) اذا كانت $d=$ 1cm, $v=300v$, $l=10cm$, D50cm أوجد السرعة الابتدائية التي يجب ان يقذف بها الالكترون لكي يكون أنحرافه على اللوح المذكور 5cm عن نقطة.



الشكل 5.19الكترون قذف بسرعة عمودية على مجال منتظم

الحل :

بما أن
$$E = \frac{V}{d}$$

وحيث أن
$$E = \frac{F}{q_e}$$

$$\therefore F = q_e E$$

حيث q_e هي شحنة الالكترون وتساوي 1.6×10^{-19} كولوم
كتلة الالكترون me هي 9.1×10^{-31}. لذا يكون تعجيل الالكترون a وفق العلاقة

$$F = m_e a$$

لذا
$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{q_e E}{m_e} = \frac{q_e}{m_e} \quad \frac{V}{d} \qquad m / s^2$$

واما سرعة الالكترون العمودية فتكون

$$v_y = \int a \, dt + v_{y0} = at + v_{y0}$$

حيث v_{y0} تساوي صفراً نظراً لعدم وجود مركبة عمودية للسرعة الابتدائية ويكون موقع الالكترون y

$$y = \int v_y dt + y_0 = \frac{at^2}{2} + y_0$$

حيث $y_0 = o$ لأن موقع الالكترون الاساسي قد أعتبر في نقطة الاصل.
لذا يكون مسار الالكترون بين الصفيحتين محكوماً بالمعادلة التالية الناتجة بتعويض قيمة t السابقة

$$y = \frac{at^2}{2} = \frac{q_e}{m_e} \quad \frac{V}{d} t^2$$

يحتاج الالكترون الى زمن مقداره t_1 لقطع طول الصفيحتين افقياً حيث أن

$$v_x = \frac{l}{t_1} = v_0$$

$$\therefore t_1 = \frac{l}{v_0}$$

فيكون موقع الالكترون بعد t_1 من الزمن

$$y_l = \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \frac{V}{d} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2$$

وتكون سرعته العمودية حينذاك.

$$v_y = \frac{g_e}{m_e} \cdot \frac{V}{d} \cdot \frac{l}{v_0}$$

ويكون أتجاهه بزاوية مقدارها θ حيث

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_0}$$

لأن v_0 هي v_x

أي أن

$$\tan \theta = \frac{\frac{q_e}{m_e} \frac{V}{d} \frac{l}{v_0}}{v_0}$$

ومن الشكل 5.19 تكون

$$Y = y_l + D \tan \theta$$

أي ان

$$Y = \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \frac{V}{d} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 + D \frac{q_e}{m_e} \frac{V}{d} \frac{l}{v_0^2} = \frac{q_e}{m_e} \frac{v_l}{dv_0^2} \left[\frac{l}{2} + D \right] \quad ...(5\cdot45)$$

(ب) بالتعويض في المعادلة (5.45)

$$0{\cdot}05 = \frac{1{\cdot}6 \times 10^{-19}}{9{\cdot}1 \times 10^{-31}} \cdot \frac{300}{0{\cdot}01} \cdot \frac{0{\cdot}1}{v_0^2}\left[\frac{0{\cdot}1}{2} + 0{\cdot}5\right]$$

$$\therefore v_0^2 = 5800 \times 10^{12}$$

$$\therefore v_0 = 76 \times 10^6 \text{ m / s}$$

5.9 البرنامج الخامس : جمع القوى إتجاهياً

يطلب هذا البرنامج تحديد عدد القوى المطلوب جمعها ثم إدخال معلومات عن كل منها إما بشكل مركبتين متعامدتين أو بشكل قيمة وزاوية ثم يرسم خطوطاً تمثل كل قوة من هذه القوى ثم قيمة المحصلة.

```
10 PRINT"This is a program for adding forces vectoially"
20 INPUT "Number of forces= ",N
30 DIM X(N),Y(N)
40 FOR I=1 TO N
50 PRINT "For force number";I
60 PRINT"1 = x  and  y  coordinates"
70 PRINT"2 = r  and  angle"
80 INPUT M
90 IF M=2 THEN 120
100 INPUT " x-component and y component   ",X(I),Y(I)
110 GOTO 150
120 INPUT " magnitude and angle   ",R,T
130 X(I)=R*COS(T*3.14159/180)
140 Y(I)=R*SIN(T*3.14159/180)
150 NEXT I
160 SCREEN 8
170 CLS
180 LINE(300,0)-(300,200)
190 LINE(100,100)-(500,100)
200 XS=0:YS=0
210 FOR I=1 TO N
220 XS=XS+X(I):YS=YS+Y(I)
230 LINE(300,100)-(300+X(I),100-Y(I))
240 NEXT I
250 LINE(300,100)-(300+XS,100-YS)
260 PRINT"Resultant x and y components",XS,YS
```

مسائل الفصل الخامس

1. اوجد النسبة بين قوة التنافر الكهربائي وقوة الجذب (حسب قانون نيوتن بين الكترونين شحنة الالكترون 1.6×10^{-19} وكتلته 9.1×10^{-31} وثابت الجذب $6.67 \times 10^{-11}\, Nm^2/Kg$

(الجواب 3.8×10^{12})

2- مربع طول ضلعه متر واحد تحوي الزاوية العليا اليسرى منه على شحنة $Q_1 = +10^{-12}C$ والزاوية اليسرى السفلى على شحنة $Q_2 = -10^{-11}C$ والضلع العمودي الايمن على شحنة موزعة بانتظام بمعدل $10^{11}C/m$. اوجد شدة المجال الكهربائي في مركز المربع

(الجواب $0.4v/m$ باتجاه 196°)

3- ثلاث شحنات نقطية في الفراغ اقيامها ومواقعها كالاتي:

$Q = -6\ C$ عند النقطة $P(1,0,0)$

$Q = 10\ C$ عند النقطة $P(2,0,0)$

$Q = 4\ C$ عند النقطة $P(4,0,0)$

اي من الشحنات الثلاثة عليها اكبر قوة بين الشحنات وما مقدارها

(الجواب: $Q = 0.629\ N$)

4- شحنتان نقطيتان مقدار كل منها Q كولوم موضوعتان على زاويتين متقابلتين لمربع. كم شحنة q التي يجب وضعها في كل من الزاويتين الاخريتين لتصبح محصلة القوى على كل من الشحنتين الاوليتين صفرا.

(الجواب $q = Q / 2\sqrt{2}$)

5- شحنة نقطية مقدارها Q تقع عند النقطة $P(0,0)$ وشحنة ثانية Q تقع عند $P(0,1)$ عبر عن Q بدلالة Q بحيث ان شدة المجال E عند $P(1,-1)$ (آ) ليس لها محصلة عمودية (ب) ليس لها محصلة افقية.

(الجواب: $-1.976Q, -3.95Q$)

6- شحنة مقدارها 10^{-10} موضوعة في الهواء عند الاحداثيات $(x=0, y=0.1m)$ وضعت شحنة اخرى مشابهة في النقطة $(x=0, y=-0.1m)$.اوجد شدة المجال ومقدار واتجاه القوة على شحنة مقدارها $10^{-8}C$ في النقطة $(x=0.2m, y=0)$

(الجواب : $32.1\ V/m.\ 3.21 \times 10^{-7}N$)

7- ثمان شحنات متساوية موضوعة على رؤوس مكعب طول ضلعه 15 سم
(أ) اوجد شدة المجال في مركز المكعب (ب) اوجد شدة المجال في مركز احد جوانبه
(جـ) اعد الحل للفرعين السابقين اذا رفعت احدى الشحنات من احد رؤوس المكعب التي تقع في الجانب الذي وجدت شدة المجال في مركزه.
(الجواب 0 رفع الشحنة كما لو كانت موجودة لوحدها مع عكس الاتجاه).

8- قشرتان كرويتان نصف قطر الاولى R_1 ونصف قطر الثانية R_2 تحمل الاولى شحنة موزعة بانتظام مقدارها Q_1 والثانية على شحنة اخرى موزعة بانتظام ايضا مقدارها Q_2 باستخدام قانون كاوس وباهمال سمك القشرتين اوجد مقدار شدة المجال بدلالة البعد عن مركز الكرتين داخلها وبينها وخارجها. ارسم مخططا توضيحيا لتغير شدة المجال.

الجواب $(q_1 + q_2) / 4\pi\epsilon R\ ,\ q_4 / 4\pi\epsilon R\ ,\ 0)$

9- ثلاث اسطح كروية متمركزة، انصاف اقطارها و 6m,4m,2m على التوالي تحمل شحنات مقاديرها 6 C, −30C, 100 C. اوجد قيمة كثافة الفيض D على بعد من المركز (أ) 1m (ب) 3m (ج) 5m (د) 8m

(الجواب : 0,44.4, 3.2, 2.125 c/m)

10- سلك منحني على شكل نصف دائرة يحمل شحنة كلية مقدارها Q كولوم. اوجد شدة المجال الكهربائي في المركز

(الجواب صفر)

11- شحنتان متساويتان بالمقدار ومتعاكستان بالاتجاه المسافة بينها a . اوجد شدة المجال في اي نقطة في الفضاء المحيط بها. يمكنك اعتبار انها يقعان في مستو عند الاحداثيات $\left(x = \frac{a}{2}, y = 0\right)$ و $\left(x = \frac{-a}{2}, y = 0\right)$ والمطلوب ايجاد شدة المجال في نقطة عامة (x,y)

$$\frac{q\left(\frac{a}{2}\right)}{2\pi\epsilon_0\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2+x^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$ الجواب

12 – قشرة نصف كروية نصف قطرها r مشحونة بشحنة مقدارها Q موزعة بانتظام على سطحها . اوجد شدة المجال الكهربائي في المركز. اذا علمت ان $r = 10\,cm, Q = 10C$ اوجد شدة المجال في المركز.

$$\left(E = 45V/m\ ,\ E = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{الجواب} \right)$$

13 – اسطوانة صلدة طويلة نصف قطرها R تحمل شحنة موزعة بانتظام على جسم الاسطوانة بمعدل q كولوم لكل لتر مكعب. اوجد شدة المجال على نقطة تبعد r عن محور الاسطوانة حيث r اصغر او اكبر من R. ارسم تغير شدة المجال مع المسافة.

$$\left(3q\,\frac{R^3}{\epsilon r^2} = \frac{3qr}{\epsilon} \quad \text{الجواب} \right)$$

14 – قرص معدني دائري الشكل ذو سمك قليل ونصف قطره R يحمل شحنة منتظمة مقدارها q كولوم/متر مربع (أ) بالاستفادة من نتيجة المثال (7.5) اوجد شدة المجال على نقطة على محور القرص تبعد عن مركزه مسافة مقدارها a (ب) باستخدام نتيجة الفرع السابق، اوضح انه حينما يكبر قطر القرص الى مقدار كبير تقترب شدة المجال من مجال صفيحة مستوية منتظمة الشحنة .

$$\left(\frac{q}{2\epsilon}\ ,\ \frac{q}{4\epsilon^2} \quad \text{الجواب} \right)$$

15 -- جد جهد مركز المربع المذكور في السؤال2.
(الجواب 0.08V)

16− اوجد تغير الجهد مع المسافة عن مركز القشرتين المذكورتين في السؤال 3 مبينا ذلك بمخطط مناسب

$$\left(\text{الجواب صفر،} \quad \frac{Q_1}{4\pi\epsilon R} \;،\; \frac{Q_1+Q_2}{4\pi\epsilon R}\right)$$

17− اربع شحنات متساوية موضوعة على رؤوس مربع. اوجد شدة المجال الكهربائي والجهد في مركز المربع وفي منتصف احد الاضلاع.

$$\left[\text{الجواب} \quad , \quad \frac{\sqrt{2}\,q}{\pi\epsilon a},\quad \frac{q}{\pi\epsilon a}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]$$

18− للمربع المذكور في المسألة 12 اوجد شدة المجال والجهد الكهربائي على طول المستقيم العمود على مستوي المربع وعلى بعد x عن مركزه.

$$\left(V = \frac{q}{\pi\epsilon\left[\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + x^2\right]^{\frac{1}{2}}} ، E = \frac{q\,x}{\pi\epsilon\left[\left(\frac{a}{a^2}\right)^2 + x^2\right]^{3/2}} \right]$$

19− بالرجوع الى المثال (5.13) برهن على ان الجهد في نقطة تبعد r عن المركز تساوي

$$V = V_0 \frac{ln\frac{r}{a}}{ln\frac{b}{a}}$$

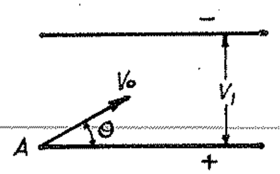
على فرض ان V_o هو جهد الاسطوانة الخارجية وان $a < r < b$
(أ) اوجد معادلات سطوح تساوي الجهد (ب) اوجد شدة المجال في النقطة r واوضح اتجاهها (جـ) اذا كان $V_o = 90V, B = cm\ , a = 1mm$ اوجد شدة المجال على نقطة تبعد 0.5 سم من المركز (د) انطلق الكترون من سطح الاسطوانة الداخلية

بسرعة $2 \times 10^6 m/s$ في اتجاه عمودي على السطح. اوجد سرعته حينما يصل الأسطوانة الخارجية والزمن الذي يستغرقه .

20 – ايون Ion كتلته $10^{-25}Kg$ يحمل شحنة تساوي شحنة خمسة الكترونات (5e). بدأ من السكون في نقطة A في مجال كهربائي ذي شدة منتظمة مقدارها 1000V . وصل النقطة الثانية B بعد مضي 10^{-5} ثانية من بدئه .

(أ) اوجد المسافة بين A و B (ب) كم يجب ان يكون جهد B اذا كان جهد A يساوي 50v – بالنسبة الى نقطة مرجعية معينة.

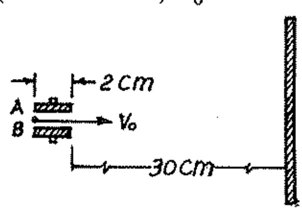
(الجواب 450V, 0.4m)



الشكل 5.20 لتوضيح المسألة 20

21 – مجال كهربائي منتظم مسلط بين صفيحتين متوازيتين A و B. دخلت بينها حزمة من الالكترونات كما مبين في الشكل 5.21 في منتصف المسافة بينها بسرعة ابتدائية ناتجة عن التعجيل من السكون بواسطة فرق جهد مقداره 1000 فولت. طول كل من الصفيحتين 2 سم والمسافة بينها 0.5 سم. سقطت الالكترونات على شاشة تبعد 30 سم من الصفيحتين. اذا كان فرق الجهد بين الصفيحتين 50 فولت ، اوجد انحرف حزمة الالكترونات عن موقعها لو سارت بالاصل بخط مستقيم.

(الجواب $V_0 = 1{\cdot}87 \times 10^7$, $Y = 3{\cdot}1$ cm)



الشكل 5.21 لتوضيح المسألة 21

الفصل السادس

دوائر المتسعات

«ويرسل الصواعق فيصيب بها من يشاء»
الرعد 13

6.1 حساب السعة

عند مناقشتنا السابقة للجهد الكهربائي كانت كافة التعابير الممثلة للجهد الكهربائي معتمدة على الشحنة بطريقة مباشرة بالرغم من اختلاف تلك التعابير بعضها عن البعض الاخر. او بكلمة اخرى كانت الشحنة تتناسب تناسبا طرديا مع الجهد ويطلق على ثابت التناسب هذا بالسعة. اي ان

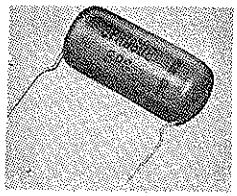
$$Q = CV \qquad (6.1)$$

حيث تقاس C بالكولوم لكل فولت او مايسمى بالفراد وهو وحدة كبيرة نسبيا*. لذا فان السعات التي تصادف عمليا هي بحدود ميكروفراد او نانوفراد.

* ان متسعة تتألف من صفيحتين تغطيان مساحة العراق باكمله والمسافة بينها متر واحد تبلغ حوالي 4 فراد فقط.

ويمكن تصور مايقابل السعة الكهربائية في خزانات الماء بسعتها ايضا. فان الطاقة الكامنة للماء المخزون في خزان مرتفع تعادل الطاقة الكامنة لوحدة واحدة من الماء مضروبة في سعة الخزان. فالسعة هي خاصية تنتج من وجود اجسام موصلة للشحنة الكهربائية مشحونة كهربائيا قريبة من بعضها البعض. وتختلف هذه السعة باختلاف الوضعيات كاختلاف سعة الاواني باختلاف اشكالها.ولا يشترط لوجود هذه الشحنات مرور تيار ولا تستهلك طاقة.

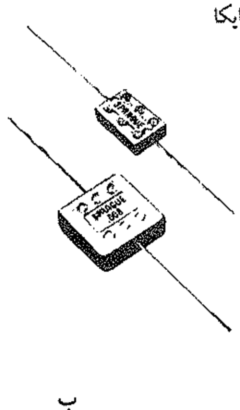
يطلق على الادوات التي تسخدم خصيصا لكي يكون لها سعة معينة بالمتسعات. وتستخدم المتسعات في الدوائر الكهربائية في تطبيقات شتى كما سيمر بنا فيما بعد. ويكون تركيبها الفيزياوي عبارة عن موصلين يفصل بينها عازل. ربما يكون العازل هواءا وقد يكون احد الموصلين هو الارض والتي هي عبارة عن موصل كبير جدا. يبين الشكل 6.1 انواع مختلفة من المتسعات.



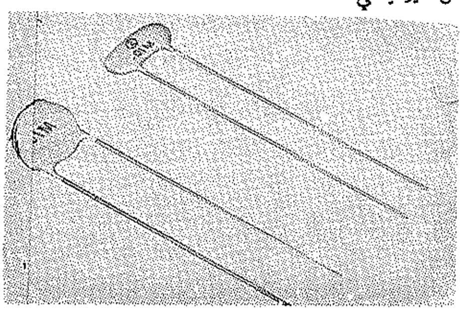
انبوبية

(a)

مايكا



قرص سيراميكي

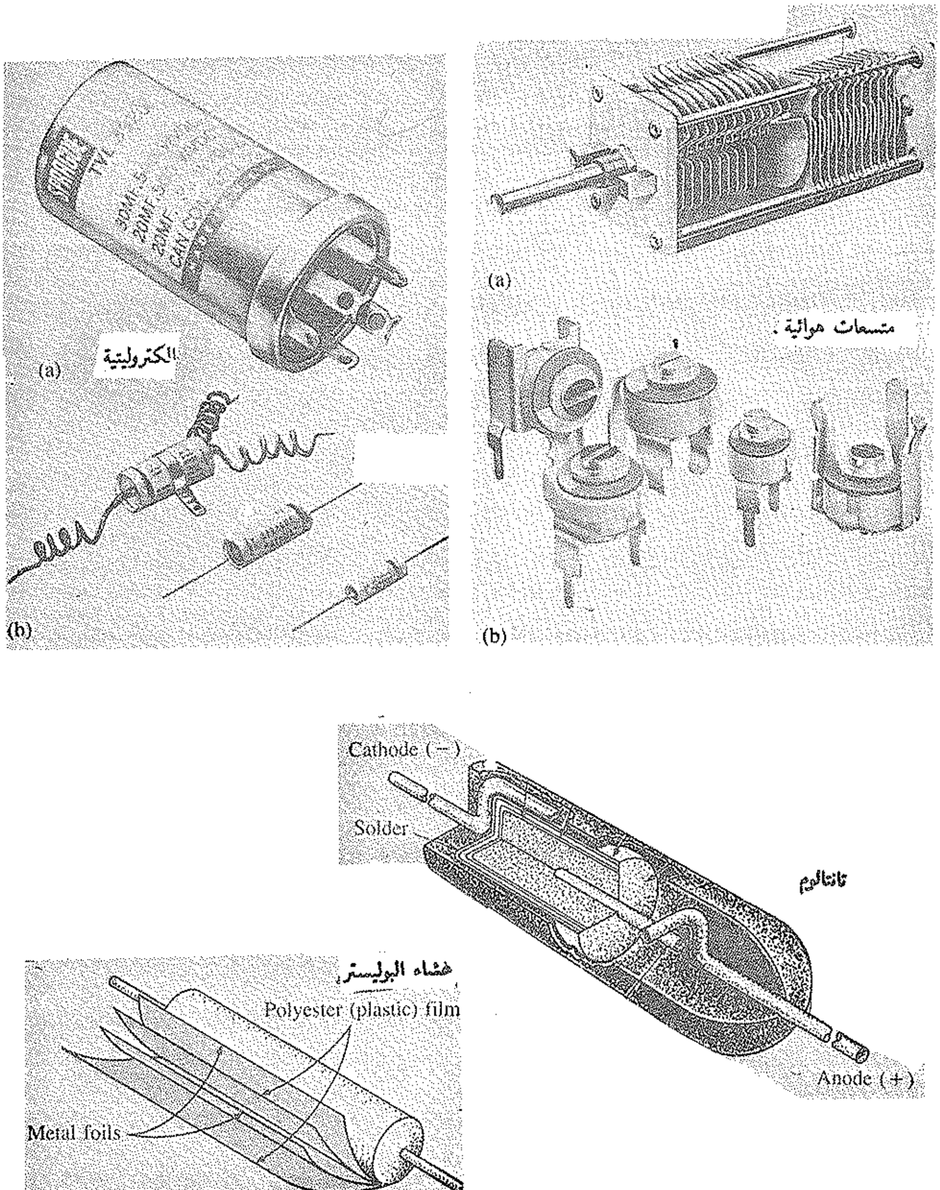


ب

جـ

أ– انبوبية ب– مايكا جـ – القرص السيراميكي

الشكل 6.1 أنواع مختلفة من المتسعات



أ– انبوبية ب– مايكا جـ– القرص السيراميكي

د– التانتالوم هـ– غشاء البولستر و– الالكتروليتية ز– هوائية متغيرة القيمة.

الشكل (6.1) انواع مختلفة من المتسعات

6.2 المتسعة ذات الصفيحتين المتوازيتين

ان ابسط اشكال المتسعات هي المتسعة المتكونة من صفيحتين مصنوعتين من مادة موصلة يفصل بينها عازل كالهواء او غيره. العلاقة بين شدة المجال بين الصفيحتين في هذه المتسعة وفرق الجهد المسلط بينها وقد سبق ان اعطيت المعادلة 5.44، حيث

$$E = \frac{V}{d} \qquad (6.2)$$

حيث V فرق الجهد بين الصفيحتين و d المسافة بينها والتي هي اصغر بكثير من ابعاد الصفيحتين كما ان شدة المجال الكهربائي للمتسعة قد مر بنا بالمعادلة (5.31) والتي تنص على

$$E = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{Q/A}{\epsilon} \qquad (6.3)$$

حيث Q هي الشحنة الكلية على كل من الصفيحتين و A هي مساحة كل منها. وبتعويض (6.3) في (6.2) ينتج

$$\frac{V}{d} = \frac{Q}{\epsilon A} \qquad (6.4)$$

والتي عند وضعها بشكل نسبة الشحنة الى الفولتية واستخدام العلاقة (6.1) تصبح

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon A}{d} \qquad (6.5)$$

اي ان سعة المتسعة ذات الصفيحتين المتوازيتين تساوي سماحية العازل مضروبة في مساحة كل من الصفيحتين مقسومة على المسافة بينها. فكلما زادت مساحة الصفيحتين كلما زادت السعة وكلما زادت المسافة بينها كلما نقصت السعة. كما ان السعة تزيد عند ازدياد سماحية العازل. فاستخدام عازل ذي سماحية عالية يعطي سعة اعلى استخدام الهواء ذي السماحية الواطئة. ويلاحظ هنا وجود ثلاث سماحيات مختلفة: احداهما سماحية الفراغ المطلق ϵ_0 والتي تبلغ قيمتها 8.85×10^{-12} فراد /متر. بينما تدعى ϵ بالسماحية وهي سماحية اي عازل اخر غير الفراغ المطلق. اما النسبة بينهما (الثانية الى الاولى) فتدعى بالسماحية النسبية

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \qquad (6.6)$$

يعطي الجدول (6.1) السماحية النسبية لبعض المواد العازلة الشائعة. ومن ذلك يلاحظ ان المواد العازلة تختص بقيم معينة للسماحية يمكن اعتبارها دليلا على قابلية تلك المواد على العزل.

(جدول 6.1 سماحيات المواد العازلة الشائعة)

اسم المادة العازلة	السماحية النسبية ϵ_r
الفراغ المطلق	1. (من التعريف)
الهواء (الضغط الاعتيادي)	1.0006
البارافين	2.1
البولسترين	2.7
الكهرب	3
المطاط	3
زيت المحولات	4
الكوارتز	5
المايكا والخزف	6
الباكلايت	7
الزجاج	7.5
المرمر	8
الامونيا (السائلة)	22
الماء المقطر	81

مثال (6.1) متسعة مكونة من صفيحتين كما مبين في الشكل 6.2 فيها d تساوي 1.5mm و A تساوي 0.01m وكان العازل هواء. مامقدار (آ) السعة (ب) شدة المجال بين الصفيحتين إذا كانت الفولتية المسلطة عبرهما 450V (ج) الشحنة على كل من الصفيحتين (د) إذا أُدخل عازل من المايكا سمكه بقدر المسافة بين الصفيحتين . اعد حساب الفروع آ، ب، ج أعلاه.

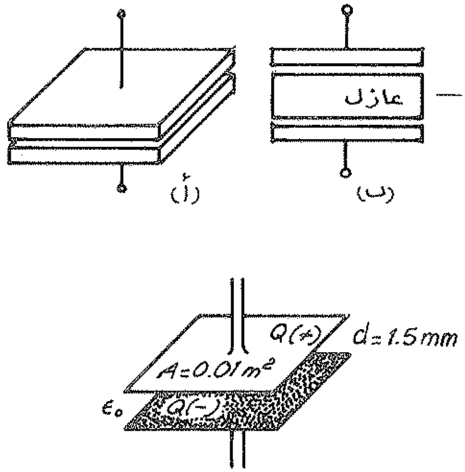
الحل :

(آ) السعة :

$$C = \frac{\epsilon A}{d}$$

$$\frac{8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 0{\cdot}01}{1{\cdot}5 \times 10^{-6}} = 59 \times 10^{-12}\ \mathrm{F}$$

$$= 59\ \mathrm{PF}$$



الشكل 6.2

(ب) شدة المجال :

$$E = \frac{V}{d} = \frac{450}{1{\cdot}5 \times 10^{-6}} = 300 \times 10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

(ج) الشحنة :

$$Q = CV$$

$$= 59 \times 10^{-12} \times 450 = 26.55\ \mathrm{nC}$$

(د) السماحية النسبية للمايكا تساوي 6 فتكون السعة بعد إدخال العازل بين الصفيحتين :

$$C = \frac{8{\cdot}85 \times 10^{-12} \times 6 \times 0{\cdot}01}{1{\cdot}5 \times 10} = 354 \text{ PF}$$

وتبقى شدة المجال بينها كما في (ب) أعلاه. أما الشحنة فتصبح:

$$Q = 354 \times 10^{-12} \times 450 = 159.3 \text{ nC}$$

6.3 متسعة من اسطوانتين متداخلتين:

سبق وقد مر بنا ان فرق الجهد بين اسطوانتين متمركزتين يكون وفق العلاقة 5.42 والتي تنص على

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon} ln \frac{b}{a} \qquad ...(6{\cdot}7)$$

وقد كانت Q هي الشحنة على كل من السطحين الاسطوانيين لكل متر طول. وكان b و نصفي قطري الاسطوانتين الخارجية والداخلية. وحيث ان السعة هي النسبة بين الشحنة وفرق الجهد، لذا تكون سعة المتسعة المكون من اسطوانتين لكل متر طول هي

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon}{ln \frac{b}{2}} \qquad ...(6{\cdot}8)$$

ويمكن الاستفادة من هذه العلاقة في حساب سعات الكيبلات المحورية المتكونة من موصلين بينها عازل

6.4 المتسعات ذات الأشكال الأخرى:

ربما يمر بالطالب حساب متسعات لتشكيلات معينة غير التي تم شرحها اعلاه. وعندها يمكنه استخدام قانون كاوس لحساب شدة المجال ثم تطبيق العلاقة بين شدة المجال

والجهد الكهربائي . وان لم يستطع تطبيق قانون كاوس فبامكانه تطبيق حساب الجهد من تعريفه الاساسي . وفي كل الاحوال يغلب على تعبير فرق الجهد ان يحتوي على الشحنة بشكل واضح ، لذلك فان حساب السعة (النسبة بين الشحنة وفرق الجهد) يكون امرا ميسورا .

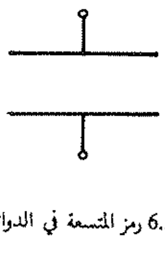
ومن الامثلة العملية على المتسعات من هذه الانواع السعة بين موصلين لخطوط نقل الطاقة او الاتصالات او السعة بين سلك يحمل تيار عالي والارض .

كما ان اي دائرة الكترونية تحتوي على سعات غير منظورة بين اسلاكها تدعى بالسعات الشاردة ولهذه السعات اهمية خاصة عند تصميم الدوائر الالكترونية خاصة في الترددات العالية .

6.5ربط المتسعات :

6.5.1 المتسعة المنفردة

تستخدم المتسعات في الدوائر الكهربائية كادوات لخزن الشحنات الكهربائية او بكلمة اخرى انها ادوات لخزن الطاقة الكهربائية . وقد مر بنا ان اشكال وحجوم المتسعات تحدد سعاتها (مقدار مايمكن ان يخزن بها من شحنات او طاقة) . ان العلاقة الاساسية بين الظروف الخارجية المحيطة بالمتسعة وقيمة سعتها سبق وان اعطيت بالعلاقة 6.1 والتي هي العلاقة الاساسية التي تتحكم في تصرف المتسعة وهي تقابل قانون اوم في المقاومة البسيطة . فكلما زادت الشحنة على متسعة ما كلما زاد فرق الجهد بين صفيحتيها . ويكون ثابت التناسب هو سعة تلك المتسعة . يرمز للمتسعة بخطين متوازيين بينهما فجوة كما مبين في الشكل 6.3

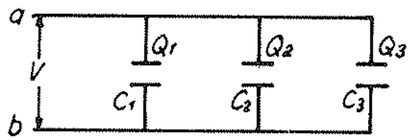


الشكل 6.3 رمز المتسعة في الدوائر الكهربائية

توضع احياناً اشارة موجبة وربما اخرى سالبة على احد الخطين المشيرين الى صفيحتي المتسعة ، وهنا يجب الانتباه الى ان هذه الاشارات تتعلق بالمسألة المعطاة واتجاه الشحنة وليس الى طبيعة صنع المتسعة فيمكن ان يتم العكس في مسألة اخرى . اي انه ليس هناك قطبية ثابتة للمتسعة كما هي الحال في النضائد. هذا عدا وجود حالات خاصة (مثل المتسعات الألكترونية التي يجب ربطها بقطبية معينة) . يشترط في ربط المتسعات ان يربط احد قطبيها بالجهة الموجبة او السالبة فتكون المسألة متعلقة بكيفية ربطها في الدائرة لكي تعمل بصورة سليمة .

6.5.2 المتسعات على التوازي

يبين الشكل 6.4 ربط ثلاث متسعات على التوازي . يتصف ربط التوازي كما كان ربط المقاومات على التوازي بان لكل منها فرق الجهد نفسه V . اما الشحنات المتجمعة على كل من صفيحتيها فمختلفة .



الشكل 6.4 الربط على التوازي

لقد مر بنا عند شرح قانون كرشوف الاول ان ذلك القانون يعتمد اساسا على عدم امكان تجمع التيار (والذي هو سرعة إنتقال الشحنات) في نقطة اتصال معينة في الدوائر الكهربائية . يمكن بسهولة من ذلك القانون الاستنتاج ان الشحنة هي الاخرى لايمكن ان تتجمع في نقطة اتصال ما . او بكلمة اخرى ان الشحنة الداخلة الى عدد من المتسعات المربوطة على التوازي يساوي مجموع الشحنات المتجمعة على كل المتسعات . وعليه فالشحنة الكلية Q_t تساوي

$$Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad (6.9)$$

حيث Q_1, Q_2, Q_3 هي شحنات المتسعات الثلاث. ويمكن اعادة كتابة العلاقة

$$Q_t = C_1V + C_2V + C_3V \tag{6.10}$$

حيث C_1, C_2, C_3 هي سعات المتسعات الثلاث. اذا فرضنا ان C_t هي السعة المكافئة لهذه المتسعات فان C_tV تساوي

$$C_tV = V(C_1 + C_2 + C_3) \tag{6.11}$$

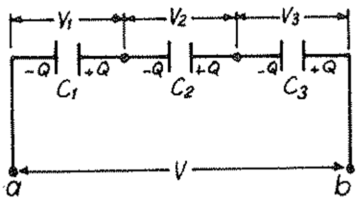
اي ان

$$C_t = C_1 + C_2 + C_3 \tag{6.12}$$

تعني المعادلة (6.12) ان سعة المتسعة المكافئة لثلاث سعات متوازية هي عبارة عن مجموع تلك السعات جمعا بسيطا. وتجدر الاشارة الى ان ذلك يشابه طريقة جمع المقاومات على التوالي.

6.5.3 المتسعات على التوالي

يبين الشكل 6.5 ثلاث متسعات على التوالي. وبتطبيق قانون كرشوف الثاني نجد



الشكل 6.5 الربط على التوالي

ان الفولتية الكلية V_t تساوي

$$V_t = V_1 + V_2 + V_3 \tag{6.13}$$

حيث V_3, V_2, V_1 هي فولتيات المتسعات الثلاثة. اذا تصورنا ان التيار هو سرعة إنتقال الشحنات المارة على فترة زمنية معينة وان ربط عناصر على التوالي يعني مرور التيار نفسه فيها ، فان متسعات مربوطة على التوالي تتسبب في تجمع شحنات متساوية عبر صيفحتيها كما موضح في الشكل 3.6 . لذا فان فرق الجهد عبر كل منها عبارة عن النسبة بين شحناتها المتساوية (Q) وسعاتها المختلفة (C_3, C_2, C_1). اي ان

$$V_t = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \qquad ...(6\cdot14)$$

وبتعريف السعة المكافئة C_t على انها النسبة بين الشحنة وفرق الجهد الكلي V_t تكون

$$V_t = \frac{Q}{C_t} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} \qquad ...(6\cdot15)$$

اي ان

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad ...(6\cdot16)$$

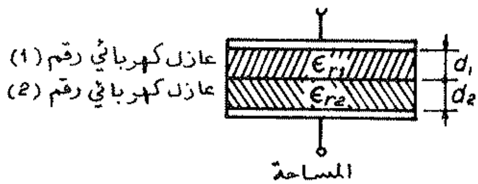
توضح المعادلة (6.16) ان مقلوب السعة المكافئة لعدد من السعات المربوطة على التوالي يساوي مجموع مقلوبات سعاتها. ويشبه ذلك ايجاد المقاومة المكافئة لعدد من المقاومات المربوطة على التوازي كما مر بنا في الفصل الثاني.

ويلاحظ أن المتسعات المتكونة من طبقات مختلفة من العوازل يمكن إعتبارها متسعات منفصلة لكل منها عازل مختلف ومربوط على التوالي.

6.6 عازل المتسعة

يؤثر نوع عازل المتسعة على قيمة سعتها كما مر في العلاقة (6.5) ، حيث $C = \frac{\epsilon A}{d}$ فاذا اختلفت قيمة ϵ (اي اختلف العازل) مع بقاء ابعاد المتسعة على ماهي عليه تغيرت السعة وفق ذلك.

تصنع بعض المتسعات من صفيحتين بينها عازلان متميزان كما في الشكل 6.6 . من الواضح انه لايمكن اخذ اي من العازلين 1 و 2 كعازل منفرد للمتسعة بل يمكن تصور



شكل 6.6 متسعة ذات الصفيحتين المتوازيتين
مع عازلين كهربائيين

وجود صفيحة خيالية بين العازلين بحيث تكّون مع الصفيحة العلوية متسعة اولى عازلها ذو سماحية نسبية ϵ_{r_1} وسعتها C_1 كما تكّون مع الصفيحة السفلية سعة مقدارها C_2 وعازلها ذو سماحية نسبية ϵ_{r_2} . وهاتان المتسعتان مربوطتان على التوالي. فتكون سعتها المكافئة C_t .

$$\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad ...(6.17)$$

وبتعويض (6.5) عن كل من C_2, C_1

$$\frac{1}{C_t} = \frac{d_1}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} A} + \frac{d_2}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} A}$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0 A}\left(\frac{d_1}{\epsilon_{r_1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r_2}}\right) \qquad ...(6\cdot18)$$

اي ان السعة المكافئة

$$C_t = \frac{A\epsilon_0}{\frac{d_1}{\epsilon_{r_1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r_2}}} \qquad ...(6\cdot19)$$

مثال (6.2)

متسعة مكونة من صفيحتين عرض كل منها 10 سم وطولها 1000 م. وضعت بينها طبقة من المايكا بسمك 1 ملم وطبقة اخرى من المطاط بسمك 2ملم. احسب سعة المتسعة المتكونة.

الحل:

من الجدول 6 نجد ان السماحية النسبية للمطاط تساوي 3 وللمايكا تساوي 6. بتطبيق العلاقة (6.19)

$$C_t' = \frac{0\cdot10 \times 1000 \times 8\cdot85 \times 10^{-12}}{\frac{0\cdot001}{6} + \frac{0\cdot002}{3}}$$

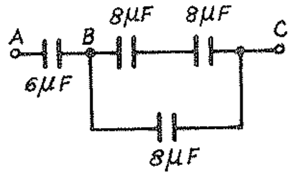
$$= 1\cdot02 \times 10^{-6}\ F$$

$$= 1\cdot02\ \mu F$$

في الدوائر المحتوية على متسعات مربوطة على التوازي وعلى التوالي يتم ايجاد المتسعة المكافئة وفق العلاقتين (6.12) و (6.16) باسلوب متسلسل كما موضح في المثال التالي:

مثال (6.3)

اوجد السعة المكافئة للدائرة المبينة في الشكل 4.6



الشكل 6.7 انظر المثال 6

$$C_{BC} = \frac{8 \times 8}{8 + 8} + 8 = 4 + 8 = 12\ \mu F$$

$$C_{AC} = \frac{12 \times 6}{12 + 6} = 4\ \mu F$$

6.7 الحالة العابرة في المتسعات :

6.7.1 شحن المتسعات

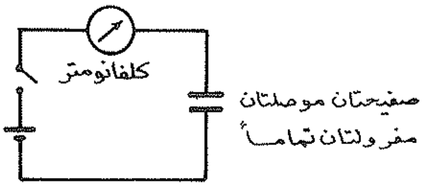
يمكن نقل كمية من الشحنة الموجبة الى احد طرفي متسعة بربطها مثلا بالطرف الموجب للنضيدة ونقل شحنة سالبة مساوية لها من الطرف الاخر الى الطرف السالب للنضيدة. تدعى هذه العملية بشحن المتسعة. ويلاحظ انه بعد شحن المتسعة وفتح دائرتها تحتفظ المتسعة بشحنتها لمدة طويلة شأنها شان خزان الماء الذي يُملأ ويحتفظ بمائه مالم يكن هناك تسرب او تفريغ لما يحتويه. تمثل الدائرة المبينة في الشكل 6.6 دائرة بسيطة لشحن متسعة يظهر فيها مقياس الكلفانوميتر والذي هو عبارة عن اميتر حساس جداً باستطاعته التحسس بمرور التيارات الصغيرة جدا او التي تستغرق فترة زمنية قصيرة جداً. عند غلق المفتاح يلاحظ بان الكلفانوميتر يظهر تاشيراً فجائيا يوضح مرور تيار لفترة من الزمن ثم يعود مؤشر الكلفانوميتر ثانية الى موقعه مما يوضح ان سريان التيار قد توقف. ان هذا الاندفاع في التيار هو عبارة عن سريان شحنة من القطب الموجب للنضيدة نحو الصفيحة العليا من المتسعة وانتقال شحنة سالبة مساوية لها من الصفيحة السفلى الى القطب السالب للنضيدة. ان هذه الشحنات قد انتقلت من اوالى صفيحتي المتسعة ثم توقف هذا الانتقال نظرا لامتلاء المتسعة بما يمكنها من شحنة عند الجهد المعين من قبل

النضيدة . ونظراً لانه لايمكنها استلام اية شحنة اخرى فان التيار قد توقف واصبحت الدائرة وكأنها مفتوحة لعدم امكان انتقال الشحنات من القطب الموجب الى القطب السالب داخل عازل المتسعة .

لو تصورنا وجود مقاومة بدل المتسعة فان تأشير الكلفانوميتر يصعد فجائيا باتجاه معين ويبقى ذلك التأشير ظاهرا على الكلفانوميتر طالما بقيت الدائرة مربوطة ومر تيار فيها . من مقارنة دائرة المقاومة مع دائرة المتسعة يمكننا ان نستنتج ان عملية شحن المتسعة لابد وان تكون ذات علاقة بالزمن . فالتيار الذي يمر في المتسعة هو عبارة عن سرعة إنتقال الشحنة مع تغير الزمن . اي ان

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{6.20}$$

وحيث ان الشحنة تمثل حاصل ضرب السعة في الفولتية فان العلاقة (6.20) تصبح



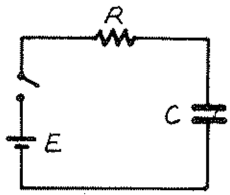
شكل 8 . 6 شحن متسعة .

$$i = \frac{d}{dt}(Cv)$$

$$= C\frac{dv}{dt} \qquad ...(6\cdot21)$$

تعني المعادلة (6.21) ان التيار هو عبارة عن حاصل ضرب السعة في مشتقة تغير الفولتية مع الزمن . فاذا تغيرت الفولتية عبر المتسعة بشكل فجائي اي كانت صفرا ثم اعطيت فولتية اخرى فجأة) فان مقدار التيار يكون لانهائيا (عمليا كبيرا جدا) وهذا مالاحظناه كتأشير مؤقت على الكلفانوميتر ثم توقف هذا التيار بعد ان توقف تغير الفولتية عبر المتسعة .

لناخذ دائرة كالمبينة في الشكل 6.9 يلاحظ في هذه الدائرة انه بعد غلق المفتاح يمكن تطبيق قانون الفولتية لكرشوف بحيث تكون فولتية النضيدة مساوية لمجموع الفولتية عبر



شكل 6.9 دائرة متسعة ومقاومة على التوالي مع المصدر E

المقاومة (والتي تساوي حاصل ضرب التيار في المقاومة) والفولتية عبر المتسعة (والتي تساوي حاصل قسمة الشحنة على السعة) اي ان :

$$E = V_R + V_C \quad ...(6{\cdot}22)$$

$$E = iR + \frac{q}{C} \quad ...(6{\cdot}23)$$

وحيث ان

$$i = \frac{dq}{dt}$$

نحصل على

$$E = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad ...(6{\cdot}24)$$

اي ان العلاقة بين كمية الشحنة المارة في كل لحظة في المقاومة والمتجمعة على صفيحتي المتسعة ترتبط مع الزمن بهذه العلاقة وهي عبارة عن معادلة تفاضلية.

يمكن حل هذه المعادلة التفاضلية باعادة كتابتها بالشكل.

$$\frac{E}{R} - \frac{q}{RC} = \frac{dq}{dt} \qquad ...(6\cdot25)$$

وباعادة كتابتها مرة اخرى نحصل على

$$\frac{dq}{\frac{E}{R} - \frac{q}{RC}} = dt \qquad ...(6\cdot26)$$

عند اخذ تكامل طرفي هذه المعادلة نحصل على

$$- RC\, ln \left(\frac{E}{R} - \frac{q}{RC} \right) = t + A \qquad ...(6\cdot27)$$

حيث A ثابت التكامل، ويمكن ايجاده بتطبيق الظروف الابتدائية للشحنة على المتسعة. في الدائرة المبينة في الشكل 6.9 أفترض عدم وجود شحنة على المتسعة قبل قفل المفتاح اي ان q تساوي صفراً حينما t=o. وبتعويض ذلك في المعادلة (6.27) نحصل على

$$- RC\, ln \left(\frac{E}{R} \right) = A \qquad ...(6\cdot28)$$

ويمكن اعادة كتابة المعادلة (6.27) بعد تعويض قيمة A كما في (6.28) بالشكل التالي

$$q = CE \left[1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right] \qquad ...(6\cdot29)$$

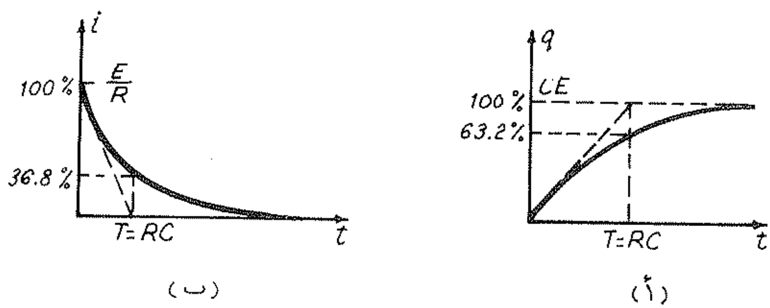
وبقسمة الطرفين على C نحصل على قيمة الفولتية عبر المتسعة

$$\frac{q}{C} = V = E\,[\,1 - e^{-\frac{t}{RC}}\,] \qquad ...(6\cdot30)$$

اما تعبير التيار المار في المتسعة فيمكن ايجاده بأخذ تفاصيل المعادلة (6.30)

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R}\,e^{-\frac{t}{RC}}\,] \qquad ...(6\cdot31)$$

يبين الشكل 6.10أ تغير الشحنة مع الزمن. ويبين الشكل 6.10ب، تغير التيار مع الزمن



الشكل 6.10 (أ) تغير الشحنة مع الزمن (ب) تغير التيار مع الزمن

مثال (6.4)

ربطت متسعة قيمتها 100 ميكروفراد مع مقاومة قيمتها 1 ميكا اوم ونضيده قيمتها 100 فولت على التوالي. كم تكون شحنة المتسعة بعد مضي عشرة ثوان على غلق الدائرة؟ وكم تصبح الشحنة بعد مضي نصف ساعة على غلقها؟

الحل :

تزداد شحنة المتسعة وفق العلاقة (6.29) حيث

$$q = CE\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

$$= 100 \times 10^{-6} \times 100\left[1 - e^{-\frac{t}{1\times10^{6}\times100\times10^{-6}}}\right]$$

$$= 10^{-2}\left[1 - e^{-0.01t}\right]$$

بعد مرور عشر ثوان

$$q = 10^{-2}\left[1 - e^{-0.1}\right] = 0{\cdot}96\ \text{mC} \qquad ...(6{\cdot}32a)$$

وبعد مرور نصف ساعة اي $60 \times 30 = 1800$ ثانية

$$q = 10^{-2}\left[1 - e^{-18}\right]$$

$$= 0{\cdot}01\ \text{C} \qquad ...(6{\cdot}32b)$$

من المثال (6.4) اتضح ان المتسعة اصبحت شحنتها 0.01 كولوماً بعد مضي فترة طويلة (نصف ساعة) على غلق الدائرة. وسوف لن تزيد هذه الشحنة بكمية محسوسة مع ازدياد الزمن حيث انها قد وصلت الى وضع الاستقرار ولم يبق فيها مجال لاية شحنة اضافية. اما قيمة الشحنة قبل ذلك اي في بدء شحنها (مثلاً بعد عشر ثوان من غلق الدائرة) فقد كانت اقل من ذلك بكثير. من ذلك يتبين ان هناك فترة زمنية تزداد فيها الشحنة الى ان تصل وضع الاستقرار والعامل المحدد لمثل هذه الفترة الزمنية يمكن استنتاجه من النظر الى المقدارين الاسيين في المعادلتين (6.32a) و (6.32b) حيث كان الأس في الاولى 0.1– وفي الثانية 18– . ونظرا لان e^{-18} او اية كمية سالبة في الاس تعطي قيمة صغيرة جدا ، لذا فان أس هذه الكمية حينما يكون ذا قيمة تساوي واحداً يكون ذو اهمية بالغة في تحديد شكل منحني الشحنة مع الزمن. فاذا كان الزمن يساوي رقميا حاصل ضرب $R \times C$ كان الاس للكمية الاسية في المعادلتين (6.29) و (6.30) واحدا. وعند ذلك يصبح مقدار $e^{-\frac{t}{RC}}$ مساوياً الى 0.368 تسمى الكمية RC بثابت الزمن وتعرف بانها ذلك الزمن الذي تستغرقه الشحنة على المتسعة لكي تصل 63.2% من قيمتها النهائية. ويرمز له لـ T ووحدته الثانية. ومن جهة اخرى يمكن اثبات ان ثابت الزمن هو الزمن المطلوب للفولتية او التيار او الشحنة لكي تصل قيم وضع الاستقرار لها اذا استمرت في التغير بسرعها الابتدائية للنمو او الاضمحلال كما هو موضح في الشكل 6.10. يقصد بالنمو زيادة هذه الكميات والاضمحلال نقصانها. فكلما زاد ثابت الزمن نجد ان فرق الجهد عبر المتسعة

او الشحنة على صفيحتيها تأخذ زمنا اطول لكي تصل الى قيم وضع الاستقرار. اما ان كان ثابت الزمن قليلا فانه يمكن شحن المتسعة بسرعة اكثر.

مثال (6.5)

اوجد الزمن الذي تستغرقه المتسعة المذكورة في المثال السابق لكي تصل شحنتها (أ) 63.2% من الشحنة النهائية (ب) 50% من الشحنة النهائية.

الحل :

(أ) تصل الشحنة 63.2% من الشحنة النهائية بعد مضي ثابت زمن واحد اي ان

$$T = RC$$

$$t = RC = 1 \times 10^{6} \times 100 \times 10^{-6} = 100 \quad \text{ثانية}$$

(ب) المعادلة (6.29) حيث

$$q = CE\left[1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$$

يتم الوصول الى القيمة النهائية للشحنة عندما $t = \infty$ والقيمة النهائية هذه هي عبارة عن CE . لذا فان :

50% من هذه الشحنة يعادل $\frac{CE}{2}$

$$\frac{CE}{2} = CE\left[1 - e^{-\frac{t(0.5)}{RC}}\right]$$

$$e^{\frac{t(0.5)}{RC}} = \frac{1}{2}$$

وباخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين نحصل على

$$-\frac{t(0{\cdot}5)}{RC} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{\cdot}699$$

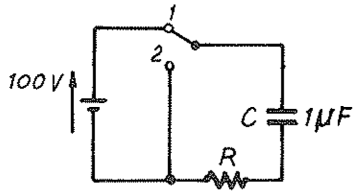
وبتعويض قيم C,R نحصل على الزمن

$$t\,(0{\cdot}5 = 1 \times 10^{6} \times 100 \times 0{\cdot}699$$

$$= 69{\cdot}9 \text{ ثانية}$$

6.7.2 تفريغ المتسعة

يمكن تفريغ شحنة المتسعة باعادة ربط المتسعة على التوالي مع مقاومة دون ان يبقى في الدائرة اي مصدر للفولتية مثلا بتحويل المفتاح من النقطة رقم 1 الى النقطة رقم 2 في الشكل 6.11 .



الشكل 6.11 دائرة تفريغ المتسعات

تعمل المتسعة حينما يكون المفتاح على النقطة رقم 2 كأنها نضيدة تفرغ شحنتها في المقاومة . الا ان مقدار ماتفرغه من شحنة يعتمد على المعادلة وفق قانون كرشوف الثاني :

$$V_R + V_C = 0 \qquad \text{... (6·33a)}$$

$$iR + \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{... (6.33b)}$$

$$R\,\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{... (6.34)}$$

وباعادة كتابة هذه المعادلة التفاضلية ثم حلها .

$$\frac{dq}{q} = - \frac{dt}{RC} \qquad \dots (6{\cdot}35)$$

وبأخذ تكامل الطرفين

$$\ln q = - \frac{t}{RC} + A \qquad \dots (6{\cdot}63)$$

يمكن ايجاد قيمة الثابت A من قيمة الشحنة الابتدائية التي كانت على طرفي المتسعة . ولنفرض انها تساوي q_o عند الزمن $t = o$ حيث

$$\ln q_o = A \qquad \dots (6{\cdot}37)$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (6.36) يمكن اعادة كتابتها بالشكل

$$q = q_o \, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \dots (6{\cdot}38)$$

يمكن ايجاد معادلة التيار المار في المتسعة باخذ مشتقة المعادلة (6.38)

$$i = \frac{dq}{dt} = - \frac{q_o}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \dots (6{\cdot}39)$$

اما الفولتية عبر المتسعة فهي عبارة عن الشحنة مقسومة على السعة اي

$$V = \frac{q}{C} = \frac{q_o}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \dots (6{\cdot}40)$$

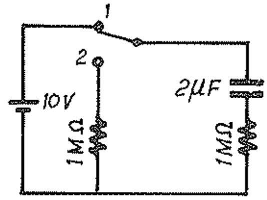
وباعتبار ان الشحنة الابتدائية مقسومة على السعة تساوي الفولتية الابتدائية عبر المتسعة (V_o) ، فتكون الفولتية

$$V = V_o \, e^{-\frac{t}{RC}} \qquad \dots (6.41)$$

يلاحظ ان المعادلات (6.38) و (6.40 و (6.41) تشبه في هيئتها المعادلة (6.31) بالرغم من ان المعادلتين (6.29) و (6.30) تشبهان تلك المعادلات ايضا لكنها تحتوي على مقدار ثابت مضافا الى المقدار الاسي . اما المقدار الثابت في حالة التفريغ فيساوي صفراً .

مثال 6.6

شحنت المتسعة المبينة في الشكل 6.12 بوضع المفتاح على النقطة 1 لفترة طويلة جدا ثم حول المفتاح الى النقطة رقم Z. (أ) اوجد ثابت زمن دائرة الشحن (ب) ثابت زمن دائرة التفريغ (جـ) متى تصبح فولتية المتسعة 0.1 فولت عند تفريغها؟



الشكل 6.12 دائرة المثال 6.6

الحل : حينما يكون المفتاح في الوضع 1 لمدة طويلة جداً فان المتسعة تكون قد شحنت الى فولتية تساوي فولتية المصدر اي ان $V_0 = 10V$ وعند ذلك تكون قيمة التيار المار في هذه الدائرة صفراً.

(أ) تحتوي دائرة الشحن على المقاومة 1MΩ على التوالي مع المتسعة. فيكون ثابت زمن هذه الدائرة

$$T = RC = 1 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6} = 2 \quad \text{ثانية}$$

(ب) تحوي دائرة التفريغ على مقاومتين على التوالي، قيمة كل منها 1MΩ (مكافئتها 2MΩ وعلى المتسعة. فيكون ثابت الزمن

$$T = R_{eq}\, C = 2 \times 10^6 \times 2 \times 10^{-6} = 4 \quad \text{ثانية}$$

(جـ) تتناقص فولتية المتسعة وفق العلاقة (6.41) حيث

$$V = V_o\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

فان V_o تساوي 10 فولتا و Rc تساوي 4 ثانية لذا

$$0.1 = 10\, e^{-\frac{t}{4}}$$

$$\therefore\ 0.01 = e^{-\frac{t}{4}}$$

ويأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين.

$$\ln 0.01 = -\frac{t}{4}$$

$$-4.61 = -\frac{t}{4}$$

$\therefore\ t = 18.44$ ثانية

ويلاحظ انه اذا كانت دائرة التفريغ او الشحن معقدة مكونة من مجموعة مقاومات او مصادر فانه يمكن تبسيطها باستخدام نظرية ثفنن وايجاد الدائرة المكافئة البسيطة عبر طرفي المتسعة ومن ثم تطبيق المعادلات اعلاه.

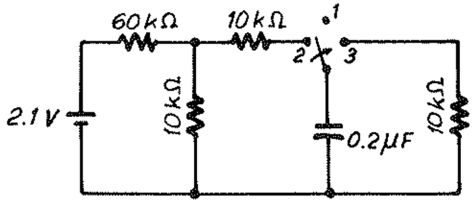
مثال 6.7

كان المفتاح على الوضع 1 لمدة طويلة وكانت المتسعة غير مشحونة ثم حول الى الوضع 2 في الزمن $t = 0$

(آ) اوجد معادلتي الفولتية والتيار للمتسعة مع الزمن.

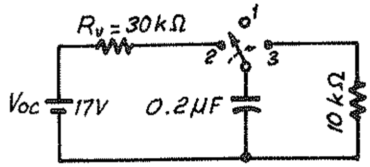
(ب) بعد 9 ملي ثانية من الزمن $t = 0$ حول المفتاح من الوضع 2 الى الوضع 3. اكتب معادلة الفولتية والتيار للمتسعة مع الزمن بعد ذلك

(ج) ارسم شكل الفولتية للفرعين آ و ب على الاحداثي نفسه.



الشكل 6.13

الحل : بتطبيق نظرية ثفنن على الدائرة يسار المتسعة نحصل على دائرة مكافئة كما مبين في الشكل :



الشكل 6.14

حيث :

$$R = \frac{60 \times 30}{60 + 30} = 30 \text{ k } \Omega$$

وان $\text{Voc } \frac{30}{60 + 30} \times 21$ وتساوي 7 فولت

$$V_C = 7 (1 - e^{-t/ 6 \times 10^{-3}})$$

$$i = C \frac{dV}{dt} = 0{\cdot}233 \times 10^{-3} e^{-\frac{t}{6 \times 10^{-3}}} \text{ A}$$

(ب) عندما يكون الزمن 9 ملي ثانية

$$V = 7 (1 e^{-\frac{9 \times 10^{-3}}{6 \times 10^{-3}}}) = 5{\cdot}44 \text{ V}$$

فتكون معادلة التفريغ :

$$V = 5{\cdot}44 e^{-\frac{t}{2.2 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{3}}} = 5.44 e^{-\frac{t}{2 \times 10^{-3}}}$$

وعلى اساس ان الزمن الجديد يبدأ من 9 ملي ثانية الاساسية

$$i = C \frac{dV}{dt} = 0.052 \times 10^{-3} e^{-\frac{t}{2 \times 10^{-3}}} \text{ A}$$

6.8 خزن الطاقة في المتسعات :

تستعمل المتسعات كخزانات للشحنة كما مر بنا . وحيث ان مرور الشحنة (التيار) لابد وان يصحبه انتقال في الطاقة الكهربائية ، لذا تعتبر المتسعات احدى وسائل خزن وتجميع الطاقة ثم اعادة اعطائها عند الحاجة . فالتيار المار في المتسعة والذي هو مشتقة الشحنة بالنسبة للزمن عند ضربة في فرق الجهد عبر المتسعة يعطي القدرة . اي ان

$$P = iV = V \frac{dq}{dt} \qquad \ldots (6.43)$$

وحيث ان الشحنة هي عبارة عن حاصل ضرب الفولتية في السعة .

$$P = V \frac{d}{dt}(CV) = CV \frac{dV}{dt} \qquad \ldots (6.43)$$

وحيث ان الطاقة هي تكامل القدرة ، فان

$$W = \int P.\, dt = C \int V\, dv = \frac{CV^2}{2} \qquad \ldots (6.44)$$

وقد اهمل ثابت التكامل على اساس ان الطاقة الابتدائية المخزونة تساوي صفراً .

مثال 6.8

عند شحن المتسعة المبينة في المثال (6.6) كم كانت الطاقة المخزونة في المتسعة ؟ وكم من الطاقة استهلك في المقاوم $1M\Omega$ اثناء الشحن ؟

الحل :

(أ) ان الطاقة المخزونة في المتسعة تعطى بالمعادلة 6.44 . اي ان

$$W = \frac{CV^2}{2}$$

$$= \frac{2 \times 10^{-6} \times 10^2}{2} = 10^{-4}\ J$$

(ب) ان التيار المار في الدائرة اثناء الشحن يعطى بالمعادلة 6.31 حيث

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$= \frac{10}{1 \times 10^6} e^{-\frac{t}{2}}$$

وحيث ان القدرة تساوي iR^2 لذا فالقدرة في المقاوم

$$P = i^2R = 10^{-10} e^{-t} \times 10^6$$

$$= 10^{-4} e^{-t}$$

فتكون الطاقة المفقودة في المقاوم

$$W_R = \int_o^\infty P\, dt = \int_o^\infty 10^{-4} e^{-t}\, dt$$

$$= \left.\frac{10^{-4} e^{-t}}{-1}\right]_o^\infty = 10^{-4}\ J$$

اي ان الطاقة المجهزة من النضيدة يفقد نصفها في المقاوم اثناء الشحن ويخزن النصف الباقي في المتسعة والذي بدوره يفقد اثناء التفريغ في المقاومين اللذين قيمة كل منها $1M\ \Omega$: اي ان كلا منها يفقد اثناء التفريغ 0.5×10^{14} جولاً.

وتجدر الاشارة الى ان المتسعات العملية هي ليست متسعات بحتة بل ان عازلها ليس تام العازل (مقاومته لاتساوي مالانهاية) بل يحتوي على مقاومة كبيرة ولكنها في بعض الاحيان كافية لتسريب كمية محسوسة من الشحنة وفي هذه الاحوال تعتبر المتسعة العملية عبارة عن متسعة مثالية مربوطة على التوزي مع مقاومة كبيرة تسمى (مقاومة التسرب leakage resistance ومقدارها بحدود $1000M\Omega$.

6.9 البرنامج السادس : الحالة العابرة لدائرة المتسعة والمقاومة :

يقوم البرنامج برسم تغير الفولتية عبر متسعة اثناء عملية الشحن او التفريغ حسب طلب الطالب ، حيث يسأل عن قيم فولتية المصدر والمقاومة والمتسعة ثم يرسم الرسم.

```
10 PRINT"This is a program to find the transient of RC circuit"
20 PRINT"1=Charging        2=Discharging":INPUT X
30 PRINT"Give the values of emf , resistance  and capacitance"
40 INPUT E,R,C
50 PQ=E
60 IF PQ<1 THEN 130
70 IF PQ>=10 THEN 140
80 K=1
90 IF PQ<2 THEN K=.4
100 IF PQ>5 THEN K=2
110 L=E/PQ
120 GOTO 150
130 PQ=PQ*10:GOTO 60
140 PQ=PQ/10:GOTO 60
150 FOR I=0 TO 5
160 X(I)=K*I*L
170 NEXT I
180 CLS
190 SCREEN 8
200 FOR I=5 TO 0 STEP -1
210 Y=21-4*I
220 LOCATE Y,1:PRINT INT(X(I))
230 NEXT I
240 LINE(60,0)-(60,165)
250 LINE (60,165)-(460,165)
260 FOR J=1 TO 5
270 LINE(58,J*33)-(62,J*33)
280 LINE(60+80*J,163)-(60+80*J,167)
290 LOCATE 22, 5+10*J:PRINT J;"T"
300 NEXT J
310 FOR M=0 TO 250
320 T=.02*M
330 IF X=2 THEN 360
340 V=  PQ*(1-EXP(-T))*33/K
350 GOTO 370
360 V=  PQ*(  EXP(-T))*33/K
370 PSET  (60+M*8/5,165-V)
380 NEXT M
390 LOCATE 21,60:PRINT"T=RC=";R*C;"sec"
```

مسائل الفصل السادس

1 . اشتق السعة بين سلكين طويلين المسافة بين مركزيهما 2h ونصف قطر كل منها r . والشحنة على كل منها q كولوم لكل متر (احداهما مخالفة للاخرى)

(الجواب $\dfrac{12.1\,\epsilon_r}{\log\left[\dfrac{h}{r}+\sqrt{\left(\dfrac{h}{r}\right)^2-1}\right.}$)

2 . متسعة ذات صفيحتين متوازيتين ابعادهما 30 cm × 30 cm والمسافة بينهما 5 mm في الهواء . (أ) اوجد سعة هذه المتسعة (ب) اذا أُدخلت مادة عازلة ذات سماحية نسبية تساوي 114 وسمكها 1 mm بين الصفيحتين مع ابقاء الملمترات الاربع الباقية هواءاً ، مامقدار السعة حينئذ؟ (ج) اذا ملئت المسافة بين الصفيحتين بالمادة المذكورة في الفرع السابق كم تصبح سعة المتسعة؟
(الجواب 20.1 PF, 0.22 PF, 17.7 PF)

3 . في مسألة 2 اعلاه اذا ادخل العازل المذكور في الفرعين (ب) و(ج) بحيث غطى نصف المساحة . كم تصبح سعة المتسعة في الفرعين؟
(الجواب 8.9 PF, 18.8 PF)

4 . (أ) اوجد سعة قابلو محوري مملوء بالهواء للكيلومتر الواحد ، اذا كان قطر الموصل الداخلي 3 ملم وقطر الموصل الخارجي 1 سم (ب) اذا طلي الموصل الداخلي في الفرع السابق بعازل مطاطي (سماحيته النسبية 3) الى القطر 7 ملم وملئ باقي الفراغ بعازل سماحيته النسبية تساوي 6 ، كم تصبح سعة القابلو للكيلومتر الواحد . (ج) كم مقدار الطاقة المخزونة للمتر الواحد من القابلو المحوري في الفرعين السابقين اذا كان فرق الجهد بين الموصلين يساوي 500 فولت ؟
(الجواب 17.5 mJ, 5.8 mJ, 140 nF, 46.3 nF)

5 . اوجد سعة سلك طويل نصف قطره r ويبعد عن الارض بارتفاع h ويحمل شحنة منتظمة مقدارها 2 كولوم لكل متر (ملاحظة : افرض وجود سلك خيالي تحت سطح الارض يبعد عنها بمقدار h يعمل كصورة للسلك الحقيق ويحمل شحنة مخالفة .) .

(الجواب $$\left(C/l = \frac{12.1\,\epsilon_r}{\log\left[\frac{h}{r} + \left(\frac{h}{r}\right)^2 - 1\right]} \quad \mu\mu F \right)$$

6 . متسعتان ذواتي سعتين متساويتين مربوطتين على التوازي . ربطتا الى مصدر فولتية V_1 ثم عزلتا عنه . ادخل بين صفيحتي احداهما عازل ذو سماحية نسبية مقدارها K بحيث ملأ الفراغ بينها . احسب مقدار الشحنة المنتقلة من احدى الصفيحتين الى الاخرى ثم احسب الفولتية الجديدة V_2 عبر المتسعتين بدلالة C و V_1 و K .

(الجواب $$\left(V_2 = \frac{2V_1}{k+1} = \frac{CV_1 - kCV_1}{k+1} \right)$$

7 . شحنت المتسعة $1000 \ \mu F$ المبينة في الشكل 6 . وكانت فولتيتها 6 V . ولكي يتم تفريغها لأجل الإستخدامات الأخرى تم توصيل السلك بين نهايتي المتسعة والذي مقاومته $0.002 \ \Omega$ (أ) إحسب الزمن اللازم لتفريغ المتسعة (ب) مالقيمة القصوى للتيار (ج) بالإستناد الى أجوبة الفروع أ و ب أعلاه هل تتوقع حدوث شرارة عند نهايتي المتسعة بعد أن مسها بالسلك .

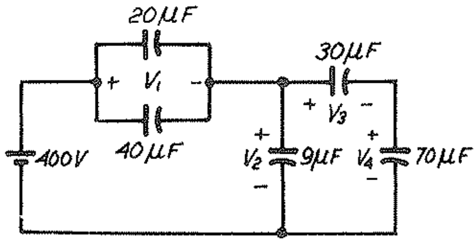
(الجواب : (أ) 10 s (ب) 3×10 A (ج) نعم)

8 . ثلاث متسعات $8\mu F, 6\mu F, 4\mu F$ ربطت على التوالي مع المصدر 300 V أوجد (أ) السعة الكلية C (ب) فولتية كل من المتسعات الثلاث (ج) الطاقة الكلية المخزونة .

(الجواب : (أ) 1.84 F (ب) 69.2 V, 92.3 V, 138.5 V (ج) 83.1 mJ)

9 . لدائرة الشكل .6 أوجد الفولتية عبر كل متسعة من متسعات الدائرة :

الجواب (133·3, 266·6, (86·62, 79·98 V)



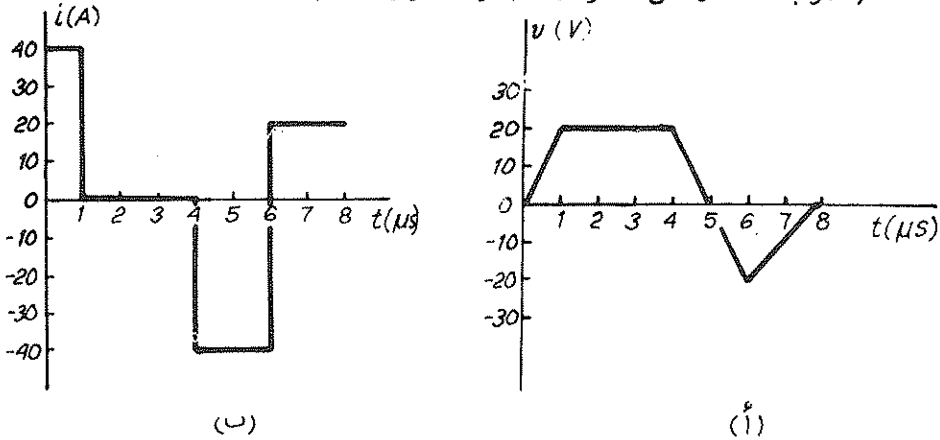
الشكل 6.15

10 . متسعتان الأولى $2\mu F$ شحنت بـ 150 V والثانية $1\mu F$ شحنت بـ 50 V ربطت بقطبية متعاكسة . أوجد الفولتية الجديدة بعد الربط وكذلك الطاقة المخزونة قبل وبعد الربط .

(الجواب : 10.4 mJ, 13.8 mJ, 83.3 V)

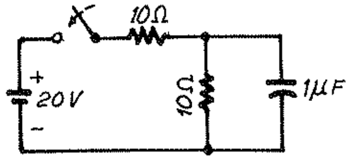
11 . إرسم تخطيط لشكل موجة التيار المار خلال المتسعة $2\mu F$ إذا كان شكل منحني الفولتية كالمبين في الشكل 6.16 أدناه . مفترضاً مرجع نسبي لكل الحالات .

(الجواب : للفترة من صفر الى $1\mu S$ قيمة التيار 40 A)



الشكل 6.16

12 . للدائرة المبينة في الشكل 6.17 غلق المفتاح في اللحظة $t = 0$. احسب مقدار الشحنة المتجمعة على المتسعة مع الزمن . ثم احسب منها مقدار التيار فيها وكذلك التيار المجهز من قبل النضيدة مع الزمن .



الشكل 6.17 دائرة المسألة 12

الجواب

$$q = 10^{-5}\left(1 - e^{-\frac{10^6}{5}t}\right) C$$

$$i_c = 2e^{-\frac{10^6}{5}t} A$$

13 . اذا مضت فترة طويلة على غلق المفتاح في الشكل 6.17 ثم فتح المفتاح في اللحظة $t = 0$ ما مقدار الشحنة على المتسعة كدالة للزمن؟ وكذلك التيار المار فيها؟ كم مقدار الطاقة التي كانت تحويها المتسعة عند فتح المفتاح؟

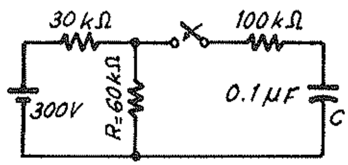
(الجواب $50\mu J,\ -e^{-10^5 t},\ 10^{-5} e^{-10^5 t}\ C$)

14 . للدائرة المبينة في الشكل 6.18 . اقفل المفتاح في اللحظة $t = 0$. احسب مقدار الشحنة على المتسعة والتيار المار فيها كالدالتين للزمن . ثم احسب تغير الطاقة المخزونة في المتسعة بمضي الزمن .

الجواب $20 \times 10^{-6}(1 - e^{-\frac{1000}{12}t})\,C$

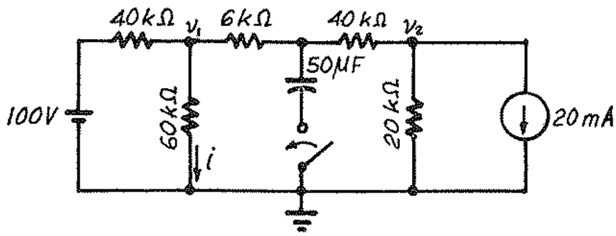
$200(1 - e^{-\frac{1000}{12}t})\,A$

$2 \times 10^{-3}(1 - e^{-\frac{1000}{12}t})\,J$



الشكل 6.18 دائرة المسألة 14

15. إذا أغلق المفتاح عند $t = 0$ في دائرة الشكل 6.19. أوجد التيار i للزمن $t > 0$ علماً بأن المتسعة كانت خالية من الشحنة قبل الغلق.
(الجواب : $t = 7.9$ S)



الشكل 6.19 دائرة المسألة 15

16 . بعد أن مكث المفتاح في دائرة الشكل 6.20 على الوضع 1 لمدة طويلة تم تحويله الوضع 2 عند $t = 0^s$ لفترة 30 ثانية ثم أعيد الى الوضع الأصلي 1 .

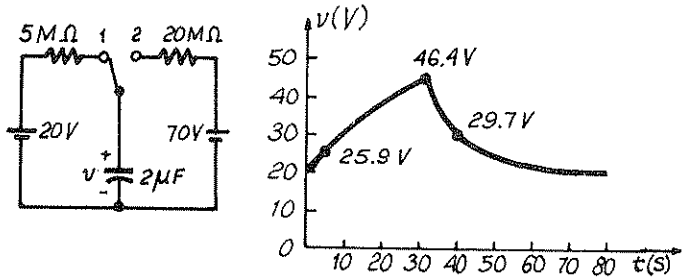
(أ) أوجد معادلة V للزمن $t > 0$ (ب) أوجد V عند $t = 5^s$ وكذلك عند $t = 40^s$

(ج) ارسم مخطط يبين تغير V مع الزمن للفترة من $0 < t < 80s$.

(الجواب :

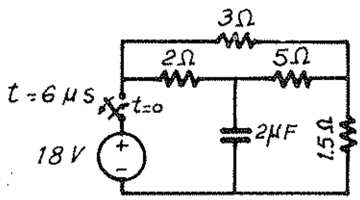
(أ) $V = 70 - 50e - 0.025t$ (ب) $V(40) = 29..7V, V(5) = 25.9V$

(ج) $V(30) = 46.4V$



الشكل 6.20

17 . لدائرة الشكل 6.21 كان المفتاح مفتوحاً لفترة طويلة ثم أغلق عند $t = 0$ ثم فتح عند $t = 6\ ms$. أوجد الزمن t عند وصول الفولتية عبر المفتاح القيمة 10V .



الشكل 6.21

18. لدائرة الشكل 6.21 في المسألة السابقة إذا كان المفتاح مفتوحاً لفترة طويلة ثم أغلق عند $t = 0$ أوجد (أ) الزمن اللازم لكي يصبح التيار المار في المقاومة 2 القيمة 2.7A (ب) إذا فتح المفتاح عند $t = 6$ ms أوجد الفولتية عبر المقاومة 1.5 عند $t = 10$ ms.

(الجواب : (أ) $t = 5.5$ ms (ب) $V(1.5) = 2.95$ V)

19. متسعة ذات صفيحتين متوازيتين دائرتين. كل منها ذات نصف قطر 20 سم والمسافة بينها 1 سم. شحنت المتسعة بفرق جهد مقداره 3000 فولت ثم عزلت الصفيحتان بحيث لاتتسرب منها اية شحنة (أ) مامقدار الطاقة المخزونة في المتسعة ؟ (ب) ادخلت صفيحة معدنية سمكها 2 ملم بين الصفيحتين. كم مقدار الشغل المصروف من القوة الكهربائية في عملية ادخال الصفيحة المعدنية.

(الجواب : 1.25×10^{-4}J, 5×10^{-4}J)

الفصل السابع

مبادئ الكهرومغناطيسية

ويخلق ما لاتعلمون
النحل 8

7.1 المقدمة

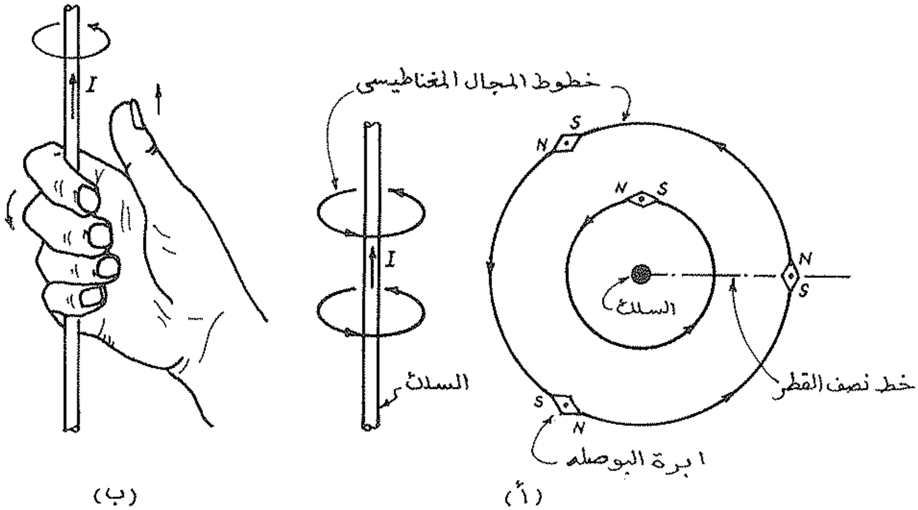
عرفت ظاهرة المغناطيسية منذ زمن بعيد فقد لاحظ الاغريق قبل الميلاد انجذاب قطع الحديد نحو بعض المواد المغناطيسية. كما استخدم الملاحون العرب البوصلة في رحلاتهم البحرية البعيدة حتى اكتشف العالم الدانماركي اورستد انحراف الابرة المغناطيسية عند تقريبها من موصل يسري فيه تيار. وهذا مما دل على وجود خواص مغناطيسية مصاحبة للدوائر الكهربائية. وقد تطورت الدراسات النظرية المتعلقة بهذا الموضوع وظهرت لها تطبيقات كثيرة مما يستوجب دراسة التأثيرات المغناطيسية للدوائر الكهربائية والمسماة بالكهرومغناطيسية Electromagnetics . لذلك سيتركز هذا الفصل على الاسس النظرية للمغناطيسية الناتجة عن التيار الكهربائي ويتركز الفصل الذي يليه على التطبيقات الكهرومغناطيسية هذه.

7.2 قطبية Polarity المجال المغناطيسي

لوحظ عند دراسة الكهربائية الساكنة ان ابسط مكوناتها هي الشحنة الكهربائية وتدور كل الاسس النظرية والتطبيقية حول خواص وتأثيرات وجود الشحنة الكهربائية . ان مايقابل ذلك في المغناطيسية هو القطب المغناطيسي. أما في المغناطيسية فلا يمكن ان توجد الاقطاب المغناطيسية منفردة بل تظهر بشكل ازواج من اقطاب مغناطيسية متعاكسة القطبية . فالمغناطيس الدائم يحتوي على قطبين (اصطلح على تسمية احدهما بالقطب الشمالي والاخر بالقطب الجنوبي) .

ان للتيار الكهربائي عند مروره في الدوائر الكهربائية تأثيرات تشابه المغناطيس الدائم ويعني ذلك ان له قطبية معينة . فاذا مّر تيار كهربائي مستمر في سلك طويل ثم وضعت بوصلة قريباً من هذا السلك يؤدي بدء امرار التيار انحرافاً في البوصلة . واذا عكسنا اتجاه سريان التيار انعكس انحراف ابرة البوصلة . من ذلك يتبين ان السلك الذي يحمل تياراً كهربائياً يحاط بحيز ذي تأثيرات مغناطيسية . او بكلمة اخرى انه يحاط بمجال مغناطيسي يعتمد على مقدار واتجاه التيار المار في السلك .

لقد تم استكشاف المجال الكهربائي بتحريك وحدة الشحنات الموجبة في المجال ثم اكتشاف مقدار القوة المسلطة عليها واتجاهها . يمكن بصورة مشابهة استكشاف المجال المغناطيسي بتحريك بوصلة صغيرة في المجال فيكون اتجاه انحراف الابرة مؤشراً على اتجاه المجال المغناطيسي Magnetic field . وبتحريك البوصلة باتجاه قطبها المغناطيسي الشمالي يمكن الحصول على صورة للمجال المغناطيسي كما مبين في الشكل 7 أ. ويلاحظ ان اتجاه القطب الشمالي للابرة المغناطيسية يكون باتجاه مشابه لاتجاه طيات اصابع اليد اليمنى فيما لو احيطت بالسلك الاصلي بحيث يكون الابهام باتجاه سريان التيار في السلك ويمكن الحصول على هذه النتيجة مختبرياً باختراق سلك حامل للتيار لقطعة من الورق المقوى ثم تحريك البوصلة حول السلك في اماكن مختلفة قريبة من السلك . يبين الشكل 7.1 ب وضع اليد اليمنى حول السلك . ويمكن استخدام هذا التشابه كقاعدة لما يسمى بقاعدة اليد اليمنى لايجاد اتجاه المجال المغناطيسي من اتجاه التيار المار في السلك او بالعكس .

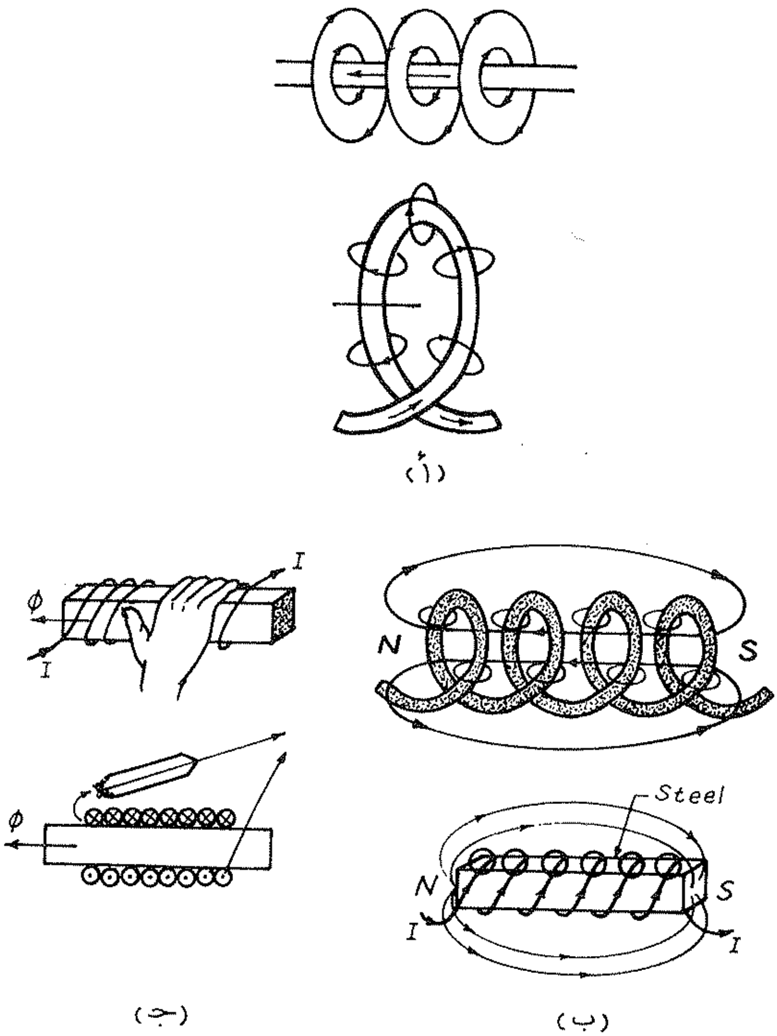


الشكل 7.1 . (أ) المجال المغناطيسي حول سلك حامل للتيار ومقطع عرضي عمودي على سلك حيث اتجاه التيار خارجاً من الصفحة (ب) توضيح قاعدة اليد اليمنى حيث اتجاه المجال باتجاه الاصابع واتجاه التيار باتجاه الابهام.

عندما يكون السلك الطويل مساراً دائرياً مغلقاً ذا قطر كبير، يمكن بسهولة تصور كل جزء منه كسلك مستقيم يسري فيه تيار باتجاه ما . ومن ثم يمكن تطبيق قاعدة اليد اليمنى Right hand rule عليه . يؤشر اتجاه المجال المغناطيسي . وبتدوير اليد اليمنى حول السلك على طول اللفة يمكن استنتاج شكل المجال الناتج من لفة واحدة والذي يكون بالشكل المبين في الشكل 7.2 أ . وعند تجميع عدد من اللفات فوق بعضها بصورة رأسية وبحيث تكمل اللفات بعضها البعض الاخر يتكون ملف طويل يمكن ايجاد اتجاه المجال حوله بالاسلوب السابق نفسه . ويمكن توضيح ذلك بالرجوع الى الشكلين 7.2 ب و جـ .

تشكل الملفات عناصر مهمة في الدوائر المغناطيسية نظراً لان المجال المغناطيسي الناتج عن كل لفة فيها يساعد بعضه البعض داخل الملف مكوناً مجالاً مغناطيسياً قوياً ومنتظماً وباتجاه محور الملف اما خطوط المجال خارج الملف فتكون عبارة عن خطوط غير متكاثفة

وباتجاهات تحاول اكمال دوراتها حول الملف كما يتضح من الشكل 7.2 ج كما ان هناك التفاتة اخرى تجدر الاشارة اليها في الملف حيث لو وضعت اصابع اليد اليمنى باتجاه سريان التيار في لفات الملف لكان اتجاه الابهام باتجاه المجال.



الشكل 7.2 إيضاح علاقة اتجاه التيار والمجال في الملفات

يلاحظ في خطوط المجال المغناطيسي المحيطة بالاسلاك الحاملة للتيار انها تشكل حلقات مقفلة حول الموصلات وان اتجاهاتها تكون باتجاه القوة المسلطة على القطب الشمالي لابرة بوصلة عند وضعها في موضع ما في المجال. كما يلاحظ ان هذه الخطوط لاتتقاطع ابداً فيما بينها نظراً لأن محصلة القوة في اية نقطة في المجال تكون ذات اتجاه واحد. ومن الجدير بالذكر ان هذه الخطوط هي خطوط خيالية لاوجود لها لكن رسمها مفيد لتبيان خواص المجال.

7.3 الفيض المغناطيسي

تشير خطوط المجال المغناطيسي حول موصل او موصلات حاملة للتيار الى اتجاه المجال اما مقياس مقدار المجال فيعتمد على كثافة هذه الخطوط في موقع ما. لذلك يمكن التصور ان مجموع هذه الخطوط يشكل فيضاً flux مغناطيسياً يرمز له بالرمز φ ووحدته هي الويبر نسبة للعالم ويبر الذي قام بدراسات مستفيضة حول الخواص المغناطيسية عام 1852. ويقابل الفيض المغناطيسي هذا التدفق الكهربائي الذي مر بنا في الفصل الخامس.

ان الفيض المغناطيسي هذا لايعطي فكرة عن مقدار كثافة المجال. لذلك من الضروري استحداث كمية اخرى تعرف كثافة الخطوط المغناطيسية وتدعى بكثافة الفيض المغناطيسي flux density. يرمز لكثافة الفيض المغناطيسي بالرمز B وهي عبارة عن حاصل قسمة الفيض φ المار عمودياً خلال سطح مقسومة على مساحة ذلك السطح اي

$$B = \frac{\varphi}{A} \qquad \dots (7\cdot1)$$

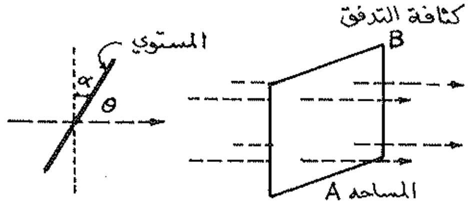
لذا تكون وحدة كثافة الفيض هي الويبر لكل متر مربع. وتدعى بالتيسلا، نسبة الى المهندس اليوغسلافي نيكولاس المتوفي عام 1943.

اذا طلب ايجاد الفيض الذي يقطع مستو ما وكان ذلك المستوى بوضع غير عمودي على اتجاه التدفق وجب تصحيح اتجاه المستوى باخذ مسقطه العمودي على اتجاه التدفق.

ويمكن ان يتم ذلك باخذ جيب تمام زاوية انحرافه عن الوضع العمودي على اتجاه التدفق او جيب الزاوية بين اتجاه المستوى واتجاه الفيض. كما مبين في الشكل 7.3 حيث

$$\varphi = BA \sin \theta \qquad ...(7\cdot2)$$

$$= BA \cos \alpha \qquad ...(7\cdot3)$$



شكل 7.3 تأثير الزاوية بين المستوى واتجاه التدفق

(أ) تدفق عمودي على المستوى (ب) تدفق بزاوية θ.مع المستوى

7.4 قانون لينز

يحدد قانون لينز Lenzes Law اتجاه توليد الـ ق. د. ك* المحتثة في موصل او ملف حيث ينص على ان قطبية القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في دائرة نتيجة تغير التدفق الذي يقطعها تكون باتجاه بحيث يحاول توليد تيار يعاكس تغير الفيض المغناطيسي الذي يقطع الدائرة. ان قانون لينز مستنتج اساساً من قانون حفظ الطاقة وهو تطبيق كهربائي لقاعدة ان لكل فعل رد فعل مساو له بالمقدار ومعاكس له بالاتجاه. سنرى فيما بعد ان توليد الـ ق. د. ك في ملف او اية دائرة كهربائية (تحوي على الاقل على لفة واحدة او دائرة مقفلة

* ق. د. ك هي مختصر العبارة (القوة الدافعة الكهربائية).

واحدة) ينتج عنه خزن لكمية من الطاقة داخل الدائرة الكهربائية . ان قانون لينز يشير الى وجود عزم للتصور الذاتي لدى الدائرة الكهربائية تحاول مقاومة دخول تلك الطاقة اليها . ويشبه ذلك تماماً مقاومة اي كتلة للحركة الميكانيكية التي تسلط عليها نتيجة قوة خارجية بسبب قصورها الذاتي حيث تحاول البقاء في السكون ومقاومة محاولة التحريك الخارجي .

7.5 قانون فراداي **Faradays Law**

نشر العالم فراداي عام 1832 وضعاً عاماً لما سمي فيما بعد باسمه قانون حث القوة الدافعة الكهربائية في حلقة مقفلة او ملف عند حركته في مجال مغناطيسي او عند تغيّر المجال المغناطيسي مع الزمن . لقد اثبت تجريبياً ان القوة الدافعة الكهربائية المحتثة في دائرة مقفلة تساوي معدل تغير الفيض المغناطيسي للمجال مع الزمن باشارة معكوسة . اي ان

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{...(7·4)}$$

حيث e هي ال ق . د . ك المحتثة و φ التدفق المغناطيسي . تشير الاشارة السالبة الى الاتجاه المعاكس الذي تم وصفه وفق قانون لينز في الفقرة السابقة . ان سرعة تغير الفيض قد تكون ناتجة فعلاً من تغير الفيض مع الزمن وقد تكون ناتجة من حركة الموصل في المجال . اي ان المقصود هو التغير النسبي للفيض الذي يقطع الدائرة نتيجة اعتراضه لها عمودياً .

عند احتواء الملف الذي تحتث فيه ال ق . د . ك على عدد من اللفات ، من الواضح جداً ان هذه اللفات يمكن النظر اليها كلفات مستقلة عن بعضها البعض مربوطة على التوالي . فتكون ال ق . د . ك المحتثة في مجموعها عبارة عن ال ق . د . ك المتولدة في لفة واحدة منها مضروبة في عددها وفق قانون الفولتية لكرشوف .

$$e = -N\frac{d\varphi}{dt} \qquad \text{...(7·5)}$$

مثال (7.1)

ملف يحتوي على مائة لفة. يقطع لفاته فيضاً مقداره 0.001 ويبر، اذ عكس هذا الفيض بزمن مقداره 0.01 ثانية، احسب متوسط الـ ق. د. ك المحتثة في الملف.

الحل:

ان تغير التدفق كان من 0.001 الى 0.001 − ويبر في 0.01 ثانية، لذا

$$e = -N\frac{d\varphi}{dt} \simeq -N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \qquad ...(7{\cdot}6)$$

$$= -100\,\frac{0{\cdot}001-(-0{\cdot}001)}{0{\cdot}01} = -20V \qquad ...(7{\cdot}6)$$

7.6 القوى الناتجة عن المجالات المغناطيسية

ينتج السلك الحامل للتيار مجالاً مغناطيسياً حوله. اذا قربنا سلكاً ثانياً يحمل تياراً بالقرب من السلك الاول فان كلا من السلكين سيحاط بمجالين مغناطيسين احدهما ناتج عنه والثاني عن السلك الاخر. وينتج عن ذلك تسليط قوة على السلكين تحاول هذه القوة دفع السلكين نحو بعضهما ان كان التياران الماران فيها بالاتجاه نفسه بينما يتنافر السلكان عن بعضهما اذا كان التياران باتجاهين متعاكسين. ويلاحظ بان القوة تكون عمودية على اتجاهي التيارين. لاحظ المثال.

7.6.1 القوة على عنصر تيار

ان القوة المسلطة على سلك قصير طوله dl يحمل تياراً مقداره I وموضوع في مجال مغناطيسي شدته B تساوي dF. وهذه القوة تتناسب تناسباً طردياً مع التيار المار في السلك. كلما زاد التيار كلما زادت القوة، كما انها تعتمد ايضاً على شدة المجال المغناطيسي اعتماداً بشكل تناسب طردي ايضاً اما الكمية الثالثة التي تعتمد عليها القوة فهي طول السلك وتكون هذه القوة عمودية على كل من اتجاه المجال واتجاه السلك الحامل للتيار العمودي عليه. اي ان الكميات الثلاث: اتجاه القوة واتجاه شدة المجال المغناطيسي واتجاه مرور التيار في السلك تكون متعامدة على بعضها وترتبط بالعلاقة

$$dF = BIdl \qquad ...(7\cdot7)$$

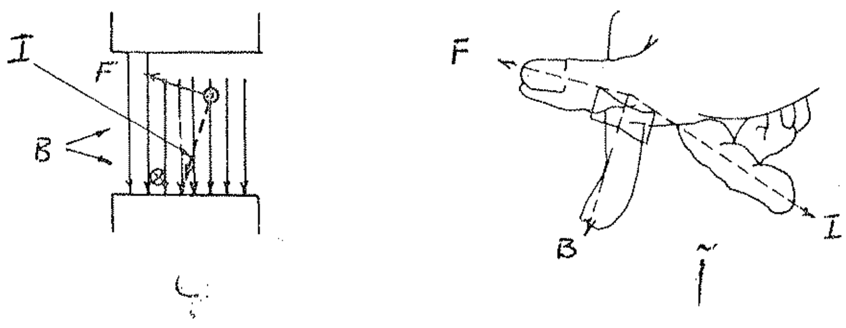
يكون اتجاه هذه القوة وفق قاعدة اليد اليسرى حيث تشير الوسطى للتيار والسبابة للمجال المغناطيسي فيكون إتجاه القوة الميكانيكية بإتجاه الإبهام.

ويلاحظ انه اذا عكس اتجاه المجال المغناطيسي لوحده او التيار لوحده فان اتجاه القوة سينعكس ايضاً. اما اذا عكس اتجاها التيار والمجال في الوقت نفسه فان اتجاه القوة يبقى دون تغير.

والان نعود للعلاقة (7.7) اعلاه. فاذا كان اتجاه التيار لايصنع زاوية قائمة مع اتجاه المجال المغناطيسي وجب اخذ مركبة طول السلك العمودي على شدة المجال المغناطيسي فتصبح العلاقة.

$$dF = IBdl \sin \varphi \qquad ...(7\cdot8)$$

حيث φ هي الزاوية بين اتجاه التيار والمجال المغناطيسي. ومن البديهي ان تكون القوة عند قيمتها القصوى حينما تساوي φ 90°. اي ان اتجاه التيار واتجاه المجال المغناطيسي متعامدين كما مبين في الشكل 7.4.



الشكل 7.4 توضيح لقاعدة اليد المنى

اذا طلب ايجاد القوة على دائرة حقيقية فمن الضروري اخذ تكامل العلاقة (7.8) على طول السلك الحامل للتيار وذلك لايجاد القوة الكلية .

7.6.2 القوة لكل عنصر تيار او شدة المجال المغناطيسي

ان اي عنصر من موصل طوله dl يمر فيه تيار مقداره I يمتلك عزم تيار يساوي Idl. اي ان عزم التيار يعادل حاصل ضرب التيار في طول عنصر السلك .

لقد سبق ان عرفنا شدة المجال الكهربائي في الفصل الخامس بانه عبارة عن القوة لكل وحدة شحنة . وبالمثل يمكن تعريف شدة المجال المغناطيسي بانه القوة المغناطيسية المؤثرة على جسم مشحون تتناسب طردياً مع كل من الشحنة التي يحملها الجسيم والمركبة العمودية على المجال لسرعة الجسيم . وحيث ان I dl تساوي الشحنة مضروبة في السرعة لذلك تعتبر شدة المجال المغناطيسي مساوية للقوة dF لكل عزم تيار I dl . من المعادلة (7.8) ، اذا كانت φ تساوي $90°$ فان

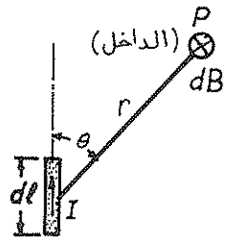
(7.9)

$$B = \frac{dF}{Idl} = \frac{\text{القوة}}{\text{عزم التيار}} \qquad ...(7\cdot9)$$

حيث B هي بالنيوتن لكل امبير متر. ويمكن تبيان ان ذلك يساوي تيسلا .

7.7 كثافة الفيض المغناطيسي الناتجة عن تيار موزع

تنتج المجالات المغناطيسية عن التيارات الكهربائية . ان العلاقة الاساسية بين كثافة الفيض المغناطيسي في نقطة مثل P الناتجة عن عنصر يحمل تياراً كالمبين في الشكل 7.5 أ تساوي



الشكل 7.4 أ كثافة فيض وحدة طول سلك يحمل تياراً

$$dB = k\,\frac{I\,dl \sin\theta}{r^2} \qquad \ldots(7\cdot10)$$

حيث k هو ثابت التناسب θ هي الزاوية بين اتجاه التيار ونصف قطر المتجه بين عنصر التيار والنقطة P. اما r فهي المسافة بينها.

ان الكمية الثابتة k هي عبارة عن ثابت التناسب وتساوي $\frac{\mu}{4\pi}$ حيث μ* هي انفاذية الوسط. ومن تعويض الوحدات في المعادلة (7.10) يمكن ان نستنتج ان μ ذات بعد يساوي تيسلا لكل أمبير لكل متر. وسنرى فيما بعد ان المحاثة** لها وحدة تساوي تيسلا لكل أمبير لذا فان الانفاذية لها وحدة المحاثة مقسومة على وحدة الطول والتي هي عبارة عن هنري لكل متر.

وبتعويض قيمة K في المعادلة (7.10) نحصل على

$$dB = \frac{\mu I\,dl \sin\theta}{4\pi r^2} \qquad \cdots(7\cdot11)$$

وتدعى هذه العلاقة بقانون بايوسفارت. يكون اتجاه dB دائماً عمودياً على عنصر الطول dl في المستوي نفسه وبالحقيقة يشكل dB حلقة دائرية متمركزة مع dl. عند

* سنُعرِّف μ في فقرة تالية من هذا الفصل.

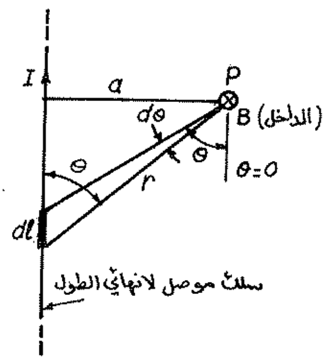
** سيمر تفصيل ذلك في الفصل الثامن.

محاولة ايجاد B في نقطة مثل (أ) نتيجة مرور التيار I في سلك منحني نفترض ان الموصل متكون من قطع صغيرة كل منها ذو طول صغير dl مرتبطة مع بعضها على التوالي. فتكون كثافة التدفق B في النقطة (أ) عبارة عن مجموع ماتقدمه هذه العناصر كافة. لذا

$$B = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{\sin \theta}{r^2} \, dl \qquad \ldots (7{\cdot}12)$$

ويؤخذ التكامل على طول السلك الموصل.

لنأخذ الشكل (7.5)



الشكل (7.5 ب) كثافة فيض سلك طويل يحمل تياراً

اذا كان اتجاه التيار كما مبين الى الاعلى فيمكن ان نستنتج ان كثافة التدفق تكون داخلة في مستوى الورقة وفق قاعدة اليد اليمنى. وحيث ان.

$$dl \sin \theta = r d\theta$$

وان

$$a = r \sin \theta$$

فان العلاقة (7.12) تصبح

$$B = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{o}^{\pi} \frac{1}{r}\, d\theta$$

$$= \frac{\mu I}{4\pi \partial} \int_{o}^{\pi} \sin\theta\, d\theta \qquad ...(7\cdot 13)$$

حيث ان التكامل هو بين الزاويتين $\theta = \pi, \theta = 0$. اي على طول السلك اللانهائي وبأخذ تكامل العلاقة (7.13)

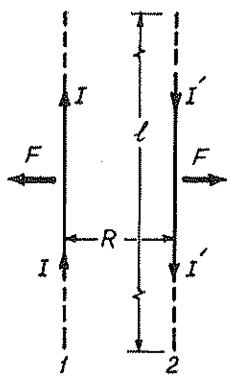
$$B = \frac{\mu I}{4\pi \partial} [\cos\theta]_{o}^{\pi}$$

$$= \frac{\mu I \times 2}{4\pi a}$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi a} \qquad ...(7\cdot 14)$$

7.8 القوة بين موصلين يحملان تياراً

لنأخذ موصلين متوازيين طويلين جداً كما في الشكل 7.6 يحملان متعاكسين I_2, I_1 .



الشكل 7.6 القوة بين موصلين طويلين جداً

الحل :

بالرجوع الى ماذكر في الفقرة 7.6.2 ، تكون القوة المسلطة على السلك 2 متجهة الى اليمين والقوة المسلطة على السلك 1 متجهة الى اليسار. اي ان الموصلين متنافران . اما ان كان التيارات بالاتجاه نفسه فان القوتين تنعكسان فيجذب السلكان احدهما الاخر.

ان القوة الناتجة على طول مقداره l من الموصل 2 تساوي

$$F = I_2 B \int_o^l dl$$

$$= I_2 \, B l$$

وبالتعويض عن B من العلاقة 7.16 ينتج

$$F = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi a} \, l$$

حيث a هي المسافة بين الموصلين بالمتر و μ هي انفاذية الوسط والتي تساوي للهواء 4×10^{-7} هنري/ متر. ونتيجة لتناظر التيارين I_1 و I_2 فان القوة على الموصل الاول تساوي القوة على الموصل الثاني .

ان القوة المسلطة على وحدة الطول من كل من الموصلين تساوي

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi a} \qquad ...(7\cdot15)$$

وهذه العلاقة هي الاساس الذي يستند اليه تعريف الامبير بالوحدات القياسية العالمية حيث يعرف بأنه : —

«التيار الذي اذا مر في سلكين طويلين متوازيين المسافة بينها متر واحد في الفراغ المطلق كانت القوة المسلطة على وحدة الطول من كل منها تساوي 2×10^{-7} نيوتن» .

ويمكن التأكد من ذلك بالتعويض عن a بمتر واحد وعن μ_o بقيمتها في العلاقة اعلاه.

7.9 شدة المجال المغناطيسي

بالرجوع الى العلاقة (7.16) يتضح ان كثافة الفيض الناتجة عن سلك موصل مستقيم تعطى بالعلاقة

$$B = \frac{\mu I}{2\pi a} \qquad ...(7{\cdot}16)$$

حيث μ هي لنفاذية الوسط و I هو التيار المار في السلك. عند اخذ تكامل كثافة التدفق على طول مسار نصف قطره a يحيط بالسلك مرة واحدة، فان

$$\oint B.dl = \frac{\mu I}{2\pi a} \oint dl^{*}$$

$$= \frac{\mu I}{2\pi a} 2\pi a$$

$$= \mu I \qquad ...(7{\cdot}17)$$

وهذه العلاقة علاقة عامة تنطبق في كافة الأحوال. الا انه يشترط في انطباقها ان يؤخذ التكامل على طول مسار مقفل. وتجدر ملاحظة ان التكامل الخطي المبين في المعادلة (7.17) له وحدة القوة لكل قطب مضروبة في المسافة. اي انها وحدة الشغل لكل قطب. ويعني ذلك ان التكامل الخطي لكثافة التدفق حول مسار مقفل يعطي الشغل لوحدة الاقطاب اللازم لتحريك قطب واحد لابرة ممغنطة طويلة حول ذلك المسار.

---

* الرمز $\oint$ يقابل $\int$ حول مسار مغلق

ويمكن تحويل المعادلة (7.17) لكي لاتعتمد على الوسط الذي توجد كثافة المجال فيه وذلك باستحداث كمية جديدة تعرف كما يلي :

$$H = \frac{B}{\mu} \qquad ...(7{\cdot}18)$$

تدعى الكمية H بشدة المجال المغناطيسي ووحدتها هي الامبير لكل متر. لذا يمكن اعادة كتابة (7.17) بالصيغة

$$\oint H\,dl = I \qquad ...(7{\cdot}19)$$

تدعى العلاقة (7.19) بقانون امبير. والذي يمكن صياغته بالعبارة :
«التكامل الخطي لشدة المجال المغناطيسي حول مسار مغلق لمرة واحدة يساوي التيار المحصور داخل المسار».

وتجدر الاشارة هنا الى ان هذا القانون يقابل قانون كاوس في الكهربابة الساكنة. اذا احتوت الدائرة على اكثر من لفة واحدة فان التكامل الخطي المغلق المذكور في المعادلة (7.19) يجب ان يساوي حاصل ضرب التيار في عدد اللفات اي

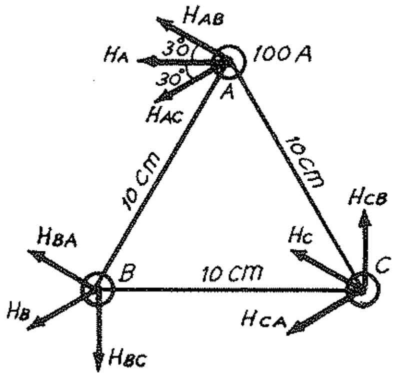
$$\oint H dl = NI \qquad (7.20)$$

ويسمى هذا المقدار بالقوة الدافعة المغناطيسية magnetomotive force ويختصر بـ ق. د. غ. (mmf). وحيث ان عدد اللفات هو كمية لاتحوي اي وحدة فان وحدة الـ ق. د. غ هي الامبير لفة. واذا كان المجال المغناطيسي منتظماً على طول مسار مقداره l ، امكن كتابة المعادلة (7.20) بالشكل التالي

$$F = NI = Hl \qquad (7.21)$$

مثال (7.2)

ثلاث موصلات طويلة تقع مقاطعها على زوايا مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه 10 سم وقد مر في كل من الموصلات الثلاث تيار مقداره 100 امبير، بحيث كان اتجاه التيار الذي يكون رأس المثلث داخلاً الصفحة والتيارين المارين في السلكين المكونين لقاعدة المثلث خارجاً من الصفحة، كما مبين في الشكل (7.7). اوجد شدة المجال المغناطيسي ومقدار واتجاه القوة المسلطة على كل من الموصلات الثلاثة، علماً بان انفاذية الهواء هي $4\pi \times 10^{-7}$ هنري لكل متر.



الشكل 7.7 ايجاد شدة المجال لثلاث موصلات

الحل:

تستخدم العلاقة

$$H = \frac{I}{2\pi a}$$

لذا فان شدة المجال في A الناتجة من B

$$H_{AB} = \frac{100}{2\pi \times 0{\cdot}1} = 159 \text{ A / m}$$

وان

$$H_{AC} = H_{AB} = 159 \text{ A / m}$$

اما الاتجاهات فيكون H_{AB} عموديا على AB و H_{AC} عموديا على AC وفق قاعدة اليد اليمنى حيث الابهام باتجاه التيار وشدة المجال باتجاه الاصابع ، فتكون محصلتها باتجاه افقي الى اليسار ومقدارها .

$$H_A = H_{AB} \cos 30^o + H_{AC} \cos(-30^o)$$

$$= \sqrt{3} \times 159 = 275{\cdot}4 \text{ A / m.}$$

ومنها يمكن ايجاد كثافة التدفق التي تساوي

$$B = \mu H$$

$$= 275{\cdot}4 \times 4\pi \times 10^{-7} = 3{\cdot}46 \times 10^{-4} \text{ T}$$ تيسلا

اما القوة فتساوي

$$F = Bl I$$

وتكون القوة لكل متر طول

$$F = BI$$

$$= 3{\cdot}46 \times 10^{-4} \times 100 = 0{\cdot}0346 \text{ N / m}$$

اما بالنسبة للنقطتين C, B فان شدة المجال لها متساوية بسبب التناظر وكذلك القوة المسلطة على كل منها .

في النقطة C

$$H_{cA} = \frac{100}{2\pi \times 0{\cdot}1} = 159 \text{ A / m}$$

ويكون اتجاهها عمودي على AC في نقطة C . وبتطبيق قاعدة اليد اليمنى يصنع اتجاهها 210^o مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . اما H_{cB} فيكون مقدارها مساويا لـ H_{CA} وباتجاه يصنع 90^o مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . فتكون محصلتها باتجاه منتصف الزاوية بينها اي باتجاه يصنع 150^o مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وتساوي .

$$H_C = H_{CB} \cos(60^o) + H_{CA} \cos(-60^o)$$
$$= 159 \times 0{\cdot}5 + 159 \times 0{\cdot}5$$
$$= 159 \text{ A / m}$$

اما القوة لكل متر فتساوي

$$F = BI$$
$$= \mu HI$$
$$= 4\pi \times 10^{-7} \times 159 \times 100$$
$$= 0{\cdot}02 \text{ N / m}$$

اما في النقطة B فيكون اتجاه شدة المجال المغناطيسي على امتداد منصف الزاوية ABC. اي يصنع مقدارها 210° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات مع بقاء شدة المجال والقوة بالقيم المحسوبة في C.

7.10 الأنفاذية

تقابل الانفاذية في الكهرومغناطيسية السماحية التي مر ذكرها في الكهربائية الساكنة. وهاتان الكميتان هما كميتان لها علاقة وثيقة بخصائص المادة او الوسط الذي توجد فيه خطوط المجال المغناطيسية او الكهربائية. وتعتبر انفاذية وسماحية الفراغ المطلق ثابتين مهمين يرتبطان بعلاقة مهمة الا وهي سرعة الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ المطلق، حيث ان سرعة الموجات الكهرومغناطيسية تساوي سرعة الضوء وتساوي $\frac{1}{\sqrt{\mu_o \in_o}}$ متر بالثانية . اي

$$C = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \in_o}} \qquad (7.22)$$

وسرعة الضوء تساوي 3×10^8 متر /ثانية

ان قيمة انفاذية الهواء مقاربة لانفاذية الفراغ المطلق وتساوي تقريبا $4\pi \times 10^{-7}$ هنري لكل متر. ينسب لانفاذية الفراغ المطلق انفاذية بقية المواد لكي تعطي الانفاذية النسبية.

اي ان

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \qquad (7.23)$$

حيث μ_r هي الانفاذية النسبية و μ هي الانفاذية المطلقة للمواد. ويلاحظ ان الانفاذية النسبية للهواء والعوازل والمواد غير الحديدية تكون منخفضة قريبة من الواحد . بينما للمواد الحديدية تكون انفاذيتها النسبية عالية جدا بالآلاف. يبين الجدول 2.7 الانفاذية النسبية لبعض المواد الشائعة الاستخدام.

الجدول 7.1 الانفاذية النسبية لبعض المواد الشائعة

المادة او الوسط (عربية)	المادة او الوسط (انكليزية)	نوعها	الانفاذية النسبية μ_r
النحاس	Copper	دايا مغناطيسية	0.99991
الماء	Water	كذا	0.99991
الفراغ المطلق	Vacuum	لامغناطيسية	I(by definition)
الهواء	Air	بارا مغناطيسية	1.0000004
الالنيوم	Aluminum	كذا	1.00002
الكوبلت	Cobalt	فيرو مغناطيسية	250
النيكل	Nickel	كذا	600
الحديد	Iron(0.2 impurity	كذا	5,000
الحديد السيليكوني	Silicon iron (4si)	كذا	7,000

لقد سبق ان بينا في المعادلة 7.18 ان μ هي النسبة بين كثافة التدفق B وشدة المجال H. الا انه تجدر ملاحظة ان هذه النسبة لاتكون على الدوام ثابتة بل ربما تتغير بتغير شدة المجال . وتصبح العلاقة بين H, B لاخطية . وستمر بنا بعض التطبيقات على الدوائر المغناطيسية التي تكون علاقة H, B فيها لاخطية .

7.11 المعاوقة Reluctance والمنافذة Permeance

تبدي المواد المختلفة معارضة للفيض المغناطيسي شأنها شأن المعارضة التي تبديها للتيار الكهربائي . الا ان هناك موادا تمرر الفيض المغناطيسي بسهولة كبيرة وربما لاتمرر هذه المواد التيار الكهربائي بتلك السهولة . اذا جمعت امثال هذه المواد في دائرة مقفلة تكونت دائرة تدعى بالدائرة المغناطيسية. في تلك الدائرة يقابل الفيض المغناطيسي التيار الكهربائي في دائرة كهربائية . اما مصدر القوة الدافعة الكهربائية في الدائرة الكهربائية فيقابله مصدر الفيض المغناطيسي في الدائرة المغناطيسية والذي يكون عبارة عن لفائف تمرر تيارا كهربائيا مما يولد مايدعى بالقوة الدافعة المغناطيسية التي سبق توضيحها بالعلاقة 7.29 والتي تقابل القوة الدافعة الكهربائية.

ان وحدة القوة الدافعة المغناطيسية هي الامبير لفة . لذا فالقوة الدافعة المغناطيسية هي عبارة عن مصدر للطاقة المغناطيسية ذي قطبية معينة . اي انه يقابل ارتفاعا في الجهد المغناطيسي اما المواد المغناطيسية التي يمر فيها الفيض فتبدي معارضة للفيض مما يولد هبوطا في الجهد المغناطيسي يقابل هبوط الفولتية بالدوائر الكهربائية . وبمحاولة تطبيق قانون اوم على الدوائر المغناطيسية يتبين ضرورة تعريف كمية جديدة هي حاصل قسمة الهبوط في الجهد المغناطيسي عبر المادة التي تمرر الفيض المغناطيسي مقسومة على الفيض المغناطيسي الذي يمر فيها . وتدعى هذه الكمية بالمعاوقة. ووحدتها هي الامبير لفة لكل ويبر. وحيث انه قد مر بنا ان وحدة المحاثة هي ويبر لكل امبير لفة (عند دراسة كثافة التدفق الناتجة عن تيار موزع) والتي تسمى بالهنري . لذا فان وحدة المعاوقة هي مقلوب الهنري ويرمز لها بالحرف S.

يبين الشكل 7.8 مقارنة بين دائرة مغناطيسية واخرى كهربائية حيث يقابل الفيض في أ التيار في ب والقوة الدافعة الكهربائية V في الدائرة الكهربائية القوة الدافعة المغناطيسية

F في أ . اما المقاومتين R_1, R_2 فتقابلها المعاوقتان S_1, S_2 في الدائرة المغناطيسية ويلاحظ ان الذراع الملفوف عليه عدد من اللفات يمكن ان يكون له معاوقة ايضا .

بالرجوع الى المعادلة (7.21)

$$F = Hl \qquad ...(7\cdot21)$$

وحيث ان

$$H = \frac{B}{\mu} \qquad ...(7\cdot18)$$

وان

$$B = \frac{\varphi}{A} \qquad ...(7\cdot24)$$

من ذلك يمكن اعادة كتابة العلاقة 7.21 كالتالي

$$F = \frac{\varphi l}{\mu A} \qquad ...(7\cdot25)$$

وحيث اننا عرفنا المعاوقة بانها النسبة بين F و φ ، لذا

$$S = \frac{F}{\varphi} = \frac{l}{\mu A} \qquad ...7\cdot26)$$

والتي توضح ان المعاوقة تتناسب طرديا مع الطول وتناسبا عكسيا مع مساحة المقطع تماما كما كانت المقاومة تتناسب طرديا مع الطول وعكسيا مع مساحة المقطع كما في العلاقة (2.2).

اما ثابت التناسب فهو $\frac{1}{\mu}$ والذي يقابل المقاومة النوعية ρ. اي ان μ تقابل الايصالية النوعية γ ، فى العلاقة (7.28).

يدعى مقلوب المعاوقة بالمنافذة ويرمز له بالحرف الاغريقي φ (لمبدا) ، لذا

$$\Lambda = \frac{1}{S} = \frac{\mu A}{l} \qquad ...(7\cdot27)$$

كما ان

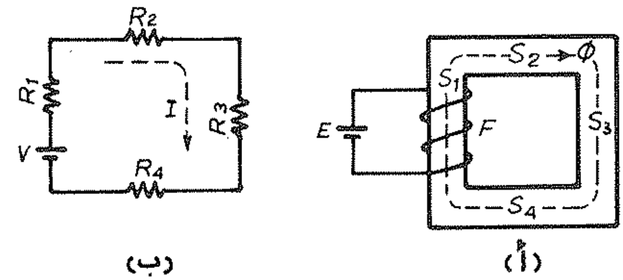
$$\varphi = F / S \qquad ...(7\cdot28)$$

تشابه المنافذة في الداوائر المغناطيسية التوصيلية في الدوائر الكهربائية وتستخدم لتسهيل الحسابات الرياضية ووحدتها هي الهنرى. ويمكن كتابة المحاثة الذاتية بدلالة المعاوقة من العلاقة $L = \frac{N\varphi}{I}$ بتعويض $I = \frac{Hl}{N}, B = \mu H, \varphi = BA$ نحصل على العلاقة :

$$L = \frac{N\varphi}{I} \qquad ...(7\cdot29)$$

$$L = \frac{\mu N^2 A}{l} \qquad ...(7\cdot30)$$

وسيمر بنا اثباتها في الفصل الثاني



الشكل 7.8 (أ) دائرة مغناطيسبة (ب) دائرة كهربائية

$$L = N^2\Lambda \qquad ...(7\cdot31)$$

او

$$L = \frac{N^2}{S} \qquad ...(7\cdot32)$$

7.12 الدوائر المغناطيسية Magnetic eircuits

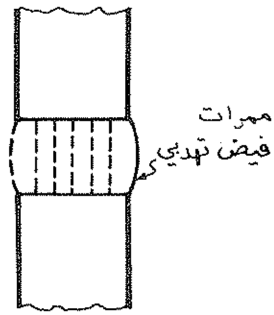
تتألف الدوائر المغناطيسية من عنصرين رئيسيين اولها هو الملفات التي تحول الطاقة الكهربائية الى طاقة مغناطيسية وثانيها هو الممر او الوسط المغناطيسي الذي يمر فيه الفيض

الناتج من الملفات . وقد اشرنا فيما سبق ان ذلك يقابل الدائرة الكهربائية المؤلفة من مصادر كهربائية ومقاومات .

لقد كان من نتائج تطبيق قانون اوم على الدوائر المغناطيسية تعريف المعاوقة . ويعني ذلك ان قوانين الكهربائية التى مرت بنا سابقا تنطبق هي الاخرى على الدوائر المغناطيسية ايضا .

فمثلا ان قانوني كرشوف ينطبقان في الدوائر المغناطيسية انطباقها في الدوائر الكهربائية كما ان النظريات الاخرى التي تسهل حل الدوائر الكهربائية تنطبق هي الاخرى ايضا . ولتسهيل الحل عادة تجدر الاشارة الى امكانية رسم دائرة كهربائية اقيام المقاومات فيها تساوي اقيام المعوقات في الدوائر المغناطيسية واقيام القوة الدافعة الكهربائية فيها تساوي اقيام القوة الدافعة المغناطيسية في الاولى ، فيكون التيار الكهربائي المار في الدائرة الكهربائية مساويا للفيض الذي يمر في الدائرة المغناطيسية . ويفترض عادة ان كل التدفق الناتج من الملفات يقطع المسار المغناطيسي اما ان وجد هناك تسرب في الفيض اي ان هناك فيضاً ينتج من اللفات ولايقطع كل الدائرة المغناطيسية فيدعى ذلك بالفيض المتسرب Leakage flux ويمكن اخذ ذلك بنظر الاعتبار باحتساب الفيض المفيد فقط باستخدام معامل مناسب يدعى معامل التسرب.

ان الفجوات الهوائية ضمن الدوائر المغناطيسية الحديدية ماهي الا عناصر داخل الدائرة المغناطيسية لها معاوقات وتمر فيها فيوض يمكن حسابها كما لو كانت تمر في الاجزاء الحديدية الا انه يجب عدم تصور ان الفيض داخل الفجوة الهوائية منتظما في كل اجزائها ، فلابد وان يحدث تشوه في شكل خطوط المجال المغناطيسي قرب حافات الفجوة على طول محيطها حيث يحدث مايسمى بالتهدب كما مبين في الشكل 7.9والذي يتضح منه ان مساحة المقطع العرضي للفجوة لايعادل بالضبط مساحة الجزء الحديدي في الدائرة ولكن يمكن تقريبه لذلك الرقم في كثير من الاحوال .ويدعى الفيض المشوه في الجوانب بالفيض التهدبي Fringing flux.

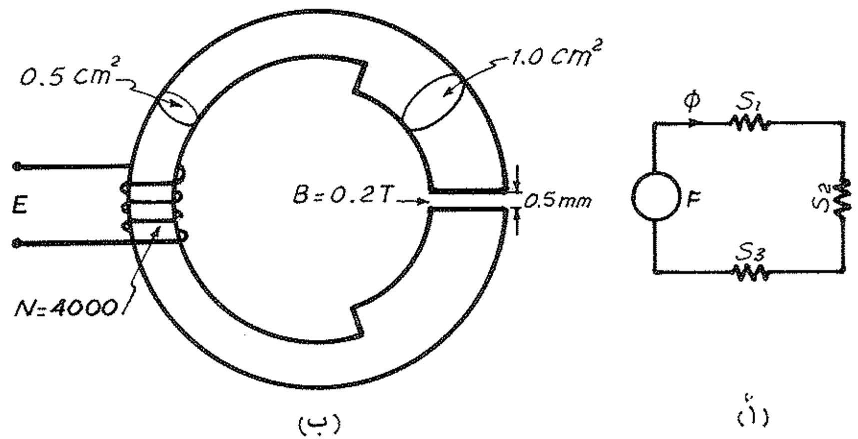


الشكل 7.9 التدفق التهدبي

ان الفرق الرئيسي بين الفجوات الهوائية والمسارات الحديدية هو ان معاوقات الاولى تكون عالية جدا بالمقارنة مع الاجزاء الحديدية، نظرا لأن انفاذيتها منخفضة جدا وربما تستهلك معظم الهبوط في الجهد المغناطيسي في الدائرة ان كانت مربوطة على التوالي مع الاجزاء الحديدية لقد افترضنا فيما سبق ان الانفاذية ثابتة القيمة مهما كان مقدار التدفق الذي يمر فيها وهي فرضية غير صحيحة عند ازدياد الفيض كما سبق ان اشرنا في الفقرة 7.7 ، لذا يجب الحذر عند تطبيق قانون اوم وقانوني كرشوف والنظريات الكهربائية الاخرى واعتبار انها تطبيق على دوائر لاخطية عند حل الدوائر المغناطيسية .

مثال (7.3)

دائرة مغناطيسية تحتوي على ثلاثة اجزاء مرتبطة على التوالي الاولى طولها 8 سم ومساحة مقطعها 0.5 سم ^{2} والثانية طولها 6 سم ومساحة مقطعها 1 سم^2 والجزء الثالث هو فجوة هوائية طولها نصف ملم ومساحة مقطعها 1 سم ^{2} . لفت 4000 لفة كما مبين في الشكل فكانت كثافة الفيض في الفجوة الهوائية 0.2 تيسلا . اذا كانت الانفاذية النسبية للاجزاء الحديدية 1200. اوجد بصورة تقريبية على أساس استخدام مواصفات خطية للدائرة المغناطيسية تيار الملف الذي ينتج كثافة الفيض المعطاة .



الشكل 7.10 (أ) الدائرة المغناطيسية (ب) الدائرة الكهربائية المكافئة

الحل:

نحاول رسم الدائرة الكهربائية المكافئة كما مبين في الشكل 7.10 ب معاوقة الجزء الاول S_1.

$$S_1 = \frac{l_1}{\mu_1 A_1} = \frac{0{\cdot}08}{1200 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 0{\cdot}5 \times 10^{-4}} = 1{\cdot}04 \times 10^6 \ 1 / H$$

معاوقة الجزء الثاني S_2

$$S_2 = \frac{l_2}{\mu_2 A_2} = \frac{0{\cdot}06}{1200 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^{-4}} = 0{\cdot}39 \times 10^6 \ 1 / H$$

معاوقة الجزء الثالث (الفجوة الهوائية)

$$S_3 = \frac{l_3}{\mu_3 A_3} = \frac{0{\cdot}5 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \times 10^{-4}} = 3{\cdot}9 \times 10^6 \ 1 / H$$

المعاوقة الكلية للدائرة

$$S = S_1 + S_2 + S_3$$

$$= 1{\cdot}04 \times 10^6 + 0{\cdot}39 \times 10^6 + 3{\cdot}9 \times 10^6 = 5{\cdot}33 \times 10^6 \ 1 / H$$

اما الفيض في الدائرة فيمكن ايجاده من كثافة الفيض في الفجوة الهوائية مضروبة في مساحة مقطعها اي

$$\varphi = BA = 0{\cdot}2 \times 1 \times 10^{-4} = 20 \times 10^{-6} \text{ Weber}$$

لذا فالقوة الدافعة المغناطيسية اللازمة لأمرار هذا الفيض في الدائرةالمغناطيسية تساوي

$$F = S\varphi = 5{\cdot}33 \times 10^6 \times 20 \times 10^{-6} \doteq 106{\cdot}6 \text{ A.t}$$ (امبير لفة)

وحيث ان عدد اللفات هو 4000 لفة وان

$$F = NI$$

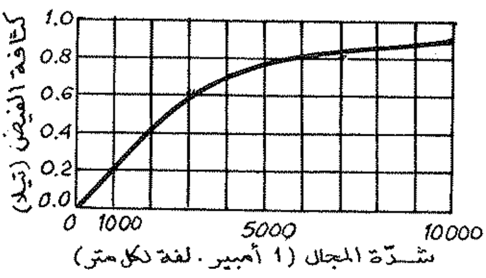
لذا فان التيار

$$I = \frac{F}{N} = \frac{106{\cdot}6}{4000} = 0{\cdot}0266 \text{ A}$$

ويلاحظ ان استخدمنا هذا المثال علاقة خطية بين H, B ، لذا لم نضطر لاستخدام منحني التمغنط .

مثال (7.4)

اذا كانت العلاقة بين كثافة الفيض المغناطيسي وشدة المجال في دائرة المثال 7.3 معطاة بالمنحني الموضح في الشكل 7.11 وقد كانت كثافة الفيض في الفجوة الهوائية كما في المثال السابق . اعد حساب التيار اللازم امراره في الملف .



الشكل 7.11 منحني كثافة الفيض وشدة المجال

الحل :

نظرا لعدم ثبوت قيمة μ فمن الافضل عدم حساب الهبوط في الجهد المغناطيسي حول الدائرة نتيجة كثافات الفيض المختلفة في اجزاء الدائرة المغناطيسية . فالفيض المغناطيسي يبقى 20×10^{-6} ويبر وكثافة الفيض في الجزء الاول تساوي تيسلا

$$B = \frac{\varphi}{A} = \frac{20 \times 10^{-6}}{0{\cdot}5 \times 10^{-4}} = 40 \times 10^{-2} = 0{\cdot}4\ T$$

اما كثافة الفيض في الفجوة الهوائية وفي الجزء الحديدي الثاني فلا تزال 0.2 تيسلا . من الشكل 7.11 يمكن معرفة الفيض 0.4 تيسلا تقابل 1500 امبير . لفة لكل متر كثافة الفيض 0.2 تيسلا فتقابل 850 امبير لفة لكل متر. اما للفجوة الهوائية فان H تساوي $\frac{B}{\mu}$ وتساوي

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{0{\cdot}2}{4\pi \times 10^{-7}}\ 1{\cdot}59 \times 10^5\ A.t / m$$ امبير . لفة/ متر

وحيث ان القوة الدافعة المغناطيسية الناتجة من الملف تساوي مجموع فروق الجهد المغناطيسي حول الدائرة ، اي ان ؛

$$F = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3$$

$$= 400I = 1500 \times 0{\cdot}06 + 850 \times 0{\cdot}08 + 1{\cdot}59 \times 10^5 \times 0{\cdot}5 \times 10^{-3}$$

$$I = \frac{237{\cdot}5}{4000} = 0{\cdot}059\ A$$

مثال (7.4)

حلقة مغناطيسية متجانسة فيها فجوة هوائية قطرها الداخلي يساوي 10 سم وقطرها الخارجي يساوي 14 سم وطول الفجوة الهوائية 2 ملم. اذا كانت العلاقة بين كثافة

الفيض وشدة المجال المغناطيسي معطاة بالمنحني في الشكل 7.11 ، كم مقدار الفيض المغناطيسي في الدائرة اذا لفت 1000 لفة على الحلقة وامرر في الملف تيار مقداره 1 امبير .

الحل :

في هذه المسألة علم التيار وطلب ايجاد الفيض ويتم الحل بالبدء بتخمين مقدار كثافة الفيض في الدائرة ثم محاولة التأكد من القيمة الصحيحة.

لنفرض ان نصف القوة الدافعة المغناطيسية يفقد في الفجوة الهوائية اي :

$$F_a = H_a l_a = \frac{1}{2} NI = \frac{1}{2} \times 1000 \times 1 = 500 \text{ A.t}$$ امبير . لفة

اي ان شدة المجال المغناطيسي اللازمة لذلك تساوي

$$H_a = \frac{500}{l_a} = \frac{500}{2 \times 10^{-2}} = 2{\cdot}5 \times 10^5$$ امبير لفة. لكل متر

فتكون كثافة الفيض اللازمة لانتاج شدة المجال هذه.

$$B_a = \mu H_a = 4\pi \times 10^{-7} \times 2{\cdot}5 \times 10^5 = 0{\cdot}314\text{T}$$ تيسلا

تعطي كثافة التدفق هذه فكرة تقريبية عن مستوى كثافة الفيض في الدائرة.

نحاول عمل جدول لحساب بعض الكميات لعدة قيم لكثافة الفيض. يبين الجدول 7.2 اربع محاولات لكثافات الفيض هي 0.2 و 0.3 و 0.4 و 0.5 تيسلا وفي كل حالة تستخرج شدة المجال المغناطيسي من الشكل 7.11 للحديد (Hi) ومنها يمكن حساب $H_i l_i$ حيث l_i هي معدل مسار الفيض المغناطيسي في الحديد ويساوي معدل محيط الحلقة اي

$$l_i = 12 \times \pi \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-3} = 0{\cdot}375m$$

اما للفجوة الهوائية فتحسب شدة المجال H_a من العلاقة $\frac{B}{\mu}$ فتضرب في طول الفجوة الهوائيــة l_a الــتي تــبــلــغ 2 مــلم فــنــحــصــل عــلى $H_a l_a$ ومــن مجــمــوع $H_a l_a$ و $H_i l_i$ تنتج Hl الكلية والتي تساوي NI حسب قانون امبير.

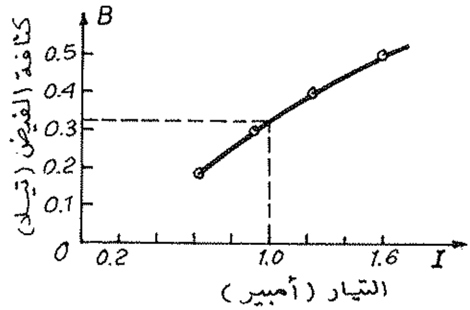
الجدول7.2 نتائج حل المثال 7.5

B	0.2	0.3	0.4	0.5
H_i	850	1150	1500	2000
$Hi \cdot l_i$	320	434	565	754
$H_a = \frac{B}{\mu}$	1.59×10^5	2.39×10^5	3.18×10^5	3.98×10^5
$H_a l_a$	318	478	636	796
$Hl = NI$	638	912	1201	1550
I	0.638	0.912	1.201	1.55

ونظراً لأن عدد اللفات يساوي 1000 لفة ، لذا يمكن حساب التيار بعد ذلك. تصبح المسألة عبارة عن محاولة ايجاد كثافة الفيض التي تقابل امبير واحداً. ولايوجد مثل هذه القيمة في الجدول لذلك نحاول رسم العلاقة بين B و I بشكل بياني كما في الشكل 7.12 حيث يمكن ان نجد أن كثافة الفيض التي تقابل 1 أمبير تعادل 0.33 تيسلا وتقابل فيضاً مقداره

$$\varphi = BA = 0{\cdot}33 \times \pi \times 4 \times 10^{-4}$$

$$= 0{\cdot}0045 \quad \text{ويبر}$$

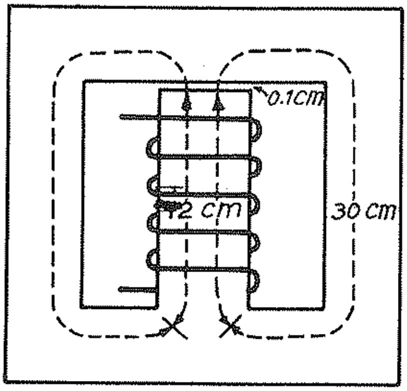


الشكل 7. 12

وتجدر الاشارة الى ان بالامكان عدم اللجوء الى الرسم بأخذ قيم اخرى بين B = 0.3 و B = 0.4 مثلاً 0.33 حيث يتضح بعدها ان قيمة كثافة الفيض محصورة بين 0.3 و 0.35 فنأخذ نقطة جديدة بينها ولتكن 0.325 ونعيد الكرة فنحصل على نتيجة ان القيمة المطلوبة هي بين 0.325 و 0.35 وهكذا نكرر الزيادة والنقصان في قيمة كثافة الفيض التخمينية الى ان نقترب منها بشكل مقبول فتكون هي النتيجة المطلوبة ويفضل حل مثل هذه المسائل بواسطة الحاسبة الالكترونية كما سيمر بنا في البرنامج في نهاية هذا الفصل.

مثال (7.6)

أطار من الفولاذ الصب cast steel أبعاده كما في الشكل 7.13 ملفوف على ذراعه الوسطية 1000 لفة. اوجد تيار الملف اذا كانت أنفاذية الفولاذ الصب النسبية 1000 هنري/متر. اذا كانت مساحة المقطع العرضي في كافة الاذرع والفجوة الهوائية هي 8 سم^2. احسب التيار اللازم لتكوين كثافة فيض مقدارها 0.1 تيسلا في الفجوة الهوائية



الشكل 7.13 الدائرة المغناطيسية للمثال 7.6

الحل :

نحاول ايجاد الدائرة الكهربائية المكافئة لهذه الدائرة المغناطيسية .

معاوقة الفجوة الهوائية

$$S_1 = \frac{l_1}{\mu_1 A_1} = \frac{1 \times 10^{-3}}{4\pi \times 10^{-7} \times 8 \times 10^{-4}}$$

$$= 99.5 \times 10^4 \qquad 1 / H$$

معاوقة كل من الذراعين الجانبيين

$$S_2 = \frac{l_2}{\mu_2 A_2} = \frac{0.3}{1000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 8 \times 10^{-4}}$$

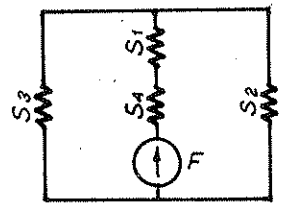
$$= 29.8 \times 10^4 \qquad 1 / H$$

معاوقة الذراع الوسطى

$$S_4 = \frac{l_4}{\mu_4 A_4} = \frac{0.12}{1000 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 8 \times 10^{-4}}$$

$$= 11.92 \times 10^4 \qquad 1 / H$$

وترسم الدائرة المكافئة كما في الشكل 7.14



الشكل 7.14 الدائرة الكهربائية المكافئة

تتألف هذه الدائرة من المعاوقتين المتساويتين S_2 و S_3 المربوطتين على التوازي واللتان مكافئتها $\frac{S_2}{2}$. فيكون مجموع المعاوقات

$$S = S_1 + S_4 + \frac{S_2}{2} = 99{\cdot}5 \times 10^4 + 11{\cdot}92 \times 10^4 + \frac{99{\cdot}8}{2} \times 10^4$$

$$= 126{\cdot}32 \times 10^4 \qquad 1 / H$$

وبتطبيق العلاقة

$$NI = \varphi S = BAS$$

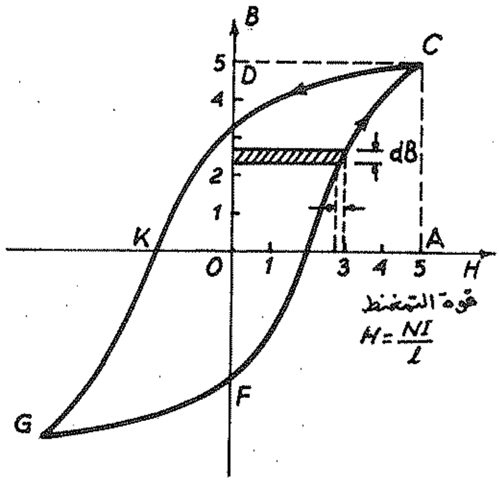
$$I = \frac{BAS}{N} = \frac{0{\cdot}1 \times 8 \times 10^{-4} \times 126{\cdot}32 \times 10^4}{1000}$$

$$= 0{\cdot}101 \text{ A}$$

7.13 حلقة الهسترة Hysteresis loop

اذا اخذنا قطعة من مادة قابلة للتمغنط لكنها مبدئياً غير ممغنطة ثم لفّ حولها ملف وامرر فيه تيار كهربائي ، فأن القطعة القابلة للتمغنط تتمغنط فعلا وتظهر خواصاً مغناطيسية تعتمد على مقدار التيار الذي امرر في الملف . اما اذا اوقف التيار المار في الملف او أبعد الملف

جملة عن المادة القابلة للتمغنط فيلاحظ ان القطعة لاتزال تحمل خواصاً مغناطيسية ولايمكن القضاء على هذه الخواص الا بأمرار تيار في الملف بعكس اتجاه التيار الاول لكي يقضي على مابقي في القطعة المغناطيسية من خواصها المغناطيسية وحيث أن شدة المجال المغناطيسي تتناسب مع التيار وان الخواص المغناطيسية تعتمد على كثافة الفيض ، لذا فأن الخواص التي اسلفنا ذكرها تظهر بوضوح بالرجوع الى منحني التمغنط . يبين الشكل 7.15 العلاقة بين كثافة الفيض B وشدة المجال المغناطيسي أو القوة الممغنطة H حيث يبدأ المنحني من نقطة الاصل O ، فعند زيادة شدة المجال الى المقدار OK تصل كثافة الفيض الى CK. اما عند انخفاض شدة المجال الى الصفر بعد ذلك فيصل المنحني الى نقطة D . اي ان مقدار كثافة الفيض المتبقية هي OD.

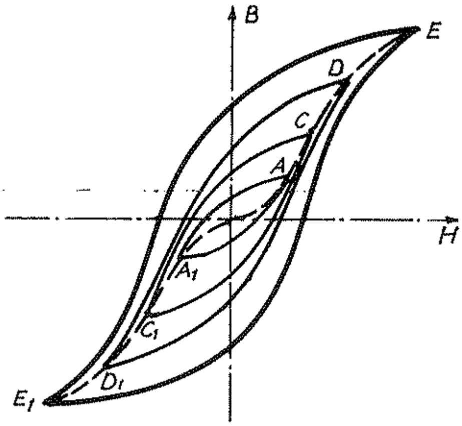


الشكل 7.15 منحني حلقة الهسترة

عند انعكاس التيار في الملف ، أو بكلمة اخرى حينما يكون اتجاه شدة المجال بعكس الاتجاه الاول بمقدار OE فان كثافة الفيض تنخفض الى الصفر. وعند زيادة شدة المجال عن ذلك الى النقطة F مثلا فان كثافة الفيض تنعكس وتصبح بالمقدار LF . وهكذا عند انخفاض شدة المجال بعد ذلك الى الصفر فان كثافة فيضاً مقدارها OG تبقى في القطعة المغناطيسية وتكتمل الدارة عند زيادة شدة المجال في هذه المرة من O الى K فترتفع كثافة الفيض بمقدار كبير من G الى M ثم الى C تدعى الدارة CDEFGMC بحلقة الهسترة .

ولغرض تمييز بعض المواد عن بعض فان نقطة تقاطع الدارة التخلفية مع الاحداثي العمودي اي OD تدعى بكثافة الفيض المتبقية remenant flux density . اما شدة المجال اللازمة لأبطال كثافة الفيض المتبقية فتدعى بالقوة المرغمة Coersive force اي OEأو OM .

تبدى المواد المغناطيسية المختلفة اشكالاً مختلفة من الحلقات . فاذا كانت المادة تتمغنط بسهولة كانت حلقتها ضيقة . اما اذا كانت المادة صعبة التمغنط كانت حلقتها عريضة . تعتمد مساحة الحلقة على القيمة العظمى لكثافة الفيض التي تمر في الدارة أو على القيمة العظمى لشدة المجال . فبالرجوع الى الشكل 7.16 تبدي مادة مغناطيسية ما حلقة هسترة مثل AA_1 عندما تكون شدة المجال المغناطيسي منخفضة . وعند زيادتها تزداد الى الحلقة$C C_1$ثم الى DD_1, EE_1 .

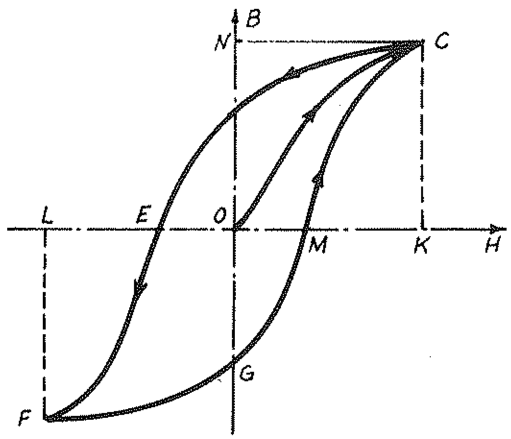


الشكل 7.16 جملة متنوعة من حلقات الهسترة

لنفرض أن هناك حلقة مغناطيسية ولنفرض انها بشكل حلقة ذات قطر كبير طوله l ومقطع عرضي منتظم قيمته A وقد لف عليه N من اللفات . فاذا كان التيار في لحظة ما i ، فان شدة المجال المغناطيسي الناتجة في الملف الحلقي من (7.29) تساوي

$$H = \frac{N_i}{l} \qquad \dots (7{\cdot}33)$$

بالرجوع الى الشكل 7.17 يلاحظ انه عند تغير التيار بمقدار Δi في زمن مقداره Δt



الشكل 7.17 الضياع في حلقة الهسترة

فأن ذلك يسبب تغيراً في شدة المجال مقداره ΔH. ومن ثم تتغير كثافة الفيض بمقدار ΔB اي أن الفيض يزداد بمقدار $\Delta\varphi$ والتي تساوي $A\Delta B$

أن مقدار الـ ق . د. ك المحتثة في الملفات تساوي

$$e = N\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = AN\frac{\Delta B}{\Delta t} \qquad \dots (7{\cdot}34)$$

بالرجوع الى قانون لينز فأن هذه الـ ق. د. ك تعاكس تياراً i لكي تجهز طاقة مقدارها ΔW

فان

$$\Delta W = ei\Delta t \quad \text{... (7·35)}$$

وبتعويض (7.34) في (7.35) نحصل

$$\Delta W = AN \frac{\Delta B}{\Delta t} i \, \Delta t$$

وبالتعويض عن i بدلالة H من العلاقة (8.56) ينتج

$$\Delta W = AN\Delta B \frac{Hl}{N}$$

$$= H\Delta B \times Al \quad \text{... (7·36)}$$

وحيث حاصل ضرب الطول l في مساحة المقطع A يساوي الحجم V فأن الطاقة المفقودة

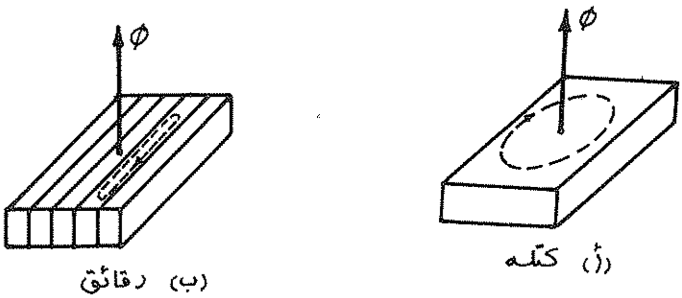
$$\Delta W = H\Delta B \times V \quad \text{... (7·37)}$$

$$\Delta W / V = H\Delta B \quad \text{... (7·37)}$$

أي أن الطاقة المفقودة لوحدة الحجوم بالجول تساوي المساحة المظللة في الشكل 7.17 . وهكذا يمكن ان نثبت ان الطاقة المفقودة في مغنطة الحلقة بالاتجاه GMC في الشكل مقدارها GMCNG . اما عند تخفيض شدة المجال من النقطة c الى النقطة D فأن طاقة تسترجع من المجال المغناطيسي مقدارها CDN وهكذا يتبين بوضوح ان مساحة حلقة المسترة FGMCDEF هي الطاقة المفقودة الصافية (بعد استرجاع بعض الطاقة من المجال المغناطيسي) حينما تتغير شدة المجال ذهاباً واياباً مرة واحدة. كما ان من البديهي ان يفقد طاقة تعادل مساحة الحلقة مضروبة في عدد مرات تردد المجال المغناطيسي (او التيار المار في الملف) ذهاباً واياباً. وسيتبين للطالب عند دراسة مكائن التيار المتناوب أن فقد التخلفية يعادل تردد التيار المتناوب مضروباً في مساحة حلقة الهسترة كما يتناسب مع حجم المادة المغناطيسية.

7.14 التيار الدوام Eddy current

ان المواد المغناطيسية هي مواد موصلة للكهربائية. لذا فان وجودها في مجال مغناطيسي لايتسبب في تمغنطها فقط بل أنها تتصرف كمادة موصلة يمكن أن تحتث فيها ق. د. ك شأنها شأن الملفات. الا ان الملفات يكون لها طرفان لايمرر أن تياراً كهربائياً خلالها الا عند توصيلها بحمل ما. اما القطعة المغناطيسية فأن الـ ق. د. ك التي تحتث فيها تسبب تياراً يدور حولها وكأنها ملف اوصل طرفاه مع بعضهما كما مبين في الشكل 7.18 يدعى التيار المذكور بالتيار الدوام. ومن الواضح أن مثل هذا التيار الذي يمر في المادة المغناطيسية يسبب فقداً فيها يظهر بشكل ارتفاع في درجات الحرارة لتلك المادة ويدعى بفقد التيار الدوام .



شكل 7.18 توضيحات التيار الدوام

تسرى التيارات الدوامة باتجاه بحيث أن تأثيراتها المغناطيسية تعاكس تغير الفيض وذلك وفق قانون لينز. فاذا كانت القطعة المغناطيسية موضوعة في مجال مغناطيسي متغير كان التيار الدوامي مستمر الدوران في القطعة المغناطيسية. ان المسار الذي يمر فيه التيار الدوام يحدد من قيمة هذا التيار فكلما كان المسار قصيراً كلما كان التيار عالياً لذلك فأن محاولة عرقلة سير التيار الدوام تقلل من مقداره ومن ثم من فقد التيار الدوام. أن اصلح الطرق العلمية للتقليل من التيار الدوام تتم بتجزئة المادة المغناطيسية الى قطع صغيرة كل منها ذات مقطع عرضي صغير فتكون الـ ق. د. ك المحتثة في كل منها جزءاً صغيراً من الـ ق. د.ك الكلية التي احتثت في القطعة الاصلية ، كما في الشكل 7.18 ب . كما ان مسار التيار الدوام في هذه القطع الصغيرة يكون طويلاً . وبكلمة اخرى أن تقسيم القطعة

المغناطيسية الى صفائح رقيقة تدعى بالرقائق Laminations هو احد الوسائل العملية لتقليل فقد التيار الدوامي في المواد المغناطيسية . وتجدر الاشارة الى أن فقد التيار الدوام لايعتبر عيباً في الانظمة الكهرومغناطيسية على الدوام فأن له في بعض الاحيان تطبيقات عملية مفيدة ككابح التيار الدوام مثلا Eddy current brake بصورة عامة يتناسب فقد التيار الدوام طردياً مع مربع مساحة المقطع ومربع كثافة الفيض ومربع التردد وعكسياً مع المقاومة النوعية للمادة .

7.15 البرنامج السابع : حسابات الدوائر المغناطيسية

يقوم هذا البرنامج بإيجاد الفيض المغناطيسي في دائرة مغناطيسية تتكون من جزء حديدي وفجوة هوائية . يطلب البرنامج عدد لفات ملف الحث والتيار المار فيه ثم طول الفجوة الهوائية بالملمترات وطول الجزء الحديدي بالسنتمترات ومن ثم يقوم بإيجاد الفيض بطريقة الدورات المتعاقبة التي تقترب من الحل النهائي الدقيق .

```
10 DIM B(8),H(8)
20 FOR I=1 TO 8
30 READ B(I),H(I)
40 NEXT I
50 DATA 0,0,0.2,900,0.40,1500,0.5,2000,0.6,2800,0.70,4500,0.80,6500,0.9,10000
60 PRINT "This is a program to find the flux in a nonlinear magnetic circuit"
70 PRINT "in which the current in the windings is known"
80 INPUT"current=";CUR
90 INPUT"number of turns";N
100 INPUT "airgap lenth in mm";L
110 INPUT "length of magnetic circuit in cm";M
120 AT1=CUR*N
130 HA=AT1/2
140 BA=HA/L*4*3.14159*.0001
150 IF BA>.9 THEN BA=.8
160 A=BA
170 GOSUB 270
180 PRINT "B="; A;"H=";C
190 AT2=C*M/100
200 BA=(AT1-AT2)/L*4*3.14159*.0001
210 IF ABS(A-BA)<.001 THEN 230
220 GOTO 160
```

```
230 PRINT "flux=";A;"weber"
240 GOTO 260
250 PRINT "data  out of range"
260 END
270 I=1
280 IF A<0 THEN 250
290 IF A=<B(I) THEN 320
300 IF I=8 THEN 350
310 I=I+1:GOTO 290
320 C=H(I-1)+(H(I)-H(I-1))*(A-B(I-1))/(B(I)-B(I-1))
330 C=H(I-1)+(H(I)-H(I-1))*(A-B(I-1))/(B(I)-B(I-1))
340 GOTO 360
350 C=H(I)
360 RETURN
```

مسائل الفصل السابع

1. فيض مغناطيسي يتغير مع الزمن وفق العلاقة

$$\varphi = 3 \times 10^{-5} \sin 120\,\pi t \quad \text{weber}$$

يقطع ملف ثابت عدد لفاته 1000 لفة. اشتق تعبيرا يمثل الـ ق. د. ك المحتثة في الملف. مامقدار اقصى قيمة لهذه الـ ق. د. ك. ارسم على الشكل نفسه منحني φ و e كدالتين للزمن.

(الجواب 11.3V دالة جيب تمامية)

2. ملف دائري ملفوف باحكام. نصف قطره 1 سم ويحوي100 لفة. وضع بحيث كان محوره موازٍ لاتجاه مجال مغناطيسي منتظم. ادير الملف حول محوره بزاوية مقدارها 180 درجة في 0.1 ثانية، فكان متوسط الـ ق. د. ك المحتثة في الملف 0.001 فولت مامقدار كثافة المجال المغناطيسي.

(الجواب 4.99T)

3. في السؤال 2 اذا ابقي الملف ساكنا وعكس اتجاه المجال المغناطيسي بحيث اصبح بالقيمة نفسها ولكن بعكس الاتجاه في زمن مقدار 0.05 ثانية، كم مقدار الـ ق. د. ك المحتثة في الملف؟

(الجواب 0.0314V)

5. الفيض الذي يقطع ملف يحوي 100 لفة، يتغير خلال فترة التردد T كما يلي:

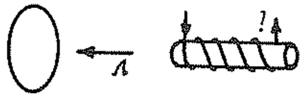
من $t = 0$ الى $t = \frac{T}{2}$ يكون تغير الفيض وفق العلاقة $\varphi = \varphi_m \left(1 - 4\frac{t}{T} \right)$

ومن $t = \frac{T}{2}$ الى $t = T$ يكون تغير الفيض وفق العلاقة

$$\varphi = \varphi_m \left(\frac{4t}{T} - 3 \right)$$

اذا كان $T = 0,025$ و φ_m تساوي 0.02 ويبر، احسب اقصى قيمة ال ق.د.ك.
ارسم موجتي التدفق وال ق.د.ك.
(الجواب 320V)

5. يتحرك ملف لولبي نحو حلقة موصلة كما مبين في الشكل 7.19. كيف يكون اتجاه التيار المحتث في الحلقة كما يلاحظ من الملف؟
(الجواب عكس عقارب الساعة)



الشكل 7.19

6. قوة دافعة كهربائية قيمتها 1.5 فولت إحتثت في موصل مستقيم يتحرك بسرعة مقدارها 5 متر بالثانية عموديا على مجال مغناطيسي كثافته 0.75 تيسلا. إحسب الطول الفعال للموصل.
(الجواب : 0.4 m)
7. وصلية فيض مغناطيسية ١٤٠٠ لفة من مغناطيس كهربائي تتغير بانتظام من 0.6 ملي ويبر 0.5 ملي ثانية. اوجد قيمة متوسط ال ق.د.ك المحتثة
(الجواب : 3.6V)

8. موصل طوله الفعال 250 ملي متر يتحرك بسرعة 5 متر بالثانية عموديا على مجال مغناطيسي كثافة فيضه المنتظم 0.24 تيسلا، إحسب : (آ) ال ق.د.ك المحتثة في الموصل.
(ب) القوة المسلطة على الموصل حينما يحمل تياراً مقداره 20 أمبير.
(ج) القدرة اللازمة لتحريك الموصل.

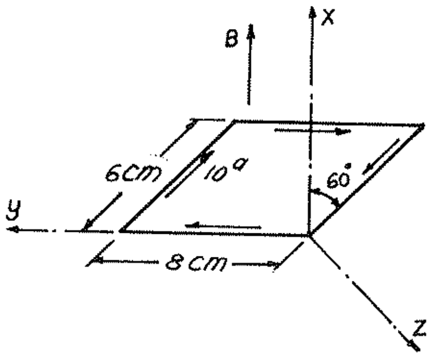
وضح بالرسم الاتجاهات النسبية للمجال وحركة الموصل وال ق. د. ك المحتثة.
(الجواب : 6.0W, 1.2N, 0.3V)

9. موصل بشكل مستطيل يحمل تيارا مقداره 10 امبير كما مبين في الشكل 7.20 يرتكز على طول المحور الصادي. وضعت الدارة في مجال مغناطيسي مقداره 0.2 ويبر / متر مربع والمجال موازٍ للمحور السيني ينحرف مستوى الموصل بمقدار 60° درجة عن مستوى xy

أ) اوجد القوة المسلطة بواسطة المجال المغناطيسي على كل ضلع من اضلاع الدارة

ب) اوجد العزم المطلوب لجعل الدارة بوضع الاستقرار في الوضع المبين بالشكل

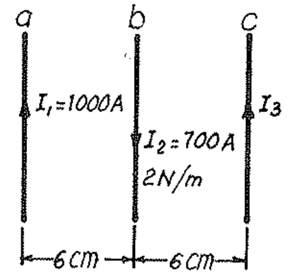
(الاجوبة (آ) 0.104N و 0.16N (ب) 0.00624Nm)



الشكل 7.20

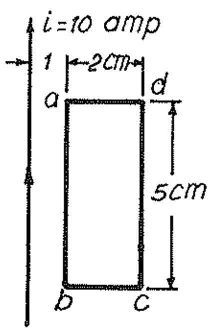
10. ثلاث اسلاك متوازية. المسافات بينها مبينة في الشكل 7.21. يحمل السلكان B,A تيارين مقدارهما 1000 امبير و 700 امبير على التوالي باتجاهين متعاكسين. كانت القوة المسلطة على B 2, نيوتن لكل متر طول مؤثر باتجاه C. اوجد مقدار واتجاه التيار في C.

(الجواب 142.8A)



الشكل 7.21 دائرة المسألة 10

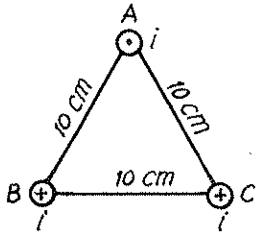
11. في الشكل 7.22 يحمل السلك المستطيل تيارا مقداره 5 امبير باتجاه دوران عقرب الساعة (ا) اوجد مقدار واتجاه القوة المسلطة على المستطيل نتيجة المجال المعناطيسي الناتج عن تيار مقداره 10 امبير في السلك المستقيم (ب) اوجد مجموع الفيض المار خلال المستطيل باستخدام عملية التكامل من مسافة 1 سنتمتر الى 2 سنتمتر (الجواب $3.33X10^5$ لليسار $1.1X10^7$ W)



الشكل 7.22 دائرة المسألة 11

12 . ثلاث اسلاك طويلة متوازية تمر خلال زوايا مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه 10 سم . وهي متعامدة على مستوى المثلث . كل سلك يحمل تيارا مقداره 15 امبير. التيار في السلك يخرج من الصفحة وفي السلكين C, B يدخل نحوه . اوجد القوة لكل وحدة طول المؤثرة على السلك A والسلك B . اوضح اتجاه القوى المحصلة هذه على الشكل :

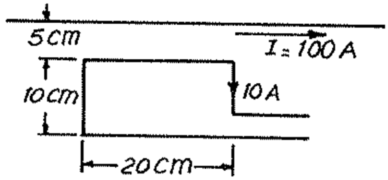
الجواب $7.79X10^4$ للاعلى ، 4.5×10^4N بزاوية 60 مع BC)



الشكل 7.23 دائرة المسألة 16

13 . اذا كانت الحلقة المستطيلة للسلك المبين في الشكل 7 يحمل تياراً مقداره 10A مجاور وبنفس المستوى لسلك مستقيم طويل يحمل تياراً مقداره 100A ، اوجد قيمة واتجاه القوة على الحلقة .

(الجواب 5.33×10^4 تجاذب)



14 سلك مستقيم طوله 0.1 متر يحمل تياراً مقداره 100A ويقع متعامداً مع مجال مغناطيسي طوله 1 تيسلا. اوجد القوة الميكانيكية المسلطة على الموصل، وبين بالرسم توزيع المجال المغناطيسي واتجاه التيار والقوة المسلطة على الموصل.

(الجواب : 10N)

15. ملف مربع الشكل يصنع مستوية زاوية مقدارها 45 مع اتجاه مجال منتظم كثافته 0.4 تيسلا : فإذا كان ضلع الملف يساوي 100 ملمتر وعدد لفاته 500 لفة. إحسب التيار الذي يجب ان يمر لينتج عزما مقداره 3 نيوتن - متر حول المحور المتعادل للملف.

(الجواب : 2012A)

16 - لب دائرة مغناطيسية حجمه 1000 سنتمتر مكعب. احسب فقد الهسترة له عند التردد 50 هرتز باستخدام منحني الشكل 23.8، على فرض ان مساحة الدارة تعادل 10 وحدة مربعة وان مقياس الرسم باتجاه B يعادل 4 تيسلا لكل وحدة وباتجاه 10H امبير لكل متر لكل وحدة.

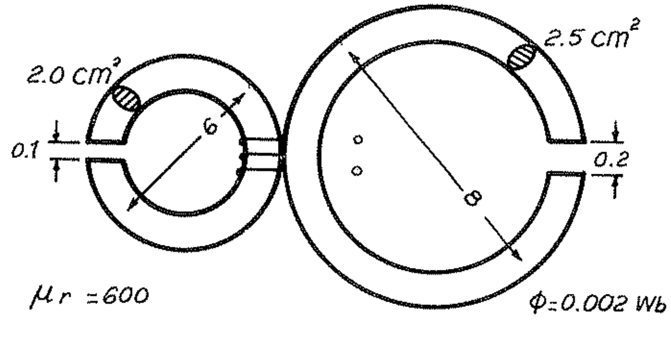
(الجواب 20W)

17 - في ماكنة معينة كان سمك الرقائق 1 ملم وكثافة الفيض العظمى 0.5 تيسلا فوجد ان فقد التيار الدوامي يعادل 100 واط عند التردد 50 هرتز. احسب الفقد نفسه للماكنة المذكورة اذا استبدلت رقائقها باخرى سمكها 0.5 ملم واستخدمت كثافة فيض قصوى مقدارها 0.6 تيسلا .وعملت الماكنة عند التردد 60 هرتز.

(الجواب 51.84 W).

18 - في الدائرة المبينة في الشكل 7.25 يتألف الملف من 400 لفة وكان الفيض خلال الفجوة الهوائية اليمنى 0.002 ويبر ونفاذية المادة المغناطيسية تساوي 600 احسب التيار اللازم امراره في الملف .

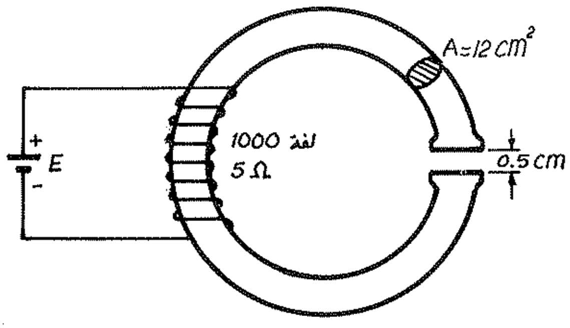
(الجواب 4.25A)



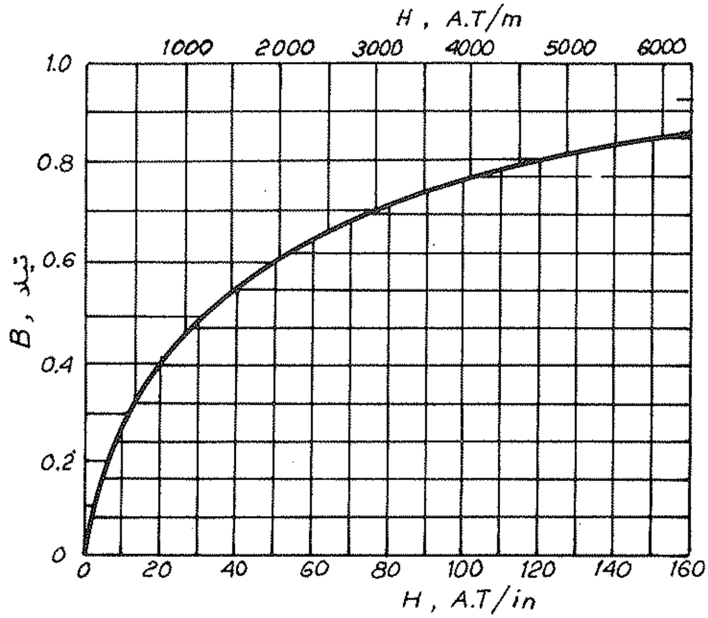
الشكل 7.25 دائرة المسألة 18

19– دائرة مغناطيسية متوالية كالمبينة في الشكل 7.26 تحتوي على ملف حلقي على التوالي مع فجوة هوائية. يحوي الملف على 1000 لفة. ماقيمة الفولتية اللازمة لكي يمر في الفجوة الهوائية فيض مقداره 0.6 ملي ويبر علما بان مقاومة الملف تساوي 5 اوم. احسب معاوقة الفجوة الهوائية واستخدم المنحني المبين في الشكل 7.27 لحديد الصب

(الجواب 0.191، 0.959)



طول المسار الحديدي 16 سم مساحة المقطع للفجوة الهوائية 14 سم²
الشكل 7.26 دائرة المسألة 19



الشكل 7.27 منحني التمغنط لحديد الصب

20– في المسألة 19 السابقة اذا كانت E=15V . احسب الفيض المار عبر الفجوة الهوائية .

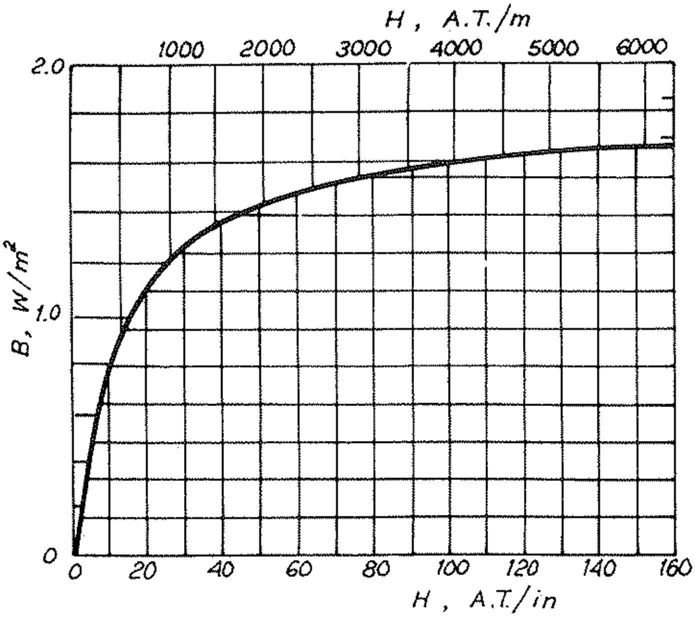
(الجواب 7.5×10^{-4} ويبر)

21– احسب التيار اللازم لامرار 0.002 ويبر من الفيض خلال الفجوة الهوائية اذا كان عدد لفات الملف 2000 لفة ولما كانت ابعاد القطع الحديدة المكونة والفجوة الهوائية لحلقة مغناطيسية مشابهة للمثال 7.3 وكالاتي :

المسار	المادة	المساحة (سم^2)	الطول (سم)
A–B	حديد صب	25	30
B–C	فولاذ صب	12	60
C–D	فجوة هوائية	12	0.5
D–A	فولاذ صب	12	70

استخدم المنحنيات المبينة في الشكلين 7.27 و 7.28

(الجواب 8.76A)

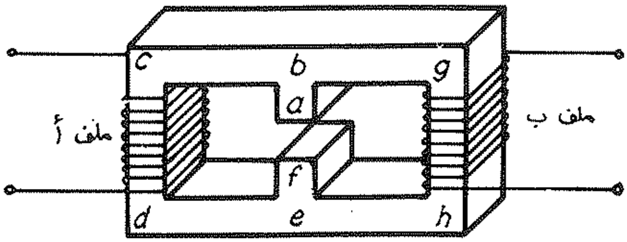


الشكل 7.28 منحني التمغنط لفولاذ الصب

22– في الشكل 7.29 كانت الدائرة المغناطيسية مصنوعة من حديد الصب . احسب الامبير لفة اللازمة من كل من الملفين لكي يكون الفيض المار خلال الملف يساوي 0.0001 ويبر ولايمر اي فيض خلال الملف ب . استخدم المنحني المبين في الشكل 7.26. ابعاد الدائرة كالآتي علما ان مساحة المقطع لكافة الاجزاء 2.5سم^2.

BCDE = 10cm, FE = 10cm, BA = 12·5cm, AF = 2·8 mm

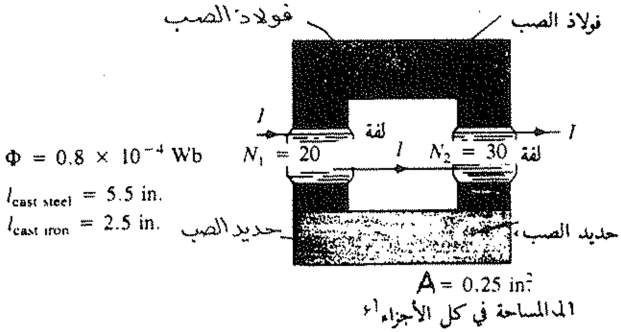
(الجواب 876AT و 1076,AT)



الشكل 7.29 دائرة المسالة 22

23. للدائرة المغناطيسية المبينة في الشكل المتكونة من مصدرين للقوة الدافعة المغناطيسية يولدان فيضاً بنفس الأتجاه. أوجد التيار I .

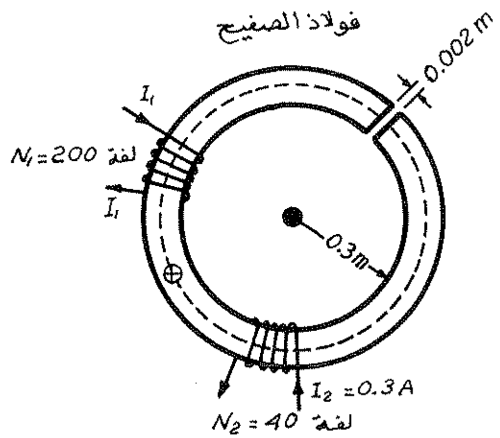
(الجواب : 2.7432A)



الشكل 7.30

24. يطلب إيجاد التيار I اللازم لتكوين فيض قيمته $d = 2 \times 10^{-4}$ wb للدائرة المغناطيسية المبينة في الشكل. 7.31 لاحظ ان الملف الثاني الذي يمرر تياراً مقداره 0.3A يمكن ان يستخدم لتشغيل مناول (rela y)

(الجواب : 15.14A)



الشكل 7.31

الفصل الثامن

دوائر المحثات

"وأنزلنا الحديد فيه بأس شديد ومنافع للناس"
(سورة الحديد الآية 25)

8.1 المحاثة الذاتية Self Inductance

يعرف المحث بانه تلك الاداة التي تخزن طاقة في المجال المغناطيسي. يمكن اعتبار المحث بانه المكافيء المغناطيسي للمتسعة التي تخزن الطاقة في المجال الكهربائي تمثل الملفات البسيطة والملفات اللولبية امثلة على المحثات.

يعطي قانون فاراداي وسيلة لايجاد الفولتية المحتثة في موصل كنتيجة لتغير الفيض المغناطيسي. كما ان الفيض المغناطيسي المتغيرّ المحيط بالموصل يمكن انتاجه بتيار كهربائي متغيرّ في ذلك الموصل. لذا يمكن ايجاد علاقة مباشرة تربط الفولتية المحتثة والتيار المتغير. يدعى ثابت التناسب بين هاتين الكميتين بالمحاثة ويرمز له بالرمز L. اي ان

$$v \alpha \frac{d\varphi}{dt} \qquad ...(8\cdot1)$$

كما ان φ تتناسب مع التيار الذي ينتجها اذا كان الوسط ذا خواص خطية لذا

$$v \alpha \frac{di}{dt} \qquad ...(8.2)$$

وثابت التناسب بالمعادلة (8.2) هو المحاثة L . اما ثابت التناسب بالمعادلة (8.1) فهو عدد اللفات N . وبمساواة قيمتي الدافعتين الكهربائيتين من (8.1) و (8.2) ينتج

$$N \frac{d\varphi}{dt} = L \frac{di}{dt} \qquad ...(8.3)$$

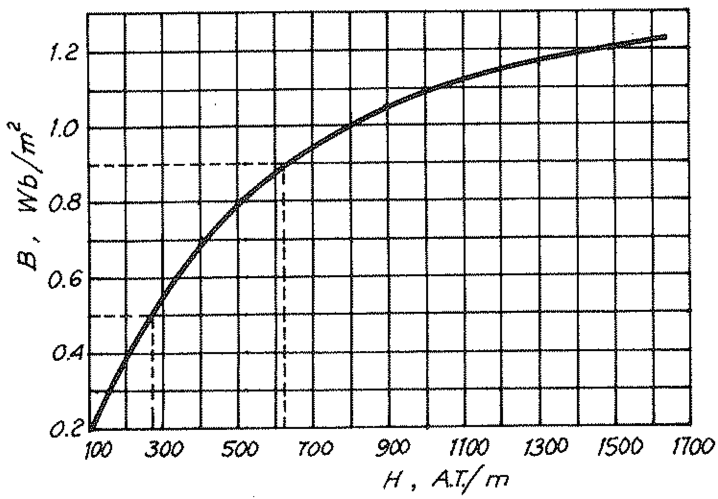
وباعادة كتابة هذه المعادلة نحصل

$$L = N \frac{d\varphi}{di} \qquad ...(8.4)$$

اي ان المحاثة تمثل ميل المنحني الذي يربط الفيض φ مع التيار i وعلى فرض ان التيار والفيض مرتبطين بعلاقة خطية والتي هي الحالة ان كان الوسط غير مغناطيسي تكون المحاثة ثابتة . اما اذا كان الوسط مغناطيسيا فان العلاقة بين الفيض والتيار تكون بشكل مشابه لمنحني التمغنط. بينما تنخفض ، قيمة المحاثة (الميل) في الجزء العلوي من منحني التمغنط . ويمكن استنتساخ وحدة المحاثة من العلاقة (8.4) والتي هي ويبر لفة/ امبير، حيث ان عدد اللفات لاوحدة له فتصبح ويبر/ امبير تدعى بالهنري.

مثال (8.1)

ملف يحوي مائة لفة ، ملفوف على لب حديدي طوله متر واحد. له خواص مغناطيسية كالمبينة في الشكل 8.1. اذا كان مقطعه العرضي يساوي 10 سم^2 ، (أ) ارسم العلاقة بين الفيض الذي ينتجه الملف مع التيار الذي يمر فيه (ب) ارسم منحنيا يبين علاقة المحاثة مع التيار الذي يمر فيه.



الشكل 8.1 خواص مغناطيسية للب حديدي في المثال 8.1

الحل :

حيث ان التدفق يعادل كثافة الفيض مضروبا في مساحة مقطع الملف فان المحور العمودي للشكل اذا اريد تحويله الى التدفق يضرب X مساحة الملف. اي $10 \times 0^{-4} = 10^{-3}m^2$ فيصبح المقياس بالوبير. اما الاحداثي الافقي فيمكن تحويل تقسيماته باستخدام قانون امبير حيث

$$I = \frac{Hl}{N} \qquad ...(8\cdot5)$$

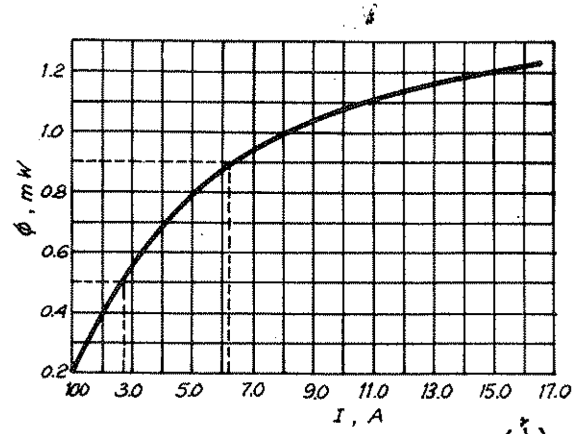
اي ان احداثي التيار يصبح مشابها لاحداثي المجال المغناطيسي H مضروبا في $\frac{l}{N}$ ويساوي 10^{-2}. لذا تصبح العلاقة بين φ و I كما مبين في الشكل 8.2أ

(ب) تمثل المحاثة ميل المنحني في الشكل في 8.2أ الذي هو علاقة الفيض بالتيار. يمكن رسم منحني المحاثة مع التيار خطوة خطوة بشكل بياني فتكون العلاقة كما مبين في الشكل 8.2 ب

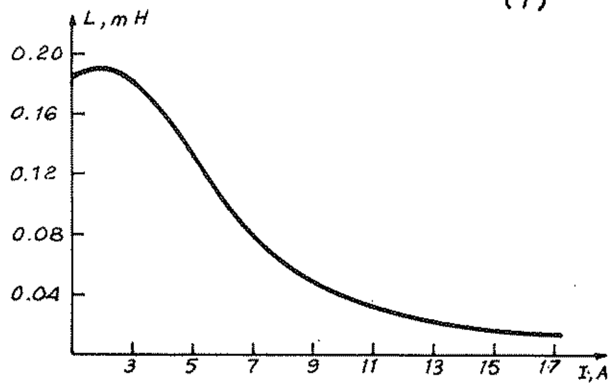
من ذلك يتبين ان لكل ملف محاثة لذلك فحيثما يذكر الملف فان محاثة مصابة له تكون موجودة في الدائرة.

مثال (8.2)

أ) احسب المحاثة الذاتية لملف لولبي وآخر حلقي إذا علمت أنه للملف اللولبي الطويل تكون $H = \frac{NI}{l}$ حيث l هو طول الملف. وللملف الحلقي $H = \frac{NI}{2\pi R}$ حيث R نصف قطر الملف، و (ب) اوجد محاثة ملف لولبي يحوي 2000 لفة طوله 50 سم ملفوف على انبوبة من الورق قطرها 4 سم (جـ) اوجد المحاثة الذاتية لملف حلقي عدد لفاته 200 لفة ونصف قطره الداخلي 23 سم ونصف قطره الخارجي 27 سم. ملفوف على حلقة من الورق.



(أ)



(ب)

الحل :

بالرجوع الى المعادلة (8.4) اذا كانت العلاقة بين الفيض والتيار علاقة خطية بسيطة امكن اعادة كتابة المحاثة الذاتية بشكل

$$L = \frac{N\varphi}{I} \qquad ...(8\cdot6)$$

وحيث ان التدفق يساوي كثافة الفيض في المساحة فان

$$L = \frac{NBA}{I} \qquad ...(8\cdot7)$$

وبتعويض $B = \mu H$ نحصل على

$$L = \mu \frac{NHA}{I} \qquad ...(8\cdot8)$$

وحيث أن شدة المجال للملف اللولبي تساوي $H = \frac{NI}{l}$ وبتعويض ذلك في المعادلة (8.8)

$$L = \frac{\mu NA}{I}\left(\frac{NI}{l}\right)$$

$$= \frac{\mu N^2 A}{l} \qquad ...(8\cdot9)$$

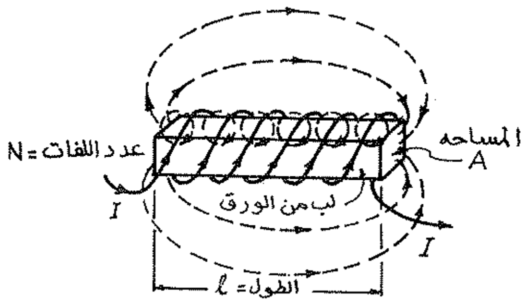
اما للملف الحلقي فان قيمة شدة المجال تعطي بالمعادلة $H = \frac{NI}{2\pi R}$
وبتعويض ذلك في المعادلة 8.9 نحصل على :

$$L = \frac{\mu NA}{I}\left(\frac{NI}{2\pi R}\right) \qquad ...(8\cdot10)$$

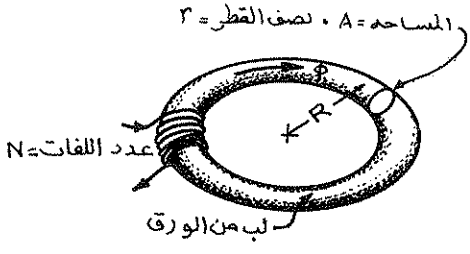
وحيث ان المساحة المبينة في المعادلة (8.10) هي مساحة مقطع الملف الذي هو πr^2 فتصبح المحاثة للملف الحلقي.

$$L = \mu N^2 \frac{\pi r^2}{2\pi R}$$

$$= \mu N^2 \frac{r^2}{2R} \qquad ...(8\cdot11)$$



الشكل 8.3 ملف لولبي



الشكل 8.4 ملف حلقي

(ب) بتطبيق العلاقة (8.9) للملف اللولبي تكون محاثته الذاتية

$$L = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times (2000)^2 \times \pi (2 \times 10^{-2})^2}{50 \times 10^{-2}}$$

$$= 0{\cdot}0126H \qquad \text{(هنري)}$$

(جـ) للملف الحلقي متوسط نصف قطره $25cm = \frac{27 + 23}{2}$ ونصف قطر اللفة $2cm = \frac{27 - 23}{2}$ يساوي وبالتعويض في العلاقة (8.11).

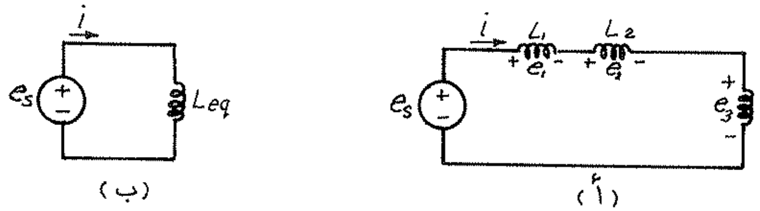
$$L = 4\pi \times 10^{-3} \times (2000)^2 \times \frac{(2 \times 10^{-2})^2}{2 \times 25 \times 10^{-2}}$$

$$= 0{\cdot}004H \qquad \text{(هنري)}$$

8.2 ربط المحثات

ان المحاثة الذاتية ذات اهمية كبيرة في الدوائر الكهربائية ، حيث ان لها خواصا مفيدة لأنها تستطيع خزن الطاقة في المجال المغناطيسي مؤقتاً ثم اعادة تزويد الدائرة بها في وقت لاحق. لذلك تستخدم بكثرة وبالاخص في دوائر التيار المتناوب كما سيمر بنا فصول لاحقة يراد في بعض الاحيان دمج المحثات لايجاد المحاثة المكافئة لها فيما اذا كانت مربوطة على التوالي او على التوازي او غير ذلك من انواع الربط .

يبين الشكل 8.5 ثلاث محثات مربوطة على التوالي يمر فيها تيار مقداره i وقد كانت الفولتيات المسلطة عليها هي e_1 و e_2 و e_3 على التعاقب.



الشكل 8.5 ثلاث محثات على التوالي ومكافئها

من قانون الفولتية لكرشوف تساوي الفولتية الكلية e_s مجموع الفولتيات اي

$$e_s = e_1 + e_2 + e_3 \qquad ...(8{\cdot}12)...$$

وحيث ان كلا من الفولتيات عبر المحثات تساوي المحاثة الذاتية مضروبة في مشتقة التيار المار بها بالنسبة للزمن فان

$$e_s = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L+^{3} \frac{di}{dt} \qquad ...(8{\cdot}13)...$$

اي ان

$$e_s = (L_1 + L_2 + L_3) \frac{di}{dt}$$

وبتعريف المحاثة المكافئة لهذه المحثات وفق العلاقة

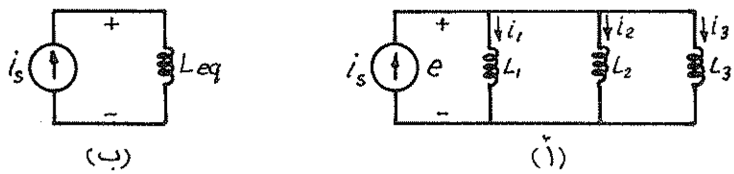
$$e = L_s \frac{di}{dt} \qquad ...(8{\cdot}14)...$$

فمن الواضح ان المحاثة المكافئة تساوي

$$L_s = L_1 + L_2 + L_3 \qquad ...(8{\cdot}15)...$$

اي ان المحاثة الكلية لعدد من المحثات المربوطة على التوالي تساوي مجموع محثاتها جمعا بسيطا مهما كان عددها. شانها شان المقاومات المربوطة على التوالي.

اما عند ربط المحثات على التوازي فبالرجوع الى الشكل 8.6 يظهر ان العلاقة بين الفولتية والتيار المار في كل من المحثات ترتبط بالعلاقات



الشكل 8.6 ثلاثة محثات على التوازي مكافئتها

$$\left.\begin{aligned} e &= L_1 \frac{di_1}{dt} \\ e &= L_2 \frac{di_2}{dt} \\ e &= L_3 \frac{di_3}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad \text{...(8·16)}$$

وبتعريف المحاثة المكافئة على انها تلك المحاثة L_{eq} التي ترتبط مع الفولتية والتيار بالعلاقة

حيث i هو مجموع التيارات i_1 و i_2 و i_3 وفق قانون التيار لكرشوف

$$\frac{di}{dt} = \frac{e}{L_{eq}} \qquad \text{... (8·17)}$$

$$= \frac{d}{dt}(i_1 + i_2 + i_3) \qquad ...(8{\cdot}18)$$

$$= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt} \qquad ...(8{\cdot}19)$$

وبالتعويض عن المشتقات المبينة في المعادلة (8.19) من المشتقات في المعادلة (8.16) بدلالة المحثات والفولتية e نجد

$$\frac{di}{dt} = \frac{e}{L_1} + \frac{e}{L_2} + \frac{e}{L_3} \qquad ...(8{\cdot}20)$$

وبمساواة (8.20) و (8.17)

$$\frac{e}{L_p} = \frac{e}{L_1} + \frac{e}{L_2} + \frac{e}{L_3} \qquad ...(8{\cdot}21)$$

او

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \qquad ...(8{\cdot}22)$$

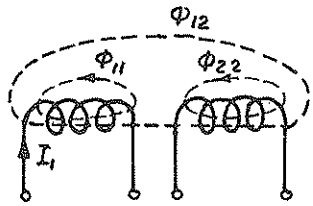
اي ان مقلوب المحاثة المكافئة لعدد من المحثات المربوطة على التوازي يساوي مجموع مقلوبات المحثات كما هي الحال في ربط المقاومات على التوازي.

ويلاحظ في ربط المحثات على التوالي والتوازي ان تكون قيم المحاثات ثابتة وغير معتمدة على التيار. ويحدث ذلك اذا كان لب المحث مكون من مادة عازلة او غير حديدية . اما اذا كان اللب من مادة حديدية قابلة للتمغنط فلايمكن تطبيق ذلك الا اذا كان الحل يتم بمجموعة في الاجزاء الخطية المستقيمة من منحني التمغنط .

8.3 المحاثة التبادلية

اذا وضعت دائرتان قرب بعضهما وكان الفيض المغناطيسي الناتج من احداهما يقطع الدائرة الاخرى ، يدعى الفيض المشترك بين الدائرتين بالفيض التبادلي Mutual flux

ويقال عن الدائرتين بانها دائرتين متقارنتين Coupled Circuits . اذا تغير التيار في الدائرة الاولى فان الفيض الناتج عن هذا التيار يتغير ايضا . وحيث ان هذا الفيض (او جزء منه) يقطع الدائرة الثانية ايضا ، لذا فان ق . د . ك تتولد في الدائرة الثانية ويقال عن ذلك بان بين الملفين محاثة تبادلية*



الشكل 8.7 ملفات يوصلان بتدفق تبادلي

في الشكل 8.7 يتضح وجود ملفين قرب بعضهما . يولد التيار I_1 فيضاً يقطع قسم منه الملف الثاني مولدا فيه ق . د . ك . لنفرض ان مقدارها e_2 ، لذا

$$e_2 = M \frac{di_1}{dt}$$

حيث M هي المحاثة التبادلية والتي وحدتها هي الهنري وتعرف بانها تلك المحاثة الناتجة عن توليد فولت واحد في الملف الثاني حينما يتغير التيار في الدائرة الاولى بمعدل امبير واحد بالثانية . ان جزءا من الفيض الناتج من الملف الاول يقطع الملف الثاني . لنفرض انه يساوي $k\varphi$ حيث k هو معامل اقل من الواحد او ربما يقترب من الواحد عندما يقطع كل الفيض الناتج من الملف الاول الملف الثاني ويدعى هذا العامل بعامل الاقتران Coefficient of Coupling

* عند استخدام المحاثة التبادلية يجب ذكر لفظة التبادلية اما في المحاثة الذاتية فتستخدم لفظة المحاثة احياناً للدلالة عليها .

سبق وان عرفنا المحاثة الذاتية لملف بالعلاقة $L=\frac{N\varphi}{I}$ كحاصل ضرب عدد اللفات في الفيض مقسوما على التيار. لذا يمكن تعريف المحاثة التبادلية بانها حاصل ضرب معامل الاقتران k في الفيض الناتج من الملف الاول φ_1 مضروباً في عدد لفات الملف الثاني N_2 (لان الـ ق . د . ك تتولد في الملف الثاني) مقسوما على التيار المار في الملف الاول (نظرا لانه هو المنتج للفيض) اي .

$$M_{12} = k\,\frac{\varphi_1 N_2}{I_1} \qquad \text{...(8·23)}$$

اما المحاثة الناتجة من تيار يمر في الملف الثاني منتجا فيضاً يقطع قسم منه الملف الاول مما يولد ق . د . ك فيه تساوي

$$M_{21} = k\,\frac{\varphi_2 N_1}{I_2} \qquad \text{...(8·24)}$$

حيث k هو معامل الاقتران بين الملفين في كلا الحالتين. كما ان المحاثة التبادلية في هذه الحالة تساوي المحاثة التبادلية في الحالة الاولى أي. $M_{12} = M_{21} = M$ وبضرب العلاقتين (8.23) و (8.24) مع بعضهما ينتج

$$M^2 = k^2\,\frac{\varphi_1 N_2 \varphi_2 N_1}{I_1 I_2}$$

$$= k^2\,\frac{\varphi_1 N_1}{I_1}\cdot\frac{\varphi_2 N_2}{I_2} \qquad \text{...(8·25)}$$

$$M^2 = k^2 L_1 L_2$$

وبمقارنة ذلك مع المعادلة (8.6) يمكن الاستعاضة عن $\frac{\varphi_1 N_1}{I_1}$ بـ L_1 وعن $\frac{\varphi_2 N_2}{I_2}$ بـ L_2 . لذا

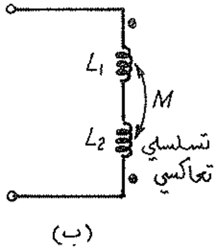
$$M^2 = k^2 L_1 L_2 \quad \ldots(8\cdot26)$$

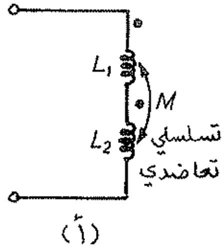
$$\therefore M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

اي ان المحاثة التبادلية لملفين تكون دائما اقل من الوسط الهندسي لمحاثتي الملفين بنسبة معامل الاقتران.

ونظراً لأن الـ ق. د. ك المحتثة في ملف ماتكون ذات اتجاه معين، فانه من الضروري تحديد اتجاه الـ ق. د. ك المحتثة في الملف الثاني نتيجة المحاثة التبادلية بين الملفين. فاذا عكس اتجاه التيار في الملف الاول انعكس اتجاه الـ ق. د. ك المحتثة في الملف الثاني على فرض بقاء الملفين بوضعها السابقين. ولغرض تبيان الاتجاه الصحيح للـ ق. د. ك المتولدة في احد الملفين نتيجة التيار في الملف الثاني اصطلح على استخدام نقطتين، قرب نهايتي الملفين بحيث انه اذا دخل التيار في الملف الاول اي النهاية المؤشرة باحدى النقطتين، يكون اتجاه التيار في الملف الثاني (فيما اذا اغلقت دائرته خلال حمل ما) بحيث يدخل النقطة المؤشرة على نهاية ذلك الملف. اما اذا انعكس التيار الاول بحيث يخرج من النهاية المنقطة فان التيار في الملف الثاني يخرج من النهاية المنقطة ايضا.

سبق ان بينا ان ربط ملفين على التوالي يؤدي الى تكوين محاثة تعادل مجموع محاثتيها الذاتيتين. اما اذا كان بين المحثين فيضاً مشتركا اي كان بينها محاثة تبادلية بالاضافة الى محاثتيها وربطا على التوالي فان هذا الربط يعتمد على اتجاه وضع النقط على نهايتي المحثين. هناك امكانيتان اثنتان لربطا المحثين اي ان الفيضين الناتجين فيها اما ان يساعد احدهما الاخر (يكونا باتجاه واحد) او ان يعاكس احدهما الاخر (اي يكونا باتجاهين مختلفين) كما في الشكل 8.8.





الشكل 8.8 الربط على التوالي لملفات مقترنة تبادلياً

حينما يكون التدفقان في الملفين باتجاه واحد يدعى الربط تعاضديا ويدخل التيار النهايتين المنقطتين بوقت واحد. بتطبيق قانون الفولتية لكرشوف على دائرة الشكل 8.8 أ

$$e = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} \qquad ...(8\cdot27)$$

$$= L_{eq} \frac{di}{dt} \qquad ...(8\cdot28)$$

لذا فالمحاثة المكافئة في حالة الربط التعاضدي series aiding تساوي مجموع المحاثتين الذاتيتين للملفين مضافا إليها ضعف المحاثة التبادلية بينهما. اي :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M \qquad ...(8\cdot29)$$

اما اذا ربط الملفان ربطا تعاكسيا فان قطبية الـ ق. د. ك المحتثة تبادليا بينهما تعاكس الـ ق. د. ك المرتبطة بالمحاثة التبادلية اي ان :

$$e = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt} \quad ...(8\cdot30)$$

$$L_{eq}\frac{di}{dt} \quad ...(8\cdot31)$$

ويعني ذلك

ان المحاثة المكافئة في حالة الربط التعاكسي series Opposing تساوي مجموع المحاثتين الذاتيتين مطروحا منها ضعف المحاثة التبادلية بينها

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \quad ...(8\cdot32)$$

ان احد التطبيقات المهمة على المحاثة التبادلية هو المحول الذي يتكون من ملفين بينها محاثة تبادلية ويزود احدهما بتيار من مصدر لتجهيز القدرة وبفعل الاقتران بين الملفين تحتث ق . د . ك في الملف الثاني يمكن ان تجهز قدرة الى حمل وتكون ال ق . د . ك المحتثة في الملف الثاني بفولتية مختلفة عن الفولتية الاصلية المسلطة ومعتمدة على عدد لفات كل من الملفين ومعامل الاقتران بينها.

مثال 8.3

ملفان لولبيان على لب حديدي واحد قطره 1سم يحوي احدهما 500 لفة. والاخر700 لفة. طول الاول 10 سم وطول الثاني 5سم. كانت الانفاذية النسبية لحديد اللب تساوي 1000 . احسب المحاثة الذاتية لكل من الملفين والمحاثة التبادلية بينها والمحاثة المكافئة لها عند ربطها ربطا تعاضديا او تعاكسيا على فرض ان 80% من التدفق يشترك بينها

الحل :

المحاثة الذاتية لملف لولبي $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$

ان انفاذية اللب الحديدي تساوي

$$\mu = \mu_o \mu_r = 4\pi \times 10^{-7} \times 1000 = 4\pi \times 10^{-4}\ H/m$$

لذا فالمحاثة الذاتية للملف الاول

$$L_1 = \frac{4\pi \times 10^{-4} (500)^2 (0{\cdot}005)^2 \pi}{0{\cdot}1}$$

$$= 0{\cdot}247 \text{ H}$$

والمحاثة الذاتية للملف الثاني

$$L_2 = \frac{4\pi \times 10^{-4} (700)^2 (0{\cdot}005)^2 \pi}{0{\cdot}05}$$

$$= 0{\cdot}968\text{H}$$

وحيث ان 80% من التدفق يشترك بينهما لذا فان معامل الاقتران يساوي 0.8 فتكون المحاثة التبادلية .

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{\cdot}8\sqrt{0{\cdot}247 \times 0{\cdot}968}$$

$$= 0{\cdot}391\text{H}$$

عند ربط الملفين ربطا متواليا تعاضديا تكون المحاثة المكافئة

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M$$

$$= 0{\cdot}247 + 0{\cdot}968 + 2 \times 0{\cdot}391$$

$$= 1{\cdot}997 \text{ H}$$

وعند ربطهما ربطا متواليا تعاكسيا تكون المحاثة المكافئة

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M$$

$$= 0.247 + 0.968 - 2 \times 0.391$$

$$= 0.433 \text{ H}$$

8.4 الطاقة في المحث

عند مرور تيار في ملف يتولد عبر طرفيه ق. د. ك تعاكس ال ق. د. ك المسلطة من قبل المصدر شأنها شأن هبوط الفولتية عبر مقاومة ما. تدعى القوة الدافعة الكهربائية التي تعاكس مرور التيار بال ق. د. ك العكسية لذا فان مقدار القدرة التي يستلمها الملف [illegible]

$$P = e_i = L \frac{di}{dt} \cdot i \qquad \dots (8.33)$$

وحيث ان الطاقة هي تكامل القدرة مع الزمن

$$W = \int_o^I P.\, dt \qquad \dots (8.34)$$

$$= \int_o^I L \frac{di}{dt} \,.\, idt$$

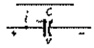
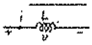
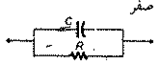
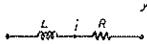
$$= \int_o^I Lidi$$

$$= \frac{1}{2} L\, I^2 \qquad \dots (8.35)$$

ويتضح من هذه المعادلة ان الطاقة المخزونة في المحث تساوي نصف مربع التيار في المحاثة والتي تشبه العلاقة التي مرت في خزن الطاقة في المتسعات (6.44). إلا أن من الضروري ملاحظة أن هذه الطاقة هنا تبقى طالما إستمر التيار المستمر بالسريان في الملف فإذا توقف سريان التيار زالت تلك الطاقة المخزونة في الملف (إنتقلت الى جزء آخر من الدائرة) ويتضح من مقارنتها التناظر التام بين المحث والمتسعة في خزن الطاقة وكذلك في

العلاقات بين التيار والفولتية على اساس ان المشتقة في احدهما تقابل التكامل في الاخر وبالعكس. ويلاحظ من الجدول 8.1. وجود تناظر تام بين المتسعة والمحث في مختلف العلاقات التي تمثل خواص العنصرين والعلاقات التي تربطها بصورة منفردة او عند ربطها مع عناصر مشابهة كما يلاحظ التناظر بين المجالين الكهربائي والمغناطيسي في العلاقات العامة ايضا.

جدول يبين مقارنة بين المتسعة والمحث

العلاقة	المتسعة	المحث
1 - الرمز		
2 - الوحدة	فراد (F) = $\frac{\text{كولوم (C)}}{\text{فولت (V)}}$	هنري (H) $\frac{\text{ويبر } (W_b)}{\text{امبير (A)}}$
3 - التعريف	$C = \frac{q}{V}$	$L = \frac{N\varphi}{I}$
4 - العلاقة بين الفولتية والتيار بشكل مشتقة	$i = C\frac{dv}{dt}$	$v = L\frac{di}{dt}$
5 - العلاقة بشكل تكامل	$v = \frac{1}{C}\int idt$	$i = \frac{1}{L}\int vdt$
6 - الخواص	لاتقبل تغير فجائي بالفولتية	لاتقبل تغير فجائي بالتيار
7 - الطاقة المخزونة	$W_C = \frac{1}{2}CV^2$	$W_L = \frac{1}{2}LI^2$
8 - القدرة المستهلكة	صفر	صفر
9 - المكافيء لعنصر عملي يحوي فقدا في الطاقة		
10 - العناصر على التوالي	$\frac{1}{C_S} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$	$L_S = L_1 + L_2 + L_3$
11 - العناصر على التوازي	$C_P = C_1 + C_2 + C_3$	$\frac{1}{L_P} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$
12 - ابسط عنصر بدلالة الابعاد الفيزياوية	متسعة ذات صفيحتين متوازيتين سعتها: $C = \frac{\varepsilon l}{A}$	ملف لولبي محاثة: $L = \frac{\mu N^2 A}{l}$
13 - شدة المجال	الكهربائي $\frac{D}{\varepsilon} = E = \frac{V}{d}$	المغناطيسي $\frac{B}{\mu} = H = \frac{NI}{l}$
14 - الفيض	الكهربائي $\Phi = DA$	المغناطيسي $\varphi = BA$
15 - ثابت الزمن في دائرة تحوي مقاومة	ومتسعة: $T = RC$	ومحث: $T = \frac{L}{R}$
16 - عند ربط دائرة على التوالي تحوي مقاومة	ومتسعة (أ) تبدأ الفولتية بالارتفاع من الصفر تدريجيا (ب) يكون هناك تيار ابتدائي يعتمد على المقاومة (ج) تبدو المتسعة ابتداء كدائرة قصر (د) عند انتهاء الشحن تظهر المتسعة دائر مفتوحة (هـ) عند انتهاء التفريغ تكون العملية معكوسة	ومحث (أ) يبدأ التيار بالارتفاع من الصفر ويحدد بالمقاومة (ب) يكون التيار الابتدائي صفر (ج) يبدو المحث ابتداء دائرة مفتوحة (د) عند انتهاء نمو التيار يظهر المحث دائرة قصر (هـ) عند تناقص العملية معكوسة

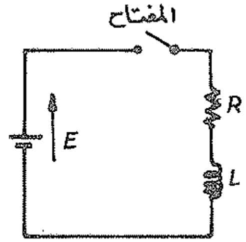
8.5 الحالة العابرة في المحثات

8.5.1 نمو التيار في المحث

نلاحظ في الجدول 8.1 ان المحثات تختص بأنها لاتتقبل تغيراً فجائياً بالتيار. وسبب ذلك يعود الى أن التغير الفجائي بالتيار يعني أن مشتقة التيار بالنسبة للزمن تكون لانهائية. ومن ثم تكون الفولتية عبر طرفي الملف لانهائية ، نظراً لان القوة الدافعة الكهربائية عبر الملف تساوي حاصل ضرب المحاثة في مشتقة التيار بالنسبة للزمن. ويلاحظ أن دائرة تحوي محثاً لايجوز فتح اسلاكها عند مرور التيار فيها ، حيث ان فتح هذه الاسلاك يسبب شرارة عبر طرفي الموقع تفتح عنده الدائرة.

مما تقدم يتبين أن التغير في تيار الملف يجب ان يكون تغيراً مستمراً لامتقطعاً. فاذا اريد امرار تيار في ملف لم يسبق أن كان مربوطاً بدائرة فيجب أن يبدأ التيار من الصفر ثم يزداد زيادة تدريجية حتى يأخذ المستوي النهائي الذي يتحدد ببقية اجزاء الدائرة. فيكون بذلك المحث قد خزن طاقة في مجاله المغناطيسي تتحدد بالعلاقة (8.35). واذا اريد استرجاع الطاقة المخزونة في الملف فيتم ذلك بتخفيض التيار تخفيضاً تدريجياً الى أن تصل قيمته الصفر دون ان يحدث اي تغيير فجائي في التيار. ان قيم التيار قبل البدء بخزن الطاقة في الملف او التيار الذي يمر في الملف قبل تفريغ الطاقة المخزونة في مجاله المغناطيسي تدعى بالظروف الابتدائية وتتحكم في مقدار تصرف للدائرة التي يقع فيها الملف.

لنأخذ الدائرة المبنية في الشكل 8.9 والتي تحوي على مصدر فولتية على التوالي مع محث ومقاومة ومفتاح من الواضح ان التيار في الدائرة قبل اغلاق المفتاح يساوي صفراً. اي ان



الشكل 8.9 دائرة مقاومة ومحث مربوطة على التوالي

القيمة الابتدائية لتيار الملف تساوي صفراً. اما بعد اغلاق الزر فأن معادلة الفولتية حول الدائرة وفق قانون الفولتية لكرشوف يكون :
يكون

$$e_L + e_R = E \quad ...(8\cdot36)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad ...(8\cdot37)$$

وهي عبارة عن معادلة تفاضلية من الدرجة الاولى تتحكم في مرور التيار في هذه الدائرة .
باعادة كتابة المعادلة (8. 37)

$$L \frac{di}{E - Ri} = dt \quad ...(8\cdot38)$$

بأخذ تكامل الطرفين

$$L \int \left(\frac{di}{E - Ri} \right) = \int dt \quad ...(8\cdot39)$$

وينتج من ذلك

$$-\frac{L}{R} \ln (E - Ri) = t + k \quad ...(8\cdot40)$$

حينما تكون $t = 0$ فأن قيمة التيار $i = o$ وبتعويض ذلك في المعادلة

$$-\frac{L}{R} \ln (E) = k \quad ...(8\cdot41)$$

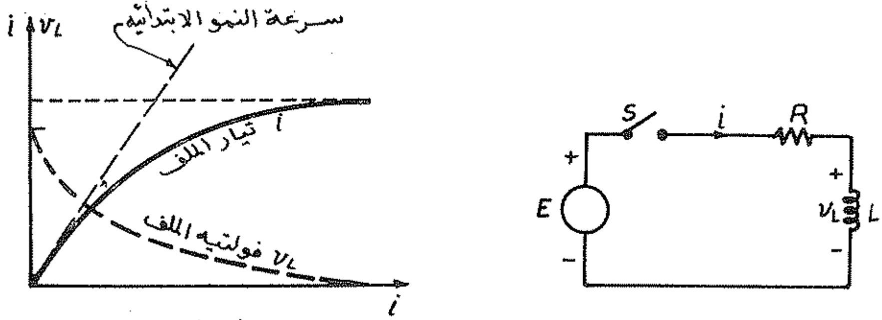
وبتعويض k من المعادلة (8. 41) في (8.40) وتبسيط الناتج نحصل على :

$$-\frac{L}{R} \ln (E - Ri) + \frac{L}{R} \ln E = t$$

$$-\frac{L}{R}\ln\left(\frac{E-Ri}{E}\right)=t$$

$$\frac{E-Ri}{E}=e^{-\frac{R}{L}t} \qquad ...(8{\cdot}42)$$

$$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right) \qquad ...(8{\cdot}43)$$

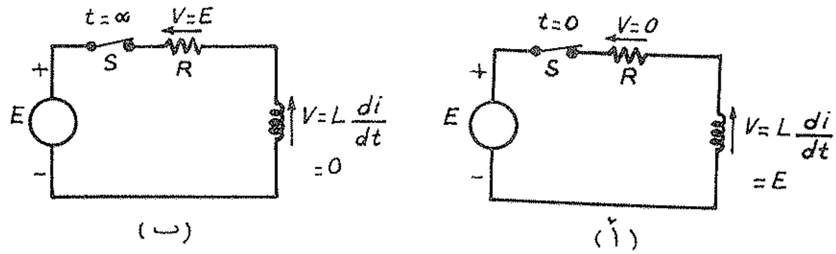


(ب)

(أ)

الشكل 8.10 أ– الدائرة ب– منحني نمو التيار والفولتية للملف

والتي تمثل تغير التيار في الملف بعد قفل المفتاح . ويتضح أن التيار يزداد من الصفر الى ان يصل قيمة مقدارها $\frac{E}{R}$ حينما تصبح t كبيرة جداً. ويبين الشكل 8.10 .ب تغير التيار والفولتية مع الزمن . وكما موضح ادناه بشكل قيم عندما $t = 0$ و $t=\infty$



الشكل 8.11

(أ) الدائرة لحظة قفل المفتاح (ب) الدائرة بعد مرور فترة طويلة جداً من قفل المفتاح

ويمكن كتابة المعادلة 8.43 بشكل : $i = I_\infty (1 - e^{-t/T})$

حيث I_∞ تساوي التيار بعد مضي فترة طويلة جداً وتساوي $\frac{E}{R}$ وأ تساوي $\frac{L}{R}$ من الشكل 8.11 يتبين ان شكل التيار ينطبق على ماهو متوقع من أن التيار يبتدئ من الصفر دون اي تغير فجائي . حيث يظهر الملف مبدئياً وكأنه دائرة مفتوحة كما في الشكل أ وتحدد الفولتية والمحاثة سرعة نمو التيار حيث $v = L \frac{di}{dt}$ أو $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$ كما انه عند قيمته النهائية تتحدد قيمته بفولتية المصدر والمقاومة فقط دون ان يكون للمحث اي تأثير. وكأن المحث دائرة قصر

أي أن التيار النهائي يساوي $\frac{E}{R}$ كما في الشكل 8.11 ب وتكون الفولتية على المحث قليلة جدا او ربما صفرا . ولايمنع ذلك من ان يكون في المحث طاقة مخزونة . فالطاقة كما سبق تعتمد على التيار الذي يمر في المحث . ولايمنع ذلك من ان تكون الفولتية عبر طرفيه صفرا أي أن الطاقة مخزونة بسبب إستمرار مرور التيار لكن الفولتية عبر طرفي الملف تساوي صفراً .

لذلك فإن ثابت الزمن هو عبارة عن إنحدار المستقيم الماس في نقطة الأصل .

من تمحيص المعادلة 8.40 يظهر بأن L/R له وحدة الزمن .

لنأخذ معدل تغير التيار في المحث عند بدء نمو التيار فيه . اشتقاق المعادلة (8.43)

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} e^{-\frac{R}{L}t} \quad ...(8.44)$$

والتي عند تعويض $t = 0$ تصبح

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \quad ...(8.45)$$

عند رسم مستقيم من نقطة الاصل كمماس للمنحني ، فانه يقطع المستقيم الذي يمثل الوضع النهائي للتيار في نقطة لنفرض انها $t = T$ حيث من الشكل 8.10 ومن العلاقة م

$$i = \frac{E}{R} = \frac{E}{L} t \Big/_{t=T} = \frac{E}{L} T \quad (8.45)$$

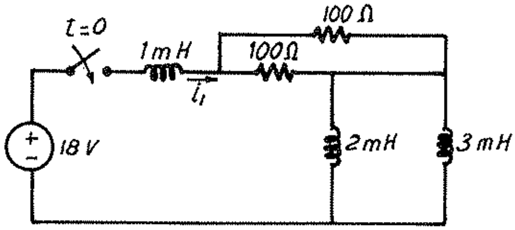
$$\therefore T = \frac{L}{R} \quad ...(8.46)$$

يدعى الثابت $T = \frac{L}{R}$ بثابت الزمن ويحدد سرعة نمو التيار في المحث . فكلما كان ثابت الزمن كبيرا كان نمو التيار بطيئا . اما اذا كان ثابت الزمن قليلا فان التيار يصل قيمته النهائية بسرعة اكبر. ويلاحظان التيار بعد مرور زمن مقداره ثابت زمن واحد من الثواني بعد غلق المفتاح يصل الى قيمة تعادل 63.2 ٪ من قيمته النهائية أي $\frac{i}{I_\infty}$ أي $(1 - e^{-1})$ ، حيث e هي اساس اللوغاريتمات الطبيعية . ويمكن مقارنة ذلك بسهولة مع شحن المتسعات الذي مر بنا في الفقرة 6.7.1 والتي كان ثابت الزمن فيها يساوي حاصل ضرب السعة × المقاومة($T = RC$.)

ويمكن تفسير مفهوم ثابت الزمن بالرجوع الى الشكل 8.10 ب

مثال (8.4)

في الدائرة المبينة في الشكل 8.12 قفل المفتاح في اللحظة $t = 0$ ولم يكن هناك اي تيار سابق في الدائرة . احسب التيارات التي تمر في المحثات الثلاثة في الدائرة كدوال للزمن



الشكل 8.12 دائرة المثال (8.4)

الحل :

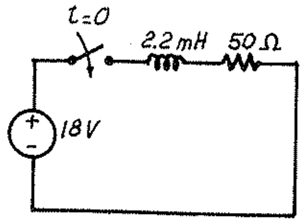
نحاول اولا ايجاد المقاومة المكافئة للمقاومتين المتوازيتين حيث تكون محصلتها .

$$\frac{100 \times 100}{100 + 100} = 50\ \Omega$$

اما المحثين 2mH و 3mH فحصلتها هي :

$$\frac{3 \times 2}{3 + 2} = 1{\cdot}2\ \text{mH}$$

وهذه المحصلة ترتبط مع 1 ملي هنري على التوالي (لاحظ ان وجود مقاومة بين المحثين لايغير كونها مرتبطين على التوالي حيث ان ظاهرة الربط على التوالي تشترط ان يمر في العنصرين التيار ولايشترط ان يكونا متجاورين) فتكون محصلة المحثات الثلاثة 2.2mH . لذلك فان الدائرة المكافئة تكون كما مبين في الشكل 8.13 والتي يكون التيار فيها بعد تطبيق العلاقة (8.43)



الشكل 8.13 دائرة المثال 8.4 بعد الدمج

$$i_1 = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$= \frac{18}{50}(1 - e^{-\frac{50}{2.2\times10^{-3}}t})$$

$$= 0{\cdot}36\,(1 - e^{-2.27\times10^4 t})\ A$$

وهذا التيار هو التيار الذي يمر في المحث 1mH والذي يتوزع بين المحثين 2mH و 3mH بنسبة عكسية مع قيمتيها [1]

$$i_2 = \frac{i_1 \times 3}{3+2} = \frac{0{\cdot}36 \times 3}{5}(1 - e^{-2.27\times10^4 t})$$

$$= 0{\cdot}216\,(1 - e^{2.27\times10^4 t})\ A$$

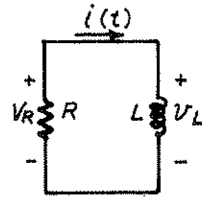
$$i_3 = \frac{i_1 \times 2}{2+3}(1 - e^{-2.27\times10^4 t})$$

$$= 0{\cdot}144\,(1 - e^{-2.27\times10^4 t})\ A$$

8.5.2 تناقص التيار في المحث

اذا كان هناك تيار يمر في محث لمدة طويلة فيعني ذلك ان هناك طاقة مخزونة في المحث عند قطع مصدر التيار عن الدائرة وتركها كدائرة كاملة دون وجود مصدر تبدأ الطاقة المخزونة في المجال المغناطيسي للمحث بالعودة الى الدائرة الكهربائية ويتم فقدانها في المقاومات الموجودة فيها. ان ابسط دائرة كهربائية بعد قفل المفاتيح المناسبة تكون كما مبين في الشكل 8.14 وعلى فرض ان التيار الذي كان يمر في المحث قبل ان تصبح بوضعها الحالي هو I_0 . ويمكن كتابة معادلة الدائرة.

(١) حيث انه ربط ملفين على التوازي تسلط عليها فولتيتان متساويتان لذا $L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt}$ ومن ثم $\frac{i_1}{i_2} = \frac{L_2}{L_1}$ وبأخذ التكامل يكون $\frac{di_1}{di_2} = \frac{L_2}{L_1}$ وهي علاقة مشابهة لتوزيع التيارات بين مقاومتين متوازيتين.



الشكل 8.14 دائرة R – L بسيطة

$$v_R + v_L = 0 \qquad \text{... (8·47)}$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{... (8·48)}$$

وهي المعادلة التي تتحكم في سريان التيار في هذه الدائرة. وباعادة كتابة المعادلة (8.49) تصبح .

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

ويأخذ تكامل الطرفين على اساس ان الزمن يتغير من الصفر الى t حينما يتغير التيار من I_0 الى :

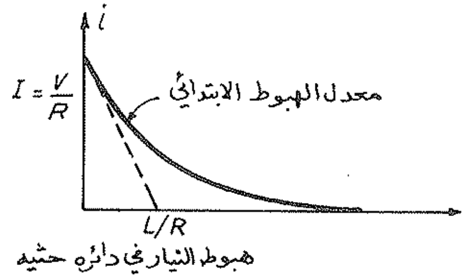
$$\int_{I_o}^{i}\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_{o}^{t}dt \qquad \text{... (8·50)}$$

$$\ln i = \ln I_o = -\frac{R}{L}t$$

لذا

$$i = I_o e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \text{... (8·51)}$$

وهي المعادلة التي تتحكم في تغير التيار في المحث . ويبين الشكل 8.15 تغير التيار مع الزمن وفق هذه المعادلة .



الشكل 8.15 هبوط التيار في دائرة حثية

وبمقارنة الشكل (8.15) و (8.10) يتضح ان ثابت الزمن في الحالتين هو $\frac{L}{R}$ ويتمثل بنقطة تقاطع مماس المنحني حينما $t = 0$ مع خط القيمة النهائية للتيار في كلا الحالتين.

ويلاحظ من مقارنة معادلة تناقص التيار 8.51 مع معادلة تزايد التيار في المحث التي مرت في المعادلة 8.43 يلاحظ تشابه الجزء الأسي مع فرق في القيمة النهائية فقط أو جزء التيار المستمر كما يلاحظ إختلاف في الإشارة للجزء الأسي حيث تكون موجبة في حالة تناقص التيار وسالبة في حالة تزايد التيار.

ومن محاولة ربط أسلوب الحل بهذه الطريقة وبالطرق المعتادة التي سبق أن أوضحناها بإستخدام المفاتيح يمكن الإستنتاج بأن الدائرة المتكونة من محث ومقاومة (وكذلك المتكونة من متسعة ومقاومة) لها تصرفان أحدهما هو التصرف الإعتيادي لدوائر التيار المستمر نتيجة تسليط فولتية عليها والذي سبق دراسته في دوائر التيار المستمر. ويدعى بالتصرف القسري Forced response . أما الدائرة بدون مصدر (مع وجود تيار إبتدائي للمحث أو شحنة إبتدائية للمتسعة) فتتصرف بشكل حر يؤدي الى تسرب الطاقة المخزونة في المحث (أو المتسعة) من خلال المقاومة أو المقاومات في الدائرة ويدعى هذا التصرف بالتصرف الطبيعي natural response ويمكن إيضاح ذلك بالرجوع الى المعادلات المستخدمة سابقاً وتحويرها بدلالة وحدة الخطوة حيث يتضح أنه لدائرة تحتوي على مقاومة ومحث كان ينمو التيار بشكل :

$$i = \frac{E}{R}[1 - e^{t/T}]\, i_f + i_n$$

وتناقص التيار كان بشكل

$$i = \frac{E}{R} e^{-t/T} = 0 + i_n$$

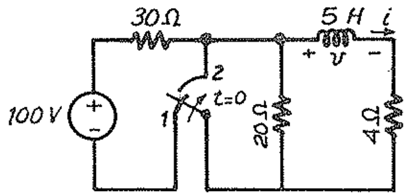
ويلاحظ أن i_n كان بعكس إتجاه i_f عند نمو التيار (لكونه يخزن طاقة في المحث) ثم أصبح هو التيار السائد عند تناقص التيار في الحالة الثانية.

ومن ذلك يتضح أن التصرف الطبيعي للدائرة مشترك بين حالة تزايد وحالة تناقص التيار (إذا تساوت ثوابت الدائرة من مقاومات ومحادثات أي ثبوت ثابت الزمن).

مثال (8.5)

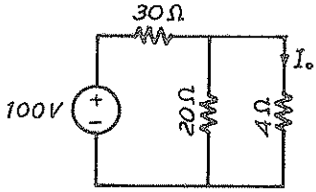
كانت الدائرة مربوطة كما مبين بالوضع 1 في الشكل(8.16) لمدة طويلة. وفي اللحظة t=0 تم تحويل المفتاح الى الوضع 2. احسب تيار المحث بدلالة الزمن.

الحل:



الشكل (8.16) دائرة المثال 8.16 دائرة المثال (8.5)

حينما كان المفتاح في الوضع 1 كانت الدائرة في وضع الاستقرار والتي تعتبر المحث فيها دائرة قصر. لذا تتكون الدائرة من المقاومتين 4Ω 20Ω مربوطتين على التوازي وبدورها مرتبطتين مع المقاوم 30Ω ومصدر الفولتية 100V على التوالي. كما مبين في الشكل 8.17. محصلة المقاومتين 4Ω و 20Ω هي: $\frac{4 \times 20}{4 + 20} = 3{\cdot}333\Omega$



الشكل 8.17 دائرة المثال 8.5 في حالة الاستقرار

فتكون المقاومة الكلية في الدائرة

$$30 + 3{\cdot}333 = 33{\cdot}333\Omega$$

لذا فالتيار في مصدر الفولتية

$$\frac{100}{33{\cdot}333} = 3\ \text{A}$$

ويكون التيار المار في المحث I_o والذي هو التيار المار في المقاوم 4Ω نفسه

$$I_o = \frac{3 \times 20}{24} = 2{\cdot}5\text{A}$$

بعد تحويل المفتاح الى الوضع 2 يشكل المفتاح دائرة قصيرة عبر المقاوم 20Ω لذا لايبقى في دائرة المحث سوى المقاوم 4Ω فيكون التيار المار فيه بعد تحويل المفتاح الى الوضع وفق المعادلة (8.51)

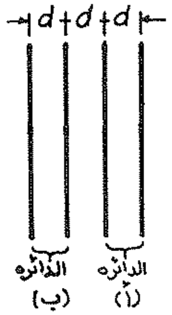
$$i = I_o\, e^{-\frac{R}{L}t} = 2{\cdot}5\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

مسائل الفصل الثامن

1 احسب المحاثة الذاتية لطول l من سلكين طويلين متوازيين نصف قطر كل منهما a، والمسافة بين مركزيهما d. اهمل تأثير ربط النهايات والفيض المغناطيسي ضمن السلكين .

الجواب
$$L = \frac{\mu_o l}{\pi} \ln \frac{d - a}{a}$$

2– دائرتان تلفونيتان متجاورتان في مستو واحد كما مبين في الشكل 8.18 احسب المحاثة التبادلية بينهما لطول مقداره 10كم لكل منهما.



الشكل 8.18 دائرة المسألة 2

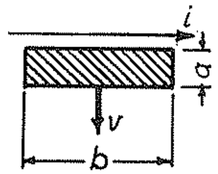
(الجواب 2.4×10^{-4}H)

3– اوجد قيمة المحاثة التقريبية لملف يتألف من 300 لفة ملفوف بطبقة واحدة على لب من مادة عازلة داخلها هواء اذا كان طول اللب 3cm وقطره 0.24cm
(الجواب : 47 H)

4 – ملفان متشابهان كل منها يحمل 1000 لفة موضوعان في مستويين متوازيين حيث كان 60 بالمائة من الفيض الناتج من احدهما يقطع الاخر. اذا مر 5 امبير في الملف الاول منتجا 0.05 ملي ويبر فيه. وتغير التيار في هذا الملف من $+6A$ الى $-6A$ خلال 10 ملي ثانية ، كم مقدار ال ق.د. ك المتولدة في الملف الثاني . احسب المحاثة الذاتية لكل من الملفين والمحاثة التبادلية فيهما.

(الجواب $L_1 = L_2 = M = 10^{-5}H, 7.2mV$)

5 – المستطيل المبين في الشكل 8.19 يتحرك بسرعة V بعيدا عن سلك طويل يحمل تيار مقداره I مع بقائهما في مستو واحد. احسب ال ق. د. ك المحتثة في المستطيل والمحاثة التبادلية بين الدائرتين كدالة للزمن على فرض ان السلك القريب من المستطيل كان على مسافة l من السلك الطويل في اللحظة $t=0$



الشكل 8.19 دائرة المسألة الخامسة

$$\left(\text{الجواب} \quad \frac{\mu Irb}{2\pi l}, \frac{\mu ab}{2\pi l} \right)$$

6 – ملفان مقترنان تبادليا ومربوطان على التوالي الى مصدر تيار مستمر مقداره 300V يحوي الملف الاول مقاومة مقدارها 6 اوم ومحاثة مقدارها 4 هنري ويحوي الملف الثاني مقاومة مقدارها 8 اوم ومحاثة مقدارها 6 هنري. في لحظة معينة بعد تغذية الدائرة كان التيار 10 امبير ويزداد بسرعة 10 امبير بالثانية. احسب (أ) المحاثة التبادلية بين الملفين (ب) معامل الاقتران بينهما (جـ) اذا عكس ربط احد الملفين كم تصبح المحاثة التبادلية بينهما؟

(الجواب 3H, 0.,162, 0.2H)

7– ملف لولبي ذو لب هوائي طوله متر واحد وقطره 10سم وعدد لفاته 1000 لفة. وضع في داخله متمركزا معه ملف اخر عدد لفاته 500 لفة وقطره 5سم على المحور نفسه. احسب محاثة كل من الملفين والمحاثة التبادلية بينهما. اذا عكس التيار في الملف الاول حينما كان مقداره 5 امبير بسرعة منتظمة في مدة 10 ملي ثانية. ما مقدار ال ق.د.ك المحتثة في الملف الثاني ؟ وإذا ربط الملفان على التوالي كم تكون محاثتها الكلية عند ربطهما تعاضديا

(الجواب $L_1 = 9.86$ mH, $L_2 = 0.62$ mH, $M = L_{eq} = 10.07$ mH, 0.617 V)

8– اوجد الطاقة المخزونة في محث 200mH والفولتية المسلطة عليه 10V

(الجواب: لايمكن انجاز الحل لان المعلومات المعطاة غير كافية)

9– ملف محاثته 1.2H ومقاومته 40 يمر فيه تيار 2A. احسب الزمن اللازم لجعل التيار ينقص الى الصفر وذلك بعد ربط نهايتي الملف بسلك يعمل دائرة قصر؟ كذلك احسب كمية الطاقة المبددة

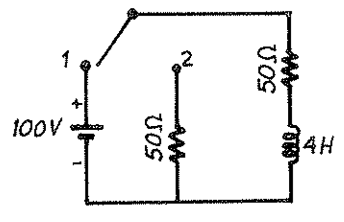
(الجواب: 2.4J, 0.15 s)

10– في المثال 8.5 احسب الطاقة المخزونة في الملف (أ) بعد مضي زمن طويل على وضع المفتاح في النقط (ب) بعد مضي ثابت زمن واحد على غلق المفتاح في النقطة 2 (ج) بعد مضي زمن طويل على وضع المفتاح في النقطة 2

(الجواب 15.62 J, 1.1J, OJ)

11– الدائرة المبينة في الشكل 8.20 اذا اغلق المفتاح عند الوضع 1 لمدة طويلة كافية للوصول الى حالة الاستقرار. اوجد الطاقة المبددة في المقاومة 50Ω بعد تحويل مكان المفتاح من الوضع 1 الى الوضع 2

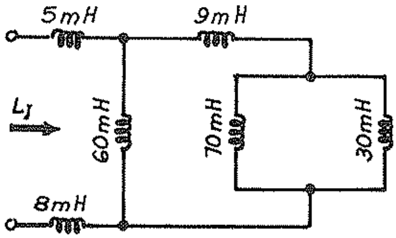
(الجواب : 8J)



الشكل 8.20

12– في دائرة الشكل 8.21) اوجد المجموع الكلي للمحثات L_T

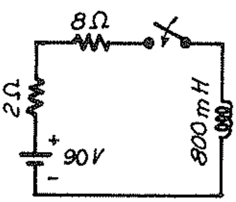
(الجواب : 33mH)



الشكل 8.21

13– في الدائرة المبينة في الشكل 8.22 . احسب (أ) مقدار الفولتية عبر المقاوم ـ 8 اوم في اللحظة t=2t حيث T هو ثابت الزمن (ب) القيمة النهائية للفولتية عبر المقوم والتيار المار فيه (جـ) القيمة النهائية للفولتية عبر الملف (د) في اي لحظة كان التيار خلال الملف يعادل 4 امبير

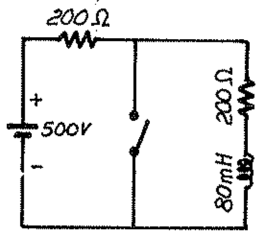
(الجواب 64.8ms ، وصفر و 72V و 9A و 62.25V)



الشكل 8.22 دائرة المسألة 13

14– في الدائرة المبينة في الشكل 8.23 اقفل المفتاح في اللحظة $t = 0$ (أ) اوجد مقدار الفولتية عبر المقاوم الايمن مع الزمن (ب) كم يمضي من الزمن بعد غلق المفتاح لكي يصبح التيار 0.3 امبير. (جـ) احسب التيار المار في المفتاح كدالة مع الزمن.

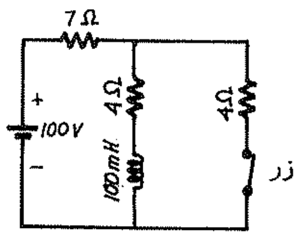
الجواب $(250\ e^{-2500t},\ 0{\cdot}57\text{ms},\ 2{\cdot}5 + 1{\cdot}2s\ e^{-2500t})$



الشكل 8.23 دائرة المسألة 9

15– في دائرة الشكل 8.24 (ا) احسب تيار الملف كدالة مع الزمن . اذا فتح المفتاح في اللحظة $t = 0$ ماقيمة التيار الابتدائي والنهائي للملف؟

الجواب $(5{\cdot}56\ [\ 1 - e^{-110t}\ ]\ A,\ i_o = 0,\ i_\infty = 9{\cdot}09\ A)$



الشكل 8.24 دائرة المسألة 15

الجواب

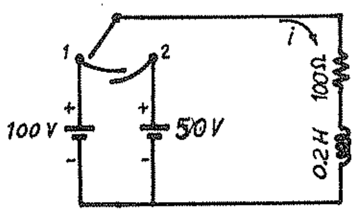
16– دائرة RL على التوالي تتكون من $R = 50\Omega$ $L = 10H$. سلط عليها مصدر تيار مستمر $V = 100V$ عند الزمن $T = 0$ أوجد :

(آ) معادلات V_L, V, i (ب) قيمة التيار عند الزمن $t=0.55$
(ج) الزمن الذي عنده يكون $V=V_L$

الجواب : (أ) كما في الشرح $V_L=100e^{-5t}$ $V=100(1-e^{-5t})V,$
$t=0.1386s$ (جـ) $1.86A$ (ب) $i=2(1-e^{-5t})A$

17- في الدائرة المبينة في الشكل (8.25) اذا كان المفتاح في الوضع 1 عندما $t=0$ ثم تحرك الى الوضع 2 عندما $t=500S$. اوجد معادلتي التيار في الحالتين وارسم شكل تيار الحالة العابرة

(الجواب : $i=(1-e^{-5000t})A$, $i=-0.279e^{-5000t-t'} + 0.5$



الشكل 8.25

18- اعد المسألة السابقة مع عكس قطبية المصدر 50V
(الجواب $0.5 - i=0.721e^{-5000(t-t')}$)

الفصل التاسع

الحالة العابرة العامة للدوائر

المتسعات والمحثات

فقال لها وللارض ائتيا طوعاً او كرهاً
قالتا أتينا طائعين
فصلت 11

9.1 الاستجابة الطبيعية:

سبق ان اوضحنا عند معالجة موضوع تفريغ شحنة المتسعة في الدوائر المحتوية على مقاومة ومتسعة ان المعادلة الأساسية للدائرة البسيطة هي:

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0 \qquad \dots(9{\cdot}1)$$

وهذه هي معادلة تفاضلية بسيطة من الدرجة الاولى يمكن حلها بطريقة التكامل كما مر سابقا والوصول الى الحل النهائي بصيغة:

$$q=q_o\,e^{-t/RC} \qquad \dots(9{\cdot}2)$$

حيث q_0 هي الشحنة الابتدائية بالكولوم.

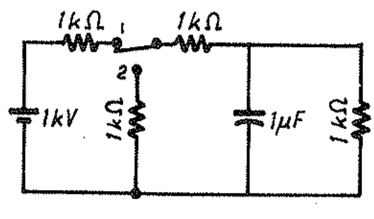
يدعى تصرف الدائرة الخالية من المصدر نتيجة تفريغ شحنة مخزونة سابقا في المتسعة بالاستجابة الطبيعية وذلك لان ما تحتويه المعادلة يعتمد بشكل اساسي على المواصفات الطبيعية لتلك الدائرة وبالاخص قيمتي R و C فيها.

سبق وان عرفنا ثابت الزمن بأنه حاصل ضرب R و C وهو الذي يحدد سرعة تفريغ الشحنة.

ويمكن بالاسلوب نفسه تبيان ان الدوائر المعقدة المحتوية على اكثر من متسعة واحدة او مقاومة واحدة لها استجابة طبيعية خاصة بها تعتمد على تلك الثوابت (بالاضافة الى الشحنات الابتدائية المخزونة على المتسعات) وفي تلك الحالة يمكن حساب تلك الثوابت بايجاد مكافيء الدائرة الكهربائية كما تبدو من طرفي المتسعة وهي تساوي المقاومة المكافئة التي مر ذكرها في دوائر التيار المستمر (مكافيء ثفنن)

مثال 9.1

اوجد الاستجابة الطبيعية لدائرة الشكل 9.1 كان المفتاح على الوضع 1 لمدة طويلة ثم حول الى الوضع 2 عند $t=0$.



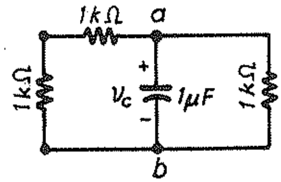
الشكل 9.1

الحل:

عندما كان المفتاح على الوضع 1 لمدة طويلة كانت فولتية المتسعة مساوية للفولتية عبر طرفي المقاومة اليمنى 1kΩ التي تساوي تلك الفولتية الكلية.

$$V_{C(o-)} = \frac{1000}{1000 + 1000 + 1000} \times 1000 = 333{\cdot}3\ V$$

وعند تحويل المفتاح الى الوضع 2 اصبحت الدائرة كما مبين في الشكل ادناه



الشكل 9.2

لتبسيط هذه الدائرة يجب ايجاد مكافيء المقاومات عند الطرفين a و b والتي تعادل ربط 1kΩ على التوازي مع 2kΩ حيث:

$$R_{eq} = \frac{1k\Omega \times 2k\Omega}{(1 + 2)k\mu} = 666{\cdot}6\mu$$

لذلك يمكن كتابة الاستجابة الطبيعية لفولتية المتسعة بشكل:

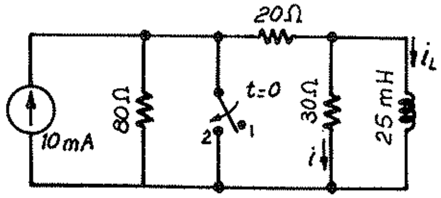
$$V_{C(t)} = V_{o\ (t=0-)}\ e^{-\ t/R_{eq}C}$$

للزمن

$$V_{C\ (t)} = 333{\cdot}3\ e^{-\ t/R_{eq}C}\ V \qquad t > 0$$

مثال : 9.2

في الدائرة المبينة في الشكل 9.3 اوجد الاستجابة الطبيعية للتيار i بعد تحويل المفتاح من الوضع 1 الى الوضع 2 في الزمن t=0



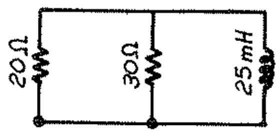
الشكل 3 ـ 9

الحل : حين كان المفتاح في الوضع 1 لفترة طويلة كان التيار يمر في المحث باعتباره دائرة قصر ولايمر في المحث دون المقاومة Ω 30 أي :

$$i_{L(t=o^-)} = i_{x(t=0^-)} = 10 \times 10^{-7} \times \frac{80}{80+20} = 8\text{mA}$$

أما بعد تحويل المفتاح الى الوضع 2 فإن الدائرة تصبح كما في الشكل 9.4 فتكون المقاومة المكافئة :

$$R_{eq} = \frac{30 \times 20}{30+20} = 12$$



الشكل 9.4

ويكون ثابت الزمن T حيث :

$$T = \frac{L}{R} = \frac{25 \times 10^{-7}}{12} = \frac{1}{280}\text{ s}$$

وتصبح معادلة التيار في الملف للزمن t :

$$i_L(t) = i_{L_{(t=o^-)}} e^{-Rt/L}$$

$$= 0{\cdot}008\, e^{-480t} \qquad t > 0$$

وبتجزئة تيار المحث بين المقاومتين $20\Omega, 30\Omega$ فإن :

$$i_x(t) = \frac{30}{30+20} i_L(t) = 4{\cdot}8\, e^{-480t}\ \text{mA} \qquad t > 0$$

هناك إصطلاح رياضي للتعبير عن عدم إمكان تغيير الشحنة (والفولتية) عبر متسعة تغيراً مفاجئاً (خلال فترة زمنية مقدارها صفر) الذي سبقت الإشارة اليه وهذا الإصطلاح هو إعتبار

$$q_o = q_{t=0-} = q_{t=0+}$$

كذلك

$$V_o = V_{t=0-} = V_{t=0+}$$

حيث يقصد بذلك أن الشحنة والفولتية قبل تحويل المفتاح مباشرة تساوي الشحنة والفولتية بعد لحظة تحويل المفتاح. وحيث أن الشحنة والفولتية قبل تحويل المفتاح كانت بحالتها لفترة طويلة (وصلت وضع الإستقرار منذ فترة طويلة) لذلك يمكن حساب تلك القيمة بطريقة سهلة تعتمد في غالب الأحيان على تحليل دوائر التيار المستمر البسيطة.

إن معالجة دوائر المحثات لاتختلف من حيث المبدأ عما سبق سوى أن إستخدام التيارات بدل الشحنات أو الفولتيات وانعكاس ذلك على المعادلات الخاصة بها.

وتجدر الإشارة الى أن التعامل يجب أن يتم من خلال إيجاد الفولتية على المتسعة والتيار في المحث أولاً حتى ولوكان المطلوب فولتية أو تيار عنصر أخر في الدائرة وبعد ذلك يتم إيجاد التيار أو الفولتية في العنصر المطلوب بإستخدام طرق توزيع التيارات والفولتيات المعروفة.

9.2 تسليط فولتية وحدة الخطوة :

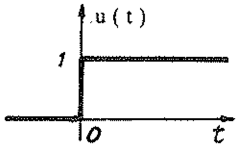
إن إدخال المفاتيح في دوائرالتيار المستمر والتي تحوي مقاومة مع محث أو متسعة يمكن أن يعالج بطريقة رياضية تستند الى تعريف دالة مع الزمن فيها تغيير بالمقدار بين حالتين. وحدة هذه الدالة تدعى بوحدة الخطوة كدالة للزمن وتعرف $U(t)$ بأنها .

$$u(t) = 0 \qquad t < 0$$

$$u(t) = 1 \qquad t > 1$$

(9.3)

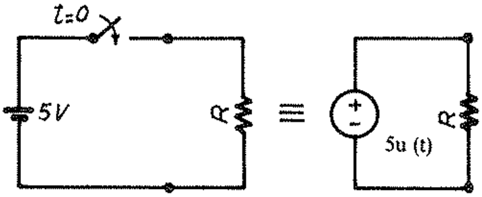
ويوضح الشكل 9.5 هذه الدالة مع الزمن



الشكل 9.5 دالة وحدة الخطوة

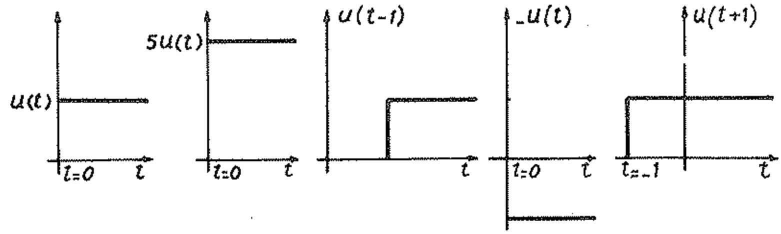
ويمكن تركيب دوال مختلفة بالإستنادالى وحدة الخطوة هذه وذلك من خلال دراسة مواصفاتها التي يمكن تلخيصها فيما يأتي :

1. عند ضرب الدالة في مقدار ثابت لايتغير شكلها بل يزداد إتساعها فبالإمكان إستخدام $V = 5u(t)$ والتي تمثل فولتية دائرة بعد دمج المفتاح مع النضيدة.



الشكل 9.6 دائرة تقابل دالة وحدة الخطوة

2. عند قفل المفتاح في وقت آخر عبر الزمن $t = 0$ مثلاً $t = 1sec$ يمكن ترحيف وحدة الخطوة بمقدار ثانية واحدة فتصبح الدالة $u\ (t-1)$ ويوضح الشكل 9.7 هذه الدالة مع دوال أخرى مثل $u\,(t+1)$ و $-u(t)$ كما مبين أزاء كل شكل :



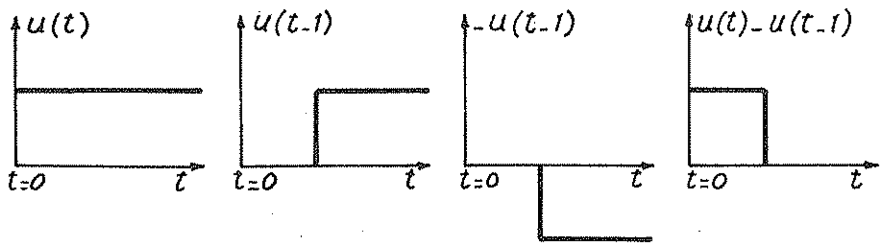
الشكل 9.7 دوال مختلفة لوحدة الخطوة

3. بالإمكان جمع أو طرح ادوال التي تتضمن وحدة الخطوة لكي تعطي مفاهيم جديدة عن أسلوب تغير فولتية أو تيار في دائرة ما ، فمثلاً :

$$u\,(t) - u\,(t-1) \qquad (9.4)$$

تمثل مجموع دالتين كالآتي :

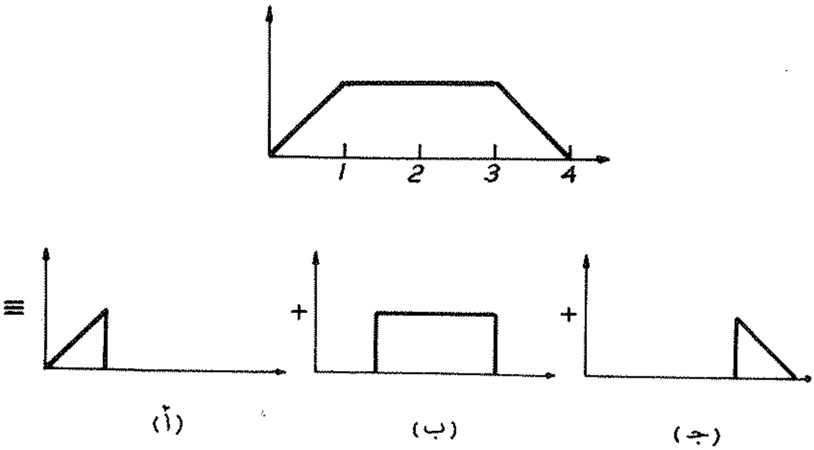
وهكذا تمثل هذه الدالة النهائية نبضة مواصفاتها الآتي :



الشكل 9.8 جمع دالتين لوحدة الخطوة

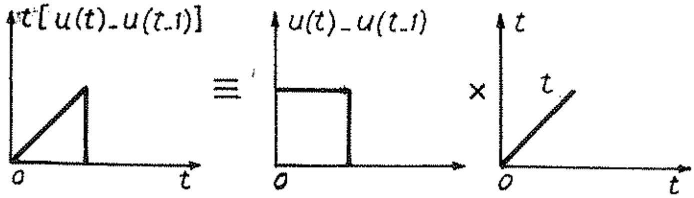
$$\begin{array}{ll} V = 0 & t < 0 \\ V = 0 & t > 1 \\ V = 1 & 1 > t > 0 \end{array} \qquad (9.5)$$

مثال 9.3: لتحويل الفولتية الممثلة بالشكل 9.9 الى معادلات بدلالة وحدة الخطوة يمكن تجزئة المنحني الى ثلاثة أجزاء هي الأجزاء آ و ب و ج



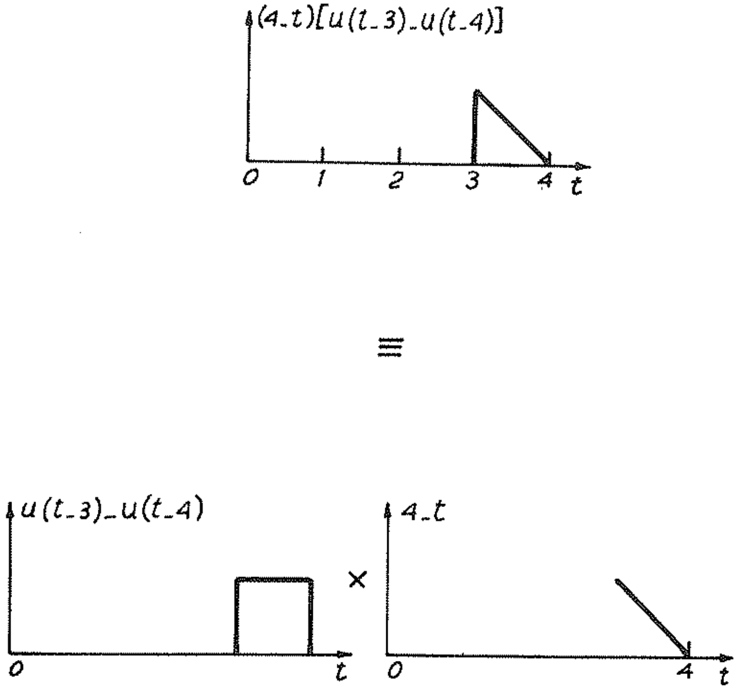
الشكل 9.9 فولتيات لجمع دوال وحدة الخطوة

وأن الجزء (آ) يمثل $u(t) - u(t-1)$ مضروبة في الدالة t كما مبين :



الشكل 9.10 الجزء أ فولتيات لضرب دوال وحدة الخطوة

وكذلك الحال بالنسبة للجزء (ب) يكون التعبير الرياضي له :
$u(t-1) - u(t-3)$ وأما الجزء (ج) فإنه الدالة $u(T-3) - u(T-4)$ مضروبة في $4-t$ كما مبين أدناه :



الشكل 9.11 الجزء حـ حزب دوال وحدة الخطوة

فيكون حاصل جمع الأجزاء الثلاثة الكلي :

$$t[u(t)-u(t-1)]+u(t-1)-u(t-3)+(4-t)[u(t-3)-u(t-4)]$$
$$=tu(t)+(1-t)u(t-1)+(3-t)u(t-3)+(t-4)u(t-4) \quad \ldots (9.6)$$

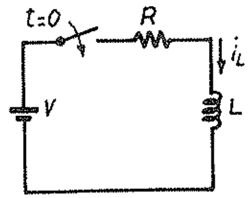
9.3 الإستجابة القسرية لدوائر المحثات والمتسعات :

إن وجود مصدر فولتية أو تيار في دوائر المحثات والمتسعات يسبب نمواً في تيار المحث أو شحن المتسعة وفق صيغة تعتمد على قيمة مصدر الفولتية أو التيار إضافة الى إعتماده على ثوابت الدائرة نفسها ويمكن تمثيل ذلك رياضياً بصيغة معادلة تفاضلية سبق وأن تم التطرف اليها بشكل مبسط عند الحديث عن شحن المتسعة أو نمو التيار في المحث.

فللدائرة المبينة في الشكل 9.10 وبتطبيق قانون الفولتية لكرشوف نحصل على.

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \qquad t>0 \qquad \ldots (9\cdot6)$$

ويمكن رياضياً حل هذه المعادلة بإعتبار أن الحل يتكون من جزئين أحدهما يدعى التكامل الخاص Particular integral والآخر بالدالة المكاملة Complimentary function حيث :



الشكل 9.10

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V+0 \qquad t>0 \qquad \ldots (9\cdot7)$$

فعند حل المعادلة عندما تساوي صفراً أي حالة التكامل الخاص فإن :

$$i_n = I_o e^{-Rt/L} \qquad t > 0 \qquad \dots (9\cdot8)$$

وهو حالة التكامل الخاص ويقابل الإستجابة الطبيعية للدائرة ولا يعتمد على قيمة مصدر الفولتية.

أما الحل الثاني المعتمد على مصدر الفولتية والذي يدعى بالدالة المكاملة فيساوي:

$$i_F = \frac{V}{R} \qquad \dots (9\cdot9)$$

وكذلك يدعى هذا الحل بالإستجابة القسرية للدائرة ويمثل قيمة التيار المار في الدائرة بعد مضي فترة زمنية طويلة جداً على تحويل المفتاح (تعرف باللانهاية عادةً). وهو يمثل جزء التيار المستمر المار في الدائرة.

من مجموع الإستجابتين الطبيعية والقسرية يتكون الحل الكامل للدائرة أي:

$$i = i_n + i_f$$

$$= I_o e^{-Rt/L} + \frac{V}{R} \qquad t > 0 \qquad \dots (9\cdot10)$$

ويلاحظ أن هذه المعادلات تنطبق فقط عندما $t > 0$

ولغرض حذف هذا التحديد وصياغته بشكل رياضي عام في ضوء الفقرة السابقة يمكن إستخدام وحدة الخطوة في التعبير عن المعادلات، وحلها يكون كالآتي:

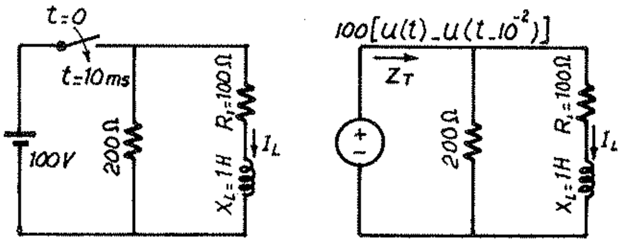
$$L \frac{di}{dt} + Ri = V\, u(t) \qquad \dots (9\cdot11)$$

والتي يكون حلها بشكل

$$i = \left(I_o\, e^{-Rt/L} + \frac{V}{R} \right) u(t) \qquad \dots (9\cdot12)$$

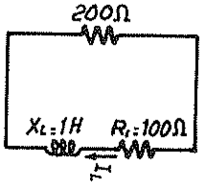
يمكن الإستعاضة عن المفتاح ومصدر الفولتية أو مصدر التيار في الدوائر التي تحوي متسعة أو محث بمصادر تحوي وحدة الخطوة سواء كان ذللك عند قفل الدائرة أو عند فتحها أو عند تحويل المفتاح من موضع الى أخر.

مثال 9.4 : لغرض حل الدائرة المبينة في الشكل 9.11 أ للازمنة الثلاثة ثم تحويلها الى دائرة الشكل 9.11 ب ثم يتم تحويرها وفق الازمنة الثلاثة وكالآتي :



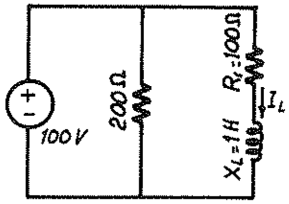
الشكل 9.11 دائرة المثال 9.4

1. عندما كان المفتاح مفتوح قبل t=0 كانت الدائرة كما مبين في الشكل 9.12 ولايسري فيها أي تيار.



الشكل 9.12

2. بعد قفل المفتاح عند $t=0$ وقبل فتحة عند $t=10\,s$ أصبحت الدائرة كما في الشكل 13..

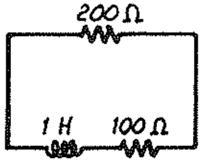


الشكل 9.13

$$i_L = \frac{100}{100}\,[\,1 - e^{-100t}\,] \qquad 10^{-2} > t > 0 \qquad \dots (9{\cdot}13)$$

والذي يتألف من جزئين تيار قسري مقداره أمبير واحد وتيار الإستجابة الطبيعية ومقداره $-e^{+100t}$

3. بعد الزمن $t = 10^{-2}$ أي حين $t > 10^{-2}\,s$ تصبح الدائرة كالآتي :



الشكل 9.14

والتي تقوم بتفريغ الطاقة المخزونة في المحث خلال المقاومات.

إن قيمة التيار الإبتدائي لهذه الدوائر عند $t = 10\,s$ هو نتيجة الحالة الثانية أعلاه أي 0.632 أمبير وعلى هذا يصبح التيار:

$$i = 0.632\ e^{-t/T} \qquad (9.14)$$

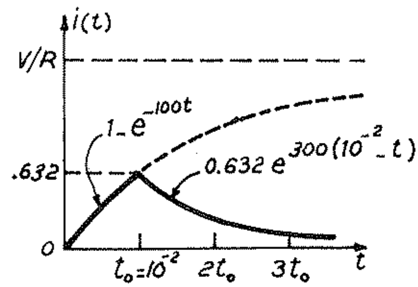
وثابت الزمن هنا يجب أن يؤخذ بمقياس واحد للدائرتين حيث أن هناك فرق مقداره 10 ثانية لذلك تصبح المعادلة لهذه الحالة (على أساس مقياس الزمن الحقيقي أي البداية الأولى).

$$i(t) = 0{\cdot}632\ e^{-(t-10^{-2}) \times 300} = 0{\cdot}632\ e^{300(10^{-2}-t)} \qquad ...(9{\cdot}15)$$

ويمثل الاستجابة الطبيعية فقط لأن الاستجابة القسرية تساوي صفراً. ويمكن دمج الحلول كلها باستخدام دالة وحدة الخطوة بشكل:

$$i(t) = [u(t) - u(t - 10^{-2})][1 - e^{-100t}] + 0{\cdot}632\ e^{300(10^{-2}-t)}\ u(t - 10^{-2}) \qquad ...(9{\cdot}16)$$

والشكل أدناه يمثل المنحني البياني لتغيير التيار مع الزمن لكافة الحالات.

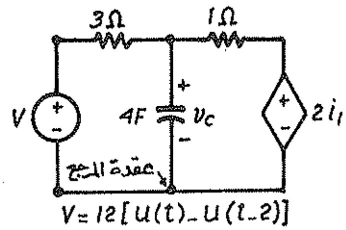


الشكل 9.15

9.4 الإستجابة الكاملة للدوائر المحتوية على مصادر معتمدة :

لقد أوضحنا أن الإستجابة الكاملة للدوائر المحتوية على محث ومتسعة تتألف من مجموع الإستجابتين الطبيعية والقسرية لها . ولكن كان هناك إمكانية لحل مثل هذه الدوائر بطرق بسيطة كما سبق وأن مرّ بنا ذلك في الفصول السابقة خاصة إذا كان إيجاد ثابت الزمن سهل الحساب . أما للدوائر المحتوية على مصادر معتمدة فإن حل الدائرة يمكن أن يكون صعباً . وغير ممكن إلاّ بكتابة المعادلات التفاضلية للعقد أو الدارات أيها أنسب ومن هذه المعادلات يمكن إيجاد الإستجابة الكاملة بعد تبسيطها أو بإيجاد المقاومة المكافئة المربوطة مع المحث أو المتسعة بإستخدام نظرية ثيفنن لإيجاد الفولتية والدائرة مفتوحة ونظرية نورتن لإيجاد التيار والدائرة مقصورة ثم تقسيم الفولتية على التيار كما سيوضح ذلك في المثال التالي :

مثال 9.5 للدائرة المبينة في الشكل 9.16 أوجد $V_c(t)$ لكافة الأزمنة .



الشكل 9.16 دائرة المثال 9.5

الحل : نكتب معادلة العقدة 1 حيث للزمن بين $0 < t$

$$4\frac{dV_C}{dt} + (V_C - 2i_1) + \left(\frac{V_C - V}{3}\right)u(t) = 0 \qquad \dots (9\cdot17)$$

$$i_1 = \frac{V - V_C}{3} \qquad \dots (9\cdot18)$$

بتعويض قيمة i في المعادلة (9.17) نحصل على :

$$4\,\frac{dV_C}{dt} + V_C - 2\left(\frac{V - V_C}{3}\right) + \frac{V_C - V}{3} = 0$$

$$4\,\frac{dV_C}{dt} + 2V_C = V$$

$$\therefore V_C = Ae^{-t/2} + V / 2 \qquad t > 0$$

لإيجاد الثابت A نعوض بالحالة الإبتدائية عندما $t = 0$ فإن $V = 12V$

$$\therefore V_C = A + 6 = 0$$

$$\therefore A = -6$$

وإن V_c تصبح

$$V_C = (-be^{-t/e} + 6)\,u(t-2) \qquad \dots (9.19)$$

وأما عند الزمن $t > 2$ فنجد أين وصلت الفولتية في الحالة السابقة عند $t=2$ حيث من التعويض في المعادلة (9.19) نحصل على :

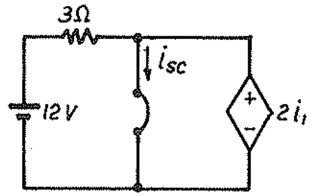
$$V_c = 6e^{-1} + 6 = 3.8V$$

وبما أن معادلة الفولتية للزمن $t = 2$ ستكون وبعد تصحيح الزمن بالشكل :

$$\therefore V = 3{\cdot}8\,e^{-\frac{t-2}{2}}\,u(-t+2) \qquad \dots (9{\cdot}20)$$

فإن التعابير في المعادلات (9.20) تمثل الفولتية لكافة الأزمنة. وهناك طريقة أخرى للحل بإيجاد مكافئ ثفنن ونورتن لغرض إيجاد القيمتين القسرية والطبيعية مباشرة.

آ. لإيجاد V نعيد رسم الدائرة كما يلي :



الشكل 9.17

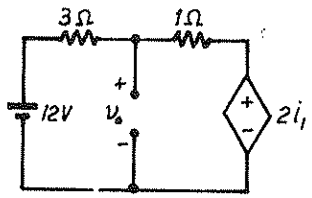
بإستخدام معادلة كرشوف للفولتية ، فإن :

$$-12+4i_1+2i_1=0 \quad (9.21)$$

$$i_1=2A$$

$$V_0=12-2\times 3=6V \quad (9.22)$$

ب. لإيجاد i نعيد رسم الدائرة كما يلي :



الشكل 9.18

حيث من الشكل :

$$i_{SC}=\frac{12}{3}+\frac{2i_1}{1} \quad ...(9\cdot23)$$

$$i_1=\frac{12}{3}=4A$$

$$\therefore\ i_{SC} = 4 + 8 = 12A \qquad ...(9{\cdot}24)$$

ونجد R_{th} من قسمة V_0 في (9.22) على i_{sc} في (9.24) أي :

$$R_{th} = \frac{V_o}{i_{SC}} = \frac{6}{12} = 0{\cdot}5$$

وأن ثابت الزمن T يصبح :

$$T = RC = 0.5 \times 4 = 0.5$$

وعليه يمكن كتابة معادلة فولتية المتسعة بجزئيها الطبيعي والقسري كالآتي :

$$V_C = V_n + V_f = Ae^{-t/2} + 6$$

حيث $A = -6$

$$\therefore\ V_C = [-6e^{-t/2} + 6]\ 2 > t > 0 \qquad ...(9{\cdot}25)$$

ولإيجاد الفولتية للزمن $t > 2$ كما مر سابقاً فإن :

$$V_C = 3{\cdot}8\ e^{-\left(\frac{t-2}{2}\right)}\ u(t-2) \qquad ...(9{\cdot}26)$$

وبدمج المعادلتين (9.25) و (9.26) نحصل على V_c لكافة الأزمنة $0 \quad t$

$$V_C(t) = (-6e^{t/2} + 6)\,u(t-2) + 3{\cdot}8\ e^{-\left(\frac{t-2}{2}\right)}\ u(t+2)$$

9.5 دوائر أخرى تحتوي على متسعات ومحثات :

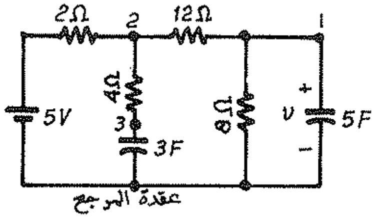
إن الدوائر التي تحتوي على متسعات مختلفة يمكن تصنيفها الى صنفين : الأول بالإمكان دمج المتسعات فيه بحيث تصبح متسعة واحدة مكافئة وعند ذلك يكون للدائرة ثابت زمن واحد ويمكن بشكل عام حلها بالأساليب التي سبق شرحها . أما إذا كانت الدائرة غير قابلة للتبسيط بسبب تنافر المتسعات في فروع متباعدة مع المقاومات وهذا هو الصنف الثاني فإن حل الدائرة يتم بإستخدام قانوني كرشوف (التحليل العقدي أو التحليل بالدارات) .

وفي كثير من الأحيان ينتج معادلتين تفاضليتين أو أكثر يجب حلها لإيجاد معادلة واحدة ويمكن أن تكون تلك المعادلة من درجة أعلى من الدرجة الأولى وعند ذلك يحتاج الحل الى رياضيات أعقد أو بالحاسبة الألكترونية. وينطبق ماسبق ذكره أعلاه على المحثات أيضاً. أما الدوائر المحتوية على محثات ومتسعات في الوقت نفسه فإن المعادلات التفاضلية لها تكون من الدرجة الثانية على الاقل وهي خارج حدود منهاج هذا الكتاب.

سنحاول في المثال أدناه إعطاء نموذج من دوائر معقدة وسنحاول إيجاد وضع الإستقرار لها دون الدخول في حل معادلات الحالة العابرة.

مثال 9.6

أكتب المعادلات التفاضلية اللازمة فقط لحل دائرة الشكل 9.19 المبين أدناه :



الشكل 9.19

الحل : عندما تكون الدائرة في وضع الإستقرار فإن التيار يمر من مصدر الفولتية عبر المقاومات 2 و 12 و 8 فيكون التيار:

$$I = \frac{5}{8 + 12 + 2} = \frac{5}{22} \text{ A}$$

وفولتية المقاومة 8 تصبح :

$$V_1 = \frac{5}{22} \times 8 = \frac{20}{11} \text{ V}$$

وهي فولتية المتسعة 5F

أما فولتية العقدة 2 فتساوي :

$$V_2 = \frac{5}{22} \times (12 + 8) = \frac{50}{11} \text{ V}$$

وهي نفس فولتية المتسعة 3F

أما المعادلات التفاضلية للدائرة فيمكن كتابتها بشكل :

العقدة 1

$$5\ \frac{dV_1}{dt} + \qquad \frac{V_1}{8} + \frac{V_1 - V_2}{12} = 0$$

العقدة 2

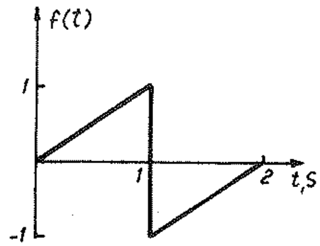
$$\frac{V_2 - V_1}{12} + \frac{V_2 - V_3}{4} + \frac{V_2 - V}{2} = 0$$

العقدة 3

$$\frac{V_3 - V_2}{4} + 3\,\frac{dV_3}{dt} = 0$$

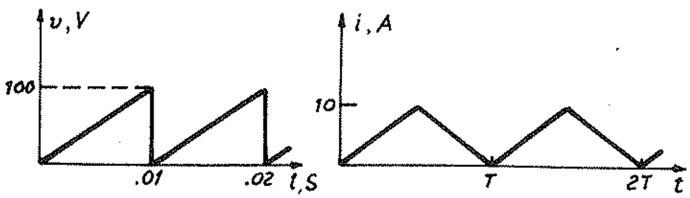
مسائل الفصل التاسع

1. للدالة f(t) الموضحة في الشكل (9.20) عبر عن الشكل بصيغة رياضية مستخدماً دالات وحدة الخطوة.



(أ)

الشكل 9.20

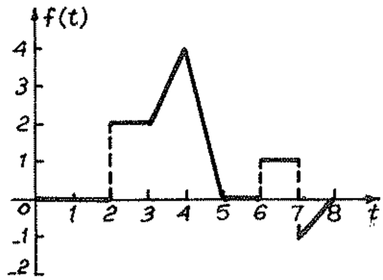


(ب) (جـ)

2. أعد ما مطلوب في السؤال السابق ولكن للشكل المبين أدناه :

الجواب :

$F(t) = 2u\,(t-2) + (2t-6)\,u\,(t-3) + (34-6t)\,u\,(t-4) + (4t-20)$
$u(t-5)\,u\,(t-6)\; + (t-9)\,u\,(t-7) - (t-8)\,u\,(t-8)$

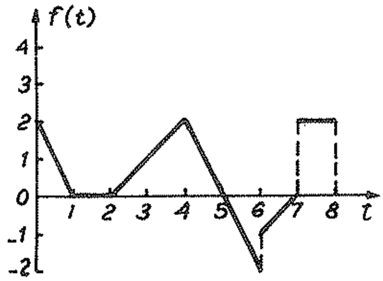


الشكل 9.21

3. اعد المطلوب في السؤال الاول للشكل 9.22 المبين ادناه :

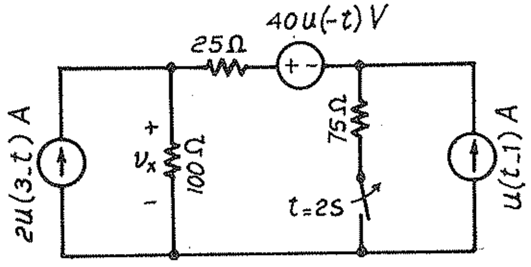
الجواب

$F(t) = (2-2t)\;\; [ut) - u(t-1)] + (t-2) \quad u \quad (t-2) + (12-3t)$
$u(t-4) + (3t-17)\,u\,(t-6) - (t-9)\,u(t-7) + 2u\,(t-8)$



الشكل 9.22.

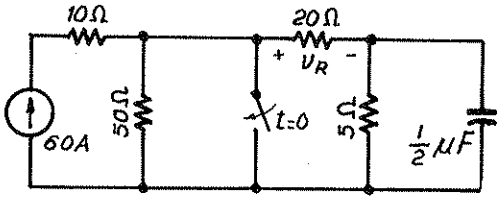
4 . أوجد قيمة V لفترات زمنية مقدارها ثانية واحدة من $t = 0.5s$ الى $t = 3.5s$ لدائرة الشكل (9.24) .
(الجواب : 100V, 300V, 137.5V, 100V' 120V)



الشكل 9.23.

5 . ارسم منحني يبين تغير V مع الزمن t للفترة $-1 < t < 4s$ لدائرة الشكل 9.24 الموضحة ادناه . (الجواب : $160\ e^{5\times 106t}$ V)

(الجواب $160\, e^{-5\times 10^{-6} t}$)

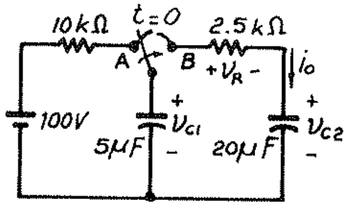


الشكل .9.24

6 تحرك المفتاح من الوضع A الى B في الشكل 9.25 عند الزمن $t = 0$ لمدة طويلة . وهذا الوضع جعل المتسعتين على التوالي مما سبب تكوين فولتيتين متساويتين ومتعاكستين بسبب احتجاز الفولتية (آ) إحسب $V_{C_1}(O^-)$, $V_{C_2}(O^-)$ (ب) أوجد كذلك $V_{C_1}(O^+)$, $V_{C_2}(O^+)$, $V_R(O^+)$ (ج) إحسب ثابت زمن الفولتية $V_R(t)$ (د) اوجد $V_R(t)$ للزمن $t > 0$ (هـ) اوجد $V_{c2}(t)$ $V_{c1}(t)$ من $i(t)$ والقيمالابتدائية (و) برهن بأن الطاقة المخزونة عند $t = \infty$ مضافاً اليها الطاقة المبددة في المقاوم 2.5k تساوي الطاقة التي خزنت اصلا في المتسعات .

(الجواب : (آ) 0,100V (ب) 100V,0,100V (ج) 0·01s (د) $100\, e^{-100t}$ V

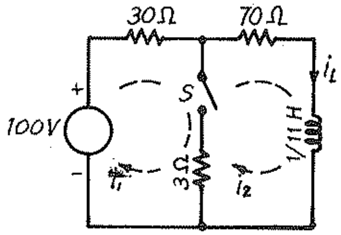
(هـ)$40e^{-100t}$mA (و) $20 - 20e^{-100t}$V,$20 + 80e^{-100t}$V $5 + 20 = 25 + 0$mJ



الشكل .9.25

7 . المفتاح في الشكل 9.26 كان على الوضع 1 لمدة طويلة . وعند الزمن $t = 0$ تحول المفتاح فجأة الى الوضع .2. أوجد التيار $i(t)$ خلال المتسعة للزمن $t > 0$

(الجواب : $-40\, e^{-t/250}$ μA)



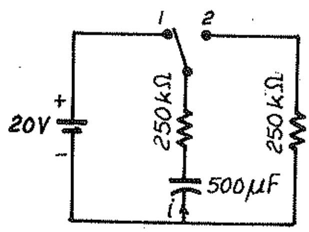
الشكل 26 ـ 9

8 . إذا اغلق المفتاح لغرض إيصال المصدر 20V مع المقاومة 2 والمحاثة 3.6H المربوطة على التوالي فما هو مقدار الزمن اللازم ليصل التيار الى قيمته العظمى ، وما هي تلك القيمة .

(الجواب : $i(\infty) = 20/2 = 10A$)

9 . دائرة الشكل 9.27 تمثل مرجل يعمل بالتيار حيث تغلق تماسات المرجل عندما $i =$ 0.9A وتفتح عندما $i = 0.25A$. اوجد زمن اشتغال المرجل لدورة واحدة .

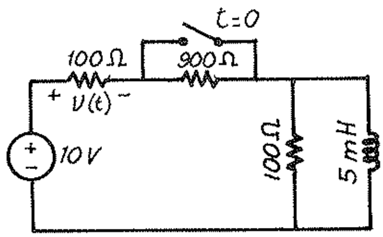
(الجواب : $t = t + 2.28 = 1.83.28 = 4.11ms$)



الشكل .9.27

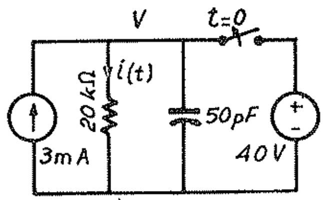
10 اوجد V(t) ثم إرسم المنحني الذي يبين تغير V(t) مع الزمن .

(الجواب: $10 - 4.5\, e^{-10^4 t}$)



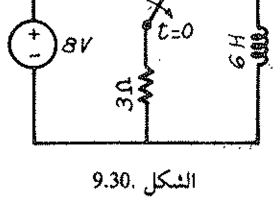
الشكل 9.28.

11. اوجد i(t) وارسم المنحني (الجواب : $3 - e^{-106t}$)
(الجواب : $e^{-10^6 t}$)



الشكل 9.29.

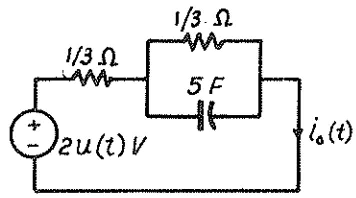
12. اوجد V(t) لدائرة الشكل 9.30 ثم ارسم المنحني.
(الجواب : $4 - 2e^{-2t}$)



الشكل 9.30.

13 . جد معادلة i(t) المبينة في الشكل 9.31.

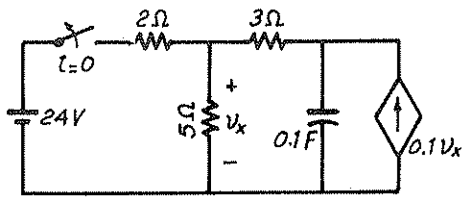
(الجواب : $3(1 + e^{-\frac{6}{5}t}$)



الشكل 9.31.

14 . اذا اعتبر المفتاح في دائرة الشكل 9.32 مغلقا لمدة طويلة ارسم منحني تغيير V_x مع t للفترة $-1 < t < 3s$

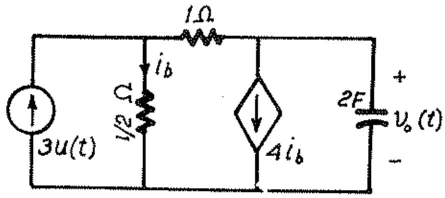
(الجواب : $8{\cdot}75\, e^{-30t}V$)



الشكل 9.32.

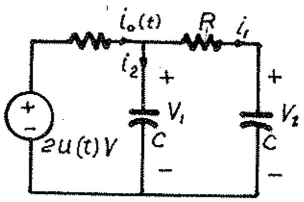
15 . اوجد V(t) وارسم المنحني لدائرة الشكل 9.33.

(الجواب : $-2{\cdot}1(1 - e)^{-\frac{5}{3}t}$)



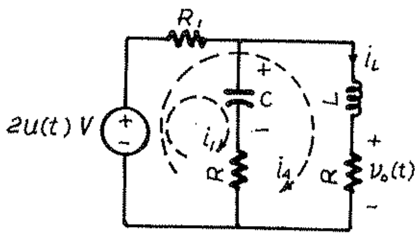
الشكل 9.33.

16. لدائرة الشكل 9.34 ادناه اوجد $i_o(t)$ و $\frac{di_o(t)}{dt}$ عند الزمن $t=0^+$ واكتب معادلات العقد فقط بدون حل.
(الجواب : $-2/RC, 2/R$)



الشكل 9.34

17. اكتب معادلات الدارات فقط واوجد قيمة $V_o(t)$ و $\frac{dV_o(t)}{dt}$ عند الزمن $t=0^+$ في الشكل 9.35 (الجواب : $V_{(o)}=0$ و $\frac{dV_{(o)}}{dt}=\frac{2R^2}{L(R-R_1)}$



الشكل 9.35.

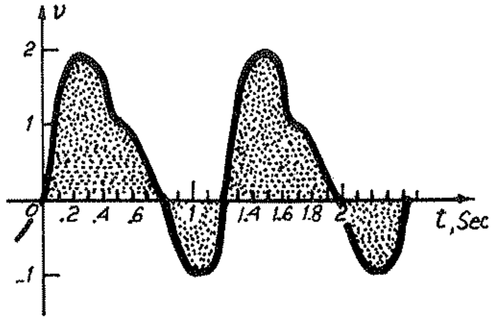
الفصل العاشر

مبادئ التيار المتناوب

﴿هل يستوي الذين يعلمون والذين لايعلمون﴾
الزمر ٩

10.1 الكميات المتناوبة :

لقد عرفنا التيار المستمر فيما سبق بأنه التيار الذي يسري باتجاه ثابت على الدوام ويبقى محافظا على قيمته طيلة فترة سريانه. ويعني ذلك ان الالكترونات التي تغادر القطب السالب من المولد او النضيدة تسير بالاتجاه نفسه ولاتعكس اتجاهها. يحدث احيانا ان تسير هذه الالكترونات باتجاه ما ، ثم تعكس اتجاهها لكي تسير بعكس الاتجاه بعد برهة من الزمن. كما ان عدد الالكترونات المتحركة يتغير بمضي الزمن. ويحدث ذلك نتيجة تغير جهد مصدر التيار مع الزمن. تمتاز بعض مصادر التيار بصفات خاصة تميزها عن غيرها. فاذا كان تيار او فولتية مصدر مايتغير مع الزمن بشكل يعيد نفسه بين اونه واخرى ثيل عن تلك الكمية بانها كمية دورية Periodic. ومن هذا التعريف يتبين ان الزمن الذي يمضي على الكمية الدورية لكي تعيد نفسها وتصل الى وضعها السابق الذي بدأت به بالضبط يساوي كمية ثابتة. تدعى هذه الكمية "بفترة" الكمية الدورية ويرمز لها بالرمز T ويكون مقدارها ثابتا. يبين الشكل 10.1 كمية دورية ذات فترة معينة. ويلاحظ ان شكل



الشكل 10.1 فولتية دورية مع الزمن

منحني الكمية الدورية يعيد نفسه بالضبط بعد فترات متعاقبة. كما يلاحظ ان جزءا من المنحني قد انخفض تحت محور الزمن. اما الجزء الاكبر فيقع فوق محور الزمن. ومن ذلك يتبين ان المنحنيات الدورية لايشترط ان تكون متناظرة حول محور الزمن.

وحدة الفترة هي الثانية ويدعى المنحني الممتد على طول فترة واحدة بالدورة. ويعني ذلك ان الدورات المتعاقبة (والمتطابقة بالشكل) تعيد نفسها عددا من المرات خلال وحدة زمنية معينة يدعى عدد المرات التي تعيد نفسها خلال ثانية واحدة بالتردد. ويرمز له بالحرف f.

وحدة التردد هي الهرتز Hertz ومختصرها Hz. هي عدد الدورات التي تحدث خلال ثانية واحدة. ويمكن بسهولة استنتاج ان الفترة والتردد احداهما يساوي مقلوب الاخرى رياضيا.

اي ان

$$T = \frac{1}{f} \qquad (10.1)$$

حيث T ترمز للفترة ووحدتها الثانية و f ترمز للتردد بالهرتز. ومنها يتضح ان الهرتز ذو وحدة تعادل مقلوب الثانية بالنظام القياسي الدولي S.I.

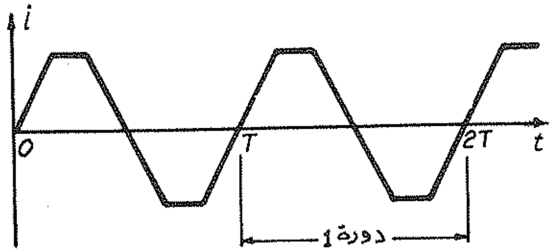
يلاحظ من الشكل 10.1 الجزء الذي يقع اعلى محور الزمن خلال فترة واحدة لايساوي الجزء الذي يقع تحته. ويعني ذلك ان معدل مثل هذا المنحني لايساوي صفرا. يعرف معدل منحن ماخلال فترة زمنية محدودة بانه عبارة عن مجموع المساحة تحت المنحني مقسومة على الفترة الزمنية مع الاخذ بنظر الاعتبار ان جزءا من المنحني يمكن ان تكون

المساحة تحته سالبة ان وقع تحت محور الزمن . او بكلمة اخرى ان معدل كمية دورية يعادل تكامل تلك الكمية على امتداد فترة معينة مقسوما على تلك الفترة . فمعدل الموجة u على امتداد فترة مقدارها T يساوي

$$v_{av.} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} v\, dt \qquad ...(10\cdot 2)$$

يساوي معدل بعض الكميات الدورية صفرا ، ويعني ذلك ان المساحة تحت محور الزمن تساوي المساحة التي تقع فوقه ضمن فترة زمنية معينة . تدعى مثل هذه الكميات بالكميات المتناوبة Alternating Quantity . وبالرغم من ان الكميات الدورية بصورة عامة تحتوي على جزء متناوب ، الا انها تحتوي بصورة عامة على معدل لايشترط ان يساوي صفرا . اي بكلمة اخرى ان الكميات الدورية تحتوي على مركبتين احداهما متناوبة والاخرى ثابتة او مستمرة (تعادل معدل الكمية المتناوبة) .

يبين الشكل 10.2 كمية متناوبة مؤشر عليها قيمة الفترة ويلاحظ ان معد لها يساوي صفرا .

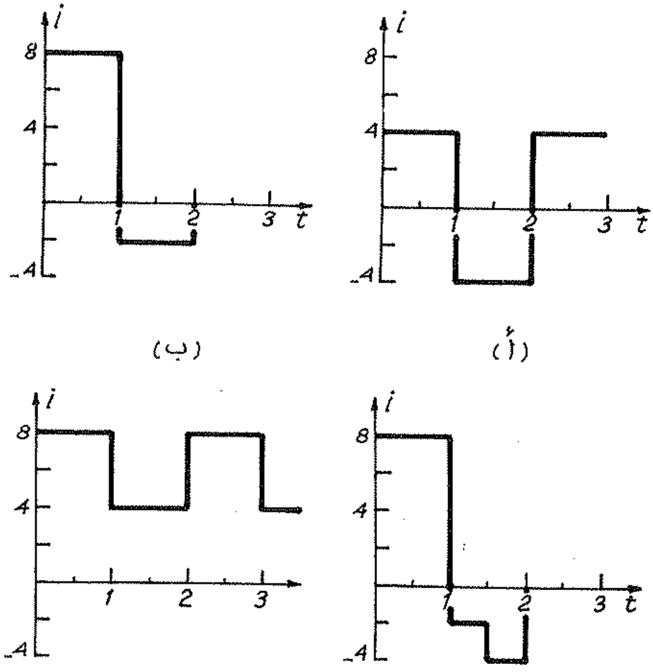


الشكل 10.2 تيار متناوب مع الزمن

يدعى منحني الكمية المتناوبة ومنحني الكمية الدورية بشكل الموجة حيث انهما يحتويان على تموجات واضحة مع الزمن بخلاف الكميات المستمرة التي سبقت في الفصول الاربعة الاولى من هذا الكتاب .

مثال 10.1

يطلب إيجاد قيمة متوسط الموجات المبينة في الشكل 10.3 والتي تمثل تيارات متناوبة.



الشكل 10.3

الحل: (آ) للشكل المبين من الواضح ان المساحة بين المنحني ومحور الزمن تتألف من جزئين متساويين احدهماموجب والاخر سالب لذلك فان احدهما يحذف الاخر وتصبح المساحة الكلية صفراً اي المعدل صفر.

وسيمر بالطالب معالجة خاصة لمثل هذه الحالات المتماثلة حول محور الزمن.

(ب) المساحة فوق محور الزمن للشكل ب تساوي.

$8 \times 1 = 8$ وحدات

بينما المساحة تحت محور الزمن تساوي

$-2 \times 1 = -2$ وحدة

فتكون المحصلة هي:

$8 - 2 = 6$ وحدة

اي ان المتوسط يساوي:

$6/2 = 3$ وحدات

(ج) للشكل (ج) المساحة الموجبة فوق محور الزمن تساوي 1×8 وتحت محور السينات :

$$-2 \times 0.5 - 4 \times 0.5 = -3 \text{ وحدة}$$

فتكون المحصلة :

$$8 - 3 = 5 \text{ وحدات}$$

اي ان المتوسط يساوي

$$5/2 = 2.5 \text{ وحدة}$$

(د) للشكل د المساحة تحت المنحني كلها موجبة وتساوي :

$$2 \times 1 + 8 \times 1 = 12 \text{ وحدة}$$

ومتوسطها يصبح

$$12/2 = 6 \text{ وحدات}$$

10.2الكميات الجيبية :

يمتاز تغير بعض الموجات بمميزات خاصة دون سواها من حيث هيئة الموجة واعادتها لنفسها بعد مضي فترة واحدة واحدى هذه الموجات الخاصة هي الموجة الجيبية التي تتغير وفق دالة جيبية مع الزمن . ويمكن تمثيلها كما يلي :

$$v = V_m \sin \omega t \quad (10.3$$

حيث v هي القيمة الانية لفولتية مثلا عند تغيرها مع الزمن و Vm هي القيمة القصوى لهذه الفولتية وتدعى احيانا بالاتساع Amplitude و w هي مقدار ثابت تتناسب وحدته مع مقلوب الثانية تعيد الموجة الجيبية نفسها كل 2π من الزوايا نصف القطرية لذا حينما $t = T$ فان ωt تساوي 2π .

اي ان

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (10.4)$$

وحيث ان الكمية التي يراد اخذ جيبها يجب ان تكون بالزوايا نصف القطرية ، لذا يجب ان تكون الوحدة الصحيحة للكمية ω هي زاوية نصف قطرية بالثانية .

ويلاحظ ان الزاوية نصف القطرية ليس لها وحدة بالنظام القياسي الدولي . تدعى الكمية ω بالتردد الزاوي . وحيث ان مقلوب الفترة هو عبارة عن التردد

اي

$$f = \frac{1}{T}$$

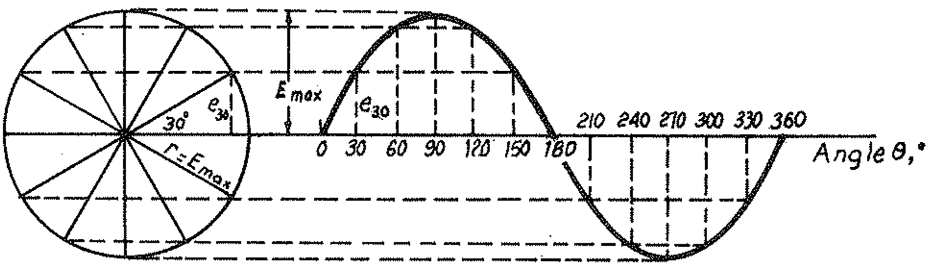
كما مر في المعادلة 10.1 لذا فان

$$\omega = 2\pi f \qquad (10.5)$$

وهي العلاقة بين التردد الزاوي بالزوايا نصف القطرية بالثانية والتردد بالهرتز ومن ثم يمكن كتابة المعادلة (10.3) بصيغة اخرى.

$$v = V_m \sin 2\pi ft \qquad (10.6)$$

يبين الشكل 10.4 شكل موجة جيبية اتساعها V_m



أ) موجة جيبية　　　ب) طريقة توليد موجات جيبية بدوران نقاط على محيط دوائر

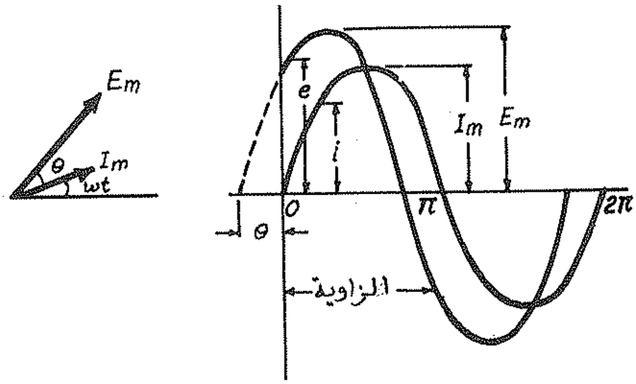
الشكل 10.4

أ) موجة جيبية ب) طريقة توليد موجات جيبية بدوران نقاط على محيط دوائر

تتصف الموجة الجيبية بخواص فريدة لاترى في غيرها من الموجات المتناوبة. يكمن سبب ذلك في العلاقة الوثيقة بين الموجة الجيبية والشكل الدائري. فعند دوران نقطة ما على محيط دائرة بسرعة زاوية ثابتة فان مسقط هذه النقطة على خط عمودي او افقي في مستوى الدائرة يكون عبارة عن موجة جيبية مع الزمن. وللسبب نفسه عند دوران موصل في مجال مغناطيسي يكون شكل الـ ق. د. ك المتولدة فيه ذا دالة جيبية مع الزمن.

يلاحظ عند تدوير عدد من الموصلات في مجال مغناطيسي بسرعة ثابتة ان فولتياتها الجيبية لاتبدأ في النقطة نفسها حيث لابد وان يكون ما بينها فرق بالنسبة للنقطة التي تقطع فيها محور الزمن. ويقال عن هذه الموجات ان بينها فرق طور phase difference معين كما موضح في الشكل 10.5 وتكون معادلة هذه الموجة

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta) \qquad (10.7)$$



الشكل 10.5 موجتان جيبيتان بينها فرق طور مقداره θ .

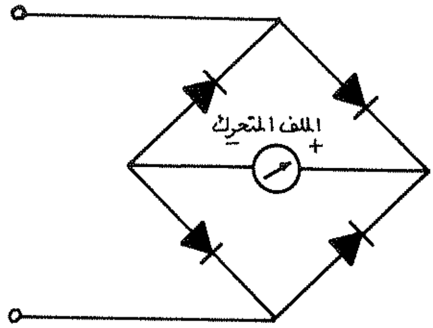
حيث θ هي زاوية فرق الطور بين الموجة المعنية عن موجة جيبية مبتدئة من نقطة الاصل . ويمكن ان تكون θ اية قيمة بين الصفر و 2π . وحينما تأخذ قيمة مقدارها $\frac{\pi}{2}$ يلاحظ ان شكل الموجة يصبح جيبتماميا ، اي ان الموجبة الجيبتامية هي موجة جيبية مزاحة بـ 90 درجة . كما يمكن ان تأخذ الزاوية θ قيما سالبة كأن تصبح في الربع الرابع وعند ذلك يمكن تحويلها الى قيمة موجبة باضافة 2π لها . ويلاحظ ان متوسط الموجبة الجيبية مهما كانت ازاحتها عن نقطة الاصل يساوي صفرا . اي ان المساحة فوق محور الزمن على امتداد دورة واحدة تساوي المساحة تحت ذلك المحور. ويمكن صياغة ذلك باسلوب رياضي .

$$V_{av.} = \frac{\int_o^{2\pi} V_m \sin \omega t \, d(\omega t)}{2\pi} = 0 \quad \text{صفر} = \text{متوسط لفترة كاملة} \qquad (10.8)$$

لذا فان متوسط اية موجة جيبية او موجة متكونة من مجموع موجات جيبية يساوي صفرا اذا حسب على امتداد فترة كاملة او مضاعفاتها .

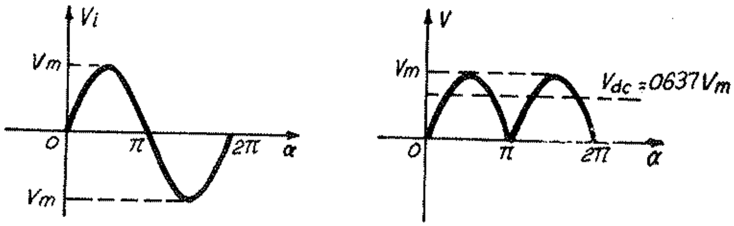
وحيث انه لابد من قياس الكميات المتناوبة مختبرياً لذلك تصمم اجهزة القياس لاظهار القيمة التأثيرية على واجهاتها عداد رسم الترددات الذي يعطي القيمة الآنية .

يقاس التيار المتناوب باستخدام جهاز الملف المتحرك [دي ارسنفال D'Arsonval) وهو جهاز مصمم اصلا لقياس التيار المستمر حيث يحور باضافة قنطرة من الصمامات الثنائية كما مبين في الشكل 10.6



الشكل 10.6 قنطرة حامات ثنائية مع جهاز الملف المتحرك

وحيث أن التيار المتناوب يمر في هذا المقياس بإتجاه واحد (تقويم كامل الموجة إذ تحول الموجة الجيبية المبينة في الشكل آ الى الشكل ب لذلك من الضروري دراسة خواص الموجة بعد التقويم وذلك لمعرفة القيمة الحقيقية التي تمر في الجهاز وتسبب إنحراف مؤشره.



الشكل 10.7 (أ) موجه جيبية (ب) موجه فولتية الملف المتحرك

لغرض أخذ متوسط الموجة المبينة في الشكل (ب) فإن :

$$I = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{o}^{\pi} I_m \sin(\omega t)\, d\omega t + \int_{\pi}^{2\pi} - I_m \sin(\omega t)\, d\omega t\right]$$

حيث أن نصف الموجة الأول هو نفسه للموجة اللجيبية. أما النصف الثاني فهو النصف الآخر للموجة الجيبية لكنها بعكس الإشارة.

$$I = \frac{1}{2\pi} (- I_m \cos (\omega t)]_o^{\pi} + I_m \cos (\omega t)]_{\pi}^{2\pi})$$

$$= \frac{1}{2\pi} [- I_m (- 1 - 1) + I_m (1 + 1)] = \frac{2I_m}{\pi} = 0{\cdot}637 I_m$$

وتجدر الإشارة الى أن هذه النتيجة كان يمكن الحصول عليها بأخذ متوسط الموجة لنصف الفترة أو حتى ربعها بسبب تماثل الموجة الجيبية في الأرباع الأربعة أي أن :

$$I_{av} = \frac{1}{\pi} \left[\int_o^{\pi} I_m \sin (\omega t) d (\omega t) \right] = \frac{1}{\pi / 2} \left[\int_o^{\pi/2} I_m \sin \omega t \, d\omega t \right] = 0{\cdot}637 I_m.$$

10.3 القيمة المؤثرة effective value :

نظرا لان الموجة الجيبية تتغير قيمتها من لحظة لاخرى فان الاعتماد في قياسها على القيمة القصوى غير ممكن. كما ان متوسط الموجة الكاملة يساوي صفرا.

لذا من الضروري الاتفاق على صيغة جديدة تأخذ بنظر الاعتبار مقدرة الموجة الجيبية على التاثير في الدوائر الكهربائية. وليس ذلك للموجات الجيبية وحدها بل لكافة الموجات المتغيرة مع الزمن والتي تعيد نفسها اي للموجات الدورية.

ان افضل طريقة للتعبير عن مثل هذه الموجات في الدوائر الكهربائية يكون بالرجوع الى مقدرتها على تزويد قدرة لمقاومة مقدارها اوما واحدا تعادل القدرة التي تسحب من مصدر للتيار المستمر مقدار فولتيته E مثلا. ومن هنا يبرز اصطلاح القيمة المؤثرة effective value للفولتية الجيبية.

لنفرض ان الموجة الجيبية التي تمثل تيارا يمر في مقاومة مقدارها اوما واحدا هو

$$i = I_m \sin \omega t$$

حيث I_m هي القيمة القصوى للتيار. فالقدرة التي تصرف في مقاومة مقدارها اوما واحدا تساوي

$$P = i^2R = I_m^2 \sin^2 \omega t \qquad (10.9)$$

وبأخذ متوسط هذه القدرة (Pav) لدورة كاملة ،

$$P_{av.} = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} I_m^2 \sin^2 \omega t \, d(\omega t) \qquad ...(10{\cdot}10)$$

وباستخدام المتطابقة المثلثية

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \qquad (10.11)$$

ثم بتبسيط التكامل نحصل على :

$$P_{av.} = \frac{I_m^2}{4\pi} \int_o^{2\pi} (1 - \cos 2\omega t) \, d\omega t$$

$$= \frac{I_m^2}{2} \qquad ...(10{\cdot}12)$$

والان يمكننا ان نقارن معادلة متوسط القدرة (10.12) مع مقدار القدرة المجهزة الى المقاومة نفسها ، اذا كان التيار هو مستمراً مقداره I ، تصبح

$$P_{d.c.} = I^2 \times 1 \qquad (10.13)$$

وبمساواة (10.13) و (10.12)

$$I^2 = \frac{I_m^2}{2}$$

اي ان

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}707 \, I_m \qquad (10.14)$$

يلاحظ ان المعادلة (10.14) قد تم الحصول عليها بأخذ جذر المعادلة (10.12) والتي كانت عبارة عن متوسط المعادلة (10.9) . والمعادلة (10.9) كانت عبارة عن تربيع التيار في

المقاومة. لذا تدعى هذه القيمة بجذر متوسط التربيع root mean sguare وتختصر ب (جـ . م . ت) (r.m.s) ويقصد بها القيمة المؤثرة للتيار كما ينطبق التعريف نفسه على موجة الفولتية. ويعني ذلك ان القيمة المؤثرة للتيار او الفولتية ممثل بموجة جيبية يعادل 0.707 من القيمة القصوى.

لقد استند تعريف القيمة التأثيرية للموجة الجيبية على مقدار القدرة المستهلكة نتيجة تلك الموجة وهو اساس قويم يمكن ان ينطبق على اي موجة دورية سواء كانت جيبية او متكونة من عدد من الموجات الجيبية المضافة لبعضها او غير جيبية على الاطلاق. كما ينطبق الامر نفسه على الموجة الجيبية مهما كانت ازاحتها او فرق طورها، نظرا لأن زاوية الطور تختفي بعد اخذ التكامل. يرمز للكميات المتغيرة مع الزمن بحروف صغيرة. اما القيم المؤثرة لمثل هذه الكميات فيؤخذ عادة بحروف كبيرة يضاف لها إحيانا رمز سفلي للاشارة الى كونها قيمة r. m. s . اي $I_{r.m.s}$ او I فقط. تجدر الاشارة الى أن القيمة المؤثرة للموجات الدورية لاتساوي معدل الموجة على امتداد موجة كاملة ولاحتى على امتداد نصف موجة.

وهكذا يتضح أن قراءة الموشر الحقيقية لمقياس من النوع متحرك الملف تحتاج الى معايرة ظاهرية على واجهة المؤشر بحيث أنه إذا مر تيار متناوب قيمته 1.414 sin wt والذي قيمته المؤثرة تساوي $1A = 1.414 \times 0.707$ يجب أن تظهر القراءة أمبيراً واحداً بينما الحقيقة فإن التيار الذي يمر في الملف نفسه يساوي $0.9A = 1.414 \times 0.637$ لذلك فإن كافة قراءات هذا المقياس يجب أن تقسم على عامل مقداره 0.9 أو تضرب في عامل مقداره $1.11 = 1/0.9$ وهو ما يحدث بالفعل حيث أن قراءة المقياس على واجهته تظهر 1.11 مضروبة في متوسط التيار الفعلي الذي يمر في الملف فعلاً. وهذه المعايرة لايشعر بها مستخدم الجهاز إعتيادياً. ولذلك يجب الحذر في عدم إستخدام مثل هذا المقياس لقراءة التيار المستمر بسبب هذه المعايرة حيث عند ذلك سوف تظهر القراءات على الواجهة أكثر من الحقيقة (يجب قسمتها على 1.11 لتعطي القيمة الحقيقية للتيار المستمر).

اما المقياس من نوع الداينموميتر فلا يحتاج الى المعايرة لأنه لايتأثر بإتجاه التيار ويقرأ القيمة المؤثرة دائماً للتيار المتناوب والقيمة الصحيحة للتيار المستمر.

إن إشتقاق القيمة المؤثرة للموجة الجيبية الذي في المعادلات يحتاج الى المعامل 0.707 ويعطي متوسط موجة تم تقويمها بمعامل 0.637 كما مر أعلاه وهذا ينطبق للموجات الجيبية

فقط . أما لإيجاد موجة دورية أخرى فيمكن السير على المنوال نفسه لحساب القيمة التأثيرية أو القيمة المتوسطة بإستخدام التعريف نفسه رياضياً حيث

$$i_{rms} = \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} i^2 d\omega t}{2\pi}}$$

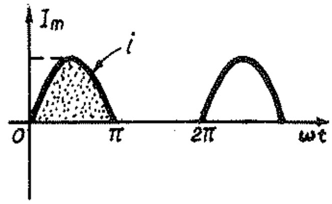
ويمكن إيجاد ذلك بالرسم حيث أن التكامل هو عبارة عن المساحة تحت المنحني الذي يمثل i مع الزمن لفترة دورة كاملة ثم يؤخذ المعدل (المساحة مقسومة على الفترة) ثم يؤخذ الجذر التربيعي لذلك.

مثال 10.2

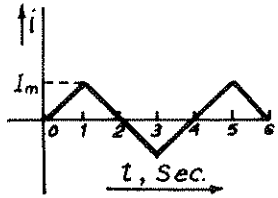
اوجد القيمة المؤثرة للموجات المبينة في الشكل 10.8

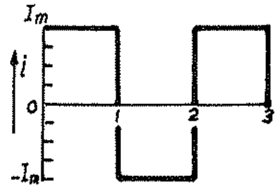
إذا مر هذا التيار في مقياس الملف المتحرك كم سيكون متوسط التيار الكلي الذي سيمر في الملف.

أوجد النسبة بينها (تدعى عامل الشكل).



(أ)





(جـ) (ب)

الشكل 10.8

الحل :

أ) الموجة الجيبية المارة في مقوم نصفي الموجة : يمكن وضعها باسلوب رياضي

$$i = I_m \sin\omega t \qquad 0 < \omega t < \pi$$

$$i = 0 \qquad \pi < \omega t < 2\pi$$

القيمة المؤثرة لهذه الموجة تساوي فيكون عامل الشكل

$$I_{r.m.s}^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi I_m^2 \sin^2\omega t \, d(\omega t) + \int_0^{2\pi} o \, d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{I_m^2}{2\pi}\left[\int_0^\pi \frac{(1-\cos 2\omega t)}{2} d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{I_m^2}{4}$$

$$\therefore I_{r.m.s} = \frac{I_m}{2} \qquad \ldots (10{\cdot}15)$$

فيكون متوسط هذه الموجة

$$I_{av} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^\pi I_m \sin\omega t \, d(\omega t) + \int_\pi^{2\pi} o \, d(\omega t)\right]$$

$$= \frac{I_m}{\pi} = 0{\cdot}318 \qquad \ldots (10{\cdot}16)$$

فيكون عامل الشكل

$$K = \frac{I_{r.m.s}}{I_{av.}} = \frac{0{\cdot}5\, I_m}{0{\cdot}318\, I_m} = 1{\cdot}572$$

ب) الموجة المربعة : ويمكن وضعها باسلوب رياضي

$$i = I_m \qquad 0 < \omega t < \pi$$

$$i = -I_m \qquad \pi < \omega t < 2\pi$$

فتوسط الموجة لفترة كاملة هو صفر. اما متوسطها بعد إجراء عملية التقويم كما في الشكل10.8ب و التي تمثل قراءة المقياس. فهو I_m والقيمة المؤثرة

$$I^2_{r.m.s} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} I_m^2\, d(\omega t) + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m)^2\, d(\omega t)\right]$$

$$I_{r.m.s} = I_m$$

لذا فعامل الشكل للموجة المربعة يساوي واحدا

جـ) الموجة المثلثة: يمكن وضعها بشكل رياضي

$$i = I_m t \qquad 0 < t < 1$$

$$i = 2I_m - I_m t \qquad 1 < t < 3$$

$$i = I_m t - 4I_m \qquad 3 < t < 4$$

فتوسط الموجة بعد تقويمها يمكن الحصول عليه كما يلي:

$$I_{av.} = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 I_m t\, dt + \int_1^2 (2I_m - I_m t)\, dt\right]$$

$$= \frac{I_m}{2}$$

القيمة التأثيرية للفترة نفسها:

$$I^2_{r.m.s} = \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (I_m t)^2\, dt + \int_1^2 (2I_m - I_m t)^2\, dt\right.$$

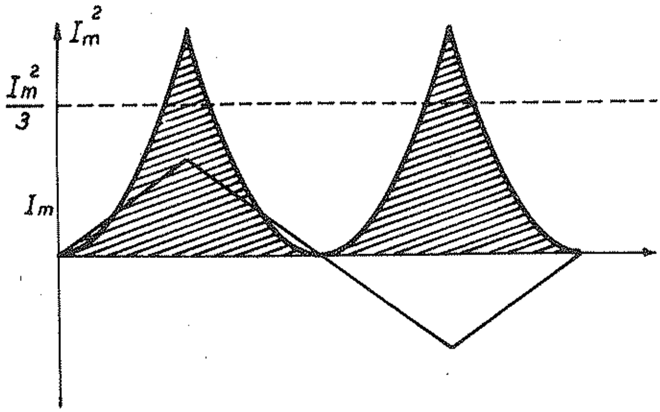
$$= \frac{I_m^2}{2}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] = \frac{I_m^2}{3}$$

$$I_{r.m.s} = \frac{I_m}{\sqrt{3}} = 0{\cdot}577\, I_m$$

وان عامل الشكل

$$K_f = \frac{0{\cdot}577\, I_m}{0{\cdot}5\, I_m} = 1{\cdot}155$$

ويمكن بوضوح تصور ايجاد القيمة المؤثرة بطريقة بيانية وذلك على اعتبار ان التكامل ماهو الا ايجاد المساحة تحت المنحني. فللفرع (جـ) في هذا المثال يمكن رسم الموجة التي تمثل مربع التيار بالشكل 10.9 والذي عند اخذ جذر معدل التربيع نحصل على القيمة المطلوبة. يمكن لاشكال معقدة ان تتم عملية التربيع نقطة نقطة ثم يؤخذ التكامل بحساب المساحة تحت منحني التربيع هذا ومن ثم يتم الحصول على القيمة المؤثرة باخذ جذر المعدل هذا.

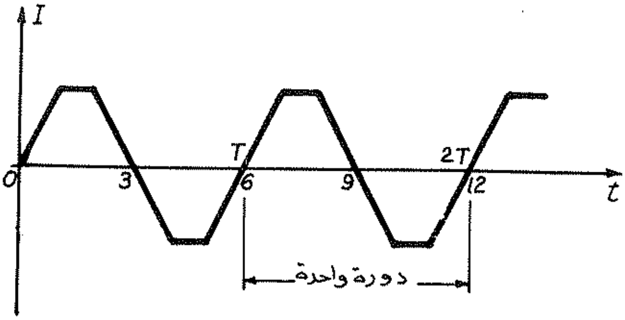


الشكل 10.9 حساب القيمة المؤثرة بيانياً.

ومن الجدير بالملاحظة ان التعامل مع الموجات الجيبية سوف يعطي القيمة المؤثرة لقيمة الفولتية او التيار اما اعطاء القيمة القصوى فيذكر إذا كان ذلك هو المقصود. كما يلاحظ ان الكميات المتناوبة يرمز لها بالحروف الصغيرة بخلاف كميات التيار المستمر. كما ان الكميات التي ترمز الى القيم المؤثرة تكتب بحروف كبيرة ايضا.

مثال (10.3)

اوجد القيمة المؤثرة للموجة المبينةفي الشكل 10.10



شكل 10.10 انظر المثال.

الحل:

نظرا لتناظر الشكل فبالامكان اخذ قيمة القيمة المؤثرة للموجة بكاملها حيث ان فترتها تعادل 6 ملي ثانية. كما أن بالامكان اخذ القيمة المؤثرة لنصف الموجة (من صفر الى ملي ثانية) او حتى لربعها (من صفر الى 1.5 ملي ثانية)

معادلة تغير التيار بخط مستقيم يمر بنقطة الاصل وانحداره $\frac{10}{1 \times 10^{-3}}$ اي المعادلة للفترة بين صفر وملي ثانية/ واحدة هي

$$i_1 = 10^4 t \qquad 0 < t < 1$$

اما للفترة من ملي ثانية واحدة الى 1.5 ملي ثانية فمعادلة التيار

$$i_2 = 10 \qquad 1 < t < 1{\cdot}5$$

القيمة المؤثرة لربع الموجة هي

$$I_{r.m.s} = \sqrt{\frac{1}{1{\cdot}5 \times 10^{-3}} \left[\int_0^{1 \times 10^{-3}} i_1^2 \, dt + \int_{1 \times 10^{-3}}^{1.5 \times 10^{-3}} i_2 \, dt \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1{\cdot}5} \left[\frac{10^8 t^3}{3} \right]_0^{10^{-3}} + \left[100t \right]_{10^3}^{1.5 \times 10^{-3}}}$$

$$= 7{\cdot}4 \text{ A.}$$

10.4 العلاقة بين الفولتية والتيار في مقاوم ومتسعة ومحث

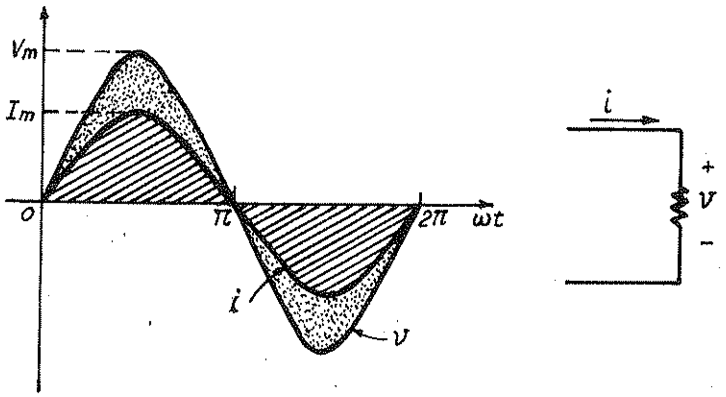
عندما تسلط فولتية متناوبة بصورة عامة فان التيار الذي يمر فيها يرتبط مع الفولتية وفق قانون اوم ايضا. فاذا كانت الفولتية المسلطة على المقاوم R هي :

$$v = V_m \sin \omega t \qquad (10.17)$$

كان التيار المار فيها

$$i = \frac{v}{R} = \frac{V_m}{R} \sin \omega t \qquad ...(10{\cdot}18)$$

يلاحظ ان كلا من موجتي الفولتية والتيار هما موجتان لهما الشكل نفسه (اي كلاهما جيبيتان) يبين الشكل 10.11 الفولتية والتيار الجيبيتين في مقاوم. اما العلاقة بين الفولتية المسلطة على متسعة مع التيار الذي يمر فيها فتكون وفق العلاقة 6.21 والتي هي :



الشكل 10.11 فولتية جيبية مسلطة على مقاوم والتيار المار فيه

$$i = C \frac{dv}{dt} \qquad ...(10{\cdot}19)$$

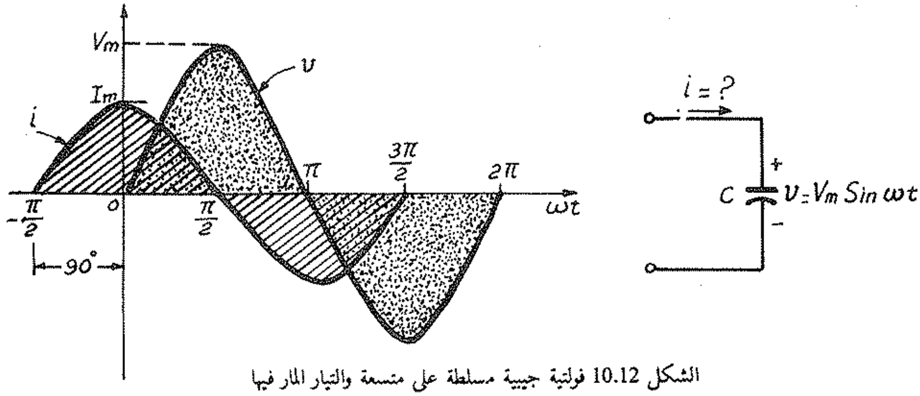
ويلاحظ ان هذه العلاقة كانت صحيحة في دوائر التيار المستمر لأن تغير الفولتية صفرا فكان التيار الذي يمر في المتسعة صفرا. اما ان كانت الفولتية ذات علاقة معينة مع الزمن كأن تكون جيبية مثلا كالمعادلة 10.3 فان التيار يكون متغيرا مع الزمن ايضا. اي :

$$i = C \frac{d}{dt} V_m \sin(\omega t)$$

$$= C V_m^{\omega} \cos \omega t \qquad ...(10\cdot20)$$

يلاحظ في هذه الحالة ان موجة الفولتية كانت جيبية. اما موجة التيار فاصبحت جيبتامية وهي موجة جيبية ايضا ، الا انها مزاحة عن موجة الفولتية بزاوية مقدارها 90 درجة. يبين الشكل 10.12 موجتي فولتية وتيار متسعة. ويلاحظ ان المعادلة 10.20 يمكن كتابتها كما يلي:

$$i = \omega C V_m \sin(\omega t + 90)$$



الشكل 10.12 فولتية جيبية مسلطة على متسعة والتيار المار فيها

اما للمحث فقد كانت العلاقة بين الفولتية والتيار وفق المعادلة 10.2 ، حيث

$$v = L \frac{di}{dt} \qquad ...(10\cdot22)$$

ومنها يتضح أن الفولتية عبر محث يمرر تياراً مستمراً تساوي صفراً . أما إذا كان التيار متغيراً مع الزمن فإن المعادلة أعلاه يمكن إعادة صياغتها بشكل.

$$i = \frac{1}{L} \int v \, dt$$

فاذا كان التيار المار في المحث جيبياً بصيغة

$$i = I_m \sin \omega t$$

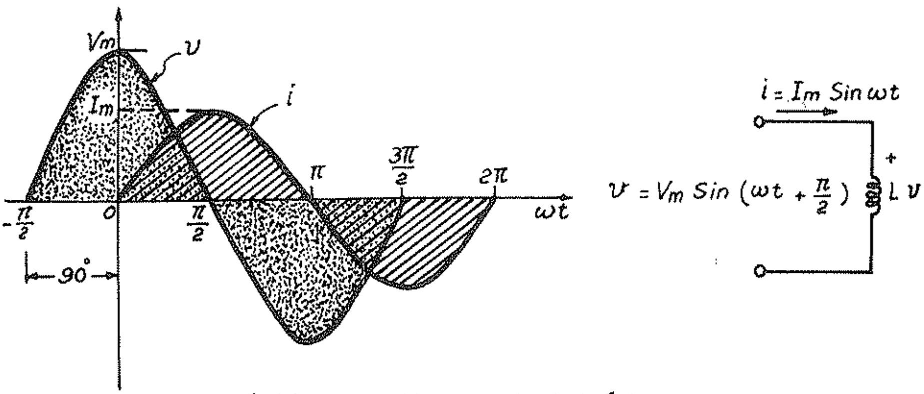
كانت الفولتية

$$v = \omega L\, I_m \cos \omega t = V_m \cos \omega t \tag{10.23}$$

حيث $V_m = \omega L\, I_m$ ويمكن كتابة المعادلة (10.23)

$$v = V_m \sin (\omega t + 90^\circ) \tag{10.24}$$

ومن مقاومة (10.24) و (10.2) يلاحظ ان كلا الموجتين جيبيتان، لكن بينها فرق طور مقداره 90 درجة. كما موضح في الشكل 10.13.



الشكل10.13 فولتية جيبية مسلطة على محث والتيار المار فيه.

من مقارنة الاشكال الثلاثة 10.11 و 10.12 و 10.13 يلاحظ انه عند تسليط فولتية على مقاوم او محث او متسعة فان شكل موجة التيار يكون جيبيا ايضا. الا انه من الواضح ان هناك اختلافا بين العناصر الثلاثة في موقع تقاطع الموجة الجيبية مع محور الزمن. ففي المقاوم يقطع التيار محور الزمن في النقطة التي تقطع فيها موجة الفولتية محور الزمن نفسها. اي انه لايوجد فرق زاوية بين موجتي الفولتية والتيار في المقاوم. اما في المتسعة فان موجة التيار تقطع محور الزمن قبل موجة الفولتية بزاوية مقدارها 90 درجة. لذا يقال عن موجة التيار بانها تسبق موجة الفولتية بزاوية مقدارها 90 درجة. ويتضح ذلك من الشكل 10.12 حيث تردد موجة التيار تقطع محور الزمن عندما ωt تساوي -90°. ويمكن ان يقال ان موجة

الفولتية متأخرة (او متخلفة) عن موجة التيار بزاوية مقدارها 90 درجة. اما في المحث فان هناك فرق زاوية بين التيار والفولتية ايضا. الا ان هذا الفرق هو بعكس حالة المتسعة حيث يلاحظ ان موجة التيار تتأخر (او تتخلف) عن موجة الفولتية بزاوية مقدارها 90 درجة. ويتضح ذلك من الشكل 10.13 حيث ان الموجة تقطع محور الزمن حينما ωt تساوي -90 درجة.

لقد رسمت منحنيات الفولتية والتيار في الاشكال 10.11 و 10.12 و 10.13 نفسها كل بمقياس رسم مختلف. فوحدة التيار هي الامبير والقيمة القصوى للتيار في الشكل كانت $\frac{V_m}{R}$ والتي هي وحدة فولتية (فولت) مقسومة على وحدة مقاوم (اوم). اما القيمة القصوى للتيار في المتسعة، كما يتضح من المعادلة 10.20 فقد كانت $V_m\omega C$ وهي وحدة فولتية مضروبة في وحدة (ωC) والتي يجب ان تكون ذات وحدة تعادل مقلوب الاوم (سيمنس) اي ان وحدة $\frac{1}{\omega C}$ هي الاوم، لذا فان الكمية $\frac{1}{\omega C}$ تتصرف تصرفا مشابها لتصرف المقاومة.

اما في المحث فمن النظر في المعادلة 10.24 يتضح ان القيمة القصوى لموجة اليتار هي $\frac{V_m}{\omega L}$ والتي هي وحدة فولتية مقسومة على وحدة ωL. لذا فان وحدة ωL يجب ان تكون هي الاوم ايضا. اي ان المحث يتصرف تجاه الفولتية الجيبية تصرف مقاومة قيمتها ωL (عدا انه يزيح الموجة بزاوية مقداراها 90 درجة. بينما لاتزيح المقاومة موجة الفولتية باية زاوية).

مما تقدم يتضح ان المتسعة والمحث تظهران نجاه الموجة الجيبية للفولتية اعاقة معينة تشبه إعاقة المقاومة مع وجود فرق في الزاوية بين موجة الفولتية والتيار في كل منها.

لذا يقال ان لها مفاعلة* تجاه التيار المتناوب. فالمفاعلة (او الرادّة) هي النسبة بين الفولتية عبر المتسعة او المحث والتيار المار في اي منها. وحدة المفاعلة (الرداة) هي الاوم وهي تشبه بذلك وحدة المقاومة. اما موجتا الفولتية عبر المفاعلة والتيار المار فيها فبينها زاوية مقدارها 90 درجة، حيث تسبق الفولتية التيار في المحث، بينما تتخلف الفولتية عن التيار في المتسعة. ويقال عن هذا الاختلاف في الزوايا ان هناك فرق طور بين الفولتية عبر المفاعلة

---

* تترجم كلمة Reactonce في بعض المراجع بكلمة رادة وسنستخدم هنا كلمة مفاعلة لها.

(الرادة) والتيار المار فيها لغرض التمييز بين مفاعلة المتسعة ومفاعلة المحث تدعى المفاعلة الاولى بالمفاعلة السعوية والثانية بالمفاعلة الحثية. يرمز للمفاعلة بالحرف X مع توصيف سفلي بحرف c او L حسب نوعها. فالمفاعلة السعوية

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \tag{10.25}$$

والمفاعلة الحثية

$$X_L = \omega L \tag{10.26}$$

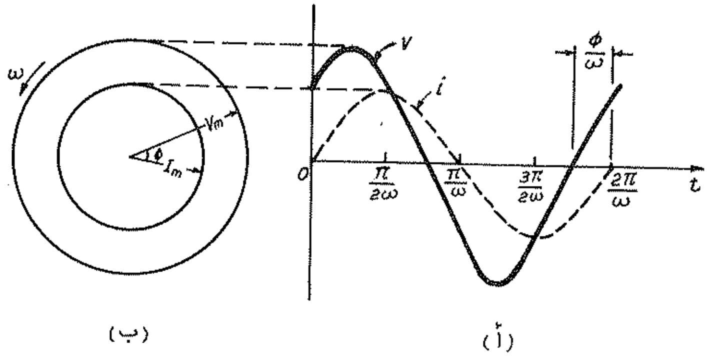
10.5 العلاقات الطورية بين الفولتية والتيار

اذا كان شكل موجتي الفولتية والتيار جيبي ولم يكن بينها زاوية (مثلا اذا كان كلاهما جيبي اوكلاهما جيبتامي) قيل ان فرق الطور بينها صفرا. وهو مايحدث في المقاومات . اما في المحثات والمتسعات فان فرق الطور بين الفولتية والتيار يستوجب اتباع اساليب جديدة لحل مسائلها متجنبين العلاقات المثلثية المعقدة، خاصة حينما تكون الدوائر الكهربائية محتوية على محثات ومتسعات ومقاومات في الوقت نفسه. وقبل الخوض في حل الدوائر الكهربائية المحتوية على عناصر متعددة يجدر بنا تقديم ارضية صلبة لكي يسهل التعامل مع هذه الدوائر.

بالرجوع الى الشكل 10.14 يلاحظ ان الموجة الجيبية ذات علاقة واضحة مع نصف الدائرة الذي يدور بسرعة ω حول مركزها. فمسقط نصف القطر هذا على خط عمودي يشكل ازاحة الموجة الجيبية مع الزمن . ان وجدت موجة اخرى جيبية ايضا تتغير مع الزمن بالتردد نفسه الا انها مزاحة عن الاولى بفرق طور مقداره φ مثلا فانه يمكن تمثيل هذه الموجة بنصف قطر اخر على الدائرة اليسرى يصنع مع نصف القطر الاول زاوية تساوي فرق الطور بين الموجتين الجيبيتين اي φ . ان نصفي القطرين هذين اللذين بينها فرق طور يدوران بسرعة ثابتة مقدارها ω بعكس اتجاه عقرب الساعة. ولكنها يحافظان دوما على الزاوية بينها. وحيث ان سرعتها واحدة يمكننا تصورهما في لحظة ما ثابتين في الفراغ ويصنعان بينها زاوية ثابتة. يدعى كل من نصفي القطرين هذين بالطوري* والذي

---

* تترجم كلمة Phasor أحياناً بالمطاور وسنستخدم هنا كلمة طوري.



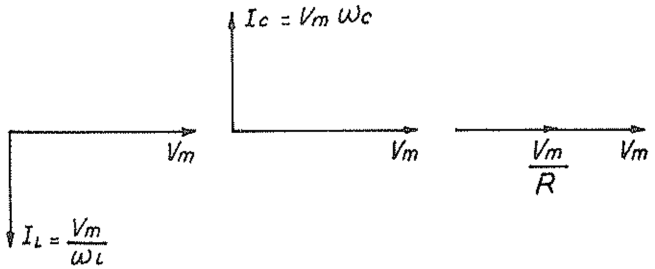
الشكل 10.14 العلاقات بين التيار والفولتية وطوريها

يمثل بسهم يميل عن الاتجاه الموجب لمحور السينات بزاوية تعتمد على الزاوية التي بدأت منها الموجة الجيبية. بالرغم من ان فكرة الطوري تبدو غريبة بعض الشئ الا انه سيلاحظ انها مفيدة جدا في حل دوائر التيار المتناوب فقد امكن بمجرد تصور الطوري ثابتا في الفراغ التخلص من تغير الموجة الجيبية مع الزمن والذي يظهر تارة بشكل $\sin\omega t$ كما في المعادلة 10.2 وتارة بشكل $\cos \omega t$ كما في المعادلة 10.23.

يشترك الطوري مع المتجه (الذي مر ذكره في شدة المجال الكهربائي وغيره) في خواصه الرياضية. فكلاهما يمثلان بمقدار وزاوية . الا ان الميزة الرئيسية للطوري انه يدور بسرعة ثابتة حول نقطة معينة لكنه يتبث في موقع معين لكي يسهل تمثيله بالرسم. اما بعد ذلك فهو يشبه المتجه. كما يلاحظ ان المتجه يكون ذا علاقة مع الاحداثيات في الفراغ. اما الطورى فيمثل كمية غير اتجاهية اصلا وكالفولتية او التيار اللتان لاعلاقة للمحاور الثلاثة معها. لذا باستخدام هذا المفهوم الجديد يمكن تسهيل التعامل مع الفولتيات والتيارات ذات العلاقة بالمحثات والمتسعات كما مر في الفقرة السابعة وبالنحو التالي:

في المقاومة ، عند تسليط فولتية جيبية قيمتها القصوى V_m يكون التيار ذا قيمة قصوى مقدارها $\frac{V_m}{R}$ وهو في زاوية الفولتية نفسها كما في الشكل 10.15 أ. اما عند تسليط فولتية جيبية قيمتها القصوى V_m على متسعة فيكون التيار ذا قيمة قصوى مقدارها $V_m\, \omega C$ وزاوية طورها تساوي 90 درجة. اي ان الكميتين يمكن تمثيلها بطوريين كما مبين في الشكل 10.15 ب

اما للمحث فعندما تسلط فولتية قيمتها القصوى V_m فانها تمرر تيارا قيمته القصوى تساوي $\frac{V_m}{\omega L}$ ويصنع زاوية مقدارها 90 درجة مع زاوية الفولتية. يبين الشكل 10.15 ج هاتين الكميتين ممثلتين بطوريين.



الشكل 10.15 التيار والفولتية ممثلين بطوريين في أ) مقاوم ب) متسعة ج) محث

مثال (10.4)

سلطت الفولتية $v = 150 \sin (100 \pi t\ 30^o$ على أ) مقاومة قيمته 15 أوم ب) متسعة سعتها $212 \mu F$ ج) محث محاثته $0.047H$. احسب التيار في كل حالة ومثله بمخطط طوري.

الحل:

أ)التيار المار في المقاوم بموجب قانون اوم

$$i = \frac{v}{R} = \frac{150}{15} (\sin 100 \pi t + 30^o)$$

$$= 10 \sin (100 \pi t + 30^o)$$

والتمثيل الطورى للتيار هو $10 \underline{/ 30^o}$. اي ان القيمة القصوى هي 10 امبير ويصنع الطوري زاوية مقدارها 30^o مع محور السينات وهي الزاوية التي يصنعها

طوري الفولتية في هذه الحالة ايضا . كما مبين في الشكل 10.16أ.

ب) التيار المار في المتسعة.

$$i = C \frac{dv}{dt}$$

$$= 212 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (150 \sin (100 \pi t + 30^{o}))$$

$$= 10 \sin (100 \pi t + 120^{o})$$

وتمثل طوريا $10 \underline{/ 120^{o}}$ كما مبين في الشكل 10.16 ب

أما في المحث فإن التيار يتخلف عن الفولتية بـ 90^{o} أو بكلمة أخرى

$$i = \frac{1}{L} \int v\, dt = \frac{1}{L} \int V_m \sin (100 \pi t + 30^{o})$$

$$= - \frac{V_m}{\omega L} \cos (100 \pi t + 30^{o}) = \frac{V_m}{\omega L} \sin (100 \pi t + 30^{o} + 90^{o})$$

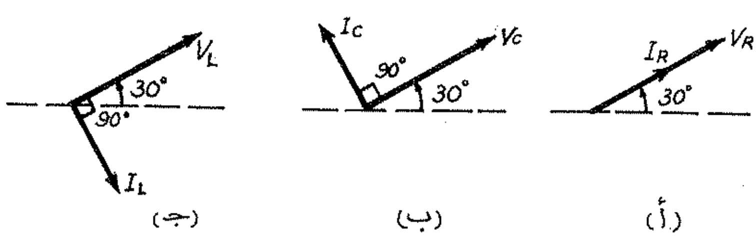
ويمكن كتابة ذلك بشكل

$$i = I_m \sin (100 \pi t - 60^{o})$$

حيث $V_m = wl\ Im$، لذا فان

$$I_m = \frac{V_m}{\omega L} = \frac{150}{100 \pi \times 0{\cdot}047} = 10$$

والتمثيل الطوري للتيار يكون $10 \underline{/ - 60^{o}}$ كما في الشكل 10.16 جـ.

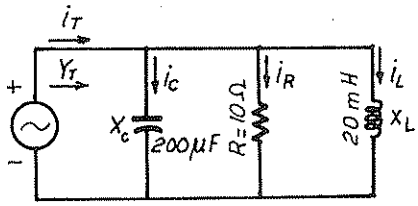


الشكل 10.16 انظر المثال 10.4
أ) مقاومة ب) متسعة جـ) محث

مثال (10.5)

ثلاثة عناصر مربوطة على التوازي: مقاوم مقداره 10 أوم ومحث محاثته 20mH ومتسعة سعتها $200\mu F$.سلطت عليها فولتية جيبية قيمتها القصوى 100 فولت وترددها 50Hz احسب التيار الكلي المجهزمن المصدر (قيمة قصوى وزاوية).

الحل:



الشكل 10.17 انظر المثال 10.5

التيار المار في المقاومة قيمته القصوى I_R

$$I_R = \frac{100}{10} = 10 \text{ A}$$

ويصنع زاوية مقدراها صفرا مع فولتية المصدر.
اما التيار في المحث فقيمته القصوى I_L حيث:

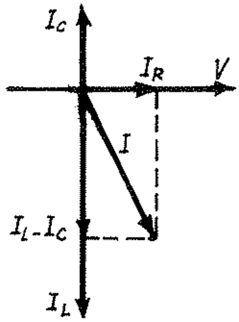
$$I_L = \frac{100}{2\pi \times 50 \times 20 \times 10^{-3}} = 3{\cdot}18 \text{ A}$$

ويصنع زاوية مقدارها 90 درجة متخلفا عن الفولتية.
اما المتسعة فقيمة التيار القصوى فيها I_C، حيث:

$$I_C = \frac{100}{1/2\pi \times 50 \times 200 \times 10^{-6}}$$

ويصنع زاوية مقدارها 90 درجة سابقا الفولتية.

يبين الشكل 10.19 المخطط الطوري للتيارات الثلاثة بأقيامها القصوى والتيار الكلي الذي هو مجموع التيارات الثلاثة طوريا.



الشكل 10.18 مخطط المتجهات للمثال 10.5

وحيث ان تيار المتسعة بعكس اتجاه تيار المحث ، لذا فان محصلتها هي الفرق بينها وباتجاه التيار الاكبر منها إن القيمة القصوى لتيار المفاعلة (الرادّة).

$$I_L - I_C = 31{\cdot}8 - 6{\cdot}28 = 25{\cdot}52 \text{ A}$$

ومحصلة هذا التيار مع تيار المقاومة (المتعامدين) تساوي التيار الكلي الذي قيمته القصوى

$$I = \sqrt{(25{\cdot}52)^2 + 10^2} = 27\text{A}$$

ويصنع زاوية متخلفة ظلها

$$\theta = \tan^{-1} \frac{25{\cdot}52}{10} = 68{\cdot}6^o$$

10.6 الممانعة Impedance والمسايرة Admittance

ظهرت من الفقرة السابقة ان هناك ثلاث كميات وحداتها هي الاوم. وهي المقاومة والمفاعلة الحثية والمفاعلة السعوية. تتصرف المفاعلة الحثية تصرف مقاومة مقدارها ωL ، لكنها تتسبب في ازاحة طور مقدارها 90 بين الفولتية والتيار بحيث يتخلف التيار عن الفولتية . واما المتسعة فتتصرف تصرف مقاومة مقدارها $\frac{1}{\omega C}$ وتتسبب في ازاحة طور مقدارها 90 درجة بحيث يسبق التيار الفولتية. من ذلك يتضح

اشتراك هذه الكميات الثلاث بخواص مشتركة الا وهي التسبب في فرق جهد عبرها حينما يمر بها تيار جيبي. كما انها تتسبب في فرق طور بين الفولتية والتيار يتراوح بين $+90°$ الى $-90°$. يدعى كل واحد من هذه العناصر بمفرده او كمجموع لأكثر من عنصر واحد بالممانعة والتي يمكن ان تكون مقاومة او مفاعلة او مزيجا منها معا. اي ان الممانعة بصورة عامة هي عبارة عن حاصل قسمة الفولتية على التيار لعنصر او مجموعة عناصر فهي :

$$Z = \frac{V\underline{/\theta_v}}{I\underline{/\theta_i}} = \frac{V}{I}\underline{/\theta_v - \theta_i} = \frac{V}{I}\underline{/\varphi} \qquad ...(10\cdot26)$$

حيث φ تتراوح بين $+90°$ و $-90°$.

كما يلاحظ عند جمع المفاعلات والمقاومات ان المفاعلات الحثية والسعوية ذواتي اتجاهين متعاكسين مجموعها هو الفرق الحسابي بين قيمتيها واتجاه المحصلة هو اتجاه اكبرهما. اما جمع مفاعلة (او محصلة مفاعلات) مع مقاومة فيتم بتطبيق قاعدة فيثاغورس نظرا لتعامدهما وزاوية طور المحصلة النهائية يمكن حسابها بأخذ ظل الزاوية، حيث ان ظل الزاوية هو النسبة بين المفاعلة الى المقاومة

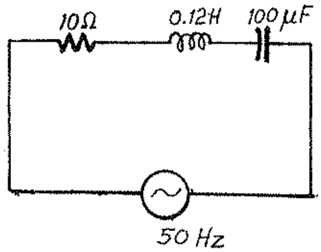
$$\varphi = \tan^{-1} X / R \qquad (10.26)$$

مما تقدم يتضح امكان تمثيل المقاومات والمفاعلات والممانعات بشكل متجهات ، حيث تمثل المقاومة بمتجه على محور السينات والمفاعلة الحثية بالاتجاه الموجب لمحور الصادات. اما المفاعلة السعوية فتمثل بمتجه الى الأسفل اي بالأتجاه السالب لمحور الصادات. ويلاحظ ان اتجاه المفاعلة السعوية والحثية هو بعكس اتجاه التيار المار فيها (على فرض ان طوري الفولتية مرسوم باتجاه محور السينات).

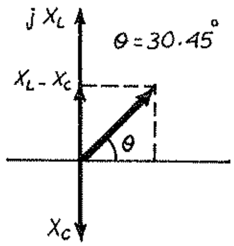
مثال (10.6)

اوجد الممانعة الكلية لثلاث عناصر مربوطة على التوالي عند التردد 50 هرتز: المقاومة مقدارها 10 أوم والمحاثة مقدارها 0.12 هنري والمتسعة قيمتها $100\mu F$.

الحل:



الشكل 10.19 دائرة المثال 10.6



الشكل 10.20 مخطط متجهات المثال

مفاعلة المحث

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi \text{ x } 50 \times 0{\cdot}12 = 37{\cdot}70 \ \Omega$$

وتمثل بمتجه نحو الاعلى في الشكل 10.20 :
اما المتسعة فمفاعلتها تساوي

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times 100 \times 10^{-6}} = 31{\cdot}83 \ \Omega$$

ومحصلة المفاعلتين هي الفرق بينهما وباتجاه المفاعلة الحثية اي الى الاعلى.

$$37{\cdot}70 - 31{\cdot}83 = 5{\cdot}87 \ \Omega$$

الممانعة الكلية تعادل الجذر التربيعي لمجموع مربعي المقاومة ومحصلة المفاعلة اي:

$$Z = \sqrt{10^2 + (5{\cdot}87)^2} = 11{\cdot}6\ \Omega$$

واتجاه الممانعة الكلية يصنع الزاوية θ مع محور السينات حيث

$$\theta = \tan^{-1}\frac{5{\cdot}87}{10} = 32{\cdot}32^o$$

وهي ممانعة ذات خواص حثية نظرا لان خواص المحاثة قد غلبت على خواص المتسعة.

في المقاومات سبق ان عرفنا التوصيلية بانها مقلوب المقاومة وان وحدتها هي السيمنس. لقد استخدمت التوصيلية في دوائر التيار المستمر لغرض جمع المقاومات على التوازي. عند ربط ممانعات على التوازي نحتاج الى اخذ مقلوبات هذه المانعات وجمعها للحصول على مقلوب الممانعة الكلية شأنها شأن ربط المقاومات على التوازي. لذلك تعرف المسايرة admittace بأنها مقلوب الممانعة اي:

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{10.27}$$

وعندر بط ممانعات على التوزاي تكون

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \tag{10.28}$$

او بكلمة اخرى

$$Y_T = Y_1 + Y_2 + Y_3 \tag{10.29}$$

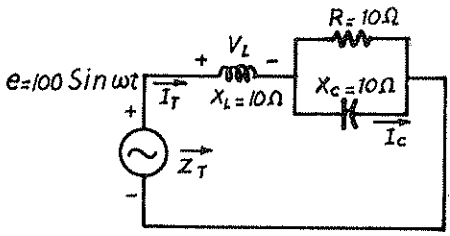
ومن الضروري ملاحظة ان الجمع المشار اليه في المعادلتين (10.29) و (10.30) هو جمع اتجاهي اي باخذ الاتجاهات بنظر الاعتبار. كما ان اخذ مقلوب الممانعة يعني اخذ مقلوب قيمتها. اما اتجاه المسايرة فيصنع زاوية مع محور السينات تعادل زاوية الممانعة مع المحور نفسه لكنها باشارة سالبة وذلك لأن أخذ مقلوب متجه يعني أخذ مقلوب الإتساع وأخذ الزاوية نفسها بعكس الإتجاه.

مما تقدم يتبين ان قوانين التيار المستمر تنطبق على دوائر التيار المتناوب مع اخذ اشارات المتجهات او الطوريات التي تمثل الكميات بنظر الاعتبار. ففي قانون اوم بدل ان تكون المقاومة هي حاصل قسمة الفولتية على التيار تكون الممانعة عبارة عن حاصل قسمة الفولتية على التيار وبدلا من تطبيق قانون كرشوف الاول الذي ينص على ان مجموع التيارات التي تدخل ملتقى تساوي صفرا يصبح في دوائر التيار المتناوب ان مجموع الطوريات الممثلة للتيارات الداخلة الى ملتقى يساوي صفرا. ويشبه ذلك قانون الفولتية لكرشوف والذي يمكن ان يصاغ بان مجموع الطوريات الممثلة للفولتيات حول دارة مقفلة يساوي صفرا.

هذا ويلاحظ اننا قد طبقنا فعلا قانون كرشوف الاول في المثال 10.4 حيث كان التيار الكلي هو المجموع الطوري للتيارات المارة في العناصر الثلاثة كما طبقنا قانون كرشوف الثاني في المثال 10.5 حينما وجدنا الممانعة الكلية لثلاث عناصر مربوطة على التوالي.

مثال 10.7

في الدائرة المبينة في الشكل 10.21 اعطيت قيم المقاومات والمفاعلات بالاوم. يطلب ايجاد تيار المصدر.



الشكل 10.21 دائرة المثال 10.7

الحل :

نحاول ايجاد الممانعة المكافئة للمتسعة والمقاومة المربوطتين على التوازي. مسايرة المتسعة تساوي $\frac{1}{10}$ سيمنس ومسايرة المقاومة (توصيليتها) تساوي $\frac{1}{10}$ سيمنس فتكون المسايرة الكلية :

$$Y_T = \sqrt{(0\cdot1)^2 + (0\cdot1)^2} = 0\cdot1414\ \Omega$$

وزاويتها θ تساوي

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0\cdot1}{0\cdot1} = 45^o$$

اي ان الممانعة المكافئة للمتسعة والمقاومة المربوطتين على التوازي تساوي

$$Z_T = \frac{1}{0\cdot1414\,\underline{/45^o}} = 7\cdot07\ \underline{/-45^o}\ \Omega$$

وهي عبارة عن متجه يصنع زاوية مقدارها 45° تحت محور السينات ويمكن تحليله الى مركبتين احداهما :

وباتجاه محور السينات والمركبة الاخرى :

$$7\cdot07 \cos 45^o = 5\Omega$$

$$7\cdot07 \sin 45^o = -5\Omega$$

اي 5 اوم بالاتجاه السالب لمحور الصادات.
وبجمع الاخيرة مع مفاعلة المحث التي تمثل بمتجه قيمته 10 اوم نحو الاعلى نحصل على

$$X_T = 10 - 5 = 5\Omega$$

فتكون الممانعة الكلية للدائرة محصلة الاخيرة مع المقاومة 5 اوم اي

$$Z = \sqrt{5^2 + 5^2} = 7\cdot07\ \Omega$$

وتصنع زاوية مقدارها

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{5}{5} = 45^o$$

فيكون التيار الكلي المار في الدائرة ذا إتساع.

$$\frac{100}{7\cdot07} = 14\cdot14\ A$$

ويصنع زاوية مقدارها 45°− نظراً لأن الدائرة الكلية حثية وذلك لتغلب تأثير المحاثة على المتسعة. أي ان التيار يمكن كتابته بشكل $i = 14.14 \sin(wt - 45^o)$

10.7 القدرة وعامل القدرة

عرفت القدرة في دوائر التيار المستمر بأنها حاصل ضرب الفولتية في التيار. اذا كان كل من الفولتية والتيار متغيرين مع الزمن ، فمن البديهي ان تكون القدرة متغيرة مع الزمن ايضا. فعند مرور تيار جيبي في مقاومة ماتكون القدرة :

$$P = i^2R \tag{10.30}$$

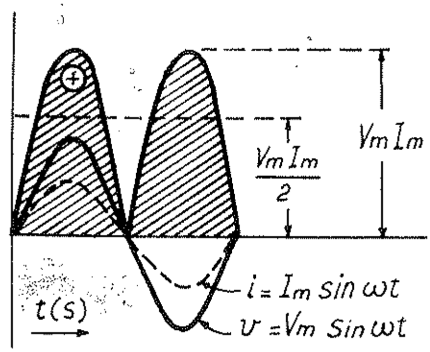
اذا كان التيار ممثلا بـ

$$i = I_m \sin \omega t$$

كانت القدرة

$$P = I_m^2 R \sin^2 \omega t$$

ويلاحظ ان منحني مربع الموجة الجيبية هو موجة جيبية ايضا ، الا انه يزاح عن محور الزمن بمقدار معين كما مبين في الشكل 10.22 . كما ان تردده يعادل ضعف تردد موجة التيار.



الشكل 10.22 تغير القدرة المتناوبة المصروفة في مقاوم مع الزمن

وحيث ان القدرة تستهلك في المقاومة عادة بشكل حرارة فان تغيرها مع الزمن يكون ذا معدل محدد لايساوي صفرا. ويتضح ذلك من الشكل 10.22 ايضا. يمكن ايجاد متوسط القدرة رياضيا.

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_m^2 R \sin^2 \omega t \, d(\omega t) \qquad ...(10\cdot31)$$

ويتحويل مربع الجيب بدلالة ضعف الزاوية

$$P = \frac{I_m^2 R}{2\pi} \int_2^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \, d(\omega t)$$

$$= \frac{I_m^2 R}{2} \qquad ...(10\cdot32)$$

وحيث ان العلاقة بين القيمة المؤثرة والقيمة العظمى هي

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

لذلك فان متوسط القدرة لتيار جيبي

$$P_{av} = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 R = I_{eff}^2 R \qquad ...(10\cdot33)$$

كما يمكن كتابة ذلك باشكال اخرى

$$P_{av} = \frac{V_{eff}^2}{R} = V_{eff} I_{eff} \qquad ...(10\cdot34)$$

اما عند تسليط فولتية جيبية على متسعة فان التيار يكون جيبتماميا كما مر بنا سابقا . اي ان .

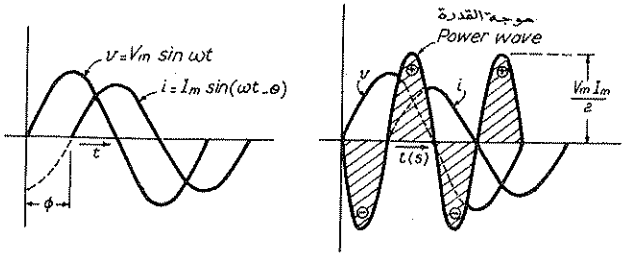
$$v = V_m \sin \omega t$$

$$i = I_m \cos \omega t$$

فتكون القدرة الانية في المتسعة

$$P = v_i = V_m I_m \sin \omega t \cos \omega t \qquad ... (10\cdot35)$$

يبين الشكل 10.23 شكل موجة القدرة المعطاة بالمعادلة (10.35) المجهزة الى متسعة ويتبين من الشكل ان موجة القدرة جيبية ايضا ومتناظرة حول محور الزمن . اي ان متوسطها يساوي صفرا . كما يلاحظ ان ترددها يعادل ضعف تردد موجة الفولتية او التيار. ويمكن اثبات ذلك رياضيا بأخذ متوسط القدرة وفق المعادلة (10.35)



الشكل 10.23 القدرة في متسعة والعلاقات الطورية بين الفولتية والتيار

$$P_{av.} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_m I_m \sin \omega t \cos \omega t \, d\omega t$$

$$= \frac{V_m I_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\omega t}{2} \, d(\omega t) = 0$$

تحتاج فكرة ان متوسط القدرة المجهزة الى متسعة يساوي صفرا بعض الايضاح . ان جزءا من القدرة يعطى من المصدر الى المتسعة فتخزن فيها طاقة معينة في المجال الكهربائي داخلها (في الجزء الموجب من موجة القدرة المبينة في الشكل 10.23) . اما بعد ذلك (اثناء جزء الموجة السالب) فتسترجع الطاقة من المتسعة الى المصدر. وهذه الطاقة مساوية لتلك المجهزة للمتسعة اثناء نصف الموجة الاول . فيكون متوسط القدرة مساو للصفر. كما يمكن النظر الى المتسعة كأداة لاتقوم بتحويل الطاقة الكهربائية الى اي نوع اخر من انواع الطاقة (حرارية او ضوئية او صوتية ... الخ) . لذلك فليس هناك فقدان في الطاقة المجهزة اليها . وهذا يبرر النتيجة المشار اليها .

اما عند تجهيز قدرة الى محث نتيجة تسليط فولتية جيبية على طرفيه فان التيار الذي يمر فيه يكون جيبتماميا ايضا ، لكنه باشارة سالبة بالمقارنة مع تيار المتسعة . ويؤدي ذلك الى الوصول الى النتائج التي توصلنا اليها في حالة المتسعة تماماً فلا يفقد في المحث اية قدرة . كما ان الطاقة المجهزة الى المحث خلال نصف موجة تخزن فيه بشكل طاقة في المجال الكهرومغناطيسي وتستعاد في جزء الموجة الاخر.

مما تقدم يتبين ان العنصر الوحيد من بين عناصر دوائر التيار المتناوب (المقاوم والمتسعة والمحث) الذي تفقد فيه قدرة هو المقاوم . وهذا صحيح ايضا في الدوائر التي تحتوي مزيجا من هذه العناصر فاذا كان هناك ممانعة تحتوي على عناصر مقاومية وعناصر مفاعلية معا فان فرق الطور بين التيار والفولتية المسلطة يكون واضحا . فمثلا لذا كان هناك ممانعة حثية قيمتها وزاويتها θ ، وسلطت عليها فولتية بشكل :

$$v = V_m \sin \omega t \qquad \text{... (10.36)}$$

كان التيار المار فيها

$$i = \frac{V_m}{z} \sin(\omega t - \theta) \qquad \ldots (10.37)$$

فتكون القدرة المجهزة الى المانعة

$$p = v_i = \frac{V_m^2}{z} \sin^2 \omega t \sin(\omega t - \theta) \qquad \ldots (10.38)$$

وبأخذ متوسط هذه القدرة

$$P_{av} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{V_m^2}{z} \sin \omega t \sin(\omega t - \theta)\, d\omega t$$

$$= \frac{V_m^2}{2\pi z} \int_0^{2\pi} (\sin^2 \omega t \cos\theta - \sin \omega t \cos \omega t \sin\theta)\, d\omega t$$

$$= \frac{V_m^2}{2xz} \cos\theta \qquad \ldots (10.39)$$

وبالتعويض عن

$$V_{eff} \qquad \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

$$P_{av} = \frac{V_{eff}^2}{z} \cos\theta$$

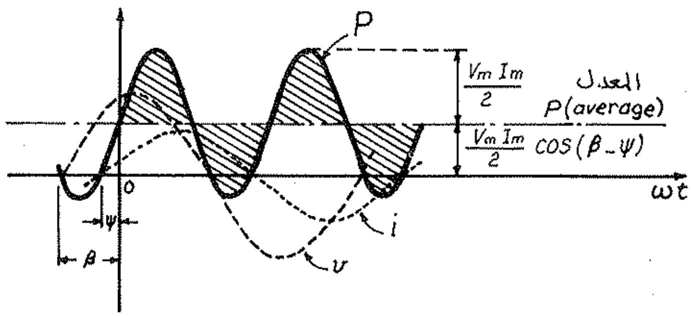
والتي يمكن كتابتها بصيغ اخرى

$$P_{av} = V_{eff} I_{eff} \cos\theta$$

$$= I_{eff}^2 z \cos\theta$$

$$= I_{eff}^2 z \quad \frac{R}{z} = I_{eff}^2 R \qquad \ldots (10.40)$$

يبين الشكل 10.24 موجة القدرة ، حيث يتضح ان شكلها جيبي ايضا ذا متوسط محدد لايساوي صفرا . كما يلاحظ ان جزءا من القدرة يكون ذا قيمة سالبة . ويعني ذلك خزن جزء من الطاقة في المجال الكهرومغناطيسي للمحث . ويسترجع ذلك الجزء بعد ذلك . الا ان القدرة المجهزة من المصدر تزيد عن القدرة المسترجعة من المحث . ويتضح ذلك من عدم تناظر الموجة . كما يلاحظ ان متوسط الموجة يعادل حاصل ضرب القيمة التأثيرية للفولتية والقيمة التأثيرية للتيار مضروبتين في جيبتمام زاوية فرق الطور بينها . وتنطبق هذه القاعدة على الحالات الثلاث التي درسناها قبل قليل ايضا . فللمقاومة يكون



الشكل 10.24 القدرة المجهزة الى دائرة حثية من فولتية متناوبة

فرق الطور بين الفولتية والتيار صفرا. فيكون جيبتمام هذه الزاوية مساو للواحد فتصبح المعادلتان (10.39 و (10.40) مطابقتين للمعادلات (10.22) و (10.33) و (10.34) ، حيث (Z =R). اما للمتسعة (وكذلك للمحث) فان فرق الطور بين الفولتية والتيار يساوي 90 درجة. حيث ان جيبتمام هذه الزاوية يساوي صفرا ، فان القدرة حسب المعادلة (10.39) تصبح صفرا. وهي النتيجة التي حصلنا عليها باخذ متوسط المعادلة (10.35) للمتسعة. لذا فعادلة القدرة المعطاة بالعلاقة (10.39) و (10.40) هي معادلة عامة تصلح لكافة دوائر التيار المتناوب وتشكل الدوائر المقاومية حالة خاصة منها.

يدعى جيبتمام زاوية فرق الطور بين الفولتية والتيار ($\cos\theta$) بعامل القدرة ، وذلك لأنه لاوحدة له. كما ان حاصل ضرب وحدة التيار والفولتية هو الواط وهو وحدة قدرة. في دوائر التيار المستمر لاوجود لعامل القدرة كما ان قيمته في دوائر التيار المتناوب التي تحوي مقاومات فقط هي واحدا ايضا. اما فيما عدا ذلك (الدوائر المحتوية على محثات او متسعات) فقيمته تتراوح بين الصفر والواحد. وهو عامل ضروري الاستخدام ويجب الحذر الشديد من عدم إهماله.

لغرض مراجعة انواع القدرة التي مرت بنا تجدر الأشارة الى اربعة مصطلحات تتعلق بالقدرة فحاصل ضرب الفولتية المتناوبة في التيار يعطي قدرة متغيرة مع الزمن وهي القدرة الانية اما متوسط هذه القدرة فيعطي القدرة الحقيقية التي شرحناها فيما سبق وتسمى بمجرد "القدرة" فقط. اما حاصل ضرب القيمة المؤثرة للفولتية في القيمة

المؤثرة للتيار فوحدتها هي الواط ايضا وتدعى بالقدرة الظاهرية (Apparent Power) (يطلق عليها احيانا بالفولت امبير VA) ويرمز لها بالحرف S وترتبط القدرة الظاهرة مع القدرة الحقيقية بالعلاقة

القدرة الحقيقية = القدرة الظاهرية × عامل القدرة

وهذه واضحة من المعادلة (10.40)

هناك مصطلح اخر يدعى احيانا بالقدرة الخيالية او المتفاعلة Reactive Power وتعرّف بانها حاصل ضرب الفولتية في التيار في جيب زاوية فرق الطور بينها. اي ان.

القدرة المتفاعلة = القدرة الظاهرية × جيب زاوية الطور

ويلاحظ ان جذر مجموع مربعي القدرة الحقيقية والقدرة الخيالية يساوي القدرة الظاهرية.

اي ان.

القدرة الظاهرية = $\sqrt{(\text{القدرة الحقيقية})^2 + (\text{القدرة الخيالية})^2}$

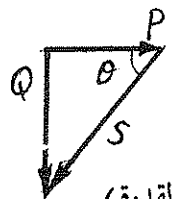
تدعى وحدة القدرة المتفاعلة بفولت امبير متفاعل Volt ampere reactive او القار (VAR) وذلك لغرض تمييزها عن الواط ويرمز لها بالحرف Q

ويمكن تلخيص ذلك

(القدرة الحقيقية) $P = VI\cos\theta$ (W) وحدتها واط

(القدرة الخيالية) $Q = VI\sin\theta$ (VAR) وحدتها فار

(القدرة الظاهرية) $S = VI = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (VA) وحدتها فولت أمبير

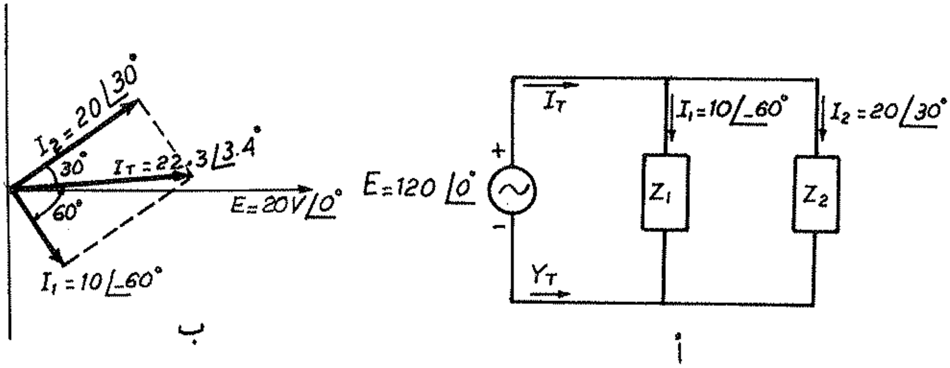


(مثلث القدرة)

ويمكن تمثيل هذه الكميات بمثلث يدعى مثلث القدرة الذي يكون قائم الزاوية فيه P باتجاه محور السينات ,Q باتجاه محور الصادات (للأعلى او للأسفل). S محصلتها وتتناسب الأطوال مع القيمة الفعلية لهذه المقادير.

مثال (10.8)

دائرة متوازية تحتوي على المانعتين Z_1 و Z_2 . تسحب المانعة Z_1 تياراً $10 \angle -60^\circ$ امبيرا وتسحب Z_2 تيارا مقداره $20 \angle 30^\circ$ امبيرا . اذا كانت فولتية المصدر 20 فولت احسب القدرة الكلية المستهلكة في الدائرة



الشكل 10.25 أ) دائرة المثال 10.8
ب) المخطط الطوري لها

الحل :

يبين الشكل 10.25 ب المخطط الطوري للتيارات في الدائرة حيث رسمت فولتية المصدر باتجاه محور السينات . وبرسم I_2 بالمتجه $20 \angle 30^\circ$, I_1 بالمتجه $10 \angle -60^\circ$ وإيجاد المحصلة بالرسم بإكمال متوازي أضلاع القوى تكون المحصلة I_T بالطوري $22.3 \angle 3.4^\circ$

يتضح من الشكل ان الزاوية بين الفولتية الكلية والتيار الكلي تساوي 3.4 درجة وقيمة التيار الكلي 22.3A ، فتكون القدرة الكلية

$$P = 20 \times 22.3 \text{Cos} 3.4^\circ = 446.4\text{W}$$

ولتحقيق ذلك يمكننا حساب القدرة في كل من الحملين Z_1 و Z_2 . فالقدرة المجهزة للحمل Z_2

$$P_A = 20 \times 20 \text{ Cos } 30 = 346.6.4\text{w}$$

وللحمل Z_1

$$P_B = 20 \times 10 \text{ Cos } (-60) = 100\text{W}$$

والقدرة الكلية

$$P = P_A + P_B = 100 + 346.4 = 446.4W$$

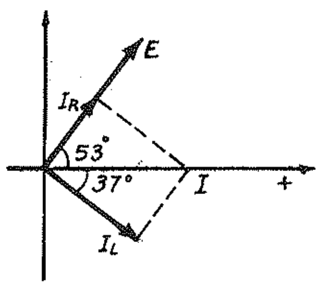
كما تجدر الاشارة الى امكان ايجاد القدرة في مثل هذه الدوائر بمجرد الرجوع الى المقاومات فيها حيث يمكن حساب القدرة المفقودة في كل عنصر مقاومي . ويمكن ان يتم ذلك بايجاد ماتحتوي كل ممانعة من جزء مقاومي . ثم حساب القدرة في ذلك الجزء بمجرد تطبيق قانون القدرة I^2R لكل منها .

تمرين : أعد حل المثال أعلاه بإيجاد التيار الكلي بتحليل التيارين I_1 و I_2 الى مركباتها الأفقية والعمودية ثم تأكد من قيمة القدرة الكلية المستهلكة في الدائرة بإيجاد مجموع القدرة المستهلكة في المقاومتين.

مثال (10.9)

أ) محرك حثي Induction motor تقنينه 1.6 حصان يعمل عند الفولتية 220 فولت وبعامل قدرة مقداره 0.70 وبكفاءة مقدارها 80% . احسب التيار الذي يسحبه المحرك من المصدر ب) كم تكون سعة المتسعة التي يجب أن تربط على التوازي مع المحرك لتجعل عامل القدرة الكلي واحداً .

الحل :



الشكل 10.26

أ) القدرة الحصانية هي 746 واط . لذا فقدرة المحرك الخارجة والقدرة الداخلة

$$1{\cdot}6 \times 746 = 1193 \text{ W}$$

$$P_{in} = \frac{1193}{0{\cdot}8} = 1492 \text{ W}$$

العلاقة بين القدرة والتيار

$$P = VI\cos\theta$$

$$1492 = 220\,I \times 0{\cdot}7$$

$$\therefore I = 9{\cdot}69 \text{ A}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0{\cdot}7 = 46^o$$

ب) مقدار القدرة المتفاعلة المسحوبة من قبل المحرك تساوي

$$Q = VI\sin\theta = 220 \times 9{\cdot}69 \times \sin 46^o$$

$$= 1533 \text{ VAR}$$

وتحتاج هذه القدرة المتفاعلة الحثية الى قدرة متفاعلة سعوية مساوية لها لكي تعادلها فلا يبقى في الدائرة سوى مركبة قدرة حقيقية . لذا فان القدرة المتفاعلة للمتسعة تساوي

$$Q = -1533$$

$$= VI\sin\theta$$

وحيث ان θ هي -90^o فان .

$$Q = -1533 = 220\,I \times (-1)$$

$$I = 6{\cdot}97 \text{ A}$$

فتكون مفاعلة المتسعة

$$X_{C.} = \frac{220}{6{\cdot}97} = 31{\cdot}56\ \Omega$$

ونكون سعة المتسعة

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times C} = 31{\cdot}56$$

$$\therefore C = 1{\cdot}008 \times 10^{-6}\ F = 1{\cdot}008\ \mu F$$

10.8 البرنامج الثامن : قيمة جذر متوسط التربيع

يقوم هذا البرنامج بإيجاد قيمة جذر متوسط التربيع لموجة جيبية تتكون من قطع من الخطوط المستقيمة . يقوم هذا البرنامج بطلب تحديد الفترة لدورة كاملة ثم عدد القطع من الخطوط المستقيمة المكونة لتلك الفترة . ثم يطلب معلومات عن كل قطعة منها بتحديد قيمة بداية ونهاية تلك القطعة (الإحداثي السيني) ثم يطلب إما إحداثيي نقطتين على كل قطعة مستقيمة أو نقطة وإنحدار لكي يستعمل المعادلة الصحيحة في إيجاد قيمة جذر متوسط التربيع للموجة الكاملة البرنامج السادس : الحالة العابرة لدائرة المتسعة والمقاومة يقوم البرنامج برسم تغير الفولتية عبر متسعة أثناء إما عملية الشحن أو التفريغ حسب طلب الطالب . حيث يسأل عن قيم فولتية المصدر والمقاومة والمتسعة ثم يرسم الرسم

```
10 INPUT"WHAT IS THE PERIOD";P
20 INPUT"Howmany segments of wave";N
30 S=0
40  DIM X1(N),X2(N)
50 FOR I=1 TO N
60 PRINT "Give limits of period number",I
70 INPUT  X1(I),X2(I)
80 NEXT I
90 FOR I=1 TO N
100 PRINT"You are requested to describe segment No. ";I;"either as a slope and o
ne point(choice 1) or as two points(choice 2)
110 INPUT"Which choice ",Z
120 ON Z GOTO 130,210
130 INPUT "Slope=",M
140 INPUT "X-coordinate of the point=",X3
150 INPUT "Y-coordinate of the point=",Y3
160 FOR J=X1(I) TO X2(I) STEP P/200
```

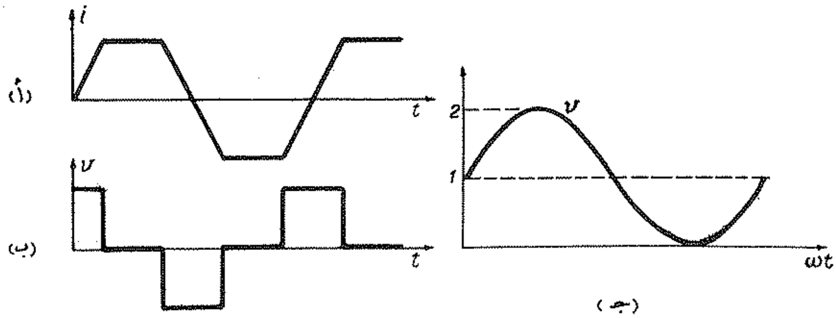
```
170 Y=M*J+Y3-M*X3
180 S=S+Y^2
190 NEXT J
200 GOTO 290
210 INPUT "X-coordinate of the first point=",X3
220 INPUT "Y-coordinate of the first point=",Y3
230 INPUT "X-coordinate of the second point=",X4
240 INPUT "Y-coordinate of the second point=",Y4
250 FOR J=X1(I) TO X2(I) STEP P/200
260 Y=Y4+(Y3-Y4)*(J-X4)/(X3-X4)
270 S=S+Y^2
280 NEXT J
290 NEXT I
300 S=SQR(S/200)
310 PRINT "RMS value =",S
```

مسائل الفصل العاشر

1. أوجد القيمة المتوسطة والقيمة المؤثرة للموجات المبينة أشكالها أدناه في الشكل 10.27

(الجواب : (آ) $V_{r.m.s} = 3V, V_{av} = 0$ $\quad$ $V_{r.m.s} = 4{\cdot}5V, V_{av} = 0$

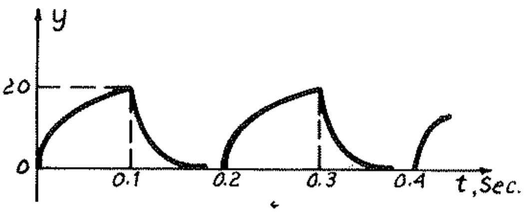
(ج) $V_{r.m.s} = 5V, V_{av} =$)



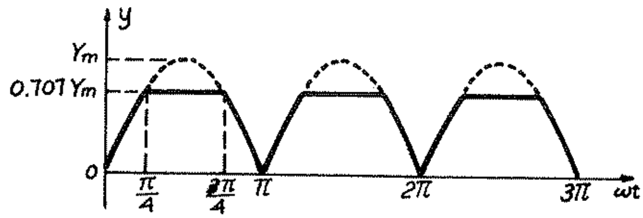
الشكل 10.27

2. يطلب إيجاد القيمة المتوسطة والمؤثرة لأشكال الموجات المتناوبة المبينة في الشكل 10.28

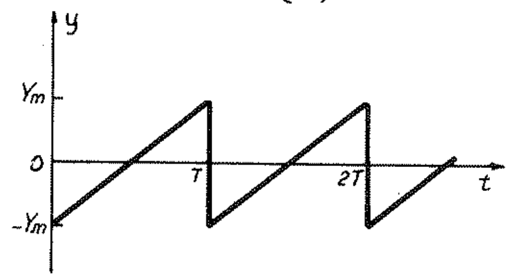
(الجواب : (آ) ؟ (ب) 0·584Y, (ج) Y = 0,Y = 0·577Y
(د) V = 0·955V , V = 0·956V) (هـ) 0V , 12·25V



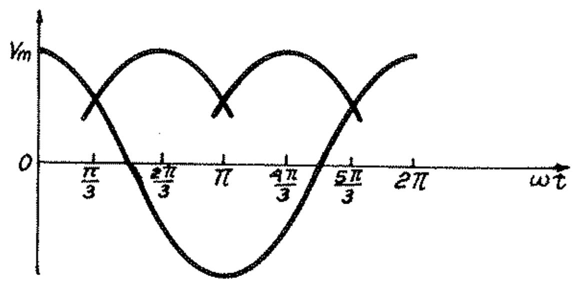
(أ)



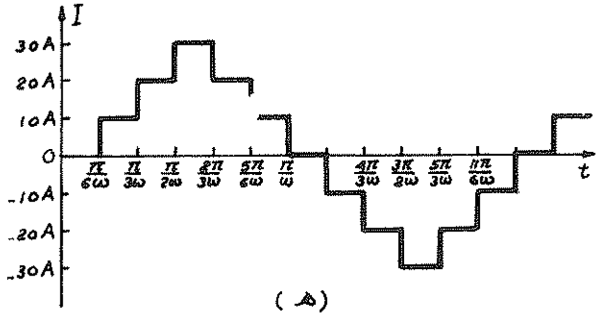
(ب)



(جـ)

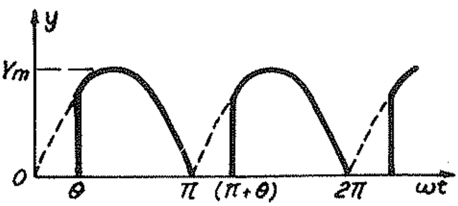


(د)



الشكل 10.28 (تابع)

3. إذا كانت القيمة المتوسطة لدالة جيبية كالمبينة في الشكل 10.29 تساوي نصف قيمتها العظمى فما قيمة الزاوية
(الجواب : $55.25°$)



شكل 10.29

4. أوجد قراءة مقياس متحرك الملف إذا ربط على مقاومة شكل الفولتية عبرها كالمبين في الاشكال آ، ب ، ج ، د ، هـ للسؤال الثاني (الجواب :)

5. موجة تيار يحوي التوافقية* الاولى والثالثة لتردد 50 هرتز حيث اتساع التوافقية الثالثة يعادل ثلث التوافقية الاولى . اي

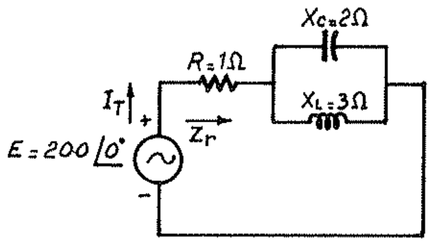
$$i = 90 \sin \omega t + 30 \sin 3\omega t$$

اوجد قيمة جـ . م . ت للتيار.

(الجواب : 67V)

6. المقاومات . المفاعلات في دائرة مبينة في الشكل 10.30 . سلطت على الدائرة فولتية مقدارها 200 فولت . اوجد التيار الكلي الذي يمر في الدائرة .

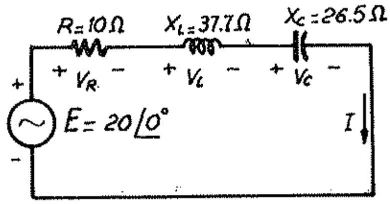
(الجواب : $1.52 \angle -31^{\circ}$)



الشكل 10.30 دائرة المسألة 6

7– سلطت فولتية مقدارها 100 فولت ترددها الزاوي W=1000 rad/S . مامقدار التيار الذي يمر في الدائرة الرئيسية وفي المقاومتين ؟ وما مقدار زوايا طورها بالنسبة الى فولتية المصدر؟

(الجواب $1\cdot3 \angle -48\cdot23^{\circ}$)

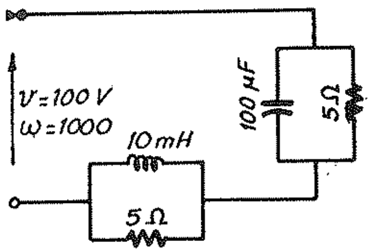


الشكل 10.31 دائرة المسألة 7

* التوافقية الأولى موجة جيبية ترددها نفس تردد المصدر والتوافقية الثالثة ترددها ثلاثة أضعاف تردد المصدر.

8- في الدائرة المبينة في الشكل 10.32 سلط عليها مصدر فولتية قيمة ج.م.ت له 100 فولت. اوجد الفولتية التي تظهر عبر طرفي المصدر والفولتية عبر كل من العناصر الثلاثة وطورها بالنسبة للتيار

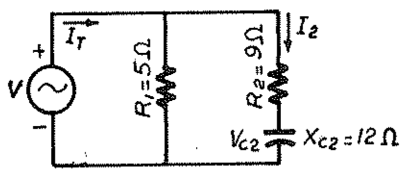
(الجواب $100 \angle 0^\circ$ V , $55{\cdot}87 \angle 26{\cdot}6^\circ$ A , $12{\cdot}5 \angle 0^\circ$, $55{\cdot}87 \angle 26{\cdot}6^\circ$ فولت)



الشكل 10.32 دائرة المسألة 8

9- سلطت فولتية مجهولة على الدائرة المبينة في الشكل 10.33 فتسببت في تيار مقدار ج.م.ت له 1 امبير في الفرع الايمن. ما مقدار فولتية المصدر والتيار الذي يجهزه؟ ارسم المخطط الطوري مبينا الفولتية عبر المتسعة فيه

الجواب $15 \angle -53{\cdot}12^\circ$, $20 \angle -53{\cdot}1^\circ$)



الشكل 10.33 دائرة المسألة 9

10– ربطت متسعة $c=35\mu$ على التوازي مع عنصر اخر. فاذا كانت الفولتية المسلطة والتيار الكلي تساوي:

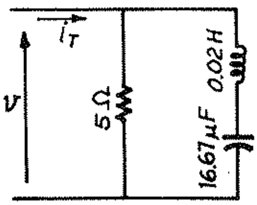
$i=16.5 \text{ Sin } (3000t+72.4)A, \; V=150 \text{Sin } 3000tV$

فما هو العنصر وماقيمته؟

(الجواب $R=30\ \Omega$)

11– اوجد التيار الكلي في دائرة التوازي الموضحة في الشكل 10.34 علما بان الفولتية المسلطة $V=50 \text{ Sin } (2000t-90)$

(الجواب : $i=11.2 (\sin 2000t - 116.6)\ t$



شكل 10.34

12– لدائرة الشكل 10.35 المبين اوجد: V_R

(آ) i, V_R, V_L, V_C بشكل طوري.

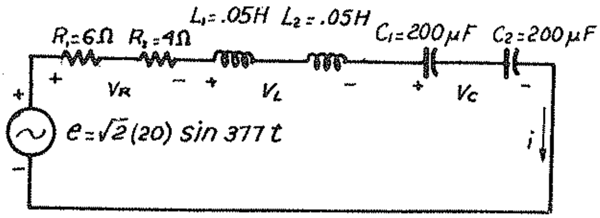
(الجواب $1{\cdot}15 \underline{/-86{\cdot}7}$; $21{\cdot}67 \underline{/3{\cdot}3}$, $1{\cdot}75 \underline{/-176{\cdot}7}$ $0{\cdot}115 \underline{/-86{\cdot}7^\circ}$)

(ب) عامل القدرة الكلي. (الجواب $0{\cdot}057$)

(جـ) معدل القدرة المجهزة . (الجواب $0{\cdot}132$)

(د) ارسم المخطط الطوري

(هـ) اوجد المجموع الطوري لـ V_C, V_L, V_R وبين بأنها تساوي E



الشكل 10.35

13. لدائرة الشكل 10.36 المبين ادناه اوجد مايلي:

(آ) i_c i_R,i_L,i_c بشكل طوري الجواب $10.56 \underline{/ -9.7^\circ}$, $5.28 \underline{/ -9.7^\circ}$, $2.8 \underline{/ -99.7^\circ}$ / 8)

(ب) اوجد عامل القدرة الكلي الجواب $\underline{/ 80.3^\circ}$ 0.996)

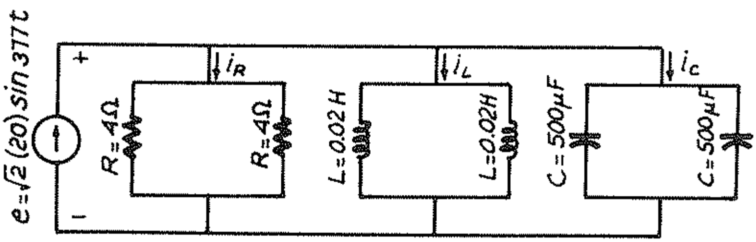
(ج) اوجد القدرة الكلية للشبكة الجواب 55.76 W)

(د) ارسم المخطط الطوري

(هـ) اوجد المجموع الطوري للتيارات i_R، i_L، i_C وبين بأنها تساوي I

(هـ) اوجد دائرة مجموع ممانعة X_L،X_c على التوازي ثم اوجد I بتقسيم التيار.

(ز) اوجد دائرة مكافئة متوالية لها نفس قيمة الممانعة.



الشكل 10.36 المسألة 13

14 – مصدر قيمة ج.م.ت لفولتية تساوي 120 فولت عند 60 هرتز. يجهز 2400 فولت امبير الى حمل يعمل عند عامل قدرة متخلف مقداره 0.707. اوجد قيمة المتسعة اللازمة وقيمة القدرة الخيالية التي تستهلكها لغرض رفع عامل القدرة الى 0.95 متخلف على فرض ربط المتسعة على التوازي مع الحمل.

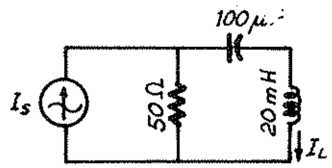
الجواب $137.9\ \mu F$

15 – حملان مجهولان أو ب ربط الحمل أ لوحده الى مصدر فولتية قيمتها القصوى 10 فولت فسحب تيارا قيمة ج.م.ت له امبير واحدا. وكانت القدرة المجهزة من المصدر تساوي واط. ربط الحمل الى المصدر نفسه منفرداً ايضا فسحب تياراً قيمة ج.م.ت له تساوي 3 امبيرا واحدا وقدرة مقدارها 5 واط ايضا. ربط الحملان معا على التوالي الى مصدر فولتية قيمة ج.م.ت له 10 فولت. فكان التيار المار فيها قيمة ج.م.ت له تساوي امبيرا واحدا. مامقدار ممانعة كل من الحملين والعناصر المشتركة في تكوين كل منها؟

(الجواب $56 + j2{\cdot}88,\ 1 - j7$)

16 – عامل القدرة للحمل الكلي المجهز من قبل مصدر التيار في الشكل 10.37 هو 0.5 متخلف ما مقدار تردد المصدر بالزوايا نصف القطرية لكل ثانية؟

(الجواب 329,2676)



الشكل 10.37 دائرة المسألة 16

17 – بالرجوع الى الشكل 10.32، احسب القدرة الكلية المجهزة للدائرة. ثم حقق النتيجة بجمع القدرات المستهلكة في المقاومتين المبينتين في الدائرة. مامقدار القدرة المتفاعلة المستهلكة كل من المحث والمتسعة؟

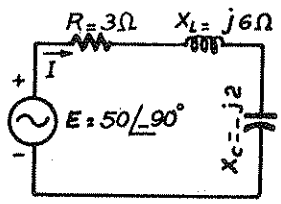
(الجواب 625W, 625W, 1250W)

18– يعمل مصباح الفلورسنت الذي يستهلك 40 واط على فولتية قيمة ج.م.ت لها 110 فولت اذا كان مصدر الفولتية يعطي فولتية قيمة ج. م. ت لها 220 فولت ، مامقدار المحث الواجب ربطه على التوالي مع الفلورسنت لضمان الحصول على الفولتية المطلوبة عند تردد 50 هرتز؟
ومامقدار التيار الذي يسحب من المصدر.

(الجواب 0.364 A, 1.68 H)

19– لمصباح الفلورسنت المذكور في السؤال 18 لوحظ ان عامل القدرة منخفض. وحيث ان تعليمات بعض مؤسسات تجهيز الكهرباء تقضي بضمان ان يكون عامل القدرة مرتفعاً فوق حد معين، ما مقدار سعة المتسعة التي يجب ربطها على التوازي مع دائرة المصباح والمحث لكي توفع عامل القدرة الكلي الى 0.90؟ ما مقدار التيار الكلي الذي تسحبه الدائرة الكلية بعد ربط المتسعة؟
(الجواب 0.3636A, 1.27 μF)

20– عين مثلث القدرة لدائرة التوالي الموضحة في الشكل 10.38
(الجواب : S= 300+ j400)



الشكل 10.38

22– دائرة متكونة من R = 10Ω متصلة على التوازي مع Z= 8Ω فإذا كانت القيمة التأثيرية للتيار الكلي تساوي 5A أوجد مثلث القدرة بالكامل.
(الجواب : Pf= 0.957, Q= 33VAR, P= 110W يسبق)

23– محول 100 KVA حمّل الى 80 % من سعته الكلية وكان عامل القدرة 0.85 متخلف فإذا ربط حمل آخر عامل قدرته 0.6 متخلف أُوجد عدد الـ KVA لهذا الحمل بشرط عدم الزيادة عن سعة المحولة الكلي.

(الجواب : 21.3 KVA)

24– أُوجد عامل القدرة وكذلك متوسط القدرة الناتجة والقدرة المتفاعلة والقدرة الظاهرية مع رسم مثلث القدرة للموجات المبينة معادلاتها أدناه :

(أ) $V = 277 \sin(377t + 30)\ V$

$i = 5.1 \sin(377t - 10)\ A$

(ب) $V = 679 \sin(377t + 50)\ V$

$i = 13 \cos(377t + 10)\ A$

(ج) $V = -170 \sin(377t - 30)\ V$

$i = 8.1 \cos(377 + 30)\ A$

(الجواب :

(أ) $P = 1.08\,kW,\ Pf = 0.766$

(ب) $P = 2.84\,kW,\ Pf = 0.643$

(ج) $P = 596W,\ Pf = 0.866$

الفصل الحادي عشر

دوائر الرنين

«وان من شيء الا عندنا خزائنه ومانتزله الا بقدر معلوم»
الحجر 21

مقدمة:

لغرض تبسيط العمليات الرياضية في تحليل دوائر التيار المتناوب يستخدم التعبير الطوري لتعريف الفولتيات والتيارات وكذلك بالنسبة للممانعة حيث ان ذلك يجعل التعامل بهذه الدوائر مشابها لدوائر التيار المستمر تماما. وعليه يجب تحويل كافة عناصر الدائرة بدلالة التردد **frequency domain** بعد ان كانت بدلالة الزمن **time domain** حيث يتم التعبير عن الفولتيات والتيارات بشكل طوري بدلاً من التعبير الجيبي وكذلك تبدل المحاثة والسعة الى مفاعلة وأما المقاومة فتبقى نفسها لأنها لاتتغير بالنسبة للحالتين.

ومن ذلك يتبين بان التحليلات تطبق على الدوائر التي عناصرها تكون بدلالة التردد والسبب هو للتخلص من الحسابات التفاضلية والتكاملية وتحويل الكميات الى صيغ جبرية بسيطة وتختلف عن تحليل دوائر التيار المستمر في كون هذه الصيغ الجبرية هي كميات مركبة ليس الا.

11.1 تغير الممانعات مع التردد:

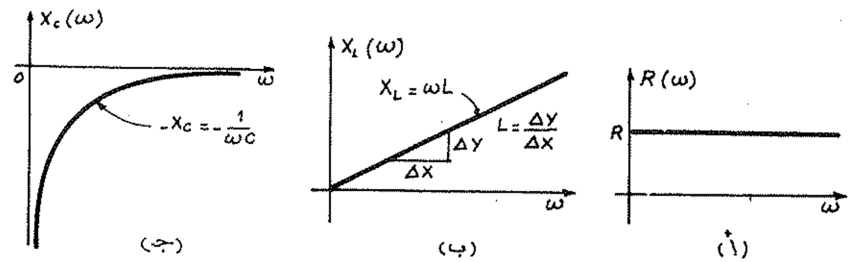
ان قيمة المقاومة لاتتأثر بالتردد . فمقاومة مقدارها 10Ω عند التردد 50Hz تظهر نفسها عند اي تردد اخر*. واما بالنسبة للمحث والمتسعة فالمفاعلة الحثية كما سبق ان بينا بانها حاصل ضرب التردد الزاوي ω اي $2\pi f$ في المحاثة L اي:

$$X_L = X_L = 2\pi fL \qquad (11.1)$$

فاذا رسمنا المفاعلة الحثية مع التردد كانت العلاقة بينها خطا مستقيما. يمر بنقطة الاصل ويميل بزاوية مقدارها $2\pi L$ حينما يكون محور السينات هو f وبزاوية مقدارها L حينما يكون محور السينات هو ω كما في الشكل 11.1 ب. واما المتسعة فمفاعلتها تساوي:

$$X_C = 1/\omega C = 1/(2\pi fC) \qquad (11.2)$$

اي ان المفاعلة السعوية تتناسب عكسيا مع التردد وثابت التناسب هو $(1/2\pi C)$ حينما يكون محور السينات هو f ويكون $1/C$ حينما يكون محور السينات هو ω وذلك كما مبين في الشكل 11.1 ج



الشكل 11.1

---

* تتأثر المقاومة قليلا بالترددات العالية بسبب التاثير الجلدي او القشري skin effect الذي سيمر بالطالب في سنوات متقدمة ويمكن اهماله عند الترددات الواطئة.

وعند دراسة تصرف دائرة متكونة من مزيج من العناصر الثلاثة (محاثة ومتسعة ومقاومة) تكون الممانعة الكلية معتمدة على التردد بصورة عامة. وعند حساب ذلك تؤخذ العلاقات الطورية (بدلالة التردد) بنظر الإعتبار.

عند ربط متسعة ومحث على التوالي يلاحظ أن تغير التردد يؤثر على مفاعليتها بحيث أن مفاعلة المحث تزداد كلما زاد التردد، بينما تقل مفاعلة المتسعة كلما زاد التردد. ومن البديهي أن يكون هناك تردد معين يحدث عنده أن تتساوى مفاعلة المحث مع مفاعلة المتسعة وحيث أن إحداهما بإتجاه يعاكس إتجاه الأخرى فتكون محصلتها عند ذلك التردد صفراً. ويقال عن هذه الحالة أن الدائرة في حالة رنين، أي

$$X_L = X_C$$

$$2\pi f_0 L = L = 1 / (2\pi f_0 C) \qquad (11.3)$$

لذا فإن تردد الرنين يكون:

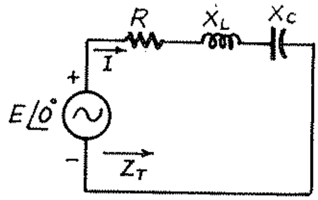
$$f_0 = 1 / (2\pi f_0 \sqrt{LC}$$

أما إن وجد مع المحث والمتسعة مقاومة على التوالي معها فتكون ممانعة الدائرة الكلية عند الرنين مساوية للمقاومة فقط أي:

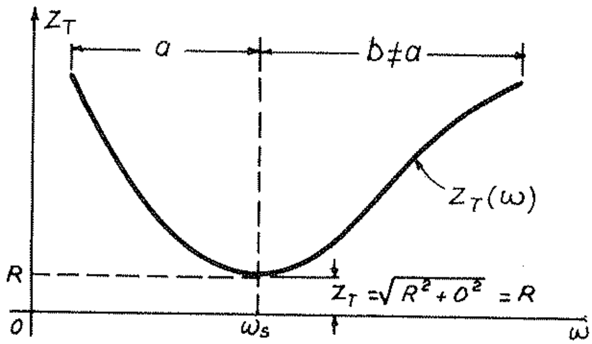
$$Z_T = R \qquad (11.4)$$

يبين الشكل 11.2 تغير قيمة الممانعة الكلية للدائرة مع التردد والتي تتغير وفق العلاقة:

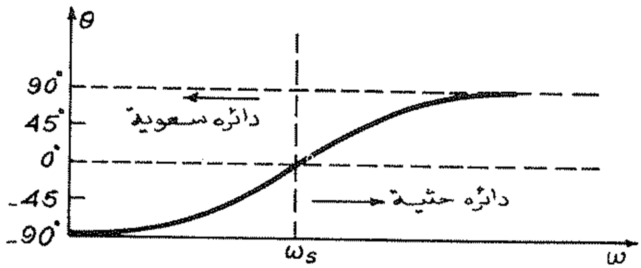
$$. \ Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \qquad (11.5)$$



(أ)



(ب)



(جـ)

الشكل 11.2 التغير مع التردد الزاوي

(أ) دائرة رنين توالي (ب) منحني تغير المقاومة R والممانعة Z مع التردد ω (جـ) منحني تغير زاوية الطور θ مع التردد ω

كما يلاحظ في الشكل تغير زاوية طور الممانعة في هذه الدائرة حيث :

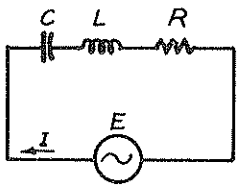
$$A_{ng}\, Z = \tan^{-1} \frac{2\pi fL - \dfrac{1}{2\pi fC}}{R} \quad ...(11\cdot6)$$

فعند الترددات الواطئة تكون مفاعلة المتسعة كبيرة جداً ، فتكون الممانعة الكلية ذات زاوية طور قريبة من $-90°$ – أما عند الترددات العالية جداً فتتصرف الدائرة وكأنها محث . أي أن زاوية طورها تساوي $+90°$ وعند الرنين تكون الدائرة مكافئة لمقاومة طورها صفراً .

11.2 رنين دوائر التوالي :

لنأخذ دائرة التوالي المبينة في الشكل 11.3

الممانعة الكلية تساوي



الشكل 11.3 دائرة رنين توالي

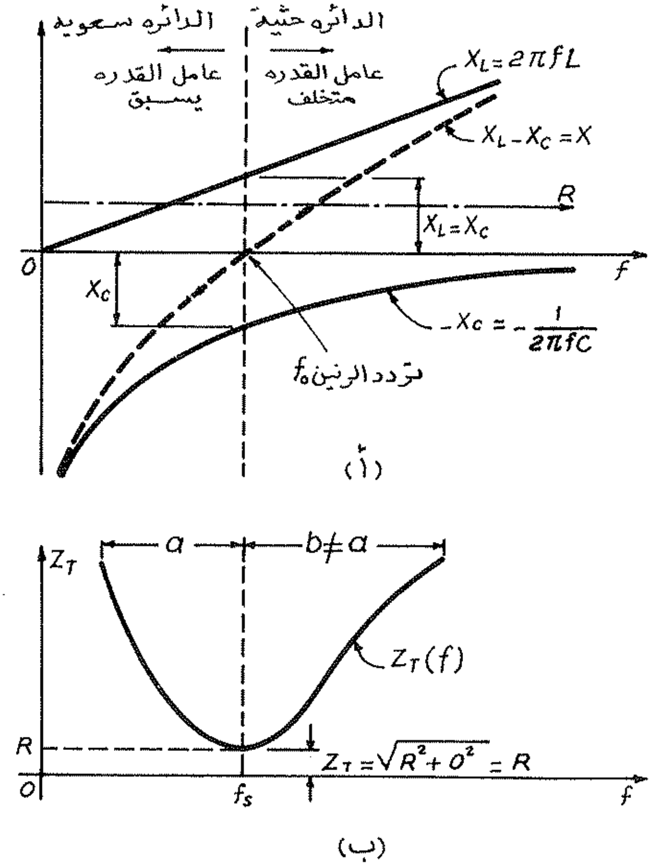
$$Z_T = R + jX_L - jX_C \quad ...(11\cdot7)$$

أو بتعبير آخر

$$Z_T = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad ...(11\cdot8)$$

وحيث أن R لاتعتمد على التردد فإن الحد الخيالي هو الذي يحدد تغير Z_T مع التردد أي أن تغير X مع التردد يكون كما مبين في الشكل (11.4)أ ، حيث يتضح أن تغير X_L خطي يبدأ من الصفر ويزداد مع التردد بإنحدار مقداره $2\pi L$ بينما يكون تغير X_C عكسياً

يبدأ من اللانهاية السالبة ثم تقطع محور التردد ثم تصبح موجبة وتمس الخط المستقيم الممثل بـ X_L عند الترددات العالية جداً.



الشكل 11.4 (أ) منحنيات المقاومة R المفاعلة الحثية X_L والمفاعلة السعوية X_C والمفاعلة الكلية X مع التردد f

(ب) منحني الممانعة الكلية Z مع التردد.

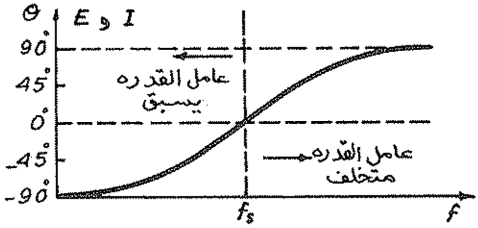
أما قيمة Z_T فهي عبارة عن محصلة R, X أي :

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad ...(11\cdot9)$$

فيكون تغير قيمة Z مع التردد كما موضح في الشكل 11.4 ج ، حيث يتضح أن قيمة Z_T تبدأ من اللانهاية وتنخفض الى أدنى قيمة لها حين $Z_T = R$ ثم تعود للزيادة بشكل تدريجي الى أن تتجه نحو اللانهاية عند الترددات العالية جداً.
أما زاوية طور الممانعة Z فتعتمد على النسبة بين الجزء الخيالي والجزء الحقيقي أي :

$$Q = \tan^{-1} \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R} \qquad ...(11\cdot10)$$

حيث يتضح من الشكل 11.5 أن الزاوية Q تصبح صفراً حينما $WL = 1/(WC)$ وتكون سالبة (سعوية) عند الترددات تحت تلك القيمة وموجبة (حثية) عند الترددات فوق ذلك.



الشكل 11.5

ومن الملاحظ تغير Z_T بالقيمة والزاوية مع التردد ظهر أن هناك حالة خاصة جداً حينما $\omega L = 1/(\omega C)$ والتي لها فائدة كبيرة في تطبيقات متعددة وعندها تكون قيمة :

$$Z_L = R + jO = R \angle 0^o \qquad ...(11\cdot11)$$

وتدعى هذه الحالة بالرنين. أي أن :

$$X_L = X_C \qquad ...(11\cdot12)$$

وأن

$$\omega L = 1/(\omega C)$$

لذا فإن

$$2\pi f L = 1/(2\pi f C)$$

وأن تعبير التردد عند هذه الحالة (أي حالة الرنين)

$$f = 1 / (2\pi \sqrt{LC}) \qquad ...(11\cdot13)$$

ويرمز لهذا التردد بالتردد f_o

مثال 11.1

دائرة RLC متوالية ، قيمة المقاومة 100Ω والسعة $1\mu F$ والمحاثة 10mH . أوجد تردد الرنين للدائرة والممانعة الكلية عند هذا التردد . أوجد الممانعة الكلية أيضاً عند نصف تردد الرنين وعند ضعفه .

الحل :

تردد الرنين f_o يساوي

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-6} \times 10^{-2}}} = 1592 \text{ Hz}$$

قيمة الممانعة كدالة للتردد :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

عند تردد الرنين 1592 H تكون الممانعة :

$$Z = R = 100\ \Omega$$

وزاوية طور الممانعة عند تردد الرنين هي صفراً . وعند نصف تردد الرنين (أي $f = 796\ H_z$)

$$Z = \sqrt{(100)^2 + \left(2\pi \times 796 \times 10 \times 10^{-3} - \frac{1}{2\pi \times 796 \times 10^{-6}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(100)^2 + (-150)^2} = 180\ \Omega$$

$$\theta = \tan^{-1} - \frac{150}{100} = -56\cdot3^o$$

حيث من الواضح أن الدائرة سعوية عند هذا التردد.
وعند ضعف الرنين (أي $f = 318H\ H_z$)

$$Z = \sqrt{(100)^2 + \left(2\pi \times 3184 \times 10 \times 10^{-3} - \frac{1}{2\pi \times 1384 \times 10^{-6}}\right)}$$

$$= \sqrt{(100)^2 + (150)^2} = 180\ \Omega$$

وزاوية طورها

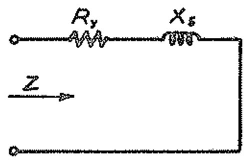
$$\theta = \tan^{-1} \frac{150}{100} = 56{\cdot}3^o$$

حيث يظهر واضحاً أن الدائرة حثية عند هذا التردد

11.3 عامل النوعية Q. factor :

في الدوائر العملية يستحيل وجود محث بدون أن يحوي مقاومة داخلية له شأنه شأن مصادر الفولتية التي تحوي بداخلها مقاومة داخلية.

يمكن تمثيل المحث العملي بدائرة توالي تتكون من محث نقي ومقاومة نقية كما مبين في الشكل 11.6.



الشكل 11.6 محث مع مقاومته الداخلية

ويلاحظ أن المحث الذي يصنع أصلاً من أجل الإستفادة من محاثته يفضل أن يكون قليل المقاومة الداخلية أي أن جودة المحث تعتمد على إرتفاع محاثته وقلة مقاومته. لذلك يعبر عن جودة المحث بعامل النوعية Q- factor الذي يعبر عنه رياضياً :

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} \qquad ...(11{\cdot}14)$$

وحيث أن دائرة الرنين تحوي C, L, R وعند الرنين تكون $X_L = X_C$ فإن العلاقة أعلاه (11.14) يمكن كتابتها بشكل :

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1/(\omega_0 C)}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad ...(11{\cdot}15)$$

فيكون تعريف عامل النوعية بشكل عام هو النسبة بين المفاعلة (الحثية أو السعوية) عند الرنين مقسومة على المقاومة . كما أن هناك تعريف آخر ينص على ان عامل النوعية يساوي حاصل قسمة الطاقة العظمى المخزونة في المفاعلة الى الطاقة المفقودة لكل دورة .

مثال 11.2 :

يطلب إجراء مقارنة إقتصادية بين ملفين محاثتها متساوية (تساوي 1H) مواصفاتها كالآتي :

الملف الاول : مقاومته الداخلية تساوي 100Ω كلفته 35 ديناراً .
الملف الثاني : مقاومته الداخلية تساوي 10Ω كلفته 60 ديناراً .

على فرض أن الملفين سيستخدمان في دائرة تعمل طيلة النهار ولمدة سنة واحدة . ثم أوجد عامل النوعية لكل منها . (ملاحظة إفرض أن الكيلو واط ساعة من الطاقة الكهربائية بمبلغ عشرون فلساً وأن فولتية المصدر 220 V)

الحل :

$$Q_1 = \frac{2\pi \times 50 \times 1}{100} = 3{\cdot}14$$

$$Q_2 = \frac{2\pi \times 50 \times 1}{10} = 31{\cdot}4$$

الطاقة المفقودة في الملفين :

$$W_1 = I R \times (\text{عدد ساعات السنة}) \times 10 = kWH$$

$$W_1 = \left(\frac{220}{\sqrt{100^2 + (2\pi \times 50 \times 1)^2}}\right) \times 10 \times 100 \times 365 \times 24 =$$
$$= 390\ kWH$$

الكلفة تساوي 20 × 390 وتساوي 7800 فلساً. وبنفس الطريقة :

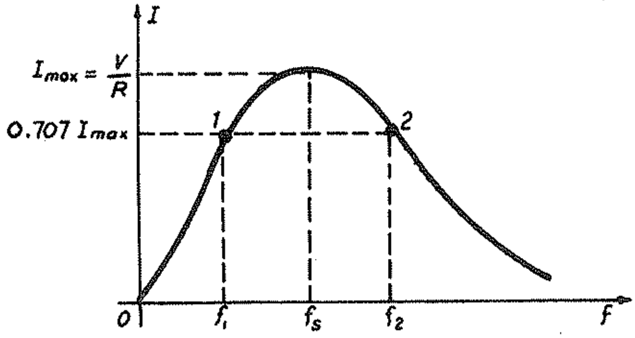
$$W_2 = \left(\frac{200}{\sqrt{10^2 + (2 \times 50 \times 1^2}}\right) \times 10 \times 10 \times 365 \times 24 = 42{\cdot}915 kW - H$$

الكلفة تساوي 20 × 42.915 وتساوي 858 فلساً .

ويتضح أن عامل الكلفة هنا لايبرر شراء الملف الثاني الذي عامل نوعيته عالية لأن فرق سعره الأصلي عالٍ جداً. أما لو إحتسبت الخسارة لهذه الطاقة لمدة عشر سنوات فسيكون الملف الثاني هو المفضل بالطبع .

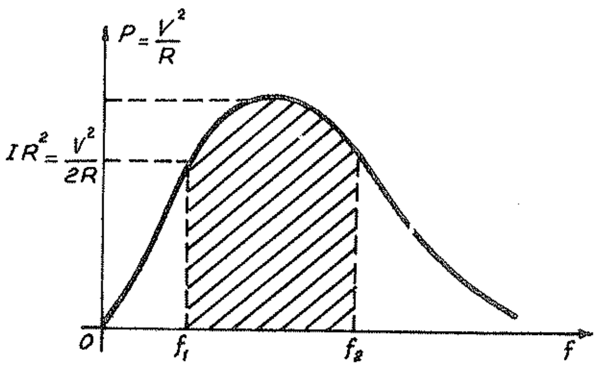
11.4 خصائص أخرى لدائرة رنين التوالي :

سبق أن أوضحنا شكل تغير الممانعة مع التردد لدوائر رنين التوالي في الشكل 11.4 . وحيث أن التيار في الدائرة يعتمد على الممانعة (حسب قانون أوم $I = V/Z$) لذلك فإن شكل منحني التيار مع التردد هو عبارة عن مقلوب منحني الممانعة مع التردد أي كما في الشكل 11.7 .



(أ)

الشكل 11.7أ



(ب)

الشكل 11.7 ب تابع

إن الشكل العام لهذا المنحني مع التردد متشابه لكنه يختلف من دائرة الى أخرى حسب العلاقات بين L و R و C فتارة يظهر ضيقاً مدبباً وتارة أخرى يظهر واسع القمة ولغرض تحديد قياس فعلي لمقدار الإتساع أو الضيق هناك أسلوب معين لهذا الغرض ويتعلق بمقدار القدرة المصروفة في الدائرة. لنأخذ منحني القدرة مع التردد والذي هو عبارة عن I^2R. لو أخذنا النقطتين 1 و 2 على المنحني بحيث أن القدرة عندهما تساوي نصف القدرة العظمى أي $V^2/2R$ فإن التردد عند هاتين النقطتين يساوي f_1 و f_2.

تعرف هاتان القيمتان بأنها ترددات نصف القدرة وتسمى الترددات الفاصلة (أو ترددات القطع Cut off frequency) وقد إصطلح على أن يكون هذان الترددان دليلان على مدى إتساع أو ضيق المنحني، حيث أن دائرة الرنين بين هاتين النقطتين تتصرف وكأنها قريبة من تردد الرنين نفسه. أما عند خارج الحيز بين هذين الترددين فإن الدائرة تتصرف وكأنها دائرة سعوية أو حثية تقريباً.

أما إذا عكسنا هذين الترددين على المنحني في الشكل 11.7 أ فسنجد أن التيار عند الترددين f_1 و f_2 ينخفض الى $1/\sqrt{2}$ من قيمته القصوى $0.707\ V/R$.

يدعى الترددات أن f_1 و f_2 ترددي نصف القدرة وعندهما يكون التيار قد إنخفض الى 0.707 من قيمته القصوى ، ويدعى فرق التردد بين هذين الترددين بعرض الحزمة Band width ومختصرها BW حيث :

$$BW = f_1 - f_2 \qquad ..(11\cdot16)$$

ويكون إيجاد عرض الحزمة بدلالة ثوابت الدائرة R و L و C كالآتي :
من المعادلة (11.9)

$$Z_T = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C)^2}$$

فيكون التيار :

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \qquad \cdots(11\cdot18)$$

وتكون معادلة القدرة :

$$P = I^2R \frac{V^2R}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \qquad ...(11\cdot18)...$$

عند تردد الرنين تكون قيمة القدرة V^2/R . وعند ترددي نصف القدرة :

$$\frac{V^2}{2R} = \frac{V^2R}{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

ومن حل هذه المعادلة (التي هي معادلة من الدرجة الثانية ولها جذران) نحصل على :

أي أن :

$$\omega_{1/2} = \frac{+R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}$$

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}$$

$$\omega = \frac{+R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}$$

أو بتعبير آخر:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{R}{2L} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{4}{LC}}\right] \quad ...(11\cdot19)$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right) + \frac{4}{LC}}\right] \quad ...(11\cdot20)$$

ومن تعريف عرض الحزمة الذي هو:

$$BW = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

وحيث أنه سبق تعريف عامل النوعية على أنه:

$$Q = \omega L / R$$

بشكل عام وعند الرنين يصبح عامل النوعية Q_0

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 2\pi f \frac{L}{R}$$

لذلك فإن:

$$\frac{R}{L} = \frac{2\pi f_0}{Q_0}$$

فيكون عرض الحزمة:

$$BW = \frac{2\pi f_0}{2\pi Q_0} = \frac{f_0}{Q_0} \quad ...(11\cdot21)$$

أي أن عرض الحزمة هو عبارة عن حاصل قسمة تردد الرنين على عامل النوعية عند الرنين.

كما يمكن صياغة عامل النوعية بدلالة ترددي نصف القدرة بشكل :

$$f_2 - f_1 = f_0 / Q_0$$

أو (11.22)...

$$Q_0 = f_0 / (f_2 - f_1)$$

مثال 11.3 :

عرض حزمة دائرة رنين توالي تبلغ 400 هرتز وتردد الرنين يساوي 4000 هرتز، أوجد عامل النوعية عند الرنين؟ وإذا كانت قيمة R تساوي 10Ω فما مقدار X_C, X_L. وما مقدار C, L في الدائرة؟

الحل :

$$Q_0 = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{4000}{400} = 10$$

وعند تردد الرنين :

$$Q_0 = X_L / R$$

أي X_L تساوي RQ_o وتساوي :

$$X_L = 10 \times 10 = 100\ \Omega$$

أي أن L تستخرج من علاقة المفاعلة الحثية

$$2\pi \times 4000L = 100$$

$$L = 3{\cdot}98\ \text{mH}$$

وقيمة المتسعة :

$$\frac{1}{2\pi \times 4000 \times C} = 100$$

$$C = 0{\cdot}398\ \mu F$$

وبالرجوع الى معادلة التيار (11.17) يمكن صياغة الفولتيات الثلاثة في الدائرة أي فولتية المقاومة.

$$V_R = IR = \frac{VR}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

وفولتية المحث :

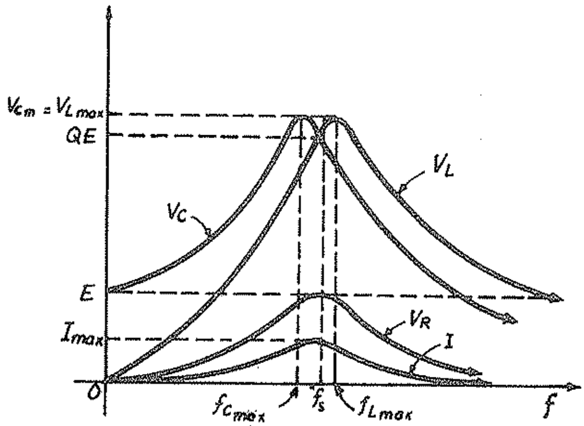
$$V_L = IX_L = \frac{V\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

وفولتية المتسعة :

$$V = IX_C = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$R + (\omega L - 1/\omega C)$$

يبين الشكل (11.8) تغير هذه الفولتيات الثلاثة مع التردد والذي يبين بوضوح أن فولتية المقاومة تصبح عند قيمتها القصوى عند تردد الرنين بينما فولتية المحث تأخذ أقصى قيمة لها فوق تردد الرنين بقليل وفولتية المتسعة تأخذ أقصى قيمة لها تحت تردد الرنين بقليل.



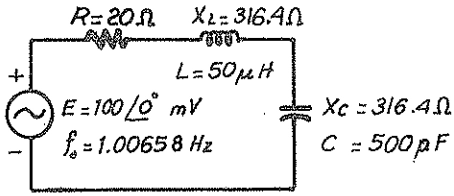
الشكل 11.8

مثال 11.4 :

دائرة رنين هوائي راديوي موضحة في الشكل (11.9) حيث :

$E = 100$ mV, $R = 20\Omega$, $L = 50\,\mu H$, $C = 500$ pF

1. أوجد تردد الرنين والفولتيات على العناصر الثلاثة عند تردد الرنين.
2. إحسب ترددي نصف القدرة وإحسب الفولتيات على العناصر الثلاثة عندها.



الشكل 11.9

الحل :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1{\cdot}00658 \text{ MHz}$$

ولإيجاد الفولتيات عند تردد الرنين

$$I = \frac{100 \times 10}{20} = 5 \text{ mA}$$

فتكون

$$\therefore V_R = 5 \times 10^{-3} \times 20 = 100 \text{ mV}$$

$$V_L = 5 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 1{\cdot}00658 \times 10^6 \times 50 \times 10^{-6}$$

$$= 1{\cdot}582 \text{ V}$$

$$V_C = 5 \times 10^{-3} \frac{1}{2\pi \times 1{\cdot}00658 \times 10^6 \times 500 \times 10^{-12}} = 1{\cdot}582 \text{ V}$$

أي أن الفولتية عند الرنين عبر المتسعة أو المحث تساوي أكثر من 15 ضعف الفولتية الأصلية للمصدر.

يحدث ترددا نصف القدرة عند

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{20}{2 \times 50 \times 10^{-6}} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{20}{50 \times 10^{-6}}\right)^2 + \frac{4}{50 \times 10^{-6} \times 500 \times 10^{-12}}}\right]$$

$$= 0{\cdot}97474 \text{ MHz}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{R}{2L} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}\right]$$

$$= 1{\cdot}0384 \text{ MHz}$$

وعرض الحزمة سيكون

$$BW = f_2 - f_1 = 1{\cdot}0384 - 0{\cdot}97475 =$$

$$= 0{\cdot}0636 \text{ MHz}$$

وتكون قيم التيار والفولتية عند ترددي نصف القدرة :

$$I_1 = 0{\cdot}707 \times 5 \times 10 = 3{\cdot}535 \text{ mA}$$

$$V_R = 3{\cdot}535 \times 20 = 70{\cdot}7 \text{ mV}$$

$$V_L = 2\pi fL\, I_1 = 2\times 0{\cdot}97475 \times 10 \times 50 \times 10 \times 3{\cdot}535 \times 10 = 1{\cdot}0825 \text{ V}$$

$$V_C = \frac{I}{2\pi fC} = \frac{3{\cdot}535 \times 10^{-3}}{2\pi \times 0{\cdot}97475 \times 10^6 \times 500 \times 10^{-12}} = 1{\cdot}1543 \text{ V}$$

وعند التردد الثاني

$$V_R = 70{\cdot}7 \text{ mV}$$

$$V_c = 1{\cdot}153 \text{ V}$$

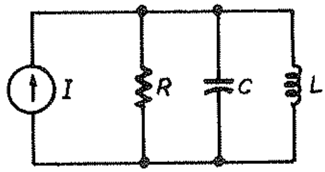
$$V_L = 1{\cdot}0835 \text{ V}$$

11.5 دائرة رنين التوازي :

في الدائرة المبينة في الشكل 11.10 المجهزة من مصدر تيار تحدث الرنين عندما :

$Y = G$

حيث $Y = 1/Z$ وأن $G = 1/R$



الشكل 11.10

وذلك لأن

$$Y = Y_R + Y_L + Y_C$$

فإن :

$$\frac{1}{Z_T} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - X_C\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

وعند تردد الرنين فإن المفاعلة السعوية تساوي المفاعلة السعوية تساوي المفاعلة الحثية ، أي :

$$1/\omega L = \omega C$$

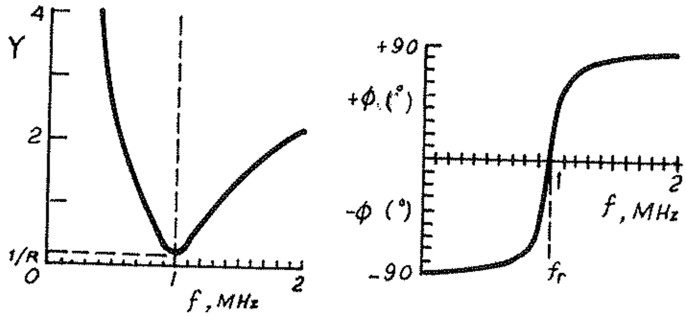
$$f_0 = 1 / (2\pi \sqrt{LC})$$

أي :

وهي العلاقة ذاتها التي حصلنا عليها في دائرة رنين التوالي (11.13) وتصبح قيمة المسايرة :

$$Y = 1 / R$$

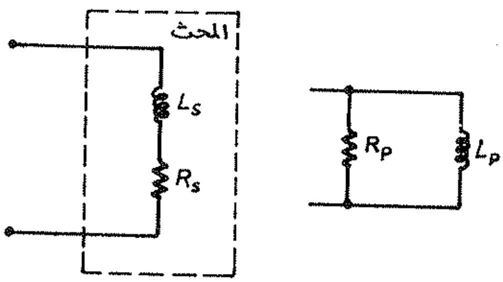
ويمكن رسم منحني تغير Y مع التردد كما مبين في الشكل (11.11) والذي يظهر منه بسهولة أن شكله يشبه شكل تغير Z مع التردد لدائرة رنين التوالي ويمكن بسهولة استنتاج قوانين ترددي نصف القدرة وعرض الحزمة لدائرة رنين التوازي والتي ستكون



الشكل 11.11

فلغرض إيجاد عامل النوعية وعرض الحزمة لدائرة رنين التوازي ينبغي تصور مكافئ المحث العملي المبين في الشكل 11.12 .

حيث :



الشكل 11.12

$$R_S + j\omega L_S = \frac{R_P \times j\omega L_P}{R_P + j\omega L_P}$$

وبمساواة الجزئين الحقيقيين مع بعضهما والخياليين مع بعضهما نحصل على :

$$R_S = \frac{R_P \quad \omega^2 L_P^2}{R_P^2 + \omega^2 L_P^2}$$

$$\omega L_S = \frac{R_P \quad \omega L_P}{R_P^2 + \omega^2 L_P^2}$$

وحيث أن عامل النوعية في دائرة رنين التوالي تساوي

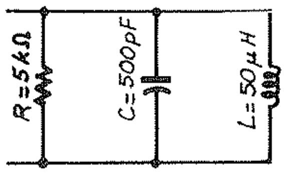
$$Q_O = \frac{\omega_0 L_S}{R_S} = \frac{R_P}{\omega L_P}$$

أي ان عامل النوعية لدائرة رنين التوازي يساوي حاصل قسمة المقاومة على المفاعلة (عكس قانون عامل النوعية لرنين التوالي)

مثال 11.5 :

لدائرة الشكل 11.13 أوجد تردد الرنين وعامل النوعية وعرض الحزمة :

الحل :



الشكل 11.13

$$f_0 = 1 / (2\pi \sqrt{LC})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \quad \frac{1}{\sqrt{500 \times 10^{-12} \times 50 \times 10^{-6}}}$$

$$= 1{\cdot}00658 \text{ MH}$$

$$Q_0 = \frac{R}{2\pi f_0 L} = \frac{5 \times 10^3}{2\pi \times 1{\cdot}00658 \times 10^6 \times 50 \times 10^{-6}} = 15{\cdot}82$$

$$BW = \frac{f_0}{Q_0} = \frac{1{\cdot}00658 \times 10^6}{15{\cdot}82} = 63{\cdot}65 \text{ K}$$

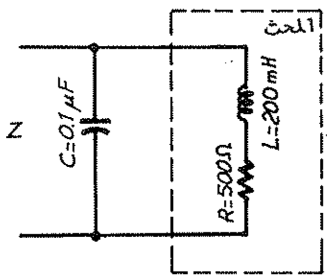
11.6 الرنين في دوائر أخرى :

الدوائر التطبيقية في الحياة العملية لاتكون بالبساطة التي مر ذكرها آنفاً (دائرة توالي بسيطة أو توازي بسيطة) بل تكون مزيجاً من دوائر التوالي والتوازي عادة لكنها لاتخلو من وجود C, L, R العناصر الأساسية.

يحدث الرنين في هذه الدوائر عندما يساوي الجزء الخيالي من الممانعة (او المسايرة) صفراً (أي أن تأثير المحثات في الدائرة يحذف تأثير المتسعات).

مثال 11.6 :

لدائرة الشكل 11.14 أوجد تردد الرنين.



الشكل 11.14

الحل :

نجد الممانعة الكلية للدائرة :

$$Z = \frac{1/j\omega C.(R + j\omega L)}{R + j\omega L + (1/j\omega C)}$$

$$= \frac{1/j\omega C(R + j\omega L)[R - j(\omega L - 1/\omega C)]}{R + (\omega L - 1/\omega C)}$$

$$= \frac{R/j\omega C + (\omega L)(\omega L - 1/\omega C)}{R + 9\omega L - 1/\omega C)} = 0$$

ومنها نحصل على التردد

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2C}{L}}$$

وبتعويض القيم من الدائرة فإن :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{200 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}1 \times 10^{-6}}} \sqrt{1 - \frac{(500)^2 \times 0{\cdot}1 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-3}}}$$

$$= 1053 \text{ Hz}$$

11.7البرنامج التاسع : دائرة رنين التوالي

يطلب هذا البرنامج أقيام فولتية مصدر الفولتية والمقاومة والمحاثة والمتسعة لدائرة رنين التوالي ثم يرسم منحني التيار مع التردد.

```
10 PRINT"This is a program for resonance in series RLC circuit"
20 PRINT"Give the values of emf, resistanc, inductance and capacita
30 INPUT E,R,EL,C
40 MCUR=E/R
50 PRINT MCUR
60 PQ=MCUR
70 IF PQ<1 THEN 140
80 IF PQ>10 THEN 150
90 K=1
100 IF PQ<2 THEN K=.4
110 IF PQ>5 THEN K=2
120 L=MCUR/PQ
130 GOTO 160
140 PQ=PQ*10:GOTO 70
150 PQ=PQ/10:GOTO 70
160 FOR I=0 TO 5
170 X(I)=K*L  *I
180 PRINT X(I)
190 NEXT I
200 CLS
210 SCREEN 8
220 FOR I=5 TO 0 STEP -1
230 Y=21-4*I
240 LOCATE Y,1:PRINT INT(X(I))
250 NEXT I
260 LINE(60,0)-(60,165)
270 LINE (60,165)-(460,165)
280 FOR I=1 TO 5
290 LINE(58,I*33)-(62,I*33)
300 LINE(60+80*I,163)-(60+80*I,167)
310 NEXT I
320 LOCATE 22,9
330 FOR I=1 TO 5:PRINT "      "; I;"fo";:NEXT I
340 FC=1/SQR(EL*C)
350 FOR M=1 TO 250
360 I=.02*M*FC
370 P=(PQ/SQR(R^2+(I*EL-1/I/C)^2))/K*33*R
380 PSET  (60+M*8/5,165-P)
390 NEXT M
400 LOCATE 7,40:PRINT"fo=";FC;"Hz"
```

مسائل الفصل الحادي عشر

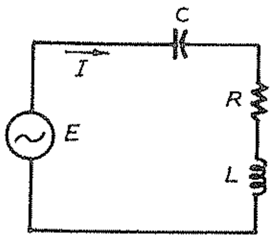
1. لدائرة رنين التوالي المبينة في الشكل 11.15 أوجد تردد الرنين حينما :

(أ) $R = 25\Omega, L = 250\ H, C = 150\ pF, E = 100\ V$

(ب) $R = 20\Omega, L = 500\ H, C\ 350\ pF, E = 1\ mV$

(ج) $R = 2\Omega, L = 1\ mH, C = 0{\cdot}002\ \mu F, e = 1\ V$

(الجواب : (أ) 821·9 kHz (ب) 380·5 kHz (ج) 112·5 kHz



الشكل 11.15

2. لدائرة الشكل في المسألة السابقة أوجد المفاعلة الحثية والمفاعلة السعوية عند الترددات f_1, f_2 لحزمة الموجة ثم قارن هذه المفاعلة مع قيمة مقاومة الدائرة.

(الجواب :

(أ) 1·304kΩ , 1·279kΩ, 24·9Ω, 1·279kΩ, 1·301kΩ

(ب) 1·205kΩ, 1·185kΩ, 19·9Ω, 1·185kΩ, 1·205kΩ, 20·1Ω

(ج) 708Ω, 706Ω , 2Ω, 706Ω, 708Ω, 2Ω

3. وجد أن عرض الحزمة لدائرة رنين توالي تحوي $C = 450\ pf$ ، $L = 350\mu H$ ، $R = 8\Omega$ ضيق . أوجد قيمة المقاومة الإضافية اللازمة لزيادة عرض الحزمة الى 10 kH.

(الجواب : $R = 14\Omega$)

4. يطلب تغيير تردد الدائرة في المسألة 3 السابقة الى 450 kH : (أ) أوجد قيمة L الجديدة للحصول على هذا التردد لدى إبقاء $L = 350\mu H$.

(الجواب : 1410 pF)

5. (أ) جد عرض الحزمة لدائرة رنين توالي قيمة تردد الرنين فيها : 6000 H وقيمة $Q = 5$

(ب) جد ترددات القطع f_2, f_1

(ج) إذا كانت مقاومة الدائرة عند الرنين 3Ω ماقيمة X_C, X_L بالأوم

(د) ما قيمة القدرة الممتصة عند ترددات نصف القدرة إذا كان أقصى تيار 0.5 A

(الجواب : (أ) $BW = 400\ Hz$ (ب) $f = 5800\ Hz$ $f = 6200\ Hz$ ، (ج) $X = X = 45\,\Omega$)

6. صمم دائرة رنين توالي إذا كانت قيمة فولتية المصدر $5\underline{/0^{o}}$ بحيث تمتلك المواصفات التالية :

(أ) قيمة أقصى تيار عند الرنين 500 mA

(ب) قيمة عرض الحزمة 120 Hz

(ج) قيمة تردد الرنين 8400 Hz

أوجد قيمة C, L عند ترددات القطع أي عند f_2, f_1

(الجواب : $R = 10\,\Omega$, $L = 13.27\ mH$, $C = 27.08\ mF$)

7. دائرة توالي فيها $R = 50\Omega, L = 0.05\ H, C = 20\ \mu F$ يؤثر عليها جهد $V = 100\underline{/0^{o}}$ بتردد متغير. أوجد أقصى جهد على الملف مع تغير التردد وذلك بإشتقاق معادلة الجهد على الملف.

$$V = \frac{\omega LV}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

إثبت أن أقصى جهد على الملف يحدث عندما .

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{2LC - R^2C^2}}$$

(الجواب : 1414 rad/ s)

8. في دائرة المسألة 7 السابقة أوجد أقصى جهد على المتسعة.

(الجواب : عندما $\omega = 10^6$Hz)

9. (أ) ملف محاثته 200 H ومقاومته 6.28Ω عندما قيست عند التردد 1 MHz .ماقيمة عامل النوعية Q للملف عند هذا التردد .

(ب) إذا ربط الملف على التوالي مع متسعة مثالية C ومصدر تردد فولتية 1 MHz ومقاومته الداخلية مهملة . ما مقدار التغير في تردد المصدر إذا كانت فولتيته ثابتة ولغرض الحصول على أقصى فولتية عبر المتسعة .

(ج) إذا ثبت التردد عند 1 MHz كم هو التغيير في C لتقليل التيار الى نصف قيمته القصوى .

(الجواب : (أ) 200 (ب) 6.25 Hz (ج) 1.1 pF)

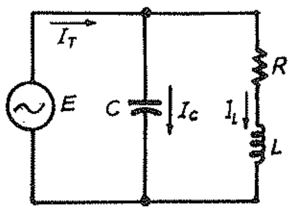
10. لدائرة رنين التوازي RLC المبينة في الشكل 11.16 . أوجد قيمة تردد الرنين عندما :

(أ) $R = 20\Omega, L = 100\ H, C = 150\ pF, E = 10\ V$

(ب) $R = 200\Omega, L = 100\ H, C = 150\ pF, E = 10V$

(ج) $R = 10\Omega, L = 12\ mH, C = 0{\cdot}22\ F, E = 5V$

(الجواب : (أ) 1·299MHz (ب) 1·2599 mHz (ج) 9·795Hz)



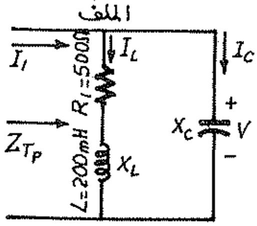
الشكل 11.16

11 . متسعة متغيرة من 10 الى 100 pF حيث تردد الرنين يتغير من 1.6 الى $4\ MH_z$.
أوجد قيمة التغير في المتسعة وكذلك قيمة المحاثة
(الجواب : 7.14 pF, 9203 H)

12 . أوجد عرض الحزمة لدائرة رنين توازي متكونة من متسعة 120 pF ومحاثة 180 H ومقاومة 18kΩ .
(الجواب : 736 Hz)

13 . أوجد عرض الحزمة لدائرة المسألة 12 . السابقة إذا أضيفت مقاومة جسرية 100 على التوازي مع الدائرة .
(الجواب : 88.19 k.Hz)

14 . ما قيمة الفولتية المتكونة عبر دائرة الشكل 11.17 إذا كان تيار المصدر (أ) عند تردد الرنين (ب) عند التردد 50 Hz مفترضاً أن قيم المحاثة والمقاومة هي نفسها عند التردد 50 Hz وكذلك عند التردد 1 k.Hz .
(الجواب :(أ) 4.001 kV (ب) 8.50 V 503 V)

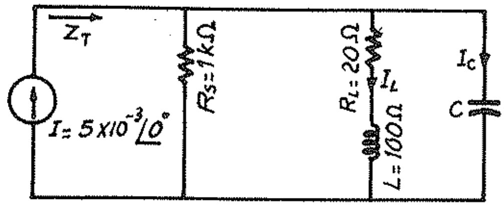


الشكل 11.17

15 . إذا كانت قيمة Q لمحاثة 25 H تساوي 75 عند التردد 3 M.Hz ماقيمة :
(أ) المتسعة المتوازية اللازمة لجعل تردد الرنين 3 M.Hz
(ب) ماقيمة عرض الحزمة (ج) ماقيمة ممانعة دائرة الرنين هذه؟
(الجواب : (أ) 112.6 pF (ب) BW = 40 k.Hz (ج) 35. 34 kΩ)

16 . لدائرة الشكل 11.18 المبين أدناه .
(أ) أوجد X_C عند الرنين. (ب) الممانعة الكلية للدائرة (ج) التيار I_L, I_C عند الرنين (د) إذا كان تردد الرنين 20, 000 H أوجد قيمة C, L عند الرنين (هـ) أوجد BW, Q.

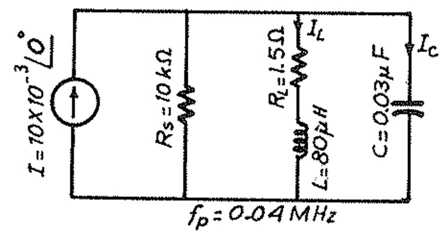
(الجواب : (أ) X= 104 (ب) Z= 342.11 (ج) I= 16.78 × 10− 78068 (د) I= 16.45× 10 90° (د) C= 76.56 nf, L= 0.796 mH (هـ) BW= 6079.03 H, Q= 3.29)



الشكل 11.18

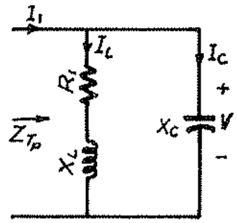
17 . لدائرة الشكل 11.19 المبين أدناه (أ) أوجد تردد الرنين (ب) أوجد قيم X_L,X_C عند الرنين (ج) أوجد قيمة Q (د) أوجد قيمة Z_T عند الرنين (هـ) أوجد التيارات I_C, I_L عند الرنين ثم أوجد BW .

(الجواب : (أ) F= 102.7 kH (ب) X_L= 51.6Ω. X_C= 51.68 (ج) Q_o= 34.4 (د) Z_T= 1.51 k Hz (هـ) I_L= 292.52× 10, I_C= 292.18× 10 88.33− BW= 3514.72 Hz.



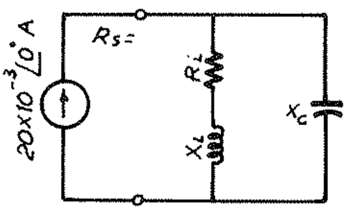
الشكل 11.19

18 . يطلب جعل ممانعة الدائرة المبينة في الشكل 11.20 عبارة عن مقاومة قيمتها 50 k عند تردد الرنين.
(أ) أوجد قيمة X_L (ب) أوجد X_C (ج) أوجد تردد الرنين إذا كانت L = 16 mH (د) أوجد قيمة C .
(الجواب : (أ) $X_C = 1581$ (ب) $X_L = 1581\Omega$ (ج) F = 15735 Hz (د) C = 6.4 mF)



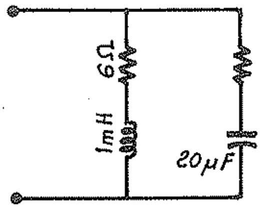
الشكل 11.20

19 . صمم شبكة الدائرة المبينة في الشكل 11.21 أدناه لكي تكون لها الخصائص التالية : (أ) عرض الحزمة 500 Hz (ب) Q = 30 (ج) V = 1.8 V
(الجواب : $F_P = 15$ kHz, $X_L = 3\Omega$, $R_e = 0{\cdot}1\Omega$, $X_C = 150\Omega$)



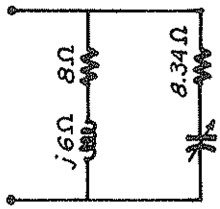
الشكل 11.21

20 . أوجد التردد W لدائرة التوازي المكونة من فرعين والموضحة في الشكل 11.22 إذا زادت قيمة المقاومة في الفرع RC فما هي أكبر قيمة لها تحصل عندها الرنين.
(الجواب : $\omega_0 = 4540$ rad/ s



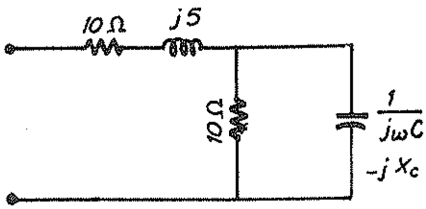
الشكل 11.22

21. أوجد قيمة C التي يحدث عندها رنين في الدائرة الموضحة في الشكل 11.23 عندما $\omega = 5000$ rad/ s .
(الجواب : $24\mu F$



الشكل 11.23

22. في الدائرة المبينة في الشكل 11.24 أوجد قيمة مفاعلة السعة التي تجعل الدائرة مقاومة نقية . وما مقدار تلك المقاومة .
(الجواب : $X = +7{\cdot}1\Omega$, $2k\Omega$)



الشكل 11.24

23. ملف مقاومته غير مهملة. ربط على التوالي مع متسعة عبر مصدر متغير التردد ثم غيرت الفولتية حتى يصل التيار قيمته العظمى حيث كان يساوي 0.5 A . فإذا كانت فولتية المصدر تساوي 20 V وتردده 318 Hz . إحسب مقاومة الملف ومحاثته إذا كانت الفولتية عبر المتسعة تساوي 50 V عند مضاعفة التردد. إحسب التغيير في السعة المطلوب لإبقاء التيار 0.5 A مع بقاء فولتية المصدر 20 V .

(الجواب : 40Ω , 50mH , $1{\cdot}25\mu F$)

الفصل الثاني عشر

أساليب أخرى لتحليل دوائر التيار المتناوب

"وقل رب زدني علماً"
طه 114

أوضح الفصل الحادي عشر الفرق بين أساليب حل دوائر التيار المتناوب بالمقارنة مع دوائر التيار المستمر. ولاشك في أن تغير التيار والفولتية المتناوبين مع الزمن هو السبب الرئيسي في هذا التعقيد. لجأنا اول الامر الى محاولة التخلص من الصيغ الرياضية المعتمدة على الزمن بتعريف القيمة التأثيرية للكميات الجيبية. ولكن بعد ذلك وجدنا الحاجة الى أستخدام العلاقات المثلثية التي تشكل صعوبة في حل الدوائر. ونتيجة لذلك لجأنا الى استخدام المخططات الطورية لتمثيل التيار والفولتية المتناوبين وكذلك عناصر دوائر التيار المتناوب. وبعد كل تلك المحاولات لازال حل دوائر التيار المتناوب معقداً مما يستوجب التوصل الى وسائل رياضية أخرى لتسهيل التعامل مع دوائر التيار المتناوب. وسنتناول في هذا الفصل الأساليب التي تضمن ذلك.

12.1 خواص الكميات الطورية

أوضحنا في الفصل السابق المميزات التي تمتلكها المتجهات وبالأخص التمثيل الطوري للكميات الجيبية. لقد أتضح ان الوصول الى تبسيط المسألة بشكل طوريات يستوجب التخلص من التغير مع الزمن. أما الخطوة التي تلت ذلك فكانت محاولة الاستفادة من خواص الطوريات المطابقة لخواص المتجهات. ويمكن تلخيص ذلك بما يلي:

1. يمثل الطوري بخط مستقيم ينتهي بسهم بحيث يدل طول الخط المستقيم على مقدار الكمية الطورية واتجاه السهم على زاوية الكمية الطورية بالنسبة الى اتجاه معين يؤخذ عادة بالاتجاه الموجب لمحور السينات.
2. يمكن تحليل الكمية الطورية الى مركبتين: احداهما أفقية والاخرى عمودية.
3. يمكن اجراء عمليتي الجمع والطرح على الكميات الطورية بتحليلها الى مركباتها الافقية والعمودية. ومن ثم تجمع الكميات الأفقية مع بعضها البعض جمعاً جبرياً والعمودية مع بعضها البعض جمعاً جبرياً كذلك تجمع المحصلتان لتكوين الطوري الكلي بإستخدام نظرية فيثاغورس.
4. عند ضرب المتجه بمقدار رقمي ثابت تكون النتيجة عبارة عن طوري جديد أتجاهه بأتجاه الطوري الأصلي وطوله يعادل طول الطوري الاصلي مضروباً بعامل الضرب الثابت.
5. عند ضرب طوريات مع بعضها البعض يكون الناتج بمقدار يعادل حاصل ضرب أقيام الطوريات وبزاوية تعادل مجموع زوايا الطوريات المضروبة. أما عند قسمة طوريين أحدهما على الآخر فيقسم مقدار أحدهما على الآخر وتطرح زاوية المقام من زاوية البسط نثبت هاتين القاعدتين في الفقرات التالية:
6. يسهل جمع وطرح الكميات الطورية (والتي تصادف عند جمع ممانعات على التوالي) بالتعامل مع الكميات الطورية بجمع وطرح مركباتها العمودية والافقية. اما ضرب وقسمة الطوريات بصيغها القطبية (مقادير وزوايا). لذلك عند استخدام الطوريات في الدوائر المعقدة، من الضروري التنقل بين التمثيل القطبي والتمثيل بالمركبات المتعامدة ذهاباً واياباً عدة مرات في الدائرة نفسها. هذا بالاضافة الى ضرورة استخدام المخططات الطورية ورسمها بدقة لغرض اخذ القياسات منها بعض الاحيان.

أن الخواص التي تم ذكرها هي التي جعلت الطوريات مؤهلة للأستخدام في دوائر التيار المتناوب. ولكن في الوقت نفسه لازالت هناك عقبات تستوجب المزيد من التبسيط لكي تقدم كل مايمكن لدوائر التيار المتناوب وهذا السبب الذي يدفعنا لاستخدام العامل j الذي سنشرحه في الفقرة التالية.

12.2 العامل j

تهيئ الرياضيات العالية اسلوباً يوفي بمتطلبات حل دوائر التيار المتناوب الا وهو مايدعى بالجبر المركب Complex Algebra. يستند هذا الجبر في اساسه الى تعريف عامل اساسي فيه يدعى بالعامل j (j operator) يعرف هذا العامل بأنه ذلك العامل الذي اذا ضرب في قيمة فانه يديره بزاوية مقدارها 90 درجة اي $\frac{\pi}{2}$ من الزوايا نصف القطرية دون ان يغير من قيمته. ويعني ذلك أن ضرب قيمة العامل j مرتين متتاليتين يؤدي الى تدويره بزاوية مقدارها 180 درجة وحيث أن تدوير المتجه بزاوية مقدارها 180 درجة يمكن ان يعبّر عنه بالضرب في -1، لذلك فأن القيمة العملية للضرب مرتين في j (اي في j^2) تكافئ الضرب في -1 اي أن:

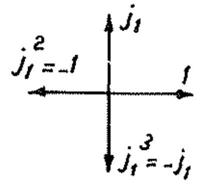
$$j^2 = -1 \tag{12.1}$$

ومنها يمكن ان نستنتج ان j تساوي $\sqrt{-1}$

لذا فأن التعريف الاساسي لـ j هو عبارة عن $\sqrt{-1}$ بالقيمة. ولكن مفهومه البياني يعطي امكانية استحداث احداثيات متعامدة: الافقي منها يمثل الاتجاه الحقيقي والعمودي منها يمثل الاتجاه الذي يأخذه العامل j. ويدعى بالاتجاه الخيالي نظراً لعدم امكان ايجاد قيمة جذر الكمية السالبة.

مما تقدم يمكن أن نمثل العامل j بمتجه طوله وحدة واحدة واتجاهه باتجاه محور الصادات وهو تعريف يتطابق مع التعريف السابق، فعند ضرب متجه مقداره واحداً يتجه نحو الاتجاه الموجب لمحور السينات (زاوية صفر) في العامل j الذي يديره بزاوية مقدارها 90 درجة ينتج متجها يصنع 90 درجة مع الاتجاه الاول اي بالاتجاه الموجب لمحور الصادات.

أما الضرب في j^2 فيدير المتجه بـ 90 درجة اخرى مما ينتج متجهاً بالاتجاه السالب لمحور السينات ثم بالضرب في j ثانية يدار المتجه لكي يواجه الاتجاه السالب لمحور الصادات وذلك كما مبين في الشكل 12.1



الشكل 12.1 العامل j

يرمز للعامل ز في الرياضيات بالرمز i والذي هو الحرف الاول من كلمة imajinary والتي تعني تخيلي. اما الكميات المركبة Complex quantity فهي تلك الكميات التي تحتوي على جزء حقيقي وجزء خيالي في الوقت نفسه. تمثل الكميات الخيالية بكمية حقيقية تساوي طول المتجه مضروبة في العامل j. فالكمية j5 هي عبارة عن متجه طوله 5 وحدات وأتجاهه باتجاه المحور j (المحور الصادي في مستوى المحاور المتعامدة) وكمثال للكميات المركبة فالمقدار

$$Z = 3 + j4$$

هو عبارة عن متجه يبدأ من نقطة الاصل وينتهي في نقطة احداثيها الافقي يساوي 3 واحداثيها العمودي يساوي 4. أي أن طول المتجه يساوي

$$|Z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

اما اتجاهه فيصنع زاوية مقدارها θ ، حيث

$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 52^o$$

ويمكن تمثيل الكمية Z بالتعبير القطبي بشكل

$$Z = 3 + j4 = 5 \underline{/\ 52^o}$$

بهذه الوسيلة البسيطة امكننا التعبير عن متجه بصورة كاملة (بالمقدار والزاوية معاً) بتعبير واحد هو j4 + 3 وهو تعبير مختصر ويحوي كل خواص المتجه دون أن يفقد منها شيئاً.

قد يبدو غريباً أن ندخل استعمال كمية خيالية لايمكن ايجاد قيمتها الحقيقية في موضوع تطبيقي له وحدات يمكن قياسها عملياً في الكهرباء مثلاً. الا اننا يجب ان ننتبه الى أن استخدام العامل j هوكمثل العامل المساعد في التفاعلات الكيمياوية الذي يدخل التفاعل دون أن يشترك فيه ثم يخرج منه كما هو. الا أن دخوله يساعد العوامل الاخرى في التفاعل لكي تشترك في التفاعلات فالعامل j هو كمية سوف نضطر لايجاد قيمتها بالوحدات الحقيقية لكنها تساعدنا في اجراء العمليات الرياضية على الطوريات وفي اخر الحل يمكن الاستغناء عنها بمجرد اخذ قيمة واتجاه الطوري الممثل بالكمية المركبة بحديها الحقيقي والخيالي. يبين الملحق (ب) خواص الكميات المركبة.

12.3 الممانعة ككمية مركبة

إن إستخدام الكميات المركبة يسهل حل للدوائر الكهربائية فالمقاومة هي كمية حقيقية لاتعطي أي زاوية طور بين الفولتية المسلطة عليها والتيار المار فيها. اما المفاعلة فبالرغم من أن وحدتها هي الاوم ايضاً، الا أن فرق الطور بين الفولتية المسلطة عليها والتيار المار فيها هو 90 + درجة أو 90 − درجة. وهي خاصية الضرب في العامل j أو في j− كما يتبين من الملحق (ب). لذلك من اليسير تمثيل المفاعلة بكمية خيالية (jX_L للمفاعلة الحثية و$-jX_c$ للمفاعلة السعوية). وبمزج المقاومات (كميات حقيقية) مع المفاعلات (كميات خيالية) يمكن الحصول على الممانعات (فتكون كميات مركبة). لذلك تمثل الممانعة بكمية مركبة: الجزء الحقيقي منها هو المقاومة والجزء الخيالي هو المفاعلة.
ويمكن تمثيل الممانعة بكمية مركبة بدلالة الاحداثيات المتعامدة أو بشكلها القطبي.

حيث أن الممانعة هي النسبة بين الفولتية والتيار، لذا فان احدى هاتين الكميتين على الاقل (الفولتية او التيار أوكلاهما) يجب أن يكون كمية مركبة. قد يبدو الجزء الخيالي من التيار مثلاً صعب التصور، الا أن علينا ان نرجع الى أصل المسألة ببساطة. فليس هناك تيار خيالي حقيقة الا ان استخدام العامل j الخيالي يساعدنا في الاشارة الى أن تياراً مزاحاً عن فولتية ما بزاوية مقدارها 90 درجة يمكن تمثيله بأنه يرتبط مع الفولتية بمانعة ذات قيمة خيالية فقط. اي أنها تحوي على مفاعلة ولاتحوي اية مقاومة. ومثل هذا التيار يسري حقيقة ويمكن قياسه بأجهزة القياس الاعتيادية وتجدر الاشارة الى ان المفاعلة الحثية بصيغتها المركبة تساوي $j\omega L$. اما المفاعلة السعوية فهي تساوي $\frac{1}{j\omega C}$ وتساوي $-j\frac{1}{\omega C}$

مثال (12.1)

سلطت فولتية 100 فولت على ممانعة فكان التيار المار فيها 50j + 50 امبير. مامقدار تلك الممانعة؟

الحل:

ترتبط الفولتية والتيار بقانون اوم الذي يمكن كتابته الان بشكل

$$Z = \frac{V}{I}$$

وبالتعويض عن V و I

$$Z = \frac{100}{40 + j50}$$

وبضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$Z = \frac{100(50 - j50)}{(50 + j50)(50 - j50)}$$

$$= \frac{100(50 - j50)}{(50)^2 + (50)^2} = 1 - j1\ \Omega$$

أن هذا المثال يعطي فكرة عن الاسلوب الجديد للتعامل مع الدوائر الكهربائية عند مرور تيار متناوب فيها. فالفولتية المسلطة بالحقيقة كانت بشكل

$$V = 100\sqrt{2}\ \sin \omega t$$

والتيار الذي يمر في الممانعة ما هو الا

$$I = 100 \sin(\omega t + 45^o)$$

فالقيمة المؤثرة للفولتية هي 100V والقيمة المؤثرة للتيار هي $\frac{100}{\sqrt{2}}$ ومزاحة بزاوية مقدارها 45 درجة عن الفولتية. لذا فقيمة الممانعة هي

$$\frac{100}{100/\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ \Omega$$

وزاويتها هي عبارة عن زاوية طور الفولتية مطروحاً منها زاوية طور التيار التي تساوي 45− درجة. لذا فالممانعة هي عبارة عن

$$Z = \sqrt{2}\ \angle -45^{o}$$

والتي جزءها المقاومي يساوي($\sqrt{2}\cos(-45^{o})$ والذي يساوي اوماً واحداً وجزءها المفاعلي يساوي ($\sqrt{2}\sin(-45^{o})$ ويساوي اوماً واحداً. اي أن المفاعلة سعوية.
من مقارنة الحل بالاسلوبين يتضح أن الوصول الى الهدف يكون اسرع وابعد عن ارتكاب الاخطاء بأستخدام الكميات المركبة وهو ما سنتبعه في المناقشات القادمة.

مثال (12.2)

أوجد الممانعة المكافئة للممانعات 3+j4 و 4 − j3 و 5+j5 عند ربطها تارة على التوالي وتارة اخرى على التوازي.

الحل :

أ) الربط على التوالي :

الممانعة المكافئة لهذه الممانعات

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3 \\ &= 3 + j4 + 4 - j3 + 5 + j5 \\ &= 12 + j6\ \Omega \end{aligned}$$

ومنها يتضح أن دمج الممانعات على التوالي ماهو الا دمج المقاومات معاً والمفاعلات معاً. والناتج هو مجموع الكمية الاولى والتي هي كمية حقيقية مع الكمية الثانية مضروبة في العامل ز والتي هي كمية خيالية

(ب) الربط على التوازي

ترتبط الممانعة المكافئة مع الممانعات الثلاث بالعلاقة

وبالتعويض نحصل على :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{3 + j4} + \frac{1}{4 - j3} + \frac{1}{5 + j5}$$

بالضرب في مرافقات المقاومات في البسط والمقام لكل من هذه الكميات

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{3 - j4}{9 + 16} + \frac{4 + j3}{16 + 9} + \frac{5 - j5}{25 + 25}$$

$$= \frac{1}{50}\,(6 - j8 + 8 + j6 + 5 - j5)$$

$$= \frac{1}{50}\,(19 - j7)$$

$$\therefore Z_T = \frac{50}{19 - j7}$$

بالضرب في المرافق

$$Z_T = \frac{50\,(19 + j7)}{19^2 + 7^2} = \frac{50\,(19 + j7)}{410}$$

$$= 2{\cdot}47 \underline{/\,20{\cdot}2^{o}}$$

كما يمكن اجراء التبسيط السابق باسلوب يستخدم التحويل القطبي اكثر من مرة. فمثلاً

$$\frac{1}{Z_T} = \frac{1}{5\,\underline{/52^o}} + \frac{1}{5\,\underline{/-37^o}} + \frac{1}{5\sqrt{2}\,\underline{/45^o}}$$

$$\frac{1}{Z_T} = 0{\cdot}2\,\underline{/-52} + 0{\cdot}2\,\underline{/37^o} + \frac{0{\cdot}2}{\sqrt{2}}\,\underline{/-45^o}$$

$$\frac{1}{Z_T} = 0{\cdot}38 - j0{\cdot}14$$

$$\therefore\ Z_T = \frac{1}{0{\cdot}38 - j0{\cdot}14} = 2{\cdot}317 + j0{\cdot}853 = 2{\cdot}47\,\underline{/20{\cdot}2^o}$$

والتي يمكن ايجاد قيمتها باعادة تحويل الصيغة القطبية الى الصيغة المتعامدة ثم جمع الاجزاء الحقيقية معاً والاجزاء الخيالية معاً.

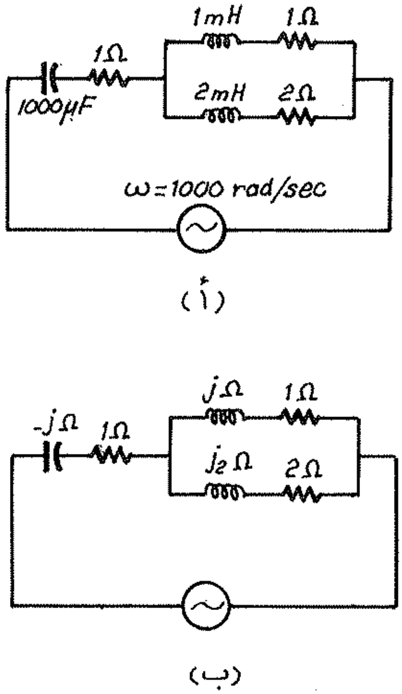
يلاحظ من المثال (12.2) أن ربط ممانعات على التوالي قد طبق عليه قانون ربط المقاومات على التوالي عدا استخدام كميات مركبة بذل الكميات الحقيقية عند معالجة دوائر التيار المستمر. كما ان العلاقة التي تعطي المانعة المكافئة للمانعات المربوطة على التوازي هي عبارة عن علاقة ربط المقاومات على التوازي نفسها عدا استخدام كميات مركبة بدل كميات حقيقية.

مثال (12.3)

أوجد المانعة المكافئة للدائرة المبينة في الشكل 12.2 آ اذا كان تردد المصدر .1000 rad/s

الحل:

بإيجاد المفاعلات بالأوم (للمحثين والمتسعة) يمكن الحصول على دائرة الشكل (3.8 ب) حيث



الشكل 12.2 أ) دائرة المثال 12.3 ب) الدائرة المكافئة بالاوم

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{1000 \times 1000 \times 10^{-6}} = 1\,\Omega$$

$$X_{L_0} = \omega L_1 = 1000 \times 10^{-3} = 1\,\Omega$$

$$X_{L_2} = \omega L_2 = 1000 \times 2 \times 10^{-3} = 2\,\Omega$$

وبذا اصبحت الدائرة مكونة من ممانعتين مربوطتين على التوازي هما $Z_1 = 1 + j1$ و $Z_2 = 2 + j2$ ومكافئها مربوط مع الممانعة $Z_3 = 1 - j1$ على التوالي. فالممانعة الكلية.

$$Z_T = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3$$

$$= \frac{(1 + j1)(2 + j2)}{1 + j + 2 + j2} + 1 - j$$

$$= \frac{2}{3} + j\frac{2}{3} + 1 - j = \frac{5}{3} - j\frac{1}{3}\,\Omega$$

وهي ممانعة مكونة من مقاومة قيمتها $\frac{5}{3}$ أوم ومتسعة مفاعلتها ذات قيمة $\frac{1}{3}$ أوم

12.4 القدرة ككمية مركبة

لقد عرفنا القدرة في دوائر التيار المتناوب في الفقرة 7.9 بأنها حاصل ضرب القيمتين التأثيريتين للفولتية والتيار في عامل القدرة الذي هو جيبتمام الزاوية بينهما.

فاذا مثلنا الفولتية $V \underline{/ \theta_v}$ والتيار بـ $I \underline{/ \theta_i}$ كانت القدرة عبارة عن

$$P = VI \cos(\theta_v - \theta_i) \tag{12.2}$$

وحيث ان $\cos(\theta_v - \theta_i)$ هو الجزء الحقيقي من $e^{j(\theta_v - \theta_i)}$ كما يتضح من متطابقة يولر، لذا بالامكان كتابة القدرة بشكل

$$P = VIR_e [\, e^{j(\theta_v - \theta_i)}. \tag{12.3}$$

وحيث ترمز R_e الى أخذ قيمة الجزء الحقيقي فقط (مختصر Real) أو

$$P = R_e [\, V_e^{j\theta_v} \cdot e^{-j\theta_i} \,] \tag{12. 4}$$

ومنها يتضح أن القدرة في دوائر التيار المتناوب هي ليست سوى الجزء الحقيقي من حاصل ضرب الفولتية المركبة في مرافق التيار المركب (حيث أن $I e^{-j\theta_i}$ هو مرافق $I e^{j\theta_i}$) لذلك يمكننا ببساطة أن نكتب

$$P = R_e [\, \vec{V}\ \vec{I} \,] \tag{12.5}$$

حيث $\vec{V}$ هي الفولتية المركبة و $\hat{\vec{I}}$ هي مرافق التيار المركب راجع الملحق (ب) الصفحة 415 من الواضح أن الجزء المتبقي من الكمية الاسية هو الجزء الخيالي والذي يساوي القدرة الخيالية الذي سبق ذكرها في الفقرة 7.9. أي أن

$$Q = I_m(\vec{V}\,\hat{I}) \quad (12.6)$$

حيث I_m (مختصر Imajinary) ترمز الى الجزء الخيالي من الكمية .

بإستخدام الأساليب التي تم التعرف عليها في هذا الفصل فن السهولة بمكان تصور تمثيل القدرة ككمية مركبة بشكل :

$$S = P + jQ \quad (12.7)$$

حيث S هي القدرة الظاهرية ككمية مركبة (مقداراً وزاوية) بالفولت أمبير و P هي القدرة الحقيقية بالواط و Q هي القدرة الخيالية بالفار ، وتنطبق كافة العلاقات التي تم شرحها في الفصل السابق حيث :

$$P = |V| \,.\, |I| \cos(\theta_v - \theta_i) \quad ...(12{\cdot}8)$$

$$Q = |V| \,.\, |I| \sin(\theta_v - \theta_i) \quad ...(12{\cdot}9)$$

$$S = |V| \,.\, |I| \quad ...(12{\cdot}10)$$

حيث θ_v, θ_i زوايا الطور للفولتية والتيار على التوالي .

مثال 12.4 :

ثلاثة أحمال متوازية أقيامها 5k.W بعامل قدرة مقداره 0.707 متخلف و 15kW بعامل قدرة مقداره 0.9 سابق و 10kW بعامل قدرة مقداره 0.85 متخلف .
أوجد القدرة الكلية وعامل القدرة الكلي .

الحل :

$$S = 5000(0{\cdot}707 + j0{\cdot}707) = 3535 + j3535$$

$$S = 15000(0{\cdot}9 - j0{\cdot}436) = 13500 - j6540$$

$$S = 10{,}000(0{\cdot}85 + j0{\cdot}527) = 3500 + j5270$$

$$S = S + S + S = 25535 + j2265$$

$$= 25635 \underline{/ 5{\cdot}07^o}$$

أي أن القدرة الكلية الحقيقية P تساوي 25535w والظاهرية 25635VA بعامل قدرة مقداره(5.07^{o}) Cos أي 0.991 متخلف والقدرة الخيالية مقدارها 2265VAR .

مثال (12.5)

ربطت الاحمال التالية الى مصدر تجهيز مشترك فكان الحمل الاول يعادل 100 كيلوفولت امبير بعامل قدرة متخلف 0.707 والحمل الثاني 50 كيلو واط بعامل قدرة مقداره 1 والحمل الثالث 150 كيلوفولت امبير بعامل قدرة سابق مقداره 0.6 . يطلب ايجاده القدرة الحقيقية والقدرة الظاهرية والقدرة المركبة وعامل القدرة والقدرة الخيالية.

الحل:

يمكن تمثيل القدرة الاولى بشكل مركب

$$S_1 = 100,000\ (0.707 - j0.707)$$

والقدرة الثانية

$$S_2 = 50,000$$

والقدرة الثالثة

$$S_3 = 150,000\ (0.6 + j0.8)$$

وبجمع هذه الكميات المركبة الثلاثة

$$\begin{aligned} S_T &= S_1 + S_2 + S_3 \\ &= 70.7 - j70.7 + 50 + 90 + j120 \quad \text{KVA} \\ &= 210.7 + j49.3 = 216.4 \underline{/ 13.7^{o}} \end{aligned}$$

فالقدرة الحقيقية هي 210.7 كيلوا واط والقدرة الخيالية (المتفاعلة) 49.3 كيلوفار والقدرة الظاهرية هي 216.4 كيلوفولت والقدرة المركبة هي $216.4 \underline{/ 13.7^{o}}$ وعامل القدرة $\text{Cos}\ 13.7 = 0.974$

مثال 12.6

سلطت فولتية مقدارها 30+j40 فولت فامررت تيارا مقداره 1+j1 امبير. احسب القدرة الحقيقية والقدرة الخيالية المصروفتين في الدائرة.

الحل:

حيث ان القدرة المركبة تحسب من العلاقة

$$S = \vec{V}\,\hat{I}^{*}$$

$$S = (30 + j40)(1 - j1)$$

لذا

$$= 70 + j10 = 70{\cdot}7 \angle 8^o$$

فالقدرة الحقيقية هي 70 واط والقدرة الخيالية هي 10 ڤار والقدرة الظاهرية تساوي 70.7 فولت امبير.

ولغرض التأكد من الحل نحاول حل المسألة بالمعلومات المتوفرة وفق الفقرة 7.9 فالفولتية تساوي $50 \angle 53^o$ والتيار $\sqrt{2} \angle 45^o$ لذا فالقدرة الحقيقية هي:

$$P = 50\sqrt{2}\cos(53^o - 45)$$

$$= 70\ W$$

والقدرة الخيالية هي

$$Q = VI\sin(\theta_v - \theta_i)$$

$$= 50\sqrt{2}\sin(53^o - 45^o)$$

$$= 10\ VAR$$

12.5 التحليل العقدي والشبكي لدوائر التيار المتناوب

لقد امكننا استخدام الكميات المركبة من استعمال قانوني جمع الممانعات على التوالي وعلى التوازي بالطريقة التي جمعنا بها المقاومات في دوائر التيار المستمر. وكان ذلك تعميماً لتطبيق قانوني كرشوف على دوائر التيار المتناوب. ينطبق قانونا كرشوف على دوائر التيار المتناوب سواء كانت الفولتيات والتيارات ممثلة بدلالة الزمن (والعناصر بدلالة التردد) او كانت التيارات والفولتيات بشكل كميات مركبة. ففي الحالة الاولى ينطبق القانونان في كل لحظة من الزمن. اما عند استخدام القيمة المؤثرة بصيغة مركبة فتنطبق خواص الكميات

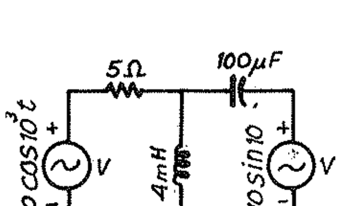
المركبة عند جمع التيارات والفولتيات بعضها مع البعض. فمثلا عند تطبيق قانون التيار لكرشوف لايكفي ان يكون حاصل جمع الاجزاء الحقيقية من التيارات المتجهة نحو عقدة مساو للصفر بل يجب ان يكون مجموع الاجزاء الخيالية من التيارات نفسها مساويا للصفر ايضا. وينطبق الامر نفسه على قانون الفولتية لكرشوف.

ان انطباق قانوني كرشوف بصيغتها البسيطة يؤدي الى امكان تطبيقها وفق التحليل الشبيكي او ماسميناه بتيارات ماكسويل الدوارة وكذلك بطريقة التحليل العقدي. ان الفرق الرئيسي بين الحل بهذه الطرق لدوائر التيار المتناوب عما ذكر في دوائر التيار المستمر هو استخدام العناصر بصيغها المركبة واستخدام التيارات والفولتيات بصيغها المركبة ايضا. وفي اثناء الحل يجب الانتباه الى ان المعادلات الناتجة هي معادلات تحوي كميات مركبة. ولهذا فان تساوي طرفيها يستوجب تساوي الاجزاء الحقيقية مع بعضها والاجزاء الخيالية مع بعضها ايضا.

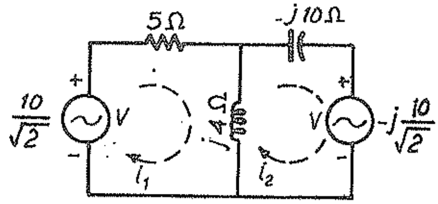
كما ان كل الاساليب التي مر ذكرها في دوائر التيار المستمر مثل تقسيم التيار بين فرعين على التوازي وتقسيم الفولتية على مقاومتين على التوالي تنطبق على دوائر التيار المتناوب عند استعمال الممانعة بشكل عدد مركب بدل المقاومة وتمثيل المصادر بكميات مركبة أيضاً كما سيتضح من التطبيقات القادمة.

مثال 12.7

حل الدائرة المبينة في الشكل 12.3 وذلك لغرض ايجاد التيارين المجهزين من المصدرين.



الشكل 12.3 دائرة المثال 12.7



الشكل 12.4 استعمال ز في دائرة

الحل:

يجب اول الامر تحويل فولتيات المصادر من الصيغة بدلالة الزمن الى كميات مركبة

اعيد رسم الشكل 12.3 كما مبين في الشكل 12.4 بعد استبدال المصدر الايسر بالقيمة التأثيرية للفولتية واعتبرت قيمتها حقيقية. ومن ثم كان استبدال المصدر الايسر بالقيمة التأثيرية له بصيغتها الخيالية السالبة. كما استبدلت الممانعات في الدائرة بقيمها المركبة (حقيقية للمقاومة وخيالية للمتسعة والمحث) باستخدام طريقة التحليل الشبيكي تكون معادلتا الشبيكتين كالاتي:

$$(5 + j4)\, i_1 - j4 i_2 = \frac{10}{\sqrt{2}} \qquad ...(12{\cdot}11)...$$

$$- j4 i_1 - j6 i_2 = j\,\frac{10}{\sqrt{2}} \qquad ...(12{\cdot}12)...$$

بضرب المعادلة (12.11) في 3 والمعادلة (12.12) في 2 ثم حلها بالحذف نحصل على i_1 و i_2 حيث

$$i_1 = 0{\cdot}0565\,(1 - j18) = 1{\cdot}0185 \underline{/-86{\cdot}8^{o}}$$

وبدلالة الزمن يمكن التعبير عن التيار i_1 ب

$$i_1 = 1{\cdot}0185\sqrt{2}\cos(10^3 t + 86{\cdot}8^o) = 1{\cdot}44\cos(10^3 t + 86{\cdot}8^o)\ A$$

وكذلك ل i_2 حيث

$$i_2 = -1{\cdot}13 + j\,0{\cdot}679$$

$$= 1{\cdot}318\ \underline{/149^o}\ A$$

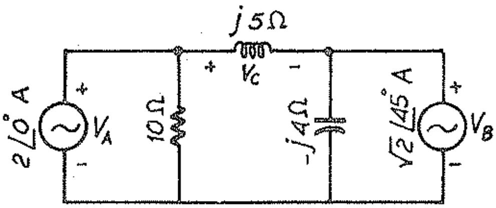
وبدلالة الزمن

$$i_2 = 1{\cdot}318\sqrt{2}\cos(10^3 t - 149^o) = 1{\cdot}863\cos(10^3 t - 149^o)\ A$$

لاحظ ان هذا المثال يمكن حله باستخدام الكميات المركبة اذا كان تردد المصدرين متساوٍ فقط.

مثال (12.8)

لدائرة الشكل 12.5 استخدام طريقة التحليل العقدي لايجاد الفولتيتين عبر مصدري التيار المبينين.



الشكل 12.5دائرة المثال 12.8

الحل:

نأخذ العقدة السفلى في الشكل على اساس انها عقدة مرجعية فتكون معادلتا العقدتين الباقيتين في الشكل كالاتي.

$$V_A \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} \right) - V_B \left(\frac{1}{j5} \right) = 2 \qquad ...(12\cdot13)$$

$$- V_A \left(\frac{1}{j5} \right) + V_B \left(\frac{1}{j5} - \frac{1}{j4} \right) = 1 + j1 \qquad ...(12\cdot14)$$

بحل هاتين المعادلتين نحصل على

$$V_A = 3{\cdot}76 - j\,2{\cdot}38$$

$$V_B = 4{\cdot}95 - j10{\cdot}4$$

12.6 تطبيق نظريات حل الدوائر الكهربائية:

يمكن تطبيق النظريات التي مر ذكرها في دوائر التيار المستمر على دوائر التيار المتناوب. مع اجراء التعديلات في طرق الحق التي مر ذكرها في الفقرة السابقة.

فنظرية التراكب تطبق بأخذ كل مصدر على حدة ثم بجمع تأثير هذه المصادر جمعا مركبا لاعطاء الفولتية او التيار المطلوب.

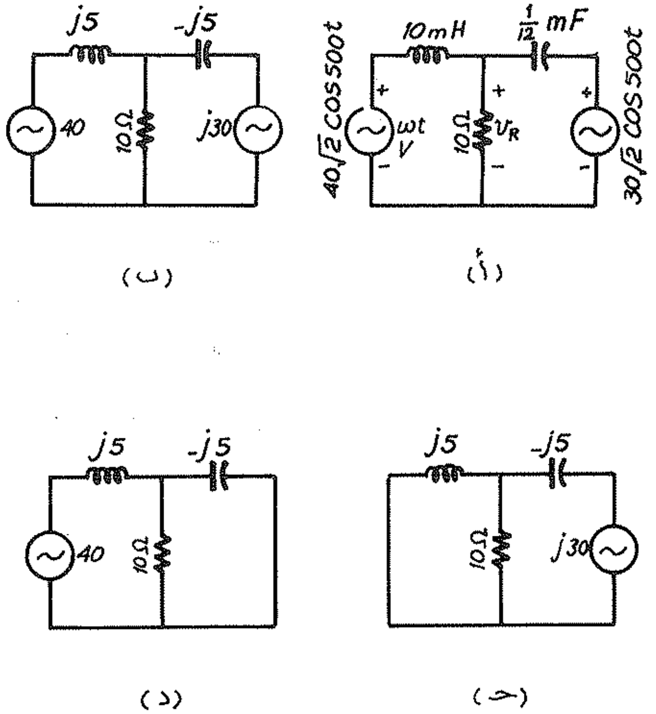
اما نظرية تفنن فتنطبق هي الاخرى بصيغتها المركبة فتؤخذ الممانعة الداخلية الظاهرة عبر طرفي الدائرة بدل ايجاد المقاومة في دوائر التيار المستمر. وينطبق الامر نفسه على نظرية نورتن.

اما تحويل المصادر من مصادر فولتية الى مصادر تيار فيتم بان تكون الفولتيات والتيارات بصيغتها المركبة وتستخدم الممانعات بصيغتها المركبة بدل المقاومات.

كما ان قوانين تحويل الربط من نجم الى دلتا وبالعكس التي مر ذكرها في دوائر التيار المستمر تنطبق باستخدام الكميات المركبة ايضا.

مثال (12.9)

باستخدام نظرية التراكب اوجد الصيغ المركبة للفولتية عبر المقاوم 10 اوم المبين في الشكل 12.6آ



الشكل 12.6 (أ) دائرة المثال 12.9 (ب) الدائرة فيها المصدر الايمن فقط (جـ) الدائرة فيها المصدر الايسر فقط

الحل:

يتم تحويل الاقيام الى الصيغة المركبة لكافة العناصر والمصادر كما في ب بأخذ المصدر الايمن لوحده تصبح الدائرة كما مبين في الشكل 12.6 ب. المانعة الكلية كما تظهر للمصدر هي عبارة عن

$$Z = \frac{10 \times j5}{10 + j5} - j5$$

$$= \frac{j50 - j50 + 25}{10 + j5} = \frac{25}{10 + j5}$$

فيصبح التيار الكلي المجهز من المصدر

$$I = \frac{j30}{Z} = \frac{j30}{\frac{25}{10 + j5}} = \frac{j30(10 + j5)}{25}$$

وباستخدام قاعدة تقسيم التيار بين ممانعتين متوازيتين يكون التيار في المقاوم 10 اوم

$$I_{10}' = \frac{I(j5)}{10 + j5} = \frac{j30(10 + j5)}{25} \times \frac{j5}{10 + j5}$$

$$= -\frac{150}{25} = -6A$$

بابقاء المصدر الايسر كما مبين في الشكل 12.6 جـ لوحده واتباع الاسلوب نفسه نحصل على

ويكون التيار الكلي

$$I = \frac{40}{Z} = \frac{40}{\frac{25}{10 - j5}} = \frac{40(10 - j5)}{25}$$

فيكون اليتار المار في المقاوم 10 اوم

$$I_{10}'' = \frac{40(-j5)(10 - j5)}{(10 - j5) \times 25}$$

$$= -j8\ A$$

فيكون التيار الكلي في المقاوم 10 اوم

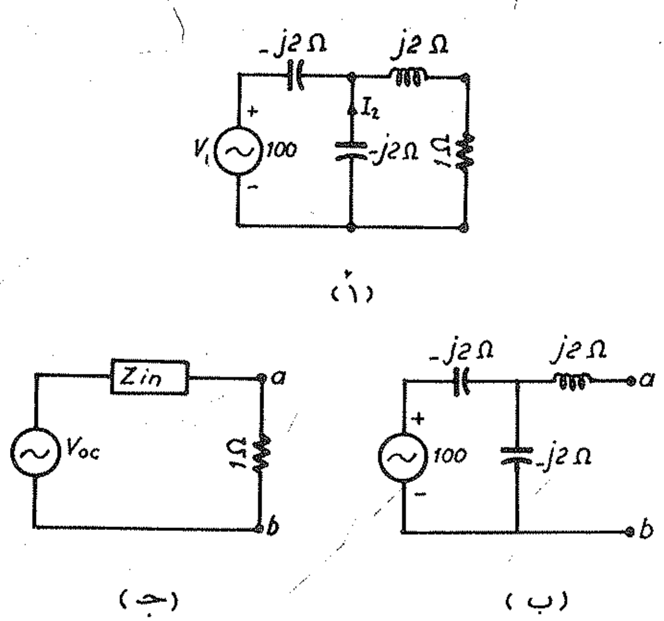
$$I_{10} = I'_{10} + I''_{10}$$

$$= -6 - j8 = 10 \underline{/233^{\circ}} \text{ A}$$

واذا اريد اعادة وضع التيار بدلالة الزمن فيصبح: $i = 10\sqrt{2}\sin(500t + 233^{\circ})$

مثال (12.10)

باستخدام نظرية ثيفنن، اوجد القدرة المصروفة في مقاومة الحمل 1 اوم المبينة في الشكل 12.7 أ



الشكل 12.7 أ) دائرة المثال 12.10 ب) الدائرة بعد فتح المقاوم ١ اوم منها

جـ) مكافىء ثيفنن

الحل:

عند فتح الدائرة بين طرفي المقاوم 1 اوم تصبح الدائرة كما مبينة في الشكل 12.7 ب فيكون فرق الجهد بين طرفي الدائرة المفتوحة

$$V_{OC} = \frac{100(-j2)}{-j2-j2} = 50V$$

اما المانعة الداخلية كما تظهر بين طرفي الدائرة المفتوحة بعد استبدال مصدر الفولتية بدائرة قصر فتساوي

$$Z_{in} = \frac{(-j2)(-j2)}{-j2-j2} + j_2$$

$$= -j1 + j2 = j1\ \Omega$$

فيكون التيار المار في المقاومة 1 أوم. كما يتضح من الدائرة المكافئة المبينة في الشكل 8.10جـ

$$I_1 = \frac{50}{1+j1} = 25\sqrt{2}$$

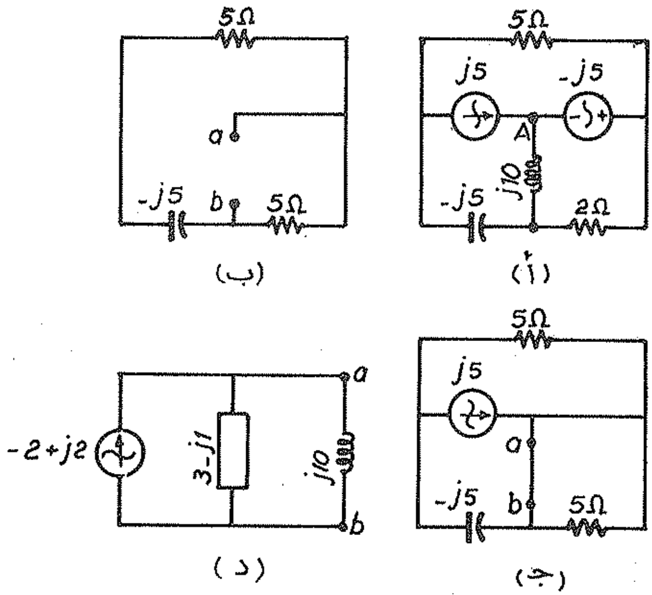
وتكون القدرة المستهلكة في هذا المقاوم

$$P = I^2R$$

$$= (25\sqrt{2})^2 \times 1 = 1250\ W$$

مثال (12.11)

اوجد التيار المار في المحث المبين في الشكل 12.8 أ باستخدام نظرية نورتن



الشكل 12.8 أ) دائرة المثال (12.11) ب) الغاء المصادر في الدائرة
جـ) دائرة ايجاد تيار دائرة القصر د) دائرة نورتن المكافئة

الحل:

للحصول على المانعة الداخلية للدائرة التي تظهر بين طرفي المحث نستبدل مصدر التيار بدائرة مفتوحة ومصدر الفولتية بدائرة قصر تصبح الدائرة كما مبين في الشكل 9.10 ب فالمقاومة 5 اوم السفلى تظهر متوازية مع ممانعة مقدارها 5–j5 اي

$$Z_{in} = \frac{5(5 - j5)}{10 - j5} = \frac{5 - j5}{2 - j}$$

وبالضرب بالمرافق نحصل على

$$Z_{in} = \frac{5 - j5}{2 - j} \; \frac{2 + j}{2 + j} = \frac{15 - j5}{5} = 3 + j1$$

ولغرض ايجاد تيار دائرة القصر يلاحظ وجود ثلاث شبيكات من الضروري كتابة معادلاتها ثم حلها. لذلك سنستخدم نظرية التراكب لايجاد تيار دائرة القصر هذا.

بابقاء مصدر التيار لوحده تصبح الدائرة كما مبينة في الشكل 12.8 جـ حيث تعتبر المقاومة السفلى اوم دائرة مفتوحة لانها متوازية مع دائرة قصر. فيكون التيار المطلوب هو عبارة عن التيار المار في المتسعة ويساوي.

$$I_{sc}' = \frac{j5}{5 - j5} \times 5$$

$$= \frac{j25}{5 - j5}$$

اما عند اخذ مصدر الفولتية لوحده فتصبح الدائرة كما مبين في الشكل 12.8 ب . اي ان التيار المطلوب هنا هو تيار مصدر الفولتية. فالدائرة كما تظهر لمصدر الفولتية هي عبارة عن ممانعة مقدارها 5j−5 على التوازي مع 5 اوم. وقد سبق حساب هذه الكمية نفسها عند ايجاد Zin اي :

$$I_{sc}'' = \frac{-j5}{\frac{(5 - j5)(5)}{5 - j5 + 5}} = \frac{-j5(2 - j)}{5 - j5}$$

$$I_{sc} = I_{sc}' + I_{sc}'' = \frac{j25}{5 - j5} - \frac{j5(2 - j)}{5 - j5}$$

$$= \frac{j25}{5 - j5} - \frac{5 + j10}{5 - j5} = \frac{-5 + j15}{5 - j5} = \frac{(-1 + j3(1 + j)}{2}$$

$$= \frac{-1 - 3 + j4}{2} = -2 + j2$$

فتكون الدائرة المكافئة وفق نظرية نورتن كما مبين في الشكل 12.8 د فيكون التيار في المحث

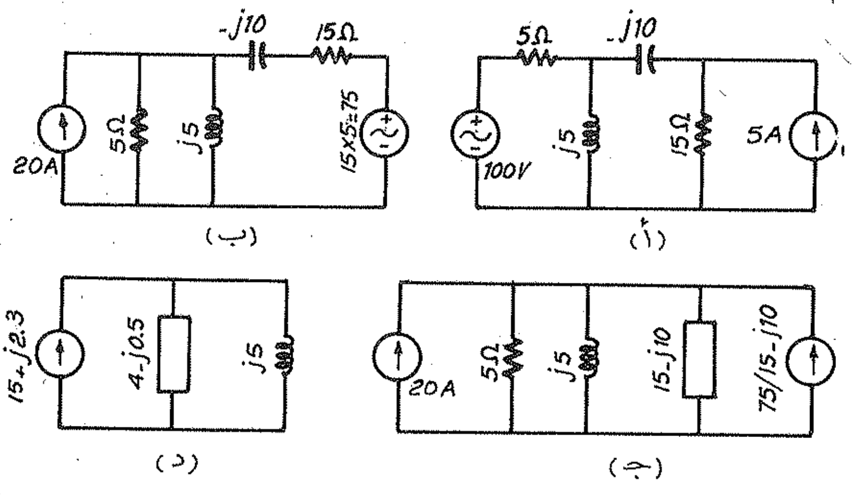
$$I_{i10} = \frac{(-2 + j2)(3 - j1)}{(3 - j1) + j10} = \frac{-6 + 2 + j6 + j2}{3 + j9}$$

$$= \frac{(-4 + j8)(3 - j9)}{(3 - j9)(3 - j9)} = \frac{-12 + 72 + j24 + j36}{90}$$

$$= \frac{2 + j2}{3}\ \text{A}$$

مثال 12.12

اوجد التيار المار في المحث المبين في دائرة الشكل 12.9 أ وذلك بطريقة تحويل المصادر.



الشكل 12.9 أ) دائرة المثال (12.12) ب) تحويل مصدر الفولتية الى مصدر تيار وبالعكس
جـ) الدائرة بعد دمج بعض العناصر وتحويل المصدر الايمن د) الدائرة النهائية

الحل:

بتحويل مصدر التيار مع المقاومة 15 اوم المتوازية معه الى مصدر فولتية على التوالي مع مقاومة وتحويل مصدر الفولتية الايسر المربوط على التوالي مع المقاومة 5 اوم الى مصدر تيار تصبح الدائرة كما مبين في الشكل 12.9 ب. وبتحويل مصدر الفولتية الايمن الى مصدر تيار على التوازي مع ممانعة مقدارها j10 – 15 تصبح الدائرة كما في الشكل 12.9 جـ.

التيار الكلي يساوي

$$I_t = 20 + \frac{75}{15 - j10} = \frac{60 - j40 + 15}{3 - j2}$$

$$= \frac{(75 - j40)(3 + j2)}{(3 - j2)(3 + j2)} = \frac{15(13 + j2)}{13}$$

$$= 15 + j2{\cdot}3$$

الممانعة المكافئة لـ5أوم على التوازي مع 15–j10

$$Z = \frac{5(15 - j10)}{20 - j10} = \frac{15 - j10}{2(2 - j1)} = \frac{5(3 - j2)}{2(2 - j)} \quad \frac{(2 + j)}{(2 + j)}$$

$$= \frac{8 - j1}{2} = 4 - j0{\cdot}5$$

فيكون التيار المار في المحث

$$I_{j5} = I_t \frac{(4 - j0{\cdot}5)}{4 - j0{\cdot}5 + j5} = (15 + j2{\cdot}3)\frac{4 - j0{\cdot}5}{4 + j4{\cdot}5}$$

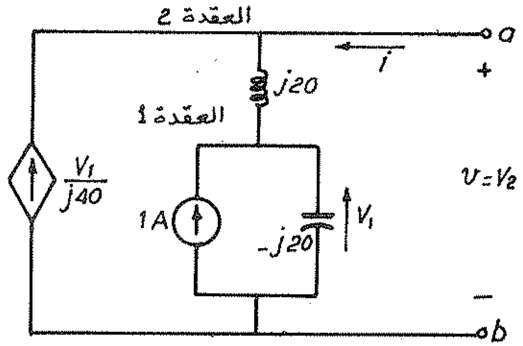
$$= \frac{251{\cdot}29 + j281{\cdot}975}{36{\cdot}25} = 6{\cdot}93 + j7{\cdot}78$$

مثال (12.13)

اوجد علاقة بين v و i في الدائرة المبينة في الشكل 12.10 التي تحوي على مصدر تيار معتمد ومصدر تيار غير معتمد.

الحل:

بتطبيق قانون كرشوف على العقدتين 1 و 2 على التعاقب نحصل على



الشكل 12.10 دائرة المثال (12.13)

$$\frac{v_1}{-j20} - 1 = \frac{v_1 - v}{j20} \qquad (12.15)$$

$$\frac{v_1}{j40} - \frac{v_2 - v_1}{j20} + i = 0 \qquad (12.16)$$

ونحل المعادلتين (12.15) و (12.16) للحصول على v_2 بدلالة i وذلك بايجاد v_1 من المعادلة (12.15) وتعويضها في (12.16) نجد

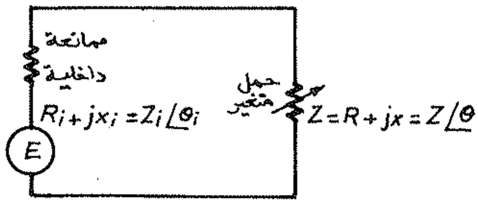
$$v_2 = j\,(30 - 10i)$$

12.7 القدرة العظمى في دوائر التيار المتناوب

اوضحنا في دوائر التيار المستمر ان القدرة العظمى المجهزة الى حمل معين تحدث حينما تكون مقاومة الحمل مساوية للمقاومة الداخلية للمصدر كما في المعادلة (4.17) ولكن عند معالجة دوائر التيار المتناوب يظهر في الامر شيء جديد الا وهو زاوية طور الممانعة فليس الموضوع ببساطة دوائر التيار المستمر. وسنحاول فيما يأتي ايجاد الظروف التي عندها يحدث تجهيز القدرة العظمى الى حمل في دوائر التيار المتناوب :

لنأخذ دائرة الشكل 12.11 والتي يظهر فيها حمل ممانعة Z ذات طور مقداره θ اما الممانعة الداخلية للمصدر فهي Z_i وزاويتها θ_i فالتيار المار في هذه الدائرة هو

$$I = \frac{E}{\vec{Z}_i + \vec{Z}} \qquad (12.17)$$



الشكل 12.11 دائرة اثبات قوانين القدرة العظمى

حيث

$$Z_i = R_i + jX_i$$

$$Z = R + jX$$

فيكون اليتار

$$I = \frac{E}{(R + R_i) + j(X + X_i)} \qquad ...(12{\cdot}18)$$

ولايجاد مرافق التيار $\hat{I}$ يجب الضرب في مرافق المقام

$$I = \frac{E(R + R_i) - j(X + X_i)}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}$$

ويكون مرافق التيار I

$$\hat{I} = \frac{E(R + R_i) + j(X + X_i)}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \qquad ...(12{\cdot}19)$$

والفولتية عبر الحمل،

$$V_L = IZ_L$$

$$= \frac{E[(R + R_i) - j(X + X_i)](R + jX)}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2} \qquad ...(12{\cdot}20)$$

فتكون القدرة وفق المعادلة (12.5) . وبتعويض (12.19) و (12.20) فيها

$$P = R_e[V\hat{I}]$$

$$= R_e\left[\frac{E^2[(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2]}{[(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2]^2}\right][R + jX]$$

$$= \frac{E^2R}{(R + R_1)^2 + (X + X_i)^2} \qquad ...(12{\cdot}21)$$

من الواضح اذا تغيرت X فان القدرة المعطاة في المعادلة (12.21) تكون عند اكبر قيمة لها حينما $X + X_i = 0$ اي $X = X_i$

وعند ذلك تكون قيمة اكبر قدرة :

$$P = \frac{E^2R}{(R + R_i)^2} \qquad (12{\cdot}22)$$

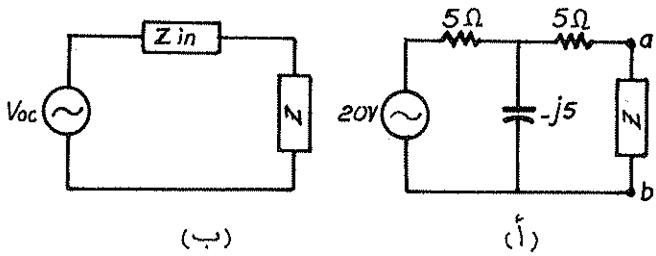
وهذه تكون عند قيمتها العظمى حينما تكون $R = R_i$ كما مر بنا في دراستنا للتيار المستمر (راجع المعادلة 4.8)

لذلك تكون القدرة عند قيمتها القصوى حينما تكون ممانعة الحمل هي مرافق ممانعة المصدر (تساويها بالمقدار وتعاكسها بالزاوية)

$$Z = R_i - jX_i \tag{12.23}$$

مثال (12.14)

للدائرة المبينة في الشكل 12.12 أ. اوجد مقدار الممانعة التي تستلم اعظم قدرة ومامقدار تلك القدرة.



الشكل 12.12 أ) دائرة المثال (12.14) مكافيء ثيفنن

الحل:

نحاول ايجاد مكافيء ثيفنن للدائرة بالنسبة الى الحمل اي عبر الطرفين ab حيث تكون الممانعة الداخلية للدائرة بين طرفي الحمل بعد استبدال مصدر الفولتية بدائرة قصر.

$$Z_{in} = \frac{5(-j5)}{5-j5} + 5 = \frac{j5(1+j1)}{2} + 5$$

$$= 7{\cdot}5 - j2{\cdot}5 \qquad ...(10{\cdot}23)$$

اما الفولتية بين طرفي الحمل عند فتح دائرته فتساوي الفولتية عبر المتسعة والتي هي

$$V_{OC} = \frac{20}{5 - j5} \times (-j5) = \frac{-j20(1 + j1)}{5(1 - j1)(1 + j1)}$$

$$= 10 - j10 = 10\sqrt{2}\,\underline{/-45^{\circ}} \qquad \text{...(10.24)}$$

لذا فمانعة الحمل التي تستلم اعظم قدرة هي مرافق Z_{in} حسب المعادلتين (10.23) و (10.24) اي

$$Z_L = 7.5 + j25 = 2.5\sqrt{10}\,\underline{/73.3^{\circ}}$$

فتكون القدرة عند هذا الحمل

$$P = I^2R$$

$$= \left(\frac{10\sqrt{2}}{2.5\sqrt{10}}\right)^2 \times 7.5 = 240\text{W.}$$

12.8 البرنامج العاشر: دائرة تيار متناوب بسيطة

يقوم هذا البرنامج بطلب قيم أقصى فولتية متناوبة ثم قيم المقاومة والمحاثة والمتسعة والتردد ثم يرسم منحنيا الفولتية والتيار مع الزمن.

```
10 PRINT"This is a program to plot the voltage and current sinusoidal waveforms"
20 PRINT"Remark: voltage and current are going to be plot on the same scale"
30 DIM X(11)
40 INPUT "What is the value of voltage maximum value of the sine wave ",E
50 INPUT"What is the value of the resistance ",R
60 INPUT"What is the value of the inductance ",EL
70 INPUT"What is the value of the capacitance ",C
80 INPUT"What is the value of the frequency ",F
90 F=F*2*3.141549
100 MIMP=1/SQR((R^2+(F*EL-1/F/C)^2))
110 MCUR=E*MIMP
120 PQ=MCUR
130 IF PQ<1 THEN 200
140 IF PQ>10 THEN 210
150 K=1
160 IF PQ<2 THEN K=.4
170 IF PQ>5 THEN K=2
180 L=MCUR/PQ
190 GOTO 220
200 PQ=PQ*10:GOTO 130
210 PQ=PQ/10:GOTO 130
220 FOR I=0 TO 10
230 X(I)=K*L  *(I-5)
240 NEXT I
250 CLS
260 SCREEN 8
270 FOR I=10 TO 0 STEP -1
280 Y=21-2*I
290 LOCATE Y,1:PRINT INT(X(I))
300 NEXT I
310 LINE(60,0)-(60,165)
320 LINE (60,80 )-(688, 80)
330 FOR I=1 TO 11
340 LINE(58,I*16)-(62,I*16)
350 NEXT I
360 FOR I=1 TO 12
370 LINE(60+41.86*I, 83)-(60+41.86*I, 77)
380 NEXT I
390 S=(EL*F-1/F/C)/R
400 IF S>100 THEN S=100
410 IF S<-100 THEN S=-100
420 IF ABS(S)<.01 THEN S=0
430 TH=ATN(S)
440 FOR M=1 TO 314
450 I=.02*M
460 P= 16*PQ  *SIN(I+TH)  /K
470 Q= 16*PQ  *SIN(I   )  /K*MIMP
480 PSET  (60+M*1.6, 80-P)
490 PSET  (60+M*1.6, 80-Q)
500 NEXT M
```

مسائل الفصل الثاني عشر

3. أكتب التيارات الآتية التي هي بدلالة الزمن الى الصيغة المركبة

أ) $15\cos(\omega t + 30)$ ب) $20\sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right)$ جـ) $3\cos\omega t - 4\sin\omega t$

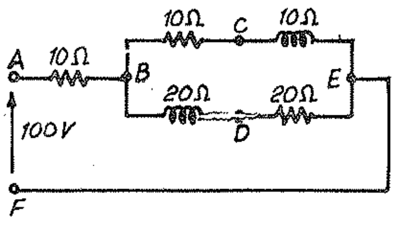
د)، $50\sin\left(100t + \frac{\pi}{6}\right) + 100\sin\left(100t - \frac{\pi}{6}\right)$

الجواب $132{\cdot}37\,\underline{/\,79{\cdot}14^{\circ}},\ 5\,\underline{/\,53{\cdot}13},\ 20\,/\sqrt{2}\ \underline{/\,0^{\circ}},\ 19\sqrt{2}\ \underline{/\,30^{\circ}}$

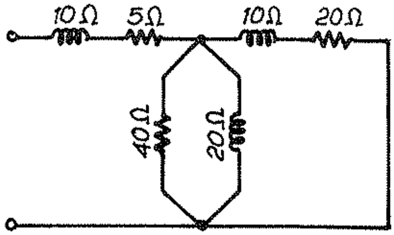
2. مصدر فولتية $240\,V$ ربط على التوالي مع عنصرين أحدهما ممانعته $80\,\underline{/\,60^{\circ}}$ فما ممانعة العنصر الثاني إذا كان التيار $2A$ ويسبق بزاوية مقدارها 40°.
(الجواب : $Z = 155\,\underline{/-70{\cdot}5^{\circ}}$)

3. أوجد قيمة العنصرين اللذين عند ربطهما على التوالي تكون ممانعتها عند التردد الزاوي $4krad/s$ مساوية لمانعة متسعة $50\,F$ ومحث $2mH$ ومقاومة 10Ω مربوطة على التوازي.
(الجواب: $C = 44\,\mu F,\ R = 2.29\,\Omega$)

4. اوجد المانعة الكلية والمسايرة الكلية للدائرتين المثبتتين في الشكلين 12.13, 12.14
(الجواب: $17.72\,\underline{/\,45{\cdot}5^{\circ}},\ 17.96\,\underline{/\,21{\cdot}8^{\circ}}$)



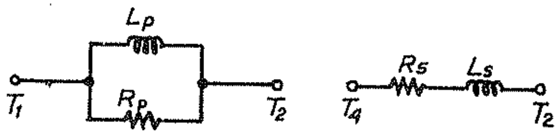
الشكل 12.13 انظر المسألة 4



الشكل 12.14 انظر المسألة 4

5. دائرتا الشكلين 12.15أ. متكافئتان . اوجد قيم L_s و R_s بدلالة R_P, L_P لكي يكون الشكلان متكافئين .

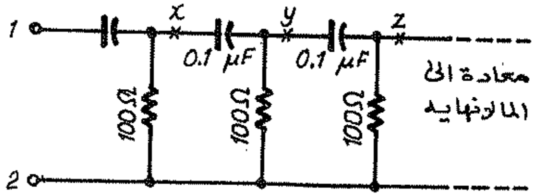
(الجواب
$$R_S = \omega^2 R_P L_P^2 / (R_P^2 + \omega^2 L_P^2)$$
$$L_S = R_P^2 L_P / (R_P^2 + \omega^2 L^2 P)$$
)



الشكل 12.15 انظر المسألة 6

6– اوجد الممانعة التي تظهر بين طرفي الشبكة المبينة في الشكل 12.16 حينما $\omega =$ 10^5 rad / s.

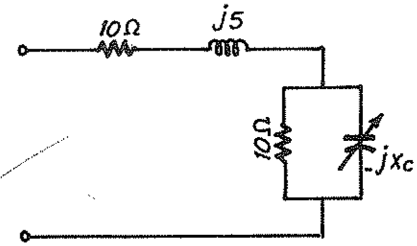
الجواب



الشكل 12.16 دائرة السؤال 6

7– في الدائرة المبينة في الشكل 12.17 ، اوجد قيمة مفاعلة المتسعة التي تجعل الدائرة مقاومة نقية. وما مقدار تلك المقاومة؟

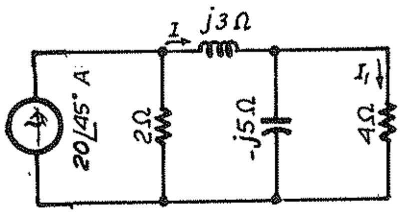
(الجواب 2.5 Ω)



الشكل 12.17 دائرة المسألة 7

8– بإستخدام تقسيم التيار مرتين. أوجد التيار I لدائرة الشكل 12.18 أدناه :

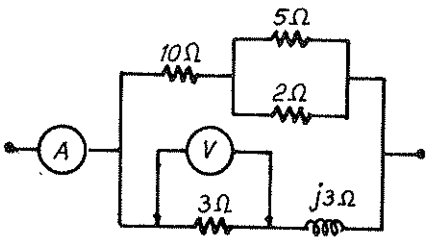
(الجواب : $6.85 \angle -7^{\circ}$)



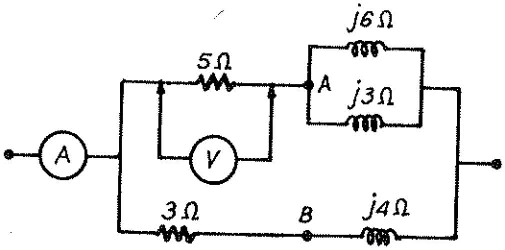
الشكل 12.18

9– إذا كانت قراءة الفولتميتر المتصل عبر المقاومة5Ω ,3Ω الموجودة في الدائرة الموضحة في الشكل 12.19 (أ) و (ب) هي 45v فأوجد (أ) قراءة الأميتر (ب) القيمة الفعالة للجهد بين النقطتين B,A.

الجواب $54{\cdot}08 \angle 33{\cdot}7^{\circ}$, $25{\cdot}44 \angle 8{\cdot}14^{\circ}$, $3\sqrt{2} \angle 45^{\circ}$ V, $10{\cdot}26 \angle 1{\cdot}4^{\circ}$ A



أ

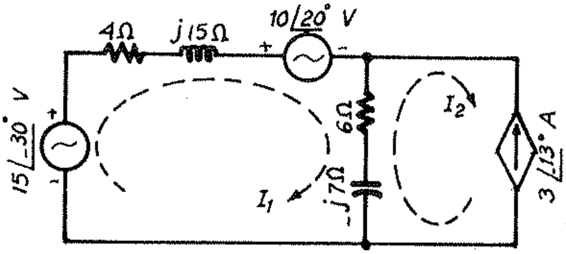


ب

الشكل 12.19 المسألة 9

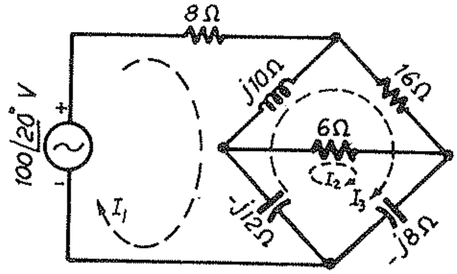
10– أوجد تيارات الدارات المؤشرة في الشكل 12.20

(الجواب : ($I = 1{\cdot}28 \underline{/\ 83{\cdot}5^{\circ}}$, $I = -3 \underline{/ -13^{\circ}}$



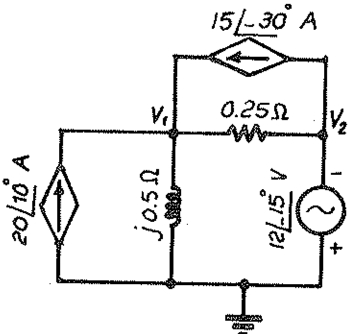
الشكل 12.20

11– بإستخدام التحليل الشبيكي أوجد التيار المار في المقاومة 6 لدائرة الشكل 12.21
(الجواب : $I = 3{\cdot}62 \underline{/-45{\cdot}8^{o}}$)



الشكل 12.21

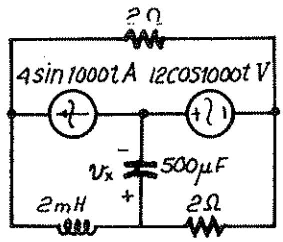
12– أوجد فولتيات العقد للدائرة المبينة في الشكل 12.22
(الجواب : $V = -12 \underline{/-15^{o}}$ V, $V = -3{\cdot}59 \underline{/-59^{o}}$ V)



الشكل 12.22

13 – اوجد التيار المار في المتسعة المبينة في الشكل 12.23 باستخدام التحليل الشبيكي او التحليل العقدي .

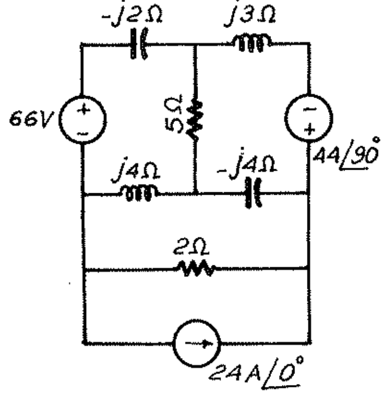
(الجواب $61 \angle 182.25^{o}$)



الشكل 12.23 انظر المسألة 13

14 – باستخدام التحليل العقدي ، اوجد التيار في المقاومة 5 أوم المبينة في الشكل 12.24

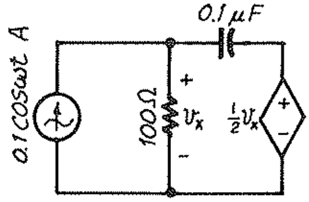
(الجواب : $11 \angle 48^{o}$ A)



الشكل 12.24 انظر المسألة 17

15– للدائرة المبينة في الشكل 12.25 كانت $w = 2 \times 10^5 \, rad/s$ اوجد $v_n(t)$

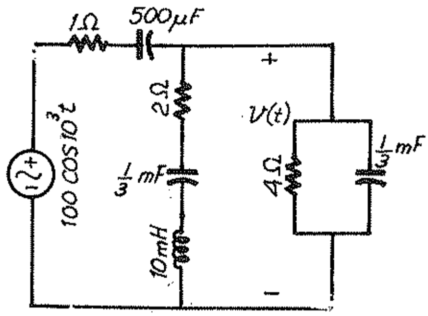
(الجواب $7{\cdot}07 \cos(\omega t + 135^\circ)$



الشكل 12.25 دائرة المسألة 15

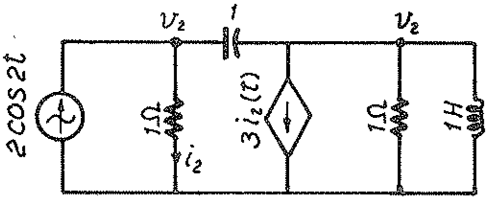
16– باستخدام نظرية نورتن اوجد التيار المار في المقاومة 4 أوم المبينة في دائرة الشكل 12.26

(الجواب $12{\cdot}6 \angle -14^\circ$



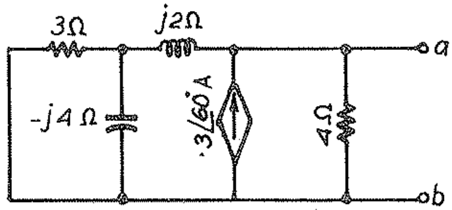
الشكل 12.26 دائرة السؤال 15

17 − (أ) اوجد مكافئ ثفنن للدائرة المبينة في الشكل 12.27 كما تبدو بين النقطتين a و b .
(ب) اذا ربطت ممانعة مقدارها 1-j1 أوم بين النقطتين. فما قيمة تيار هذه الممانعة
($3{\cdot}31 \underline{/ 142{\cdot}5^\circ}$A ، $2{\cdot}75 \underline{/ 86{\cdot}8^\circ}$V (الجواب



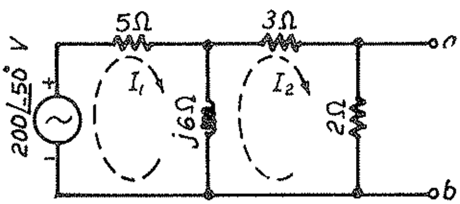
الشكل 12.27 دائرة المسألة 17

18 − أوجد I, V, Z المكافئات ثفنن ونورتن لدائرة الشكل 12.28
($I = 3 \underline{/ 60^\circ}$ A, $V = 4{\cdot}04 \underline{/ 70{\cdot}9^\circ}$, $Z = 1{\cdot}35 \underline{/ 10{\cdot}9^\circ}$: الجواب)



الشكل 12.28

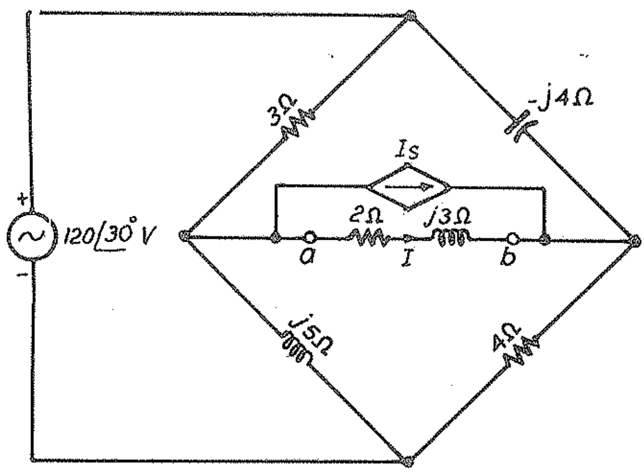
19 − أوجد I, Z لمكافئ نورتن لدائرة الشكل 12.29
($I = 2{\cdot}78 \underline{/ 4{\cdot}81^\circ}$ A , $Z = 7{\cdot}92 \underline{/ -16{\cdot}5^\circ}$: الجواب)



الشكل 12.29

20– أوجد قيمة I لدائرة الشكل 12.30 المبين اذا كانت $I = 10 \angle -50^{\circ}$ A

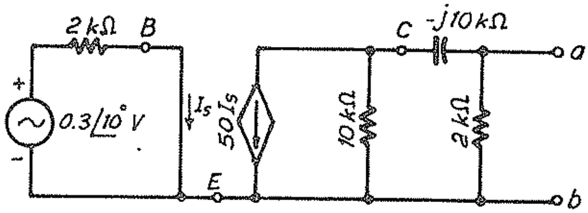
(الجواب : $I = 679 \angle 61{\cdot}6^{\circ}$ A)



الشكل 12.30

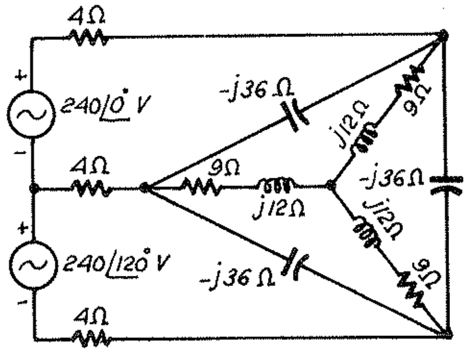
21– أوجد I_N،Z_{TH} لمكافئ نورتن في دائرة الترانسستر المبينة في الشكل 12.31

(الجواب : $I_N = -53 \angle 5{\cdot}5^{\circ}$ A , $Z_{TH} = 1{\cdot}81 \angle -5{\cdot}19^{\circ}$)



الشكل 12.31

22– أوجد التيار I لدائرة الشكل 12.32 المبين أدناه
(الجواب : 22.5A)



الشكل 12.32

23– ربطت ممانعتان قيمة احداهما 5 + j5 اوم والاخرى مجهولة على التوالي الى مصدر فولتية ذي 50 فولت فسحبتا تيارا قيمته 5 امبير واستهلكتا قدرة مقدارها 240 واط .
اذا ربطت الممانعتان على التوازي عبر المصدر نفسه ، ما مقدار التيار والقدرة اللتين تسحبها الممانعتان ؟

(الجواب $Z_2 = 4{\cdot}6 - j78\ \Omega$ ، 641A ، 3·2 kW)

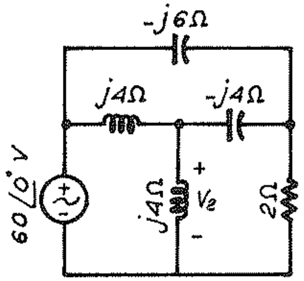
24– ثلاثة احمال مربوطة على التوازي الى مصدر فولتية مقداره 220 فولت ومقنناتها كالاتي .

الحمل الاول 10 كيلو واط بعامل قدره مقداره واحدا والحمل الثاني 5 كيلو واط بعامل قدره متخلف مقداره 0.8 والحمل الثالث 8 كي . في . أي وعامل قدرته 0.75 سابق اوجد التيار الذي يسحبه كل حمل من هذه الاحمال والتيار الكلي وعامل قدرة الحمل الكلي ومقداره القدرة الحقيقية والخيالية .

(الجواب) $0{\cdot}983$, $111 \underline{/ 10{\cdot}3^{o}}$ A, 51·95A , 28·4A, 45·45 A.

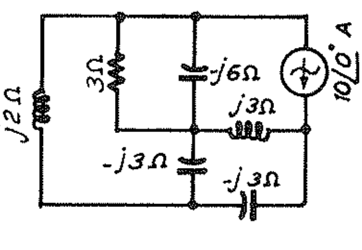
4·393 kVAR, 24·177 kW

25– في الدائرة المبينة في الشكل 12.33 اوجد القدرة المجهزة من المصدر (الحقيقية والخيالية) باستخدام التحليل الشبيكي او التحليل العقدي.
(الجواب 11.25 VAR 47.8W)



الشكل 12.33 دائرة السؤال

26– اوجد القدرة المجهزة الى المقاوم 3 أوم في الدائرة المبينة في الشكل 12.34
(الجواب 38.2W)



الشكل 12.34 انظر المسألة 26

27– مقاوم على التوالي مع متسعة يمتص قدرة مقدارها 10W عند ربط العنصرين الى مصدر 120V تردده 400H . إذا كان عامل القدرة 0.6 يسبق . ما قيمة المقاومة والمتسعة .

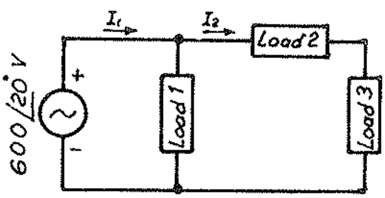
(الجواب : $C = 0{\cdot}576\mu F,\ R = 518\Omega$)

28– في دائرة الشكل 12.37 المبين. يمتص الحمل الأول قدرة مقدارها 2.4kw و 1.8 VAR والحمل الثاني يمتص 2.6kVAR, 1.3kw . والحمل الثالث يمتص 1KW ويعطي 2KVAR ! أوجد مكونات القدرة الكلية ومقدار تيار المصدر I وممانعة كل حمل .

(الجواب : $Z = 144\,\underline{/\,63{\cdot}4^\circ}\ \Omega,\ Z = 120\Omega,\ I = 9{\cdot}48\,\underline{/\,-14{\cdot}2^\circ}\ A$

$S = 3000\,\underline{/\,36{\cdot}9^\circ}\ KVA,\ Z = 77{\cdot}6\,\underline{/\,-50{\cdot}2^\circ},\ Z = 144\,\underline{/\,63{\cdot}4^\circ}\ \Omega,$

$(S = 1{\cdot}562\,\underline{/\,-50{\cdot}2^\circ}$ / O / $S = 2{\cdot}91\,\underline{/\,63{\cdot}4^\circ}$ KVA



الشكل 12.35

29– محرك حثي 75HP يعمل من مصدر 480V , 60H بكفاءة 80% وبعامل قدرة 0.65 متخلف. يطلب رفع عامل القدرة الى 0.9 متخلف بإضافة ربط متسعات على التوازي مع المحرك. أوجد قيمة التسعة ومقدار النقص في تيار المصدر.

(الجواب : 551 μF , 62.3A)

30– محول سعته 25kVA يغذي حملاً قدرته 12kW . فإذا كان عامل القدرة 0.6 متخلف. أوجد النسبة المئوية لاقصى حمل يمكن أن يغذيه المحول . وإذا أضيف

حمل قدره يساوي واحد الى نفس المحول فما هو عدد الـ KW التي يمكن إضافتها قبل أن يصبح المحول محملاً بالكامل.

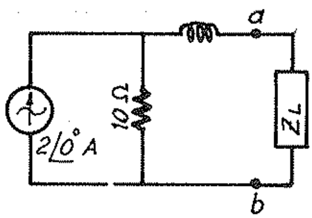
(الجواب : 7.2kW, 80%)

31 ــ في دائرة الشكل 12.26 السابقة اذا كانت فولتية المصدر مقدارها 10v وبنفس التردد ما مقدار القدرة المجهزة حينما تظهر ممانعة الدائرة كأنها مقاومة نقية وما مقدار التيار في المتسعة حينئذ. وما مقدار القدرة المجهزة حينما تكون ممانعة المتسعة j10−

(الجواب : 1.643W , 60w)

32 ــ أ) في دائرة الشكل 12.36 ، ما مقدار الممانعة Zi التس تسحب اعظم قدرة في الدائرة

ب) اذا ربطت ممانعة حمل مكونة من متسعة مفاعلتها j10− اوم. ما مقدار الفولتية بين طرفيها والفولتية عبر طرفي المصدر.



الشكل 12.36

33 ــ إذا كان الحمل المتصل بين النهايتين a,b للشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل 12.37 يتكون من مقاومة متغيرة R_l وممانعة X_c تتغير قيمتها بين 8Ω, 2Ω . فما قيمة X_c,R_L التي ينتج عندهما إنتقال أكبر قدرة. إحسب أكبر قدرة P تجهز للحمل.

(الجواب : $P = 187{\cdot}5$ SW, $X_C = 2\Omega$, $R_L = 2{\cdot}93\Omega$)

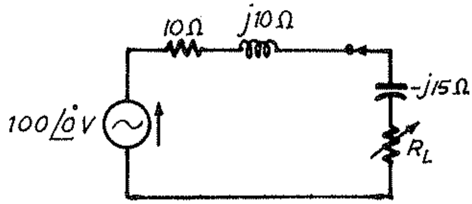
34 ــ مولد ترددات يعمل بتردد 2MH قيمة فولتية المولد بدون حمل 0.5V وممانعته الداخلية $50 \angle 30^o$ إذا استخدمت المولدة لشحن متسعة ومقاومة على التوازي.

أوجد قيمة المتسعة والمقاومة لكي تجهز باعظم قدرة من المولد والتي سوف تمتص من قبل المقاوم عادة وكذلك أوجد هذه القدرة.

(الجواب $p = 1.44mW, C = 796\mu F, R = 57.7\Omega$)

35- إذا كان الحمل في الشبكة الكهربائية الموضحة في الشكل 12.37 يتكون من مفاعلة سعوية مقدارها 15 ومقاومة متغيرة R_L . اوجد (أ) قيمة R_L التي ينتج عنها اكبر قدرة (ب) قيمة هذه القدرة.

(الجواب : $P = 236W, R_L = 11.17$)



الشكل 12.37

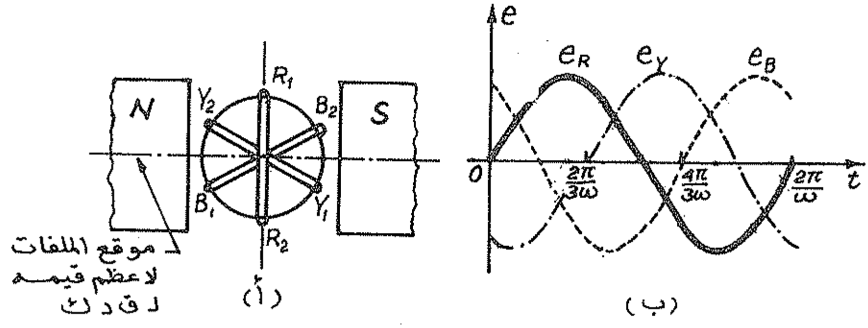
الفصل الثالث عشر

الدوائر ذات ثلاثة اطوار

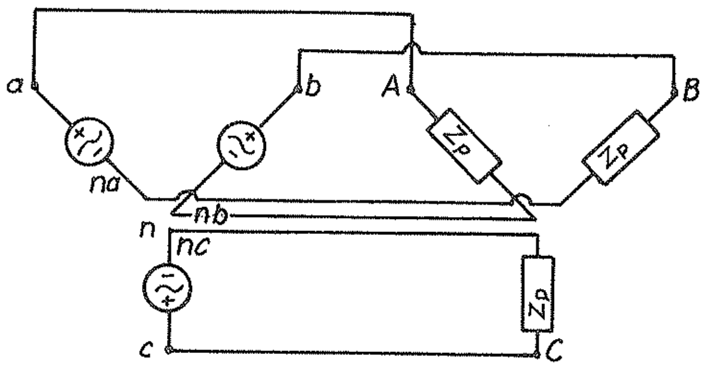
"وما اوتيتم من العلم الا قليلا"
سورة الاسراء – الاية 85

13.1 الدوائر متعددة الاطوار

في الفصل التاسع اوضحنا انه عند دوران ملف مستطيل الشكل متكون من سلك موصل منفرد في مجال مغناطيسي بسرعة زاوية ثابتة تتولد بين طرفيه ق. د. ك متغيرة مع الزمن بشكل موجة جيبية وذلك لأن مقدار ال ق. د. ك الاتية المتولدة تعتمد على زاوية ميل مستوى الملف بالنسبة لاتجاه المجال المغناطيسي. اذا وضع عدد من الملفات تصنع بينها زوايا معينة فان القوة الدافعة الكهربائية المتولدة جميعاً تكون جيبية لكنها مزاحة عن بعضها البعض بزوايا معينة وفق الوضع الفيزياوي لهذه الملفات. لنأخذ مثلاً وجود ثلاث ملفات تصنع بينها زوايا مقدارها 120 درجة كما مبين في الشكل 13.1أ. يوضح الشكل 13.1ب موجات ال ق. د. ك للملفات الثلاثة حيث يلاحظ ان هناك ازاحات طور بين هذه الموجات الجيبية مقدار كل منها 120 درجة. من ذلك يتضح ان بالامكان وضع اي عدد من الملفات المزاحة عن بعضها البعض لكي تولد موجات جيبية مزاحة عن بعضها البعض بفرق اطوار معينة.



الشكل 13.1 مولد ذو ثلاث اطوار بسيط مع شكل الموجة



الشكل 13.2 ثلاثة دوائر مستقلة موضوعة بشكل نجم.

إذا جهزت احمال مختلفة من الاسلاك الدائرة في المجال المغناطيسي فان الدوائر تعمل بصورة مستقلة معتمدة على ممانعاتها المختلفة ولكنها في الوقت نفسه تكون ذات علاقات طورية معتمدة على الأزاحات بين مستويات الملفات.

اذا كانت الزوايا بين مستويات الملفات متساوية قيل عن النظام انه متزن. اذا كان هناك ملفان فقط بينها زاوية مقدارها 90 درجة تدعى الوضعية بالربط ذي الطورين واذا كان هناك ثلاثة ملفات بينها زوايا مقدارها 120 درجة كان الناتج ربطا ذي ثلاثة اطوار

وهكذا. لقد وجد ان الانظمة ذات الثلاثة اطوار تمتاز بميزات فريدة منها انها اقتصادية في التوليد والنقل والتوزيع وسنأتي على خواص متعددة لهذه الانظمة.

لنأخذ مثلا ثلاثة احمال مجهزة بصورة مستقلة من الملفات المكونة لنظام ذي ثلاثة اطوار كما مبين في الشكل 13.2 . فالدوائر الثلاثة مستقلة عن بعضها البعض وكل منها يعمل كدائرة ذات طور واحد مجهزة بين المصدر والحمل بسلكين احدهما ينقل التيار نحو الحمل والاخر يعيد التيار من الحمل نحو المصدر. هذا في لحظة معينة ، اما بعد فترة من الزمن فينعكس اتجاه التيار في السلكين كما مر بنا في الفصل التاسع . يمكننا كتابة الفولتيات الثلاثة كدوال للزمن كما يلي :

$$E_a = V \sin \omega t \qquad (13.1)$$

$$E_b = V \sin (\omega t - 120^o) \qquad (13.2)$$

$$E_c = V \sin (\omega t - 240^o) \qquad (13.3)$$

فاذا كانت المانعات الثلاثة متساوية بالمقدار وبالطور مثلا $Z \underline{/ \theta}$ كانت التيارات المارة في المانعات الثلاثة كالاتي :

$$I_A = \frac{V}{Z} \sin (\omega t - \theta) \qquad \ldots (13{\cdot}4)$$

$$I_B = \frac{V}{Z} \sin (\omega t - \theta - 120^o) \qquad \ldots (13{\cdot}5)$$

$$I_C = \frac{V}{Z} \text{Sin} (\omega t - \theta - 240^o) \qquad \ldots (13{\cdot}6)$$

اذا ركزنا انتباهنا على الاسلاك الثلاثة المرسومة قرب بعضها n_aN_A, n_bN_B, n_cN_C لنأخذ مجموع التيارات التي تمر في هذه الاسلاك في اية لحظة من الزمن :

$$I_{nN} = I_A + I_B + I_C \qquad \ldots (13{\cdot}7)$$

$$= \frac{V}{Z} [\sin (\omega t - \theta) + \sin (\omega t - \theta - 120^o) + \sin (\omega t - \theta - 240^o)]$$

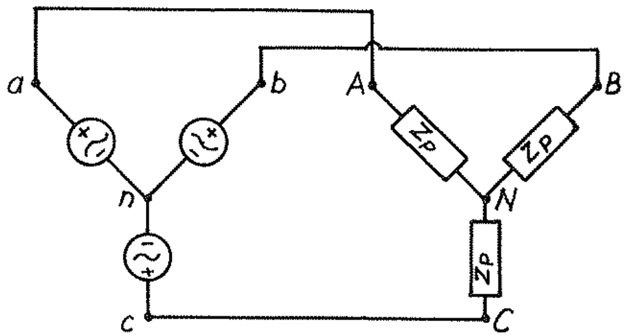
$$= \frac{V}{Z} [\sin(\omega t - \theta) + \sin(\omega t - \theta)\cos 120^o - \cos(\omega t - \theta)$$

$$\sin 120^o + \sin(\omega t - \theta)\cos 240^o - \cos(\omega t - \theta)\sin 240^o]$$

$$I_{nN} = 0 \qquad ...(13\cdot8)$$

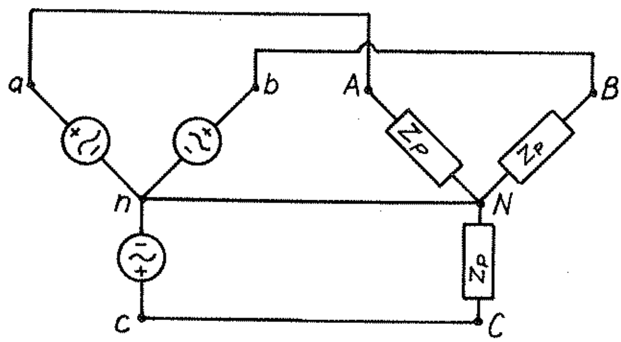
والذي يمكن إستنتاجه بيانياً أيضاً بجمع الموجات الجيبية الثلاثة الممثلة للتيارات الثلاثة.

من ذلك يتبين ان هناك ثلاثة اسلاك مجموع التيارات المارة فيها يساوي صفرا واذا كان الامركذلك فان وجودها او عدم وجودها لايغير من الامر شيئاً وهذا صحيح فالدوائر المبينة في الشكل 13.2 مكافئة تماما للدائرة المبينة في الشكل 13.3 (أ) أو (ب) فالتيار في nN في الشكل (آ) يساوي صفراً وعليه يمكن الإستغناء عنه ليصبح كما في الشكل (ب).



(أ)

أ) اربعة خطوط



(ب)

ب) ثلاثة خطوط

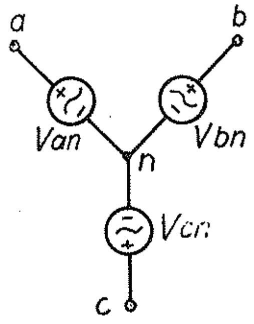
الشكل 13.3 منظومة ذات ثلاثة اطوار متزنة بشكل نجم

ويمكن للطالب ان يتأكد من التيارات المارة في الممانعات الثلاثة بحل دائرة الشكل 3.11 باستخدام التحليل الشبيكي مثلا .

مما تقدم يتضح ان تزويد القدرة الكهربائية بنظام ذي ثلاثة اطوار يمكن ان يتم بثلاثة اسلاك كما هي الحال في ثلاثة انظمة كل منها ذات طور واحد مستقلة عن بعضها البعض ويتضح من ذلك مدى الوفر الاقتصادي في عدد الاسلاك المستخدمة لتجهيز الكمية نفسها من القدرة الكهربائية تقليل عدد الاسلاك من 6 الى 3 او الى 4

13.2 التوليد بثلاثة اطوار:

في االانظمة ذات الاطوار الثلاثة يتم توليد القوى الدافعة الكهربائية في المولدات عادة في ثلاث ملفات (او مجموعات من الملفات) يتم ربط هذه الملفات بشكل نجم. اي ان احد الاطراف من كل ملف يربط في نقطة مشتركة ثم تجهز الاحمال من الاطراف الثلاث الاخرى يبين الشكل توصيلات الملفات الثلاثة مكونة ربط النجم. تدعى نقطة التوصيل المشتركة بنقطة التعادل Neutral ويرمز لها عادة بالحرف N. هذا ويمكن ربط المولدات



الشكل 13.4 مصدر ذو ثلاثة اطوار بشكل نجم .

بشكل اخر هو ربط الدلتا. لكن هذا الربط غير مستخدم عمليا لاحتوائه على بعض الخواص غير المرغوب فيها لذا فان دراسة العلاقات الطورية بين ملفات التوليد المربوطة بشكل نجم هو امر ضروري.

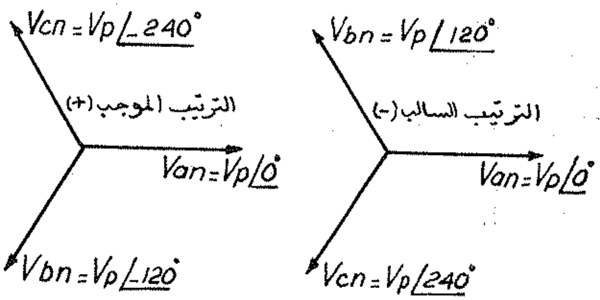
لنفرض ان الفولتيات الثلاثة المبينة في الشكل 13.4 كانت متساوية بالمقدار ومزاحة عن بعضها البعض بزوايا مقدارها 120 درجة . يقال عن مثل هذه المنظومة بانها متزنة لنفرض ان الفولتيات الثلاث هي كالاتي :

$$V_{an} = V_P \underline{/0^o} = V_P \quad (13.9)$$

$$V_{bn} = V_P \underline{/-120^o} \quad (13.10)$$

$$V_{cn} = V_P \underline{/-240^o} \quad (13.11)$$

يبين الشكل 13.5 أ المتجهات الثلاثة الممثلة لهذه الفولتيات .



الشكل 13.5 تمثيل الفولتيات بشكل متجهات (أ) الترتيب الموجب (ب) الترتيب السالب

تدعى كل من هذه الفولتيات الثلاثة بفولتيات الطور وهي عبارة عن الفولتية بين كل من الاطوار الثلاث ونقطة التعادل . اما اذا اريد ايجاد الفولتية بين اثنين من الخطوط ، مثلاً بين a و b فيمكن ان يتم بايجاد الفرق بين اي اثنين من فولتيات الاطوار الثلاثة . فالفولتية V_{ab} هي عبارة عن الفولتية V_{an} مطروحاً منها الفولتية V_{bn} طرحاً اتجاهياً اي ان :

$$V_{ab} = V_{an} - V_{bn} \quad \ldots (13{\cdot}12)$$

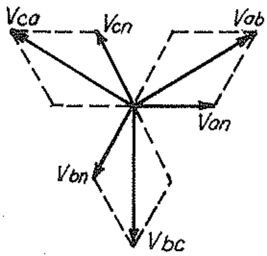
$$= V_P \underline{/0} - V_P \underline{/-120^o}$$

ومن مراجعة الشكل 13.5 يتضح ان V_{ab} تساوي :

$$V_{ab} = V_P - V_P \cos(-120^\circ) - jV_P \sin(-120^\circ)$$

$$= V_P + 0{\cdot}5V_P + j\frac{\sqrt{3}}{2} V_P$$

$$= \sqrt{3}\ V_P \underline{/ 30^\circ} \qquad \dots (13{\cdot}13)$$



الشكل 13.6 تمثيل فولتيات الخطوط بشكل متجهات

وباستخدام الطريقة نفسها لايجاد V_{bc} و V_{ca}

$$V_{bc} = \sqrt{3}\ V_P \underline{/ -90^\circ} \qquad \dots (13{\cdot}14)$$

$$V_{ca} = \sqrt{3}\ V_P \underline{/ -210^\circ} \qquad \dots (13{\cdot}15)$$

فالمعادلات (13.13) و (13.14) و (13.15) يتضح فيها ان مقدار الفولتية بين اي طورين تعادل $\sqrt{3}$ مضروبة في فولتية الطور الواحد. تدعى هذه الفولتيات (بين الاطوار) بفولتيات الخطوط line Voltage او الفولتيات بين خط وخط line -- to – line voltages.

لقد استخدمت العلاقات الطورية بين الفولتيات الثلاثة في المعادلات 13.9 و 13.10 و 13.11 باسلوب معين فقد كانت الفولتية V_{bn} تتخلف عن الفولتية V_{an} بزاوية مقدارها 120° درجة كما تتخلف V_{cn} عن V_{bn} بالزاوية نفسها . لقد كان بالامكان تعريف الفولتيات الثلاثة كما يأتي :

$$V_{an} = V_P \underline{/\ 0^o} \qquad ...(13\cdot16)$$

$$V_{bn} = V_P \underline{/\ 120^o} \qquad ...(13\cdot17)$$

$$V_{cn} = V_P \underline{/\ 240} \qquad ...(13\cdot18)$$

حيث يتضح في هذه الحالة ان الفولتية V_{bn} تسبق V_{an}بزاوية مقدارها 120 درجة وكذلك V_{cn} تسبق V_{bn} بالزاوية نفسها . تدعى مجموعة الفولتيات الثلاثة في المعادلات 13.9 و 13.10 و 13.11 بمنظومة الترتيب الموجب positive sequence والتي يظهر المخطط الطوري لها في الشكل 13.5 أ. اما المعادلات (13.16) و (13.17) و (13.18) فتدعى بمنظومة الترتيب السالب negative seguence ويظهر مخطط المتجهات لها في الشكل 13.5 ب . ولغرض تذكر التمييز بين هاتين المنظومتين نتصور دوران المخطط الطوري لكل منها بعكس اتجاه دوران عقارب الساعة . فاذا كان تسلسل انطباق المتجهات على محور السينات هو الطور a ثم b ثم c قيل عن المنظومة انها موجبة الترتيب . اما ان كان تسلسل الانطباق هو a ثم c ثم b قيل عنها انها الترتيب السالب .

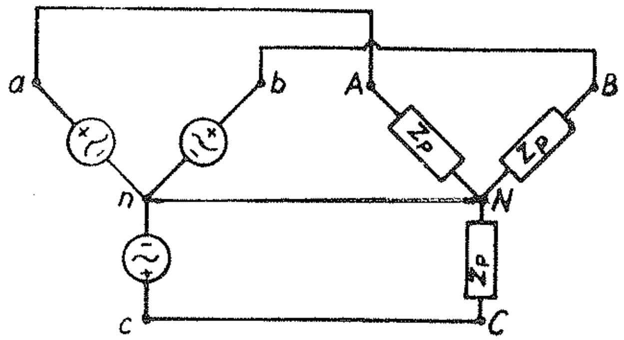
يتبع المخطط الطوري للتيارات المجهزة من هذه المنظارمة شكلا مشابها ، لكنه يعتمد على مقدار وزاوية كل من ممانعات الحمل .

يلاحظ من هذا الربط امكان تجهيز مقدارين متميزين للفولتية من المولد نفسه . فاذا اربط حمل بين a و n مثلا جهز بفولتية مقدارها . اما ان ربط الحمل بين a و b فانه يجهز بفولتية مقدارها $\sqrt{3}\ V_P$. ان قيمة V_p الشائعة الاستخدام في معظم انحاء العالم تقرب من 220 فولت لذا تكون قيمة فولتية الخط $\sqrt{3}\ 220$ مقاربة لـ 380 فولت .
والقيمة المقررة في العراق هي230 ,230 $\sqrt{3}$ = 400 فولت من مصدر التغذية المحلية .

13.3 الاحمال ثلاثية الاطوار

13.3.1 الربط النجمي Y (Star)

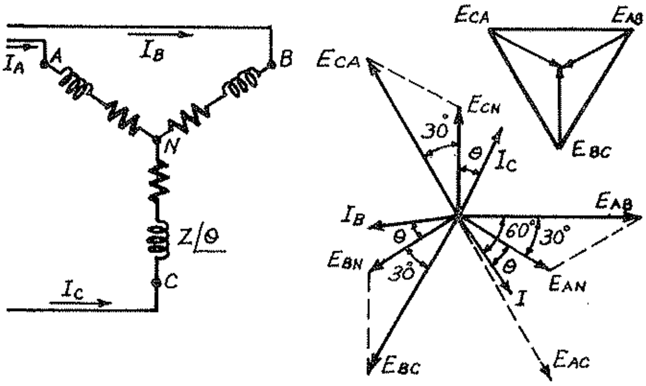
عند ربط ثلاث ممانعات متساوية بشكل نجم الى مصدر فولتية ثلاثية الاطوار مربوطة بشكل نجم ايضا يكون الربط كما مبين في الشكل 13.7 ويلاحظ وجود خط التعادل الذي يربط بين نقطة تعادل المصدر مع نقطة تعادل الحمل. ويدعى هذا النظام بنظام النجم ذي الاربع اسلاك وهذا الخط يمكن الاستغناء عنه حينما يكون كل من المصدر



الشكل 13.7 مصدر حمل بثلاث اطوار وبشكل نجم

والحمل متزنا تماما فيصبح الربط محتويا على ثلاثة اسلاك فقط . ويدعى بربط النجم ذي الثلاث اسلاك .

ان الربط ذي الاربعة اسلاك يستخدم حينما يتوقع حدوث عدم اتزان في الحمل وفي هذه الحالة يمر بعض التيار في خط التعادل . اما اذا تم ضمان كون الحمل متعادلا تماما كما في المحركات ذات الثلاث اطوار فعند ذلك يصبح وجود خط التعادل غير ضروري ويمكن ازالته . لنفرض في الشكل 13.7 ان ممانعة كل طور من اطوار الحمل تساوي Z وزاويتها هي θ . فعند ذلك يصبح المخطط الطوري للتيارات المارة في الحمل كما مبين في الشكل 13.8 . وقد رسمت طوريات التيار مع طوريات الفولتيات لتبيان العلاقات الطورية بينها .



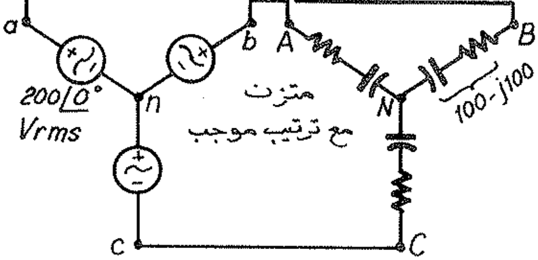
الشكل 13.8 حمل ذو ثلاث اطوار متزن بشكل نجم ب) المخطط الطوري للفولتيات والتيارات

سواء اكان الربط بثلاثة اسلاك او اربعة اسلاك فان الفولتيات بين الخطوط ونقطة تعادل الحمل تساوي الفولتيات بين الخطوط ونقطة تعادل المصدر.

لذلك يمكن معاملة ممانعة كل طور بصورة مستقلة مع الـ ق. د. ك العائدة لها في المولد تماما كما مر بنا في الشكل 13.2 وكانها دوائر طور واحد.

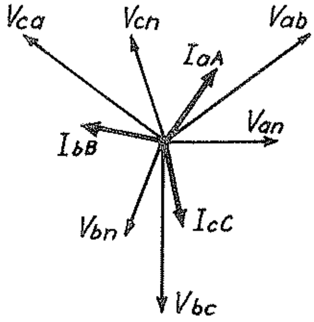
مثال 13.1

مصدر ذو ثلاثة اطوار مربوط بشكل نجم يزود حملا نجميا متزنا ايضا. فولتية الطور للمصدر تساوي 220 فولت وممانعة كل طور من اطوار الحمل تساوي $100 - j100$ اوم على فرض اتباع الترتيب الموجب للطوريات. ارسم المخطط الطوري للفولتيات والتيارات مبينا مقدار وزاوية كل منها.



(أ)

الشكل 13.9 أ) دائرة المثال 13.1



(ب)

الشكل 13.9
ب) المخطط الطوري

الحل :
فولتيات الاطوار الثلاثة عند اتباع الترتيب الموجب تكون

$$V_{an} = 220 \angle 0^\circ$$

$$V_{bn} = 220 \angle -120^\circ$$

$$V_{cn} = 220 \angle -240^\circ$$

قيمة الممانعة في كل طور $100\sqrt{2} \angle -45^\circ$ لذا فالتيارات المارة في الاطوار الثلاثة تصبح

$$I_{AN} = \frac{V_{an}}{Z_{AN}} = \frac{220 \angle 0^\circ}{100\sqrt{2} \angle -45^\circ} = 1{\cdot}555 \angle 45^\circ \text{ A}$$

وذلك بفرض عدم وجود اي مقاومة في الاسلاك الموصلة بين المصدر والحمل وبصورة مشابهة يكون :

$$I_{BN} = \frac{V_{bn}}{Z_{BN}} = \frac{220 \angle -120^o}{100\sqrt{2} \angle -45^o} = 1{\cdot}555 \angle -75^o \text{ A}$$

$$I_{CN} = \frac{V_{cn}}{Z_{CN}} = \frac{220 \angle -240^o}{100\sqrt{2} \angle -45} = 1{\cdot}555 \angle -195^o \text{ A}$$

وتتضح العلاقات الطورية هذه في الشكل 13.9 ب.

13.3.2 ربط الدلتا Δ

اذا كانت ممانعات الحمل مربوطة بشكل دلتا (او مثلثي فانها تربط مع جهة التوليد بثلاثة اسلاك فقط ولايمكن استخدام خط التعادل في مثل هذه الحالة حتى ان كان ربط التوليد نجميا. يبين الشكل 13.10 حملا مربوطا بشكل دلتا حيث يلاحظ ان الفولتية المسلطة على كل ممانعة هي فولتية الخط فالفرع AB يمرر تيارا يساوي الفولتية V_{AB} مقسومة على الممانعة Z_p وكذلك الامر بالنسبة الى I_{BC} و I_{CA}.

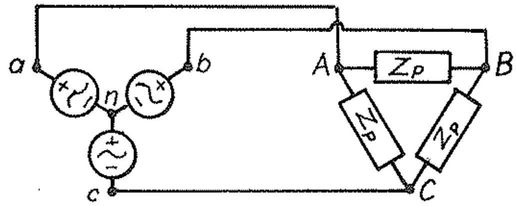
يلاحظ في ربط الدلتا ان الفولتية بين خطين هي الفولتية المسلطة على ممانعة الطور. اي ان فولتية الخط وفولتية الطور متساويتان. اما التيار الذي يمر في الخط فيختلف التيارين اللذين يمران في الممانعتين المتجاورتين المربوطتين بذلك الخط. في الشكل 13.11 يلاحظ ان I_{aA} يساوي الفرق بين I_{AB} و I_{CA}. ولفرض تبيان العلاقة هذه بشكل ادق نرجع الى المخطط الطوري لهذا الربط المبين في الشكل حيث كانت :

$$V_{AB} = \sqrt{3}\ V_P \angle 30^o \qquad \dots (13{\cdot}19)$$

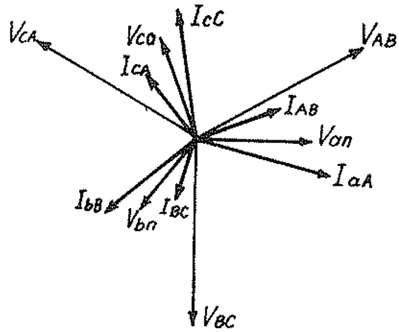
$$V_{BC} = \sqrt{3}\ V_P \angle -90^o \qquad \dots (13{\cdot}20)$$

$$V_{CA} = \sqrt{3}\ V_P \angle -210^o \qquad \dots (13{\cdot}21)$$

فتكون التيارات الطورية في الربط الدلتا.



الشكل 13.10 دائرة حمل ثلاث اطوار بشكل دلتا والمصدر بشكل نجم



الشكل 13.11 المخطط الطوري لربط الدلتا

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_P} = \frac{\sqrt{3}\ V_P \angle 30^o}{Z \angle \theta} = \frac{\sqrt{3}\ V_P}{Z} \angle 30 - \theta \qquad \text{... (13·22)}$$

$$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_P} = \frac{\sqrt{3}\ V_P \angle -90^o}{Z \angle \theta} = \frac{\sqrt{3}\ V_P}{Z} \angle -90 - \theta \qquad \text{... (13·23)}$$

$$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_P} = \frac{\sqrt{3}\ V_P \angle -210}{Z \angle \theta} = \frac{\sqrt{3}\ V_P}{Z} \angle -210 - \theta \qquad \text{... (13·24)}$$

اما تيارات الخطوط فتساوي

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA} \quad \ldots (13{\cdot}25)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, V_P}{Z} \angle 30 - \theta - \frac{\sqrt{3}\, V_P}{Z} \angle -90 - \theta$$

$$= \frac{3V_P}{Z} \angle -\theta \quad \ldots (13{\cdot}26)$$

$$I_{bB} = I_{BC} - I_{AB} \quad \ldots (13{\cdot}27)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, V_P}{Z} \angle -90^\circ - \theta - \frac{\sqrt{3}\, V_P}{Z} \angle 30^\circ - \theta$$

$$= \frac{3V_P}{Z} \angle -120^\circ - \theta \quad \ldots (13{\cdot}28)$$

$$I_{cC} = I_{CA} - I_{BC} \quad \ldots (13{\cdot}29)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\, V_P}{Z} \angle -120^\circ - \theta - \frac{\sqrt{3}\, V_P}{Z} \angle -90^\circ - \theta$$

$$= \frac{3V_P}{Z} \angle -240^\circ - \theta \quad \ldots (13{\cdot}30)$$

يلاحظ من المعادلات 13.26 و 13.28 و 13.30 ان اتساع التيارات الخطية يعادل $\sqrt{3}$ مرة بقدر اتساع كل من التيارات الطورية (المارة في الممانعات) كما انها تزاح عن التيارات الطورية بزوايا مقدارها 30 درجة كما اتضح من المخطط الطوري.

يمكن تلخيص المقارنة بين الربط النجمي والربط الدلتا بان فولتية الخط تعادل $\sqrt{3}$ بقدر فولتية الطور في الربط النجمي لكنهما متساويتان في ربط الدلتا. اما تيار الخط في ربط الدلتا فيعادل $\sqrt{3}$ بقدر التيار الطوري. بينما يتساوى تيار الخط وتيار الطور في الربط النجمي.

عند مصادفة ربط بشكل نجم يمكن تحويله الى ربط بشكل دلتا باستخدام قوانين التحويل بين الربطين التي مرت في الفصل الثاني مع ملاحظة استخدام الكميات بصيغتها المركبة بدل استخدام المقاومات الحقيقية القيمة.

مثال 13.2

مصدر فولتية ثلاثي الاطوار مربوط بشكل نجم وفولتية كل طور فيه تساوي 220 فولت. ربط حمل بشكل دلتا. ممانعة كل طور فيه $100 + j100$ باتباع الترتيب الموجب، اوجد تيار كل طور والتيارات الخطية ثم حقق الناتج بتحويل ربط الدلتا الى نجمي.

الحل:

فولتية الخط للمصدر تساوي فولتية الطور مضروبة في $\sqrt{3}$ وذلك لأن الربط نجمي

$$|V_{AB}| = \sqrt{3}\ V_P = \sqrt{3} \times 220 = 381V$$

، لذا قيمة تيار الطور في ربط الدلتا يساوي

$$|I_{AB}| = \frac{|V_{AB}|}{|Z_P|} = \frac{381}{|100 + j100|} = \frac{381}{100\sqrt{2}} = 2{\cdot}69A$$

وهذا يساوي بالمقدار كلا من التيارين الاخرين المارين في الطورين الاخرين ويكون التيار المار في الخط مساويا لـ $\sqrt{3}$ مضوبا في تيار الطور.

$$I_{aA} = 2{\cdot}69 \times \sqrt{3} = 4{\cdot}67A$$

ويساوي هذا التيار التيارين المارين في الخطين الاخرين.

ويمكن كتابة الكميات كلها بشكلها الطوري بالرجوع الى الشكل 13.9 والمعادلات 13.26 و 13.28 و 13.30 حيث $\theta = 45$ وان

$$V_{AB} = 381 \angle 30^\circ,\ V_{BC} = 381 \angle -90^\circ,\ V_{CA} = 381 \angle -210^\circ$$

$$I_{AB} = 2.69 \angle -15^o, \; I_{BC} = 2.69 \angle -135^o, \; I_{CA} = 2.69 \angle -255^o$$

$$I_{aA} = 4.67 \angle 0 - \theta = 4.67 \angle -45^o$$

$$I_{bB} = 4.67 \angle -120 - \theta = 4.67 \angle -165^o$$

$$I_{cC} = 4.67 \angle -240 - \theta = 4.67 \angle -285 = 4.67 \angle 75^o$$

لتحويل ربط الدلتا الى نجمي فان ممانعة الطور A تساوي Z_A حيث :

$$Z_A = \frac{Z_{AB} Z_{CA}}{Z_{AB} + Z_{BC} + Z_{CA}} = \frac{Z_P Z_P}{Z_P + Z_P + Z_P} = \frac{Z_P}{3} \qquad \dots (13.31)$$

وبتعويض العلاقة 13.31 في هذا المثال نحصل على

$$Z_A = \frac{100 + j100}{3} = \frac{100\sqrt{2}}{3} \angle 45^o$$

فيكون تيار الطور في الربط النجمي هذا

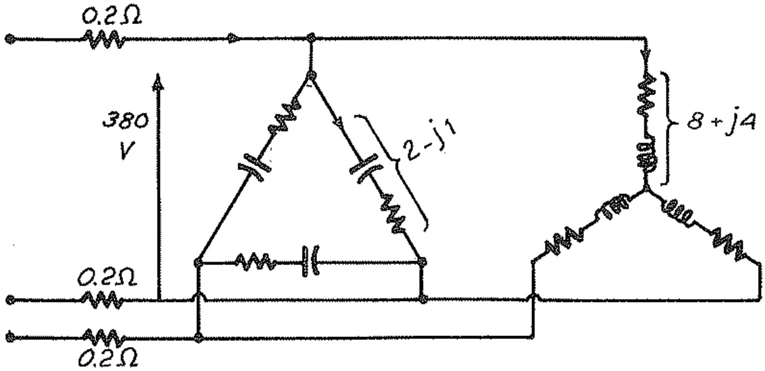
$$|I_{AN}| = \frac{|V_{AN}|}{|Z_A|} = \frac{220}{\frac{100\sqrt{2}}{3}} = 4.67A$$

وبذا تحقق الحل. ولاكمال رسم مخطط المتجهات يتبع الاسلوب السابق نفسه.

مثال 13.3

حمل مربوط بشكل دلتا يحوي كل طور فيه $8 + j4$ اوما. ربط على التوازي مع حمل اخر مربوط بشكل نجم يحوي كل طور فيه على ممانعة مقدارها $2 - j1$ أوم. ربط الحملان على التوازي خلال اسلاك مقاومة كل منها 0.2 اوم وكانت فولتية الخط عند الحمل

تساوي 380 فولت. اوجد التيار المجهز من كل خط من خطوط المصدر الفولتية عبر الخطوط عن المصدر.



الشكل 13.12 دائرة المثال 13.3

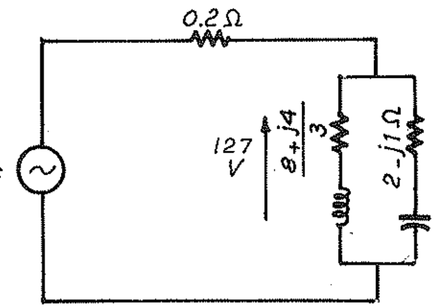
الحل:

بتحويل ربط الدلتا الى نجمي نحصل على ممانعة في كل طور مقدارها

$$Z = \frac{(8+j4)(8+j4)}{(8+j4)+(8+j4)+(8+j4)} = \frac{8+j4}{3}$$

اما فولتية الحمل لكل طور من اطوار الحمل النجمي فتساوي $\frac{380}{\sqrt{3}} = 219{\cdot}4V$،
يمكن تبسيط دائرة الشكل الى ثلاث دوائر كل منها مرتبطة بطوري منفصل يبين الشكل 13.13 دائرة طور واحد.

الممانعة الكلية للحمل لكل طور



الشكل 13.13 دائرة طور واحد لدائرة المثال 13.3

$$Z = \frac{\frac{(8 + j4)}{3}(2 - j)}{\frac{8 + j4}{3} + 2 - j} = \frac{4(4 + 1)}{8 + j4 + 6 - j3} = \frac{20}{|4 + j|}$$

$$= \frac{20(14 - j1)}{197} = \frac{20 \times 14{\cdot}1}{197} \underline{/ - 4^o}$$

$$= 1{\cdot}42 \underline{/ - 4^o}$$

لذا تيار الخط

$$I_L = \frac{219{\cdot}4 \underline{/0}}{1{\cdot}42 \underline{/ - 4}} = 154{\cdot}5 \underline{/ 4^o} \text{ A}$$

لذا تكون فولتية المصدر لكل طور

$$|V_S| = |0{\cdot}2 \times 154{\cdot}5 \underline{/4} + 219{\cdot}4 \underline{/0}| = 250 \text{ Volts}$$

لذا تكون الفولتية بين خطين عبر المصدر

$$V_L = \sqrt{3} \times 250 = 433{\cdot}3$$

13.4 القدرة

ان القدرة المستهلكة في كل طور من الاطوار الثلاثة في الربط النجمي او ربط الدلتا تعادل ثلاثة اضعاف القدرة المستهلكة في الطور الواحد. هذا اذا كان الحمل متزنا.

في الربط النجمي سبق ان بينا ان تيار الخط هو تيار الطور. اما فولتية الطور فمختلفة عن فولتية الخط. لذا فالقدرة المستهلكة لطور واحد.

$$P_P = V_P I_P \cos\theta \tag{13.32}$$

حيث V_p هي فولتية الطور و I_p هي تيار الطور او الخط و θ هي زاوية طور الحمل. فتكون القدرة للاطوار الثلاثة.

$$P = 3P_P = 3V_P I_P \cos\theta \tag{13.33}$$

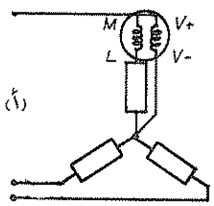
وحيث ان فولتية الطور تساوي فولتية الخط مقسومة على $\sqrt{3}$ وتيار الخط يساوي تيار الطور

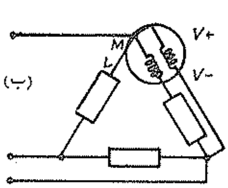
$$P = \frac{3V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos\theta$$

$$= \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\theta \qquad \text{... (13·34)}$$

ويعني ذلك ان القدرة في حمل ثلاثي الاطوار يساوي $\sqrt{3}$ مضروبا في فولتية الخط مضروبا في تيار الخط مضروبا في عامل قدرة الحمل. وليس من العسير ملاحظة ان هذه العلاقة نفسها تنطبق اذا كان الحمل بشكل دلتا، نظرا لأن هناك ثلاثة احمال طورية ايضا. لكن الاختلاف هو ان تيار الطور يعادل في هذه الحالة تيار الخط مقسوما على $\sqrt{3}$. اما فولتية الطور وفولتية الخط فمتساويتان. لذا فالعلاقة 13.34 علاقة عامة تنطبق في كافة الاحوال ويمكن استخدامها او استخدام العلاقة 13.33 حسب المسألة.

في دوائر الربط النجمي يسهل قياس القدرة باستخدام واط ميترواحد يربط في حمل واحد (ملف التيار له ضمن الخط وملف الجهد بين الخط ونقطة التعادل) ثم تضرب قراءته في عدد الاطوار في ثلاثة. ويتضح ذلك في الشكل 13.14 أ. اما في ربط الدلتا فيمكن قياس القدرة في الحمل بربط ملف التيار على التوالي مع احدى ممانعات الحمل وبربط ملف الجهد بين الخطين المربوطين بتلك الممانعة يؤخذ ثلاثة أضعاف تلك القراءة كما يتضح في الشكل 13.14 ب.





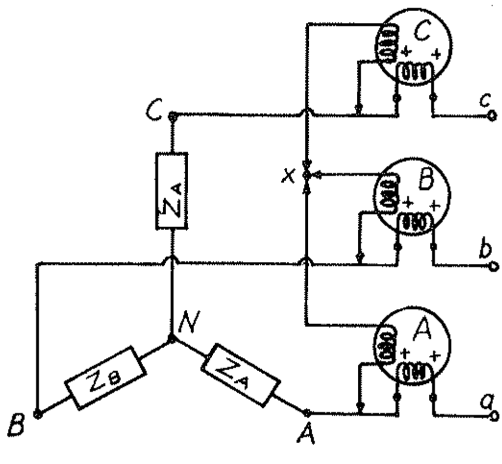
الشكل 13.14 الربط لقياس القدرة باستعمال جهاز واطميتر واحد

أ) حمل نجمي ب) حمل دلتا

اما اذا اريد قياس القدرة كاملة في الحمل فيجب استخدام ثلاث واطميترات يكون مجموع قراءاتها مساو للقدرة الكلية في الحمل . ويبدو ذلك امرا ضروريا اذا كانت ممانعات الحمل غير متزنة (اي ان المانعات مختلفة بين طور واخر) .

هناك صعوبة تبدو احيانا في ربط الدلتا . فليس من الضروري ان يكون كل اطراف الحمل متوفرة لكي تربط بها ملفات التيارات في الواطميتر. فاذا اعطينا ثلاثة اطراف فقط لصندوق مقفل (محرك مثلا) قيل ان بداخله حمل مربوط بشكل دلتا فعند ذلك لايمكننا استخدام الربط 13.14 ب لقياس القدرة المستهلكة في الحمل . لذلك علينا ان نبحث عن وسيلة اخرى لقياس القدرة دون الحاجة الى فتح الربط الداخلي لمثل هذا الحمل .

تبدرة في دوائر الحمل النجمية او المثلثية يمكن إستخدام ثلاث واطميترات بحيث توضع ملفات تيار كل منها في الاطوار الثلاثة اما ملفات الفولتية فيربط احد نهايتيها كل في خط وتجمع نهايات الملفات الاخرى في نقطة واحدة مثل X كما مبين في الشكل 13.15 .

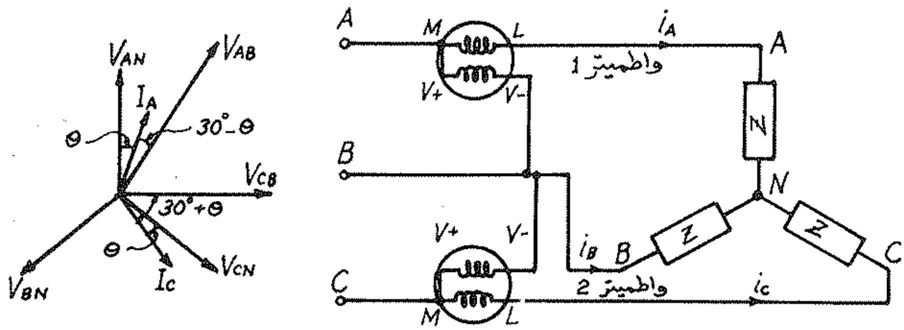


الشكل 13.15

إن مجموع قراءات الواطميترات الثلاثة هو القدرة الكلية نظراً لان ملفات التيارات تتحسس بالتيارات الحقيقية بينما ملفات الفولتية قد اعطيت ثلاثة فولتيات كل منها بين احد الاطوار ونقطة ما (هنا مثلا ×) يربط بشكل نجم ومن ثم تتحسس بالقيمة الطورية للفولتية. إلا ان نقطة × يمكن ان توضع في اي موقع على الدائرة مثلا نقطة او N او A او B او C او تركها سائبة.

ولكن من الواضح انه عند وضعها على A او B او C فان احد الواطميترات سيقرأ صفراً نظراً لان ملف فولتية قد اصبح مقصور فولتيته لذلك يكون مجموع قراءة الواطميترين الاخرين مساو للقدرة الكلية في الدائرة.

هناك طريقة مناسبة لحل مثل هذا الاشكال تدعى بطريقة الواطميترين Two wattmeter method. يبين الشكل 13.16 أ استعمال جهازي واطميتر لقياس القدرة في دائرة ذات ثلاثة اطوار فمجموع قراءتي هذين الواطميترين.



(ب) (أ)

الشكل 13.16 استعمال جهازي واطميتر لقياس القدرة

أ) دائرة الربط ب) المخطط الطوري

$$P = P_1 + P_2 \qquad /13.35$$

يوضح الشكل 13.16 ب المخطط الطوري للفولتيتين والتيارين المصاحبين للواطميترين ومنه يتبين ان قراءة الواطميتر الاول تساوي :

$$P_1 = V_{AB} I_A \cos(30 - \theta)$$

$$P_1 = V_L I_L \cos(30 - \theta) \qquad \text{... (13·36)}$$

وقراءة الواطميتر الثاني P_2

$$P_2 = V_{CB} I_C \cos(30 + \theta)$$

$$= V_L I_L \cos(30 + \theta) \qquad (13.37)$$

ويجمع هاتين الكميتين وفتح جيبتمام مجموع الزاويتين والفرق بينهما .

$$P_1 + P_2 = V_L I_L [\cos(30 - \theta) + \cos(30 + \theta)]$$

$$= V_L I_L [2 \cos 30 \cos \theta]$$

$$= \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\theta \qquad \text{... (13·38)}$$

وهي معادلة حساب القدرة الكلية في حمل ثلاثي الطوركما مر بنا في المعادلة 13.30 لذا فقراءاتا الواطميترين مختلفتان عن بعضهما البعض ولايقيس اي منها قراءة القدرة في اي من الاطوار الثلاثة .

نظرا لأن جيبتمام زاوية مقدارها 90 درجة يساوي صفرا فاذا كانت زاوية الطور تساوي 60 درجة قرأ الواطميتر الثاني قراءة مقدارها صفرا وتكون القدرة الكلية في الاطوار الثلاثة هي قراءة الواطميتر الاول كما يتضح من المعادلة 13.37 . اما ان كانت زاوية الطور اقل من هذه الزاوية قرأ ذلك الواطميتر قدرة موجبة . اما ان كانت زاوية الطور اكبر من 60 درجة (اي ان عامل قدرة الحمل اقل من جيبتمام 60° درجة اي اقل من نصف) فان الواطميتر الثاني يقرأ قراءة سالبة . اي ان الواطميتر الاول يقرأ تأشيرا اكبر من مجموع القدرات المستهلكة في الاطوار الثلاثة . اما الواطميتر الثاني فيقرأ قراءة سالبة بحيث اذا طرح مقدارها من قراءة الواطميتر الاول كان الناتج عبارة عن القدرة الكلية المستهلكة في الاطوار الثلاثة . وحيث ان بعض الواطميترات لاتعطي تأشيرا سالبا لذلك يجب فك ربط ملفي الواطميتر وعكس اتجاهه ان شوهد يقرأ قراءة سالبة .

عند امعان النظر في المعادلتين 13.36 و 13.37 وحلها لايجاد قيمة θ يمكننا معرفة عامل القدرة بدلالة قراءة الواطميترين مباشرة فمجموع قراءتي الواطميترين هو

$$P_1 + P_2 = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\theta \qquad (13.38)$$

كما مر في المعادلة(13.34)والفرق بينهما هو

$$P_1 - P_2 = V_L I_L [\cos(30-\theta) - \cos(30+\theta)]$$

$$= V_L I_L [2 \sin 30 \sin\theta]$$

$$= V_L I_L \sin\theta \qquad \dots (13{\cdot}39)$$

لذا فالنسبة بين المعادلتين (13.39) و (13.38)

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\sqrt{3}\ V_L I_L \sin\theta}{\sqrt{3}\ V_L I_L \cos\theta} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{3}} \qquad \dots (13{\cdot}40)$$

لذا فان ظل زاوية الطور

$$\tan\theta = \sqrt{3}\left[\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right] \qquad \dots (13{\cdot}41)$$

اي ان الزاوية θ تساوي

$$\theta = \tan^{-1}\sqrt{3}\left[\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}\right] \qquad \dots (13{\cdot}42)$$

وهكذا تهيئ المعادلة (13.42) وسيلة لقياس عامل قدرة الحمل من قراءتي الواطميترين.

مثال 13.4

ربط واطميتران لقياس القدرة في دائرة ذات ثلاثة اطوار فكانت قرءتاهما 10KW و 20KW. احسب القدرة الكلية وعامل قدرة الحمل والتيار في كل لحظة اذا كانت فولتية الخط 380 فولت

الحل :

القدرة الكلية

$$P = P_1 + P_2 = 20 + 10 = 30\ kW$$

زاوية الطور يمكن ايجادها من العلاقة 11.42 حيث

$$\theta = \tan^{-1} \sqrt{3} \left(\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right)$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{3} \left(\frac{20 - 10}{20 + 10} \right) = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^o$$

لذا فان عامل القدرة يساوي

$$\cos\theta = 0{\cdot}866$$

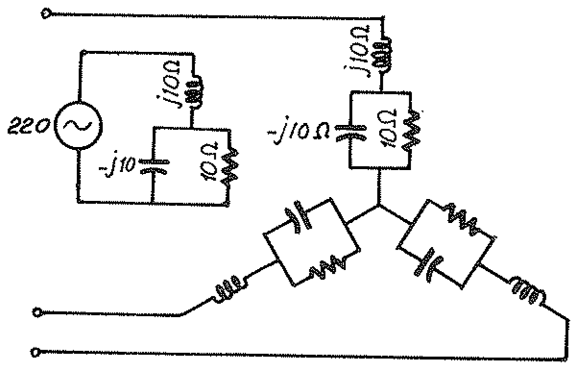
لايجاد تيار الخط نستخدم العلاقة (13.38)

$$30,000 = \sqrt{3} \times 380 \times I_C \times 0{\cdot}866$$

$$I_L = \frac{30,,000}{\sqrt{3} \times 380 \times 0{\cdot}866} = 52{\cdot}63\ A$$

مثال (13.5)

يطلب ايجاد القدرة المستهلكة في دائرة الشكل 13.17 اذا كانت فولتية الخط 381 فولت.



الشكل 13.17 دائرة المثال 13.5

الحل :

يمكننا الانتقال من معالجة الدائرة باطوارها الثلاث الى معالجة طور واحد وضرب الناتج في ثلاثة

الفولتية المسلطة على الطور الواحد تساوي

$$\frac{381}{\sqrt{3}} = 220 \text{ V}$$

الممانعة للطور الواحد

$$Z = \frac{10 \times (-j10)}{10 - j10} + j10$$

$$= 5 + j5 = 5\sqrt{2}\ \underline{/45^o}$$

لذا فتيار الخط يساوي

$$I_L = \frac{220}{5\sqrt{2}} = 31 \text{ A}$$

القدرة الكلية في الاطوار الثلاثة .

$$P = \sqrt{3}\ V_L I_L \cos\theta = \sqrt{3} \times 380 \times 31 \times 0{\cdot}707 = 14400\ W$$

ويمكن تحقيق الحل بايجاد التيار في المقاومة 10 اوم ثم ايجاد القدرة فيها وضرب ذلك في ثلاثة لكي نحصل على القدرة في العناصر المقاومية التي تستهلك القدرة . نظرا لأن المحثات والمتسعات لاتستهلك اي قدرة .

$$|I_R| = \left| 31 \times \frac{-j10}{10-j10} \right| = 22\ A$$

$$P = 3 \times (22)^2 \times 10 = 1440\ W$$

13.5 الدوائر غير المتزنة

اذا كان الحمل مختلف الممانعات في الاطوار الثلاثة يدعى حينئذ بالربط غير المتزن . تشمل الدوائر غير المتزنة امكانية ان يكون المصدر متزنا والحمل غير متزن او ان كلاهما غير متزنين كما يمكن ان يكون الربط احد ثلاثة اشكال هي ربط الدلتا وربط النجم المحتوي على خط تعادل وربط النجم الذي لايحتوي على خط تعادل .

ان اول طريقة تتبادر للذهن عن حل الدوائر غير المتزنة هي باستخدام تيارات ماكسويل الدوارة حيث يمكن اعتبار المصدر مكونا من ثلاثة مصادر منفصلة . كل واحد منها في طور. وبحل المعادلات المتكونة يتم الحصول على التيارات او الفولتيات المطلوبة . كما يمكن بعدئذ حساب القدرات او رسم المخطط الطوري .

اما ان كانت فولتيات المصدر معروفة بين الخطوط بغض النظر عن كيفية ربط اطوار المصدر وسلطت على حمل مربوط بشكل دلتا فان ايجاد التيارات في اطوار الحمل لايتعدى تطبيق قانون اوم على كل طور من الاطوار الثلاثة . ويمكن بعد ذلك ايجاد تيارات الخطوط بتطبيق قانون التيار لكرشوف عند كل عقدة من عقد الدلتا . ويمكن تطبيق الاسلوب نفسه

اذا كان ربط المصدر والحمل بشكل نجمي مع وجود خط التعادل وعدم احتوائه على مقاوم ما ، حيث يمكن حينئذ ايجاد التيارات في كل من اطوار الحمل الثلاثة بقسمة الفولتيات الطورية للمصدر على ممانعات الاطوار الثلاثة في الحمل.

اما اذا احتوى خط التعادل على ممانعة ما او لم يكن خط التعادل موجودا فان الطرق المتوفرة لحل مثل هذه المسائل هي اما بتطبيق تيارات ماكسويل الدوارة (معادلات الشبيكات حيث يكون لدينا شبيكتان او ثلاث شبيكات) او بتطبيق نظرية نورتن حيث تعتبر الممانعة الموجودة فيخط التعادل عبارة عن حمل ويحسب مكافيء الدائرة (المصدر والحمل الفعلي) بالنسبة لممانعة خط التعادل. وحيث ان تطبيق نظرية نورتن يستدعي ايجاد تيار دائرة القصر فان هذا التيار يكون عبارة عن التيار المار في خط تعادل لايحوي اية ممانعة. وواضح ان حل الدائرة لايجاد تيار القصر هذا اسهل لأنه لايتضمن سوى تطبيق قانون اوم ثلاث مرات ثم جمع التيارات الثلاثة وفق قانون التيار لكرشوف. اما الممانعة الدائرة كما تظهر لممانعة خط التعادل فتعادل مكافيء ممانعات الحمل بربط الممانعات للاطوار الثلاثة على التوازي.

اما عند وجود خط التعادل فيصبح ايجاد اي مجهول اخر امرا سهلا نظرا لمعرفة فولتية نقطةتعادلالحمل بالنسبة لنقطة تعادل المصدر ومن ثم يكون بالامكان ايجاد فولتية وتيار كل طور من اطوار الحمل.

اما عند رسم المخطط الطوري فيلاحظ ان الطوريات الممثلة للفولتيات والتيارات في الدائرة تكون غير متساوية ولاتكون الزوايا بينها متساوية. ويمكن رسم الطوريات وحل الدائرة بالاعتماد عليها بطريقة بيانية وذلك برسم طوريات الفولتيات على شكل مثلث فتكون طوريات فولتيات الاطوار الثلاثة لحمل نجمي عبارة عن شكل نجمي غير منتظم مركزة نقطة ما داخل المثلث.

مثال 13.6

مصدر ثلاثي الاطوارر فولتيات الخطوط له كما يلي :

مثال (13.6)

مصدر ثلاثي الأطوار فولتيات الخطوط كما يلي :

الدائرة تكون غير متساوية ويمكن رسم الطوريات وحل الدائرة بالاعتماد عليها بطريقة بيانية وذلك برسم طوريات الفولتيات على شكل مثلث فتكون طوريات فولتيات الاطوار الثلاثة لحمل نجمي عبارة عن شكل نجمي غير منتظم مركزه نقطة ما داخل المثلث .

$$V_{AB} = 240 + j0 = 240 \angle 0^o$$

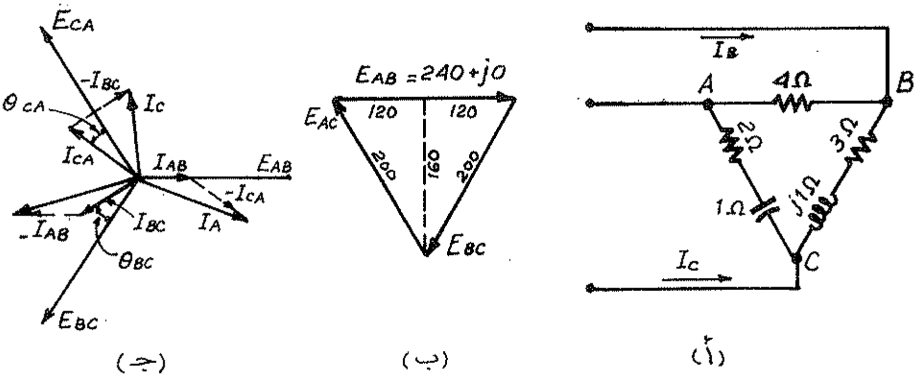
$$V_{BC} = -120 - j160 = 200 \angle 233^o$$

$$V_{CA} = -120 + j160 = 200 \angle 127^o$$

جهز حملا بشكل دلتا مكونا من الممانعات الاتية .

$$Z_{AB} = 4\Omega \,,\, Z_{BC} = 3 + j6\Omega \,,\, Z_{CA} = 2 - j1\Omega$$

اوجد تيارات الخطوط . ثم ارسم المخطط الطوري .



الشكل 13.18 أ) دائرة المثال (13.6) ب) المخطط الطوري للفولتيات جـ) المخطط الطوري للتيارات

الحل :

التيارات الطورية يمكن ايجادها بقسمة الفولتيات على ممانعات الاطوار

$$I_{AB} = \frac{240 + j0}{4 + j0} = 60 + j0 \text{ A}$$

$$I_{BC} = \frac{-120 - j160}{3 + j1} = -52 - j36 \text{ A}$$

$$I_{CA} = \frac{-120 + j160}{2 - j1} = -80 + j40 \text{ A}$$

لايجاد تيارات الخطوط

$$\begin{aligned} I_A &= I_{AB} - I_{CA} \\ &= 60 + j0 - (-80 + j40) \\ &= 140 - j40 = 145{\cdot}6 \underline{/-16^o} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_B &= I_{BC} - I_{AB} \\ &= -52 - j36 - (60) \\ &= 112 - j36 = 117{\cdot}6 \underline{/198^o} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_C &= I_{CA} - I_{BC} \\ &= -80 + j40 - (-52 - j36) \\ &= -28 + j76 = 81 \underline{/110^o} \end{aligned}$$

يبين الشكل 13.18 ب المخطط الطوري للفولتيات وقد رسم بشكل مثلث كما مبين في الشكل جـ حيث المخطط الطوري الاعتيادي للفولتيات والتيارات معا .

مثال 13.7

مصدر ثلاثي الطور متوازن فولتيات خطوطه كالاتي :

$$V_{an} = 104 - j60 = 120\,\underline{/\,30^o}\ V$$

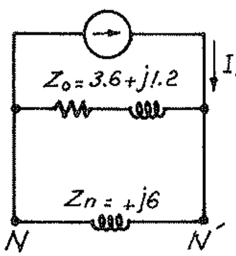
$$V_{bn} = 104 - j60 = 120\,\underline{/\,150^o}\ V$$

$$V_{cn} = j120 \qquad = 120\,\underline{/\,270^o}\ V$$

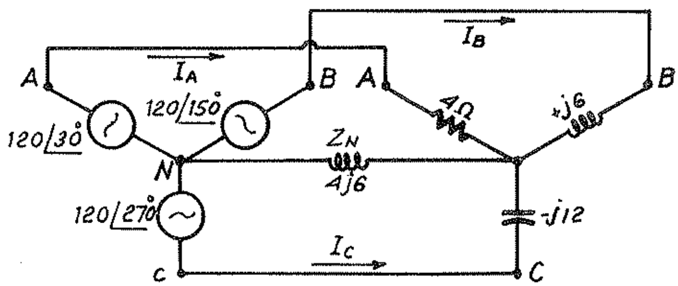
سلط على حمل مربوط بشكل نجم مع وجود خط التعادل . ممانعات اطوار الحمل هي :

$$Z_A = 4\,\Omega\,, \quad Z_B = j6\,\Omega\,, \quad Z_C = -\,j12\,\Omega$$

وممانعة خط التعادل $j6\Omega$. استخدم نظرية نورتن لايجاد تيارات الحمل عند وجود خط التعادل او عدمه .



(ب)



(أ)

الشكل 13.19 (أ) دائرة المثال (13.7) ب) مكافيء نورتن للدائرة عند وجود خط التعادل

الحل :

نحاول ايجاد قيم عناصر مكافئ نورتن المبين في الشكل 13.19 ب وذلك على اساس ان مصدر التيار في الدائرة المكافئة يساوي تيار دائرة القصر بين نقطتي التعادل في المصدر والحمل والممانعة الداخلية هي عبارة عن مكافئ ممانعات الحمل مربوطة على التوازي :

$$I_{sc} = \frac{104 - j60}{4} + \frac{-104 - j60}{j6} + \frac{j120}{-j12}$$

$$= 26 - j15 + j17{\cdot}33 - 10 - 10$$

$$= 6 + j2{\cdot}33 \text{ A}$$

$$\frac{1}{Z_{in}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{j6} + \frac{1}{-j12} = \frac{1 + j3}{j12}$$

$$Z_{in} = \frac{j12}{1 + j3} = 3{\cdot}6 + j1{\cdot}2\ \Omega$$

أ) حينما يكون خط التعادل موجوداً بممانعته التي تساوي $j6\Omega$ تصبح الممانعة المكافئة في الشكل 13.19 ب عبارة عن ممانعتين متوازيتين هما $3.6 + j1.2$,$j6$ اي.

$$Z_P = \frac{(3{\cdot}6 + j1{\cdot}2)(j6)}{3{\cdot}6 + j\,1{\cdot}2 + j6} = 2 + j2\ \Omega$$

وتكون الفولتية بين نقطتي التعادل

$$V_{nN} = (6 + j2{\cdot}33)(2 + j2)$$

$$= 7{\cdot}34 + + j16{\cdot}66 \text{ V}$$

لذلك تكون الفولتيات عبر اطوار الحمل

$$V_{AN} = 104 - j60 - (7{\cdot}34 + j\,16{\cdot}666)$$

$$= 96{\cdot}66 - j76{\cdot}66 \text{ V}$$

$$V_{BN} = (-104 - j60) - (7{\cdot}34 + j16{\cdot}66)$$

$$= -111{\cdot}34 - j76{\cdot}66 \text{ V}$$

$$V_{CN} = (0 + j120) - (7{\cdot}34 + j16{\cdot}66)$$
$$= -7{\cdot}34 + j103{\cdot}34 \text{ V}$$

وتكون التيارات الطورية في الحمل

$$I_{AN} = \frac{96{\cdot}66 - j76{\cdot}66}{4} = 24{\cdot}17 - j19{\cdot}17 \text{ A}$$

$$I_{BN} = \frac{-111{\cdot}34 - j76{\cdot}66}{j6} = -12{\cdot}78 + j18{\cdot}56 \text{ A}$$

$$I_{CN} = \frac{-7{\cdot}34 + j103{\cdot}34}{-j12} = -8{\cdot}61 - j0{\cdot}61 \text{ A}$$

وتيار خط التعادل هو مجموعها اي

$$I_{nN} = I_{AN} + I_{BN} + I_{CN}$$

$$= 2{\cdot}78 - j1{\cdot}22 \text{ A}$$

ب- اما عندما يكون خط التعادل غير موجود فيعادل ذلك استبدال ممانعة خط التعادل (j6) بدائرة مفتوحة. وعند ذلك تكون الفولتية بين نقطتي التعادل.

$$V_{mN} = (6 + j2{\cdot}33)(3{\cdot}6 + 1{\cdot}2)$$

$$= 18{\cdot}8 + j\,15{\cdot}6 \text{ V}$$

وبطريقة مشابهة كما سبق نحصل على

$$V_{AN} = 104 - j60 - (18{\cdot}8 + j15{\cdot}6)$$

$$= 85{\cdot}2 - j75{\cdot}6 \text{ V}$$

$$V_{BN} = -104 - j60 - (18{\cdot}8 + j15{\cdot}6)$$

$$= -122{\cdot}8 - j75{\cdot}6 \text{ V}$$

$$V_{CN} = 0 + j120 - (18{\cdot}8 + j15{\cdot}6)$$

$$= -18{\cdot}8 + j104{\cdot}4\text{V}$$

وتكون تيارات الاطوار الثلاثة في الحمل

$$I_{AN} = \frac{85{\cdot}2 - j75{\cdot}6}{4} = 21{\cdot}3 - j18{\cdot}9A$$

$$I_{BN} = \frac{-122{\cdot}8 - j75{\cdot}6}{j6} = -12{\cdot}6 + j\,20{\cdot}47A$$

$$I_{CN} = \frac{-18{\cdot}8 + j104{\cdot}4}{-j12} = -8{\cdot}7 - j1{\cdot}57A$$

ويمكن التأكد من ان مجموع هذه التيارات الثلاثة يساوي صفراً.

13.6 البرنامج الحادي عشر: حسابات القدرة في دوائر الأطوار الثلاثة

يقوم هذا البرنامج بطلب قراءتي واطميترين فيحسب منها قيمة القدرة الكلية وعامل القدرة ويرسم منحنيات جيبية لفولتيات الأطوار الثلاثة ومنحنيات فولتيات الخطوط الثلاثة والتيارين المارين في ملفي الواطميترين.

```
10 PRINT"Give the readings of two wattmeters is a 3-phase circuit"
20 INPUT P1,P2
30 PRINT "Total power=";P1+P2
40 TH=ATN(1.732*(P1-P2)/(P1+P2))
50 PRINT"Power Factor=";COS(TH);"     angle=";TH*180/3.14159
60 FOR I=1 TO 10000
70 NEXT I
80 CLS
90 SCREEN 8
100 LINE(60,0)-(60,165)
110 LINE (60,80 )-(688, 80)
120 FOR K=1 TO 11
130 LINE(58,K*16)-(62,K*16)
140 NEXT K
150 FOR K=1 TO 12
160 LINE(60+41.86*K, 83)-(60+41.86*K, 77)
170 NEXT K
180 LOCATE 1,20:PRINT"Phase voltages"
190 FOR M=1 TO 314
200 I=.02*M:J=.02*(M+314/3):K=.02*(M+2*314/3)
210 P=30*SIN(I)
220 Q=30*SIN(J)
230 S=30*SIN(K)
```

```
240 PSET  (60+M*1.6, 80-P)
250 PSET  (60+M*1.6, 80-Q)
260 PSET  (60+M*1.6, 80-S)
270 NEXT M
280 LOCATE 1,20:PRINT"Line  voltages of the potential coils"
290 FOR M=1 TO 314 STEP 2
300 J=.02*(M+628/12):K=.02*(M+628/12*5)
310 P=30*SIN(J)*1.732
320 Q=30*SIN(K)*1.732
330 PSET  (60+M*1.6, 80-P)
340 PSET  (60+M*1.6, 80-Q)
350 FOR Z=1 TO 100:NEXT Z
360 NEXT M
370 LOCATE 1,20:PRINT"Line  currents  of  the  current  coils"
380 FOR M=1 TO 314 STEP 4
390 J=.02*(M+628/12):K=.02*(M+628/12*5)
400 P=20*SIN(J+TH)
410 Q=20*SIN(K+TH)
420 PSET  (60+M*1.6, 80-P)
430 PSET  (60+M*1.6, 80-Q)
440 FOR Z=1 TO 400:NEXT Z
450 NEXT M
460 CLS
470 LINE(250,100)-(350,100)
480 LINE(250,100)-(200,130)
490 LINE(250,100)-(200,70)
500 LINE(250,100)-(400,70)
510 LINE(250,100)-(100,70 )
520 LINE(250,100)-(250+100*COS(TH+6.2832/12*5),100-35*SIN(TH+6.2832/12*5))
530 LINE(250,100)-(250+100*COS(TH+6.2832/12 ),100-35*SIN(TH+6.2832/12 ))
```

مسائل الفصل الثالث عشر

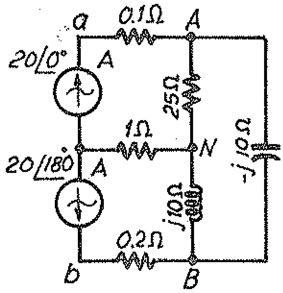
1. نظام سداسي الاطوار متزن. فيه $V_{an} = 20 \underline{/ 0^o}$ و $V_{bn} = 20 \underline{/ -60^o}$ الى $V_{fn} = 20 \underline{/ -300^o}$. اوجد (أ) V_{ab} ب) V_{de} (جـ) V_{ad}

(الجواب $20 \underline{/ 60^o}$ و $20 \underline{/ 240^o}$ و $40 \underline{/ 0^o}$)

2. يستخدم في بعض البلدان دوائر لطور واحد بثلاثة أسلاك لكي يمكن الحصول على فولتيتين مختلفتين إحداهما ضعف الأخرى. يبين الشكل 13.20 دائرة تخدم هذا الغرض حيث تمثل المقاومات $0{\cdot}1\Omega$ و 1Ω و $0{\cdot}2\Omega$ مقاومات الخطوط. أما المقاومات 25, j10, j10– فهي ممانعات الأحمال.

أوجد تيارات الأحمال وتيارات الخطوط.

(الجواب: $21{\cdot}5 \underline{/ 21{\cdot}8^o}$, $0, 8 \underline{/ -90^o}$)



الشكل 13.20 دائرة السؤال الثاني

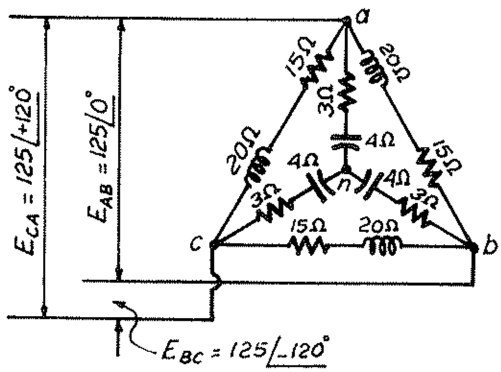
3. نظام ثلاثي الاطوار ذي ثلاثة اسلاك متزن. مربوط بحمل دلتا ذي مقاوم مقداره $50\,\Omega$ ومتسعة مقدارها $5\mu F$ ومحث $0{\cdot}56H$ على التوالي في كل طور. استخدم الترتيب الموجب للاطوار وفولتية الطور الاول $V_{an} = 390 \underline{/ 30^o}$ جـ. م. ت. و $w = 500$ rad/s

اوجد أ) I_{BC} ب) I_{aA} جـ) I_{cC}

(الجواب $9 \underline{/ 97{\cdot}4^o}$ A ; $9 \underline{/ -142{\cdot}6^o}$; $5{\cdot}2 \underline{/ 7{\cdot}4^o}$)

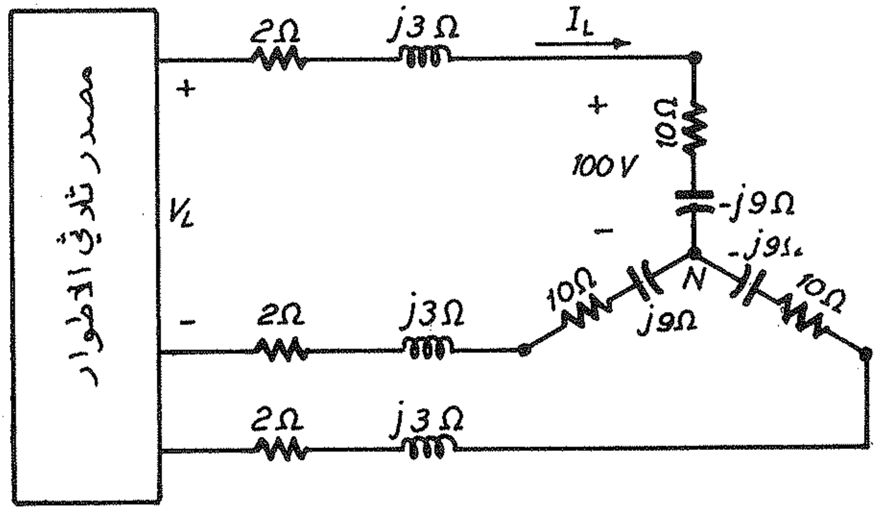
4. نظام ثلاثي الأطوار نجمي فولتية الطور B تساوي $V = 120\ \underline{/130^o}$ إذا كان ترتيب الأطوار ABC أوجد فولتية الخطوط V_{B4}, V_{cB}, V_{Ac} (الجواب :
$V = 208\ \underline{/100^o}\ V, V = 208\ \underline{/-20^o}\ V, V = 208\ \underline{/-140^o}\ V$

5. أوجد التيارات الطورية لكل حمل في الدائرة المبينة في الشكل 13.21 ثم إرسم المخطط الطوري للربط النجمي والدلتا كل على حدة ثم إرسم المخطط الطوري للدائرة المكافئة.
(الجواب : $I_{an} = 14{\cdot}43\ \underline{/53{\cdot}13^o}$, I_{ab} , $5\ \underline{/-53{\cdot}1^o}$)



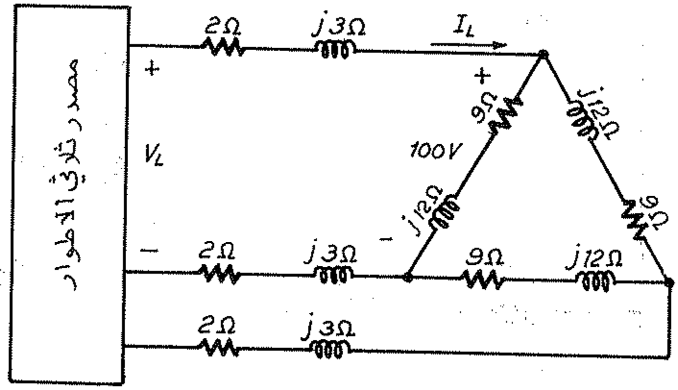
الشكل 31.21 دائرة المسألة 5

6. أوجد قيمة فولتية الخط المؤشرة V عند المصدر في الشكل 13.22 وكما مبين فإن فولتية الطور المؤشرة 100V وأن ممانعة كل خط تساوي $2 + j3$
(الجواب : 172.28 $\underline{/15{\cdot}4^o}$)



الشكل 13.22 دائرة المسألة 6

7. أعد السؤال السابق على دائرة الشكل 13.23 الموضحة أدناه.
(الجواب : 245 V)

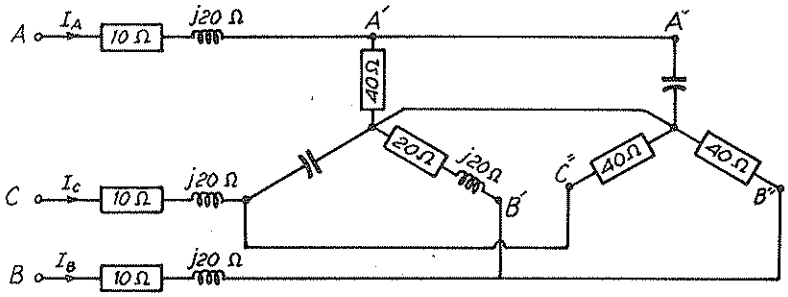


الشكل 13.23 دائرة المسألة 7

8. حمل مقاومي متزن مربوط بشكل نجمي يتألف من مقاومات قيمة الواحدة 50Ω ربـــط الى مصدر فولتية 208V وبشكل ABC ذي ثلاث أسلاك وثلاثة أطوار. أوجد قراءة الواطيميتر الذي ربط ملف تياره الى الخط B وملف فولتيته بين الخطين C, A. وإن النهايات المؤشرة – للملف التيار مربوطة جهة المصدر والنهايات المؤشرة – للملف الفولتية جهة الخط A.
(الجواب : 0W)

9. حمل نجمي متزن ربط الى مصدر ثلاثة أطوار فولتيته 208V. واستخدمت طريقة الواطميتر لقياس معدل القدرة المستهلكة من قبل الحمل إذا كانت قراءة الواطميتر 4KW, 8KW . أوجد ممانعة الطور الواحد.
(الجواب : إما $3.12 \angle -30^\circ$ أو $3.12 \angle 30^\circ$)

10. حملان مربوطان بشكل نجمي على التوازي كما مبين في الشكل 13.24 تحتوي الخطوط على ممانعات كما مبين. سلطت فولتية متزنة موجبة الترتيب فولتية طورها 220 فولت . اوجد التيارات في كل طور من اطوار الحملين وتيارات الخطوط والقدرة المستهلكة في كل حمل والقدرة المستهلكة في الخطوط .



الشكل 13.24 دائرة السؤال العاشر

(الجواب

$P_{A\ell} = 1{\cdot}034\ \text{kW}$, $P''_A = 0\ \text{kW}$, $P'_A = 2{\cdot}068\ \text{kW}$, $i''_A = 7{\cdot}19\ \underline{/-11{\cdot}3}\ \text{A}$

$i'_A = 7{\cdot}19\ \underline{/78{\cdot}7^o}\ \text{A}$

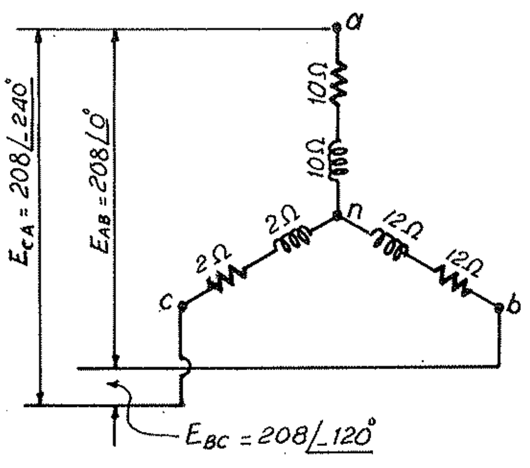
$P_{B\ell} = 331\ \text{W}$, $P''_B = 265\ \text{W}$, $P'_B = 265\ \text{W}$, $i''_B = 2{\cdot}57\ \underline{/-80^o}\ \text{A}$,

$i'_B = 3{\cdot}64\ \underline{/54{\cdot}4^o}\ \text{A}$

$P_{C\ell} = 1{\cdot}034\text{kW}$, $P''_C = 2{\cdot}06\ \text{kW}$, $P'_C = 0\ \text{kW}$, $i''_C = 7{\cdot}19\ \underline{/-41^o}\ \text{A}$

$i'_C = 6{\cdot}43\ \underline{/-14}\ \text{A}$

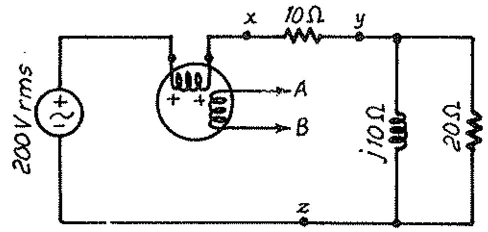
11. إرسم ثلاثة أشكال لقياس القدرة في دائرة الشكل 13.25 بإستخدام واطميترين . ثم أوجد حسابياً قراءة هذه الواطميترات . (الجواب : كما في الشرح)



الشكل 13.25

12. أوجد قراءة الواطميتر (بيّن فيما إذا كان من الواجب عكس ربط النهايات للحصول على القراءة) في الشكل 13.26 إذا كانت النهايات B, A مربوطة على التعاقب الى (آ) Y, X (ب) Z, X (ج) Z, Y

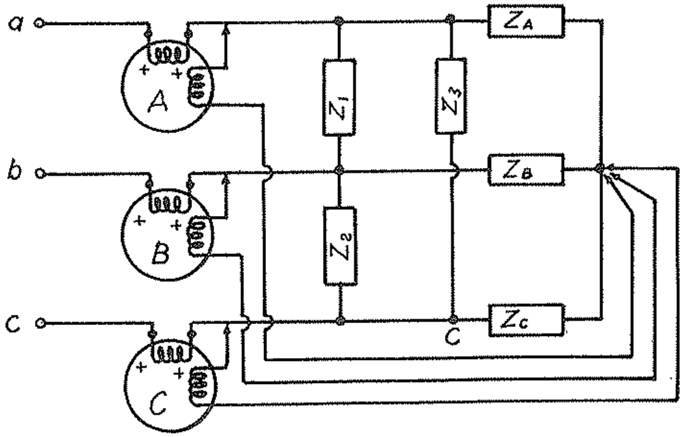
(الجواب: (أ) صفر واط (ب) 1.983 kW (حـ) 1.177 kW)



الشكل 13.26

13. القيم المؤثرة في الدائرة المبينة في الشكل 13.27 هي: $V_{ab} = 200\angle 0^\circ$, $V = 2000\angle 120^\circ$, $V = 200\angle 240^\circ$ وأن $Z_A = Z_B = Z_C =$ $25\angle 30^\circ$، وأن $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50\angle 240^\circ$ (آ) أوجد قراءة كل واطميتر (ب) اذا اربطت النهايات السالبة للملفات الفولتية الى النقطة C. مامقدار القراءات الثلاثة.

(الجواب: 188.1W)



الشكل 13.27

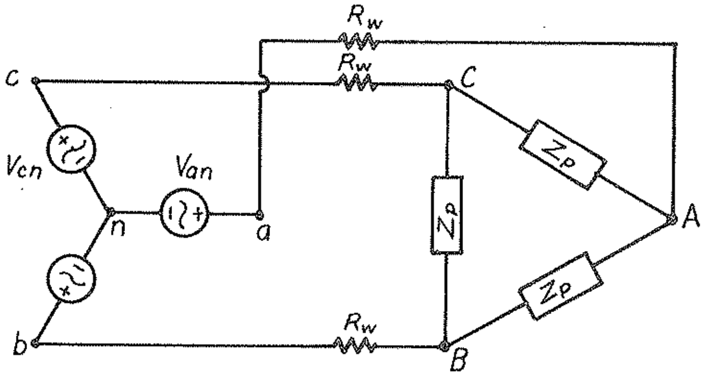
14. يجهز مصدر ثلاثي الطور ذو ثلاث اسلاك فولتية 440 فولت حملين متوازيين مربوطين على شكل Y . الحمل الاول هو عبارة عن محرك حثي يمكن تمثيله بممانعة $10 + j5\ \Omega$ لكل طور. والحمل الثاني حمل اضاءة مكافئ ل $15\ \Omega$ لكل طور. اوجد القدرة المتوسطة أ) المجهزة الى حمل الاضاءة ب) المجهزة الى المحرك الحثي جـ) المجهزة من طور واحد من اطوار المصدر
(الجواب 9.46; 12.9; 15.5 kW)

15. نظام ثلاثي الاطوار ذو ثلاثة اسلاك متزن يجهز حملين كل منها مربوط بشكل نجم . الحمل الاول يسحب 6 كيلو واط بعامل قدرة متخلف مقداره 0.8 بينما يحتاج الاخر الى 12 كيلوواط بعامل قدرة سابق مقداره 0.833 . اذا كان التيار في كل خط هو 8 امبير (ج . م . ت) ، اوجد التيار في (أ) الحمل الاول ب) الحمل الثاني جـ) طور المصدر (الجواب) 3.28; 6.24; 8A

16. محرك حثي ثلاثي الاطوار يحتاج 6 كيلوواط بعامل قدرة مقداره 0.8 اوجد قيم المتسعات المربوطة بشكل نجم التي عند ربطها على التوازي مع الحمل ينتج عامل قدرة نهائي مقداره واحداً وتربط مع المحرك الى مصدر متزن ذي فولتية خط مقدارها $250\ H_z$ وتردده 50HZ .

(الجواب $9.55\ \mu f$)

17. اوجد تيار الخط والقدرة الكلية المجهزة الى حمل وكذلك القدرة المفقودة في خطوط الدائرة المبينة في الشكل 13.28 اذا كانت $V_{ab} = 180 \angle 0^\circ$ V و $Z_p = 7{\cdot}5 + j3\Omega$ و $R_w = 0{\cdot}5\Omega$ مع فرض الترتيب الموجب.
(الجواب: $32{\cdot}9 \angle -18{\cdot}4^\circ$ A، 9·7kW، 1.622 kw)



الشكل 13.28 دائرة السؤال 17

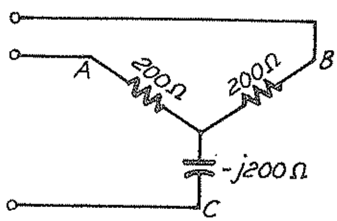
18. ثلاث احمال مربوطة بشكل نجمي (ممانعة كل منها $20 + j37.7\ \Omega$) مربوطة على التوازي مع ثلاثة احمال مربوطة بشكل دلتا (ممانعة كل منها $30 - j159.3\ \Omega$) فولتية الخط 398V اوجد تيار الخط وعامل القدرة الحقيقية والقدرة الخيالية والقدرة الظاهرية المسحوبة من المجموعة كلها
(الجواب: $3{\cdot}37 \angle -10{\cdot}4^\circ$; 0.984 متخلف; 2295W ; 420 VAR

19. إذا كانت قيمة فولتية الخط $V = 208 \angle -40^\circ$ V في دائرة ثلاثة أطوار نوع ACB.
أوجد تيارات الأطوار لحمل متزن قدرته 10KW وعامل القدرة 0.8 متخلف.
(الجواب: $I = 34{\cdot}7 \angle 133^\circ$ A, $I = 34{\cdot}7 \angle 13^\circ$ A, $I = 34{\cdot}7 \angle -107^\circ$ A)

20. مولد ان نوع ثلاثة أطوار يعملان بفولتية 450V وتردد 50Hz. يعملان على التوازي لتجهيز الأحمال التالية:
حمل 40 kW بعامل قدرة يساوي واحد
حمل 100k VA بعامل قدرة متخلف 0.95
حمل 80 kVA بعامل قدرة متخلف 0.8

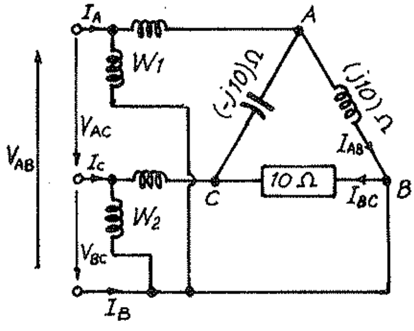
يجهز المولد الأول 100 kW بعامل قدرة متخلف مقداره 0.85. إحسب
(آ) القدرة والقدرة الظاهرية والقدرة المتفاعلة العظمى المجهزة من المولد الثاني.
(ب) السعة المطلوبة لكل طور من مجموعة متسعات مربوطة بشكل دلتا (مثلثي) ليصبح عامل القدرة الكلي للحمل 0.95 متخلف.
(الجواب (أ) 99 k W و 102.48 و 26.33 k VAR و 0.966 (ب) 71.25 μF

21– تمثل الدائرة المبينة في الشكل 13.29 دائرة الكشف عن ترتيب الاطوار حيث تمثل المقاومتان مصباحين مقاومة كل منها 200 -Ω ومفاعلة المتسعة –j200 Ω. ربطت الدائرة الى مصدر فولتية الطورية 220v. اوجد التيار المار في كل طور اذا كان الترتيب موجبا ثم اعد الحل اذا كان الترتيب سالبا. ما العلاقة بين ترتيب الطور وبين شدة اضاءة كل من المصباحين.
الجواب : الحالة الاولى تيار المقاومة R_A أقل من R_B والحالة الثانية بالعكس)



الشكل 13.29 دائرة السؤال 21

22– دائرة المبينة في الشكل 13.30، اوجد قراءتي الواطميترين ثم اوجد القدرة الكلية المجهزة من مصدر فولتية متزن قيمة فولتيته خطه 400 فولت. افرض ان الترتيب موجب
(الجواب $W_T = 43711$ W ، $W_2 = 29854$ W ، $W_1 = 13856$W)



الشكل 13.30دائرة السؤال 22

23– نظام ثلاثي الاطوار نوع ABC يحوي أربعة أسلاك فيه $V = 208 \angle 65^\circ$ أوجد تيارات الأطوار لحمل نجمتي فيه $Z_c = 35 \angle -65^\circ$, $Z_A = \angle -50^\circ$, $Z_B = 25 \angle 78^\circ$

(الجواب : $I_A = 6.93 \angle -125^\circ A, I_B = 8.32 \angle 27^\circ A, I_c = 5.94 \angle 10^\circ A$
$I = 9.33\ 173\ A$

24– نظام ثلاثي الأطوار ذو ثلاثة أسلاك نوع ABC حيث فولتية الخط للمصدر $V_{AB} = 400 \angle 60^\circ V$. اوجد تيارات الطور للحمل المثلثي (دلتا) فيه $Z_{AB} = 40 \angle -50^\circ$ $Z_{BC} = 35 \angle 60$, $Z_{CA} = 50 \angle 40^\circ$ وأن كل خط فيه ممانعة مقدارها $8 + j9$

(الجواب : $I_A = 7.44 \angle 27.8^\circ A$, A, $I_B = 14 \angle -112^\circ A$, $I_c = 9.64 \angle 47.8^\circ A$)

الملحق (أ)

حل المعادلات بطريقة المحددات

يمكن حل المعادلات الآنية من الدرجة الاولى بطرق مختلفة منها الحذف أو التعويض. إلا أن هناك طريقة رياضية سريعة للحل تدعى :

بطريقة المحددات :

الصيغة العامة للمعادلات الآنية ذات الاربعة مجاهيل التي تمرنا في حل الدوائر الكهربائية بطريقة العقد هي :

$$G_{11}V_1 - G_{12}V_2 - G_{13}V_3 - G_{14}V_4 = I_1$$

$$-G_{21}V_1 + G_{22}V_2 - G_{23}V_3 - G_{24}V_4 = I_2$$

$$-G_{31}V_1 - G_{32}V_2 + G_{33}V_3 - G_{34}V_4 = I_3$$

$$-G_{41}V_1 - G_{42}V_2 - G_{43}V_3 + G_{44}V_4 = I_4$$

وتمتاز طريقة الحل بواسطة المحددات بإمكانية إيجاد احد المجاهيل فقط دون المجاهيل الأخرى.

يتلخص الحل بأن قيمة

$$V = = \frac{\Delta_1}{\Delta_g}$$

حيث Δ_g هو:

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & -G_{14} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{41} & -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}$$

وقيمة Δ_1 هي :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} I_1 & -G_{12} & -G_{13} & -G_{14} \\ I_2 & G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ I_3 & -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ I_4 & -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}$$

حيث ان :

$$\Delta_g = G_{11} \begin{vmatrix} G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix} - (-G_{12}) \begin{vmatrix} -G_{22} & -G_{24} & -G_{21} \\ G_{33} & -G_{34} & -G_{31} \\ -G_{43} & G_{44} & -G_{41} \end{vmatrix}$$

$$+ (-G_{13}) \begin{vmatrix} -G_{24} & -G_{21} & G_{22} \\ -G_{34} & -G_{31} & -G_{32} \\ G_{44} & -G_{41} & -G_{42} \end{vmatrix} - (-G_{14}) \begin{vmatrix} -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \\ -G_{41} & -G_{42} & -G_{43} \end{vmatrix}$$

لاحظ أنه لايجاد هذا المحدد من المرتبة الرابعة تم تجزئته الى أربعة حدود كل منها يحتوي على محدد من الدرجة الثالثة مضروباً في أحد الحدود المكونة للصف الاعلى لاحظ تناوب الإشارة الموجبة والسالبة للحدود المتعاقبة . لاحظ أيضاً أسلوب تركيب المحددات من المرتبة الثالثة بحيث لاتشمل العمود الذي يقع فيه الحد المضروب بالمحدد ويجري ترتيب محتويات المحدد بشكل متسلسل وكأن الحدود أعيدت كتابتها الى يسار المحدد الاصلي .

ويمكن بعد ذلك تجزئة المحدد من المرتبة الثالثة الى محددات من المرتبة الثانية ، فمثلاً :

$$\begin{vmatrix} G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix} = G_{22} \begin{vmatrix} G_{33} & -G_{34} \\ -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}$$

$$-(-G_{23}) \begin{vmatrix} -G_{34} & -G_{32} \\ G_{44} & -G_{42} \end{vmatrix} + (-G_{24}) \begin{vmatrix} -G_{32} & G_{33} \\ -G_{42} & -G_{43} \end{vmatrix}$$

ويمكن بعد ذلك تبسيط المحددات من المرتبة الثانية لكي يصبح المحدد أعلاه يساوي :

$$= G_{22}(G_{33}G_{44} - G_{34}G_{34}) + G_{23}(G_{34}G_{42} + G_{32}G_{44}) - G_{24}(G_{32}G_{33}G_{43})$$

لاحظ انه تم الإستعانة بالشكل لتسهيل كتابة المعادلات.

$$\begin{vmatrix} G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G_{22} & -G_{23} \\ -G_{32} & G_{33} \\ -G_{42} & -G_{43} \end{vmatrix}$$

وأما لغرض إيجاد المصفوفة فالعمود الاول يستبدل بالأرقام المكتوبة على الجهة اليمنى من المعادلة أي أن :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} I_1 & -G_{12} & -G_{13} \\ I_2 & G_{22} & -G_{32} \\ I_3 & -G_{23} & G_{33} \end{vmatrix}$$

ويكون مفكوك هذه المصفوفة بإستخدام الصف الأول كما يلي :

$$\Delta_1 = I_1 (G_{22} G_{33} - G_{32} G_{23}) - (-G_{12}) (I_2 G_{33} + G_{32} + I_3) + (-G_{13}) (-I_2 G_{23} - I_3 G_{22})$$

مثال (١)

لنحاول حل المعادلات 3.24-3.25 من الفصل الثالث حيث بهذه الطريقة نجد أن :

$$3V_1 - 2V_2 - V_3 = 10$$

$$-2V_1 + 7V_2 - 3V_3 = 0$$

$$-V_1 - 3V_2 + 5V_2 = 20$$

وان

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta G} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 20 & -3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 7 & -3 \\ -1 & -3 & +3 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{10(7 \times 5 - 3 \times 3) - (-2)(0 + 3 \times 20) - 1(0 - 7 \times 20)}{3(7 \times 5 + 3 \times 3) - (-2)(-2 \times 5 - 3 \times 1) - 1(+2 \times 3 + 7 \times 1)}$$

$$= \frac{10(26) + 2(60) + (140)}{3(26) + 2((-13) - (13)} = \frac{260 + 120 + 140}{78 - 26 - 13}$$

$$\frac{520}{39} = 13{\cdot}33 \text{ V}$$

ولايجاد V_2 فإن :

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 0 & -3 \\ -1 & 20 & 5 \end{vmatrix}}{39}$$

$$= \frac{3(0+3\times 20) - (10)(-2\times 5-3\times 1) -1(-2\times 20+0)}{39} = \frac{350}{39} = 8{\cdot}974\text{V}$$

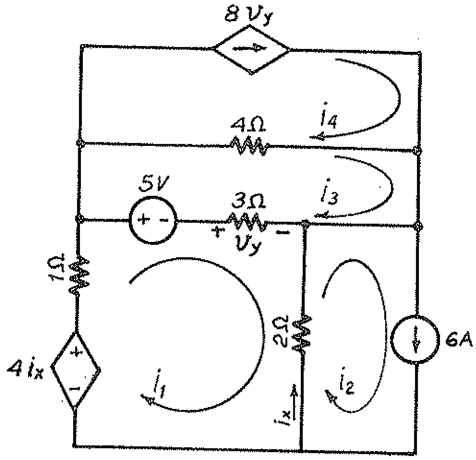
$$V_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 20 \end{vmatrix}}{39}$$

$$= \frac{420 - 80 + 130}{39} = \frac{470}{739} = 12{\cdot}05\ \text{V}$$

يمكن للطالب التأكد من الحل وذلك بحل المعادلات بطريقة الحذف مثلاً

مثال (١) :

إستخدام معادلات ماكسويل لحل دائرة شبكة تحوي مصادر معتمدة وغير معتمدة .



الشكل A−1

$$- 4i_x + 1i_1 + 5 + 3 (i_1 - i_3) + 2 (i_1 - i_2) = 0$$

$$i_2 = 6 \quad , \quad i_x = i_2 - i_1 = 6 - i_1$$

$$- 4 (6 - i_1) + i_1 + 5 + 3 (i_1 - i_1 - i_3) + 2 (i_1 - 6) = 0$$

$$10i_1 - 3i_3 = 31 \qquad ...(1)$$

$$- 5 + 4 (i_3 - i_4) + 3 (i_3 - i_1) = 0$$

$$- 3i_3 + 7i_3 - 4i_4 = 5 \qquad ...(2)$$

$$i_4 = 5V_y = 5 [3 (i_3 - i_3)] = 15i_1 - 15i_3$$

$$15i_1 - 15i_3 - i_4 = 0 \qquad ...(3)$$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 31 & -3 & 0 \\ 5 & 7 & -4 \\ 0 & -15 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ 15 & -15 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{31(-7-60)-5(3)}{4(-150+45)-1(70-9)} = \frac{-2092}{-481} = 435A$$

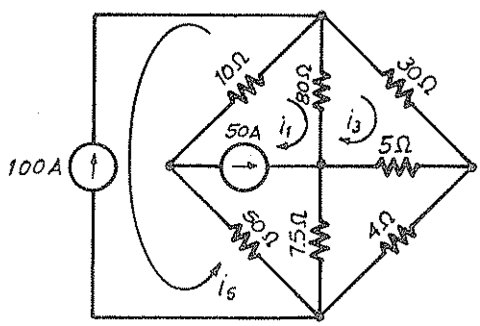
$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 31 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ 15 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-481} = \frac{-31(3+60)+5(-10)}{-481} = \frac{-2003}{-481} = 4{\cdot}164\text{A}$$

$$i_4 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -3 & 31 \\ -3 & 7 & 5 \\ 15 & -15 & 0 \end{vmatrix}}{-481} = \frac{-31(45-105)-5(-150+45)}{-481} = \frac{-1335}{-481} = 2{\cdot}775\text{A}$$

$$V_y = \frac{i_4}{5} = \frac{2{\cdot}775}{5} = 0{\cdot}555 \quad , \quad i_x = 6 - 4{\cdot}35 = 1{\cdot}65\text{A}$$

مثال (2)

حل أربعة معادلات بإستخدام طريقة المصفوفات.



الشكل A-2

من الشكل A–2

$i_5 = 100$

$i_1 - i_2 = 50$

$30i_3 + 5(i_3 - i_4) + 80(i_3 - i_2) = 0$

$4i_4 + 7(i_4 - i_i) + 5(i_4 - i_3) = 0$

$50(i_1 - i_5) + 10(i_2 - i_5) + 30i_3 + 4i_4 = 0$

$i_1 - i_2 = 50$ ...(1)1

$-80i_2 + 115i_3 - 5i_4 = 0$ ...(2)

$-7i_1 - 5i_3 + 16i_4 = 0$ ...(3)

$50i_1 + 10i_2 + 30i_3 + 4i_4 = 6000$ ...(4)

$[6000 = 60I = 60 \times 100]$

$$i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & 115 & -5 \\ 0 & -0 & -5 & 16 \\ 6000 & 10 & -30 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -80 & 115 & -5 \\ 7 & 0 & 5 & 16 \\ 50 & 10 & 30 & 4 \end{vmatrix}}$$

$$
= \frac{50\begin{vmatrix} -80 & 115 & -5 \\ 0 & -5 & 16 \\ 10 & 40 & 4 \end{vmatrix} - 6000\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -80 & 115 & -5 \\ 0 & -5 & 16 \end{vmatrix} + 0 + 0}{1\begin{vmatrix} -80 & 115 & -5 \\ 0 & -5 & 16 \\ & 30 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 115 & -5 \\ -7 & -5 & 16 \\ 50 & 30 & 4 \end{vmatrix}}
$$

$$
\frac{50(58150) - 6000(-1815)}{1(58150) + (95020)} = \frac{1379500}{153170} = 90{\cdot}08 \text{ A}
$$

$$
i_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & 50 \\ 0 & -80 & 115 & 0 \\ -7 & 0 & -5 & 0 \\ 50 & 10 & 30 & 6000 \end{vmatrix}}{153170} = \frac{7472500}{153170} = 48{\cdot}785 \text{ A}
$$

من المعادلة (1)

$i_2 = 40{\cdot}08$ A

بحل المعادلتين (2) و (3)

$i_3 = 30{\cdot}00$ A

وكذلك

$i_4 = 48{\cdot}785$ A

$i_x = i_1 - i_4 = 90{\cdot}08 - 48{\cdot}785 = 41{\cdot}295$ A

الملحق (ب)
خواص الكميات المركبة

تتصف الكميات المركبة بخواص يمكن الاستفادة منها في تسهيل اجزاء العمليات الرياضية على الكميات المتجهة تسهيلا كبيرا . ويمكن ادراج بعض هذه الخواص فيما يلي :

ب- 1 الضرب في مقدار حقيقي

عند ضرب كمية مركبة في كمية حقيقية فإن الزاوية التي تصنعها الكمية المتجهة الاصلية لاتتغير الا ان مقدارها يتضاعف بمقدار الكمية الحقيقة التي تم الضرب بها وتزداد المركبتين الحقيقية والخيالية للكمية الاصلية بنسبة عامل الضرب الحقيقي لكل من المركبتين فمثلا عند ضرب الكمية $3 + j4$ في 2 نحصل على

$$Z = (3 + j4) \times 2 = = 6 + j8 = 2 \times 5 \underline{/53{\cdot}1^{o}} \; 10 \underline{/53{\cdot}1^{o}} \quad \text{... (10·3)}$$

حيث يلاحظ ان الجزء الحقيقي ضرب في 2 وكذلك الجزء الخيالي. وبذا اصبح مقدار حاصل الضرب $\sqrt{6^2 + 8^2}$ وهو عبارة عن 5 (مقدار الاتجاه الاصلي) مضروبا في 2. اما زاوية حاصل الضرب فتساوي زاوية الكمية المركبة الاصلية نفسها . (53.1^{o})

ب- 2 الضرب في العامل j

سبق ان عرفنا العامل j بانه اذا ضرب في متجه فانه يدير ذلك المتجه بزاوية مقدارها 90 درجة . دون ان يغير من قيمته . فمثلا عند ضرب كمية قيمتها 5 اتجاهها يصنع 53.1^{o} درجة مع محور السينات في العامل j نحصل على كمية مقدارها 5 اتجاهها يصنع 53.1^{o} درجة مع محور السينات في العامل j نحصل على كمية مقدارها 5 ايضا واتجاهها يصنع 142 درجة مع محور السينات . وعند تمثيل ذلك بكمية مركبة اي .

$$Z = (3 + j4) \times j$$

$$= j3 + j^2\, 4$$

$$= j3 - 4$$

$$= -4 + j3 = 5 \underline{/ 143.1^{\circ}} \qquad \text{... (B − 1)}$$

حيث يلاحظ اثناء التبسيط استخدامنا لخاصية ان j^2 تساوي 1- وإن ظل الزاوية الناتجة هو مقدار سالب. لذا فالزاوية تقع في الربع الثاني (او الربع الرابع لكن الاشارات تشير الى انه يقع في الربع الثاني وليس الربع الرابع).

ب– 3 جمع الكميات المركبة

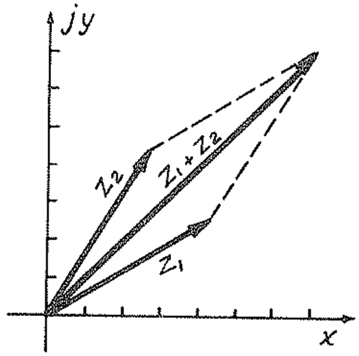
عند جمع متجهين تجمع مركبتاهما الافقيتان مع بعضها وتجمع مركبتاهما العموديتان مع بعضها البعض. بالمثل عند جمع كميتين مركبتين تجمع اجزاؤهما الحقيقية مع بعضها واجزاؤهما الخيالية مع بعضها ايضا فمثلا عند جمع

$$Z_1 = 3 + j4 \qquad Z_2 = 4 + j3$$

فإن

$$Z_1 + Z_2 = (3 + j4) + (4 + j3) = 7 + j7 \qquad \text{...(B − 2)}$$

يوضح الشكل B – 1 جمع هاتين الكميتين المركبتين بيانيا حيث يمثل المجموع محصلة الكميتين المتجهتين



الشكل B – 1 جمع كميتين مركبتين بيانيا

ب– 4 طرح الكميات المركبة

يشبه طرح الكميات المركبة جمعها عدا استخدام اشارات الطرح بدل الجمع حيث تطرح الكميات الحقيقية من بعضها البعض والكميات الخيالية من بعضها البعض فمثلا لأيجاد الفرق بين Z_1 و Z_2 المذكورتين قبل قليل فإن

$$Z_1 - Z_2 = (3 + j4) - (4 + j3)$$

$$= 3 + j4 - 4 - j3 = -1 + j1 \qquad ...(B-3)$$

حيث يمثل الفرق بين الكميتين جمع الاولى مع معكوس الثانية.

ب– 5 ضرب الكميات المركبة

عند ضرب كميتين مركبتين (كل منها ذات مقدار واتجاه فإن حاصل الضرب يكون كمية متجهة مقدارها يعادل حاصل ضرب المقدارين واتجاهها يعادل مجموع زاويتي الكميتين. ويتضح ذلك من المثال الآتي :

$$Z_1 \times Z_2 = (3 + j4) \times (4 + j3)$$

$$= 5 \underline{/ 53{\cdot}1^o} \times 5 \underline{/ 36{\cdot}9^o} = 25 \underline{/ 90^o} \qquad ...(B-4)$$

هذا ويلاحظ انه بالامكان ضرب الكميتين المركبتين مباشرة بضرب القوسين مع بعضهما على النحو الاتي :

$$Z_1 \times Z_2 = (3 \times 4 + 3 \times j3 + j4 \times 4 + j4 \times j3)$$

$$= 12 + j9 + j16 + j^2\, 12$$

$$= 12 + j25 - 12$$

$$= j25 \qquad (B-5)$$

ب- 6 مرافق الكمية المركبة

يعرف مرافق الكمية المركبة بأنه تلك الكمية التي اذا ضربت في الكمية المعطاة كان الناتج مقداراً حقيقياً (لايحوي جزءاً خيالياً) . ومن تعريف عملية الضرب يتضح ان الكمية المرافقة لها زاوية تساوي زاوية الكمية الاصلية بالمقدار لكن اشارتها سالبة وذلك لكي تكون زاوية حاصل ضربها مساوية للصفر. اما مقدار الكمية المرافقة فيجب ان يساوي مقدار الكمية الاصلية . ويُشار للكمية المرافقة بخط فوق رمزها للدلالية على المرافق . اي ان $\overline{Z}_1$ هو مرافق $\overline{Z}_1$ فمثلاً .

$$Z_1 = 3 + j4$$

فان مرافقها

$$\overline{Z}_1 = 3 - j4$$

حيث ان حاصل ضربها

$$Z_1 \overline{Z}_1 = (3 + j4) \times (3 - j4)$$

$$= 9 + 16 = 25 \qquad \text{... (B-6)}$$

ب- 7 قسمة الكميات المركبة

تشبه عملية القسمة عملية الضرب لحد ما . فمقادير الكميات المقسومة على بعضها تقسم . اما زوايا الكميتين المقسومتين على بعضها فتطرح زاوية المقدار في المقام من زاوية المقدار الموضوع في البسط . اي ان الزاوية الناتجة هي عبارة عن الفرق بين زاويتي الكميتين المقسومتين على بعضها فمثلاً

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{3 + j4}{4 + j3} = \frac{5 \underline{/ 53{\cdot}13^o}}{5 \underline{/ 36{\cdot}87^o}} = 1 \underline{/ 53{\cdot}13^o - 36{\cdot}87^o}$$

$$= 1 \underline{/ 16{\cdot}26^o} \qquad \text{... (B-7)}$$

اما اجراء عملية القسمة باستخدام الاحداثيات المتعامدة فيتطلب تحويل القسمة الى ضرب . ويمكن ان يتم ذلك بضرب البسط والمقام في كمية واحدة هي مرافق المقام .

$$-\frac{3 + j4}{4 + j3} \times \frac{4 - j3}{4 - j3} \qquad \text{... (B-8)}$$

فالمقام اصبح مقداراً حقيقياً هو 25 كما في (B- 6) اما البسط فعند ضربه يبقى كمية مركبة حيث تؤول العلاقة (B- 8) الى

$$\frac{1}{25}(3 + j4)(4 - j3) = \frac{42 + j7}{25} = 1 \underline{/ 16{\cdot}26^o}$$

ويتفق ذلك مع المعادلة (B- 7)

ب - 8 متطابقة يولر Euler Identity

يرتبط شكلاً الكميات المركبة اللذان هما الشكل القطبي والشكل المستخدم في الاحداثيات المتعامدة بمتطابقة مهمة تدعى بمتطابقة بولر. تكتب هذه المتطابقة بصيغتها الرياضية كما يلي :

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \text{... (B-9)}$$

يمكن برهنة هذه المتطابقة كما يلي :

نفرض ان كمية مركبة بشكل دالة لـ θ تساوي

$$f(\theta) = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \text{... (B-10)}$$

تتصف هذه الدالة بان حاصل ضربها في j يساوي مشتقتها اي

$$jf(\theta) = j\cos\theta - \sin\theta \qquad \text{... (B·11)}$$

حيث المشتقة هي

$$\frac{d f(\theta)}{d\theta} = -\sin\theta + j\cos\theta \qquad \text{... (B·12)}$$

لذا فان

$$\frac{d f(\theta)}{d\theta} = j f(\theta) \qquad \text{... (B – 13)}$$

وهذه هي معادلة تفاضلية تشبه معادلة تفريغ شحنة متسعة او اضمحلال التيار في محث والتي يمكن حلها بعد تحويرها الى الشكل

$$\frac{d\, f(\theta)}{f(\theta)} = j\, d\theta \qquad 10.17$$

ومأخذ تكامل الطرفين

$$\ln f(\theta) = j\theta + K \qquad \text{... (B – 14)}$$

لايجاد قيمة K نعوض نقطة ابتدائية واحدة . فعندما $\theta = 0$ تكون قيمة $f(\theta) = 1$ وذلك من المعادلة (B- 10) . وبتعويض ذلك في المعادلة (B- 14) تكون قيمة K لذا

$$\ln f(\theta) = j\theta \qquad \text{... (B – 14)}$$

وبتحويل ذلك الى الشكل ألأُسّي

$$f(\theta) = e^{j\theta} \qquad \text{... (B – 15)}$$

اي ان

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad \text{... (B – 9)}$$

يتبين من المعادلة (B- 9) ان اي كمية مركبة بشكل كمية قطبية (تعرف بقيمة وزاوية) يمكن كتابتها بشكل $Ae^{j\theta}$ ، حيث A هو مقدار الكمية و θ زاويتها . لقد كانت A في المعادلة (B- 9) واحداً . لذا فان اي كمية مركبة بالصيغة القطبية يمكن كتابتها بشكل

$$A2^{j\theta} = A\cos\theta + j\,A\sin\theta \qquad \text{... (B-16)}$$

وبالعكس فان اي كمية معروفة بدلالة المركبات المتعامدة يمكن ايجاد صيغتها القطبية حيث :

$$A = \sqrt{(A\cos\theta)^2 + (A\sin\theta)^2} \qquad \text{... (B-17)}$$

كما ان

$$\theta = \tan^{-1}\frac{A\sin\theta}{A\cos\theta} \qquad \text{... (B-18)}$$

ب- 9 رفع الكميات المركبة الى أسس

من خلال تمثيل الكميات المركبة بصيغتها القطبية : $Z = re^{j\theta}$

عند رفعها الى أس مثل m

$$Z = (re^{j\theta})^m = r^m e^{j\theta m} \qquad \text{... (B-19)}$$

ويعني ذلك أن الرفع هو رفع الكمية المركبة أو طول المتجه الى الأس المقصود وتدوير الزاوية لكي تصبح زاوية جديدة قيمتها بقدر قيمة الزاوية الأصلية مضروبة في الأس.

فمثلاً لإيجاد $(3 + j4)^3$ يمكن الحل بالإحداثيات المتعامدة :

$$(3+j4)(3+j4)(3+j4) = 27 - j64 + j108 - 144 = -117 + j44$$

أو بالإحداثيات القطبة :

$$(3+4)^3 = (5e^{j53.1})^3 = 5^3 e^{j53.1\times 3} = 125e^{j159.4}$$
$$= 125(-0.936 + j0.3518) = -117 + j44$$

وسواء كان الأس عدد صحيح أو كسر فالطريقة نفسها إلا أن عملية أخذ الجذر (التربيعي أو التكعيبي) للمقادير المركبة يجب أن يأخذ بنظر الأعتبار أن هناك أكثر من قيمة واحدة للجواب ، فهناك قيمتان للجذر التربيعي وثلاثة للتكعيبي وهكذا. ويمكن إيجاد هذه الجذور بتدوير الكمية المركبة عدد من المرات لتمثل الموقع نفسه (إضافة عدد من زوايا كاملة مقدار كل منها 360°) كما يتضح من المثال الآتي :

مثال :

جد ناتج المقدار $\sqrt[3]{8 \angle 60^\circ}$

الحل :

الجذر التكعيبي هو أس 1/3

$$(8e^{j60})^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{3}} e^{\frac{j60}{3}} 2e^{j20}$$

ولهذا هو الجذر الأول . أما الجذران الآخران فيمكن إيجادهما من تطبيق القاعدة نفسها بعد إضافة °360 و °720 على التوالي أي :

$$[8e^{j(60 + 360)}]^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} e^{2\frac{j420}{3}} = 2e^{j140}$$

وكذلك

$$[8e^{j(60 + 720)}]^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} e^{\frac{j780}{3}} = 2e^{j260}$$

ب- 10 إيجاد لوغاريتم الكمية المركبة :

عند أخذ لوغاريتم الكمية المركبة من المناسب أيضاً إستخدام الصيغة القطبية فمثلاً

$$\ln (re^{j\theta}) = \ln r + \ln e^{j\theta} \qquad \text{... (B-20)}$$

وهذا يعني أن لوغاريتم الكمية المركبة هو عبارة عن مقدار مؤلف من كمية حقيقية مقدارها لوغاريتم مقدار الكمية المركبة وجزئها الخيالي يساوي زاوية الكمية المركبة (بالتقدير الدائري) .

المصطلحات

انكليزي – عربي

المصطلح بالعربي	المصطلح بالانكليزي
تعجيل	ACCDELERATION
مسايرة	ADMITTANCE
فجوة هوائية	AIRGAP
تيار متناوب	ALTERNATING CURRENT
كمية متناوبة	ALTERNATING QUANTITY
أميتر	AMMETER
امبير	AMPERE
قانون امبير	AMPERE'S LAW
قدرة ظاهرية	APPEARANT POWER
اتساع	AMPLITUDE
تردد زاوي	ANGULAR FREQUENCY
متوسط	AVARAGE
متزن	BALANCED
نضيدة (بطارية)	BATTERY
قنطرة	BRIDGE
سعة	CAPACITANCE
مفاعلة سعوية	CAPACITVVE REACTANCE
متسعة	CAPACITOR
فولاذ صب	CAST STEEL
انبوبة اشعة المهبط	CATHODE RAY TUBE
سنتي (جزء من مائة)	CENTI
شحنة	CHARGE
شحن	CHARGING
دائرة	CIRCUIT
اسطوانات متمركزة	COAXIAL CYLINDER

COEFFICIENT OF COUPLING	معامل الاقتران
COERCIVE FORCE	قوة مرغمة
COIL	ملف
COMPASS	بوصلة
COMPLPX NUMPER	عدد مركب
COMPLEX ALGEPRA	جبر مركب
COMPLEX POWER	قدرة مركبة
COMPLEX QUANTITY	كمية مركبة
CONDUCTANCE	ايصالية
CONDUCTIVITY	الايصالية النوعية
CONDUCTOR	موصل
COULOMB	كولوم
CPULPMB'S LAW	قانون كولوم
COUPLED CIRCUIT	دائرة متقارنة
C. R. T.	انبوبة اشعة المهبط
CURRENT DIVISION	تقسيم التيار
DECIBEL	ديسيبل
DIAMAG NETIC	دايا مغناطيسية
DIELECTRIC	عازل
DIRFERENTIAL EQUATION	معادلة تفاضلية
DELTA	دلتا (مثلثي)
DEPENDANT SOURCE	مصدر معتمد
DIPOLE	مزدوج القطب
DISCHARGING	تفريغ
EDDY CURRENT	تيار دوام
EDDY CURRENT BRAKE	مكبح التيار الدوام
EDDY CURRENT LOSS	فقد التيار الدوام
EFFECTIVE VALUE	قيمة مؤثرة

EFFLCLENCY	كفاءة
ELECTRIC CURRENT	دائرة كهربائية
ELECTRIC FIELD	مجال كهربائي
ELECTRIC FIELD INTENSITY	شدة المجال الكهربائي
ELECTRIC FLUX	فيض الكهربائي
ELECTRIC POTENTIAL	جهد كهربائي
ELECTROMAGNERICS	الكهرومغناطيسية
ELECTROMOIVE FORCE	قوة دافعة كهربائية
ELECTRON	الكترون
ELECTROSTATIC	الكهربائية الساكنة
E.M.F.	ق.د.ك
ENERGY	طاقة
ENERGY STORAGE	خزن الطاقة
EQUIPOTENTIAL SURFACE	سطح تساوي الجهد
EQUIVALENT CIRCUIT	دائرة مكافئة
EULER IDENTITY	متطابقة يولر
FARAD	فراد
FARADYS'LAW	قانون فرادي
FEROMAGNETIC	فيرومغناطيسية
FLUX DENSITY	كثافة الفيض
FRINGING	تهدب
FRINGING FLUX	تهدبي
FORCE	قوة
FORM FACTOR	عامل الشكل
GALVANOMETER	كلفانوميتر
GAUSSES'LAW	قانون كاوس
GENERATOR	مولد
HARMONIC	توافقية

HEATER	سخان
HENRY	هنري
HERTZ	هيرتز
HORSEP OWER	قدرة حصانية
HYSTERESIS LOOP	حلقة المسترة
HYSTERESIS LOSS	فقد المسترة
IDEAL SOURCE	مصدر مثالي
IMAGINARY	خيالي
IMAGINARY POWER	قدرة خيالية
IMPEDANCE	ممانعة
INDUCTIVE REACTANCE	مفاعلة حثية
INDEPENDANT SOURCE	مصدر غير معتمد
INDUCED EMF	ق.د.ك . محتثة
INDUCTANCE	محاثة
INDUCTION MOTOR	محرك حثي
INPUT	دخل
INSULATOR	عازل
ION	ايون
J– OPERATOR	العامل J
JOULE	جول
KIRCHHOFFS CURRENT	قانون التيار الكرشوف
KIRCHHOFFS VOLTAGE LAW	قانون الفولتية لكرشوف
KWH	كيلو واط ساعة
LAG	يتخلف
LAMINATION	رقيقة
LAMP	مصباح
LEAD	يسبق

LEAKAGE FLUX	فيض متسرب
LEFT HAND RULE	قاعدة اليد اليسرى
LINE	خط
LINE CURRENT	تيار الخط
LINE IMPEDANCE	ممانعة الخط
LINES OF FIELD	خطوط المجال
LINE TO LINE VOLTAGE	فولتية بين خطين
LINE VOLTAGE	فولتية الخط
LINKAGE FLUX	فيض واشج
LENZES'LAW	قانون لنز
LOAD	حمل
LOOP	دارة
MAGNETIC CIRCUIT	دائرة مغناطيسية
MAGNETO MOMENT	عزم مغناطيسي
MAGNETISTION CURVE	منحني التمغنط
MAGNETIC FIELD	مجال مغناطيس
MAGNETIC FLUX	فيض مغناطيسي (تدفق مغناطيسي)
MAGNETOMOTIVE FORCE	قوة دافعة مغناطيسية
MASS	كتلة
MAXIMUM POWER	قدرة قصوى
MAXWEEL CURRENTS	تيارات ماكسويل
MECHANICAL TORUE	عزم ميكانيكي
MESH	شبيكة
M.K.S.	متر كيلو غرام– ثانية
M.M.F.	ق.د.غ
MOMENT	عزم

MUTUAL INDUCTANCE	محاثة تبادلية
NEGATIVE CHARGE	شحنة سالبة
NEGATIVE SEQUENCE	تسلسل سالب
NEUTRAL	تعادل
NEWTON	نيوتن
NODE	عقدة
NORTON'S THEOREM	نظرية نورتن
OHM'S LAW	قانون ادم
OPEN CIRCUIT	دائرة مفتوحة
OSCILLOSCOPE	مرسمة الذبذبات
OUTPUT	نتيجة ، خرج
PARALLEL	توازي
PARALLEL PLATE CAPACITOR	متسعة متوازية الصفيحتين
PEAK	قمة
PERMEABILITY	نفاذية
PERMEANCE	منافذة
PEAMITTIVTY	سماحية
PERMITTIVITY OF FREE SPACE	سماحية الفراغ المطلق
P.F.	عامل القدرة
PHASE	طور
PHASE CURRENT	تيار الطور
PHASE DIFFERENCE	فرق الطور
PHASE RELATIONS	علاقات طورية
PHASE VOLTAGE	فولتية الطور
PhASOR	طوري
PHASOR DIAGRAM	مخطط طوري
POLARITY	قطبية
POLYPHASE CIRCUIT	دوائر متعددة الاطوار

POSITIVE CHARGE	شحنة موجبة
POSITIVE CHARGE	تسلسل موجب
POWER	قدرة
POWER FACTOR	عامل القدرة
POTENTIAL	جهد
POTENTIAL DIFFERENCE	فرق جهد
PRACTICAL SOURCE	مصدر عملي
PREFIX	بادئة
RANGE	مدى
REACTANCE	مفاعلة (رادّة)
REACTIVE	مفاعلي (رادّ)
REACTIVE POWER	قدرة مفاعلية (ردّية)
REAL POWER	قدرة حقيقية
RELAY	مرحل (او مناول)
RELUCTANCE	مقاومة
REMENANT FLUX DENSITY	كثافة التدفق المتبقية
RESISTANCE	مقاومة
RESISTIVITY	مقاومة نوعية
RESONANCE	رنين
RESULTANT	محصلة
RIGHT HAND RULE	قاعدة اليد اليمنى
RING	حلقة
R. M. S.	ج. م. ت.
ROOT MEAN SQUARE	جذر معدل التربيع
SAW TOOTH WAVE	موجة سن المنشار
SELF INDUCTANCE	محاثة ذاتية
SEMICONDUCTOR	نصف موصل

SERIES	توالي
SHORT CIRCUIT	دائرة قصر
S. I.	نظام الوحدات القياسية العلمية
SIEMENS	سيمنس
SINUSOIDAL	جيبي
SINUSOIDAL WAVE	موجة جيبية
SKIN EFFECT	تأثير سطحي
SOLLNOID	ملف لولبي
SOURCE	مصدر
SOURCE TRANSFORMATION	تحويل المصدر
STAR	نجم (ستار)
SYANDARD LE INTERNASIONAL	نظام الوحدات القياسية العالمية
SUPERCONDUCTOR	مادة مفرطة الايصال
SUPERPOSITON THEOREM	نظرية التراكيب
SUPERNODE	عقدة متراكبة
SURFACE INTEGRAL	تكامل سطحي
SYSTEM OF UNIT	نظام الوحدات
SWITCH	مفتاح
TEMPERATURE COEFFICIENT OF RESISTANCE	معامل درجة الحرارة للمقاومة
TESLA	تيسلا
THEVENIN' S THEOREM	نظرية ثفنن
THREE PHASE CIRCU TS	دوائر ثلاثية الطور
TIME CONSTANT	ثابت الزمن
TORQUE	عزم
TRIANGULAR WAVE	موجة مثلثية
TURBINE	تورباين
TURN	لفة

TWO WATTMETER METHOD	طريقة الواطميترين
UNBALANCED	غير متزن
VA	ف. أ
VAR	فار
VECTOR	متجه
VECTOR DIAGRAM	مخطط المتجهات
VOLT	فولت
VOLTAGE	فولتية (جهد)
VOLT AMPERE	فولت أمبير
VOLT AMPERE REACTIVE	فولت امبير مفاعلي
VOLTMETER	فولتميتر
WATT	واط
WATTMETER	واطميتر
WAVE	موجه
WHEATSTONE BRIDGE	قنطرة ويتستون
WORK	شغل

المصادر الاجنبية والعربية

1. Benson & Harrison
Electric Circuit Theory
3rd Edition. Edward Arnold, 1973.
2. R. L. Boylestad
Introductory Circuit Analysis
2nd Edition, Charles E. merrill, 1972.
3. Frank
Introduction to Electricity and Optics
2nd Edition, McGraw- Hill, 1950.
4. J. D. Frank
Electromaetics
1st Edition, McGraw- Hill. 1953.
5. Hayt and Kemmerly
Engineering Circuit Analysis
4th Edition, McGraw- Hill, 1986.
6. E. Hughes
Fundamental of Electrical Engineering in M. K. S. Units 7th Impression,
Williams Clowes & Sones, 1960.
7. W. H. Hayt
Engineering Electromagnetics
2nd Edition, McGraw- Hill, 1967.
8. A. F. Kip
Fundamental of Electricity and Magnetism
2nd Edition, McGraw- Hill, 1969.
9. M. B. Stout
Analysis of A. C. Circuits
1st Edition Ulrich,s Bookstore, 1952.
10. B. L. Theraja
A Text- book of Electrical Technology
16th Edition, S. Chad & Co. 1977.
11. John O'Malley
Basic Circuit Analysis
Schaum's Outlines Series
MaGraw- Hill Book Company, 1982.
12. R. E. Ridsdale
Electric Circuits for Engineering Technology
McGraw- Hill Book company 1976.

13. Jimmie J. Cathy
Bisic Electrical Engineering
McGraw Hill Book Company
14. Robert L. Boylestad
Introdutory Circuit Analysis
Merrill Pub. Co. 1987.
15. يحيي عبد الحميد/ الكهربائية والمغناطيسية/ الطبعة الاولى– جامعة الموصل ١٩٧٧.
16. اي مكنتزي سميث وكي تي هوزي ترجمة الدكتور محمد زكي محمد خضر والدكتور مظفر النعمة– علم الهندسة الكهربائية الاساسي/ الطبعة الاولى– جامعة الموصل– ١٩٧٧.
17. الدكتور محمد زكي محمد خضر والدكتور سامي محمد طاهر عبد الموجود/ قاموس مصطلحات الهندسة الكهربائية/ جامعة الموصل– ١٩٧٦.
18. القوات المسلحة المصرية/ معجم المصطلحات الفنية/ الطبعة الثانية.
19. جوزيف أ ادمسنستر– الدوائر الكهربائية/ سلسلة ملخصات سشوم نظريات ومسائل دار ماكجل وهيل للنشر.