

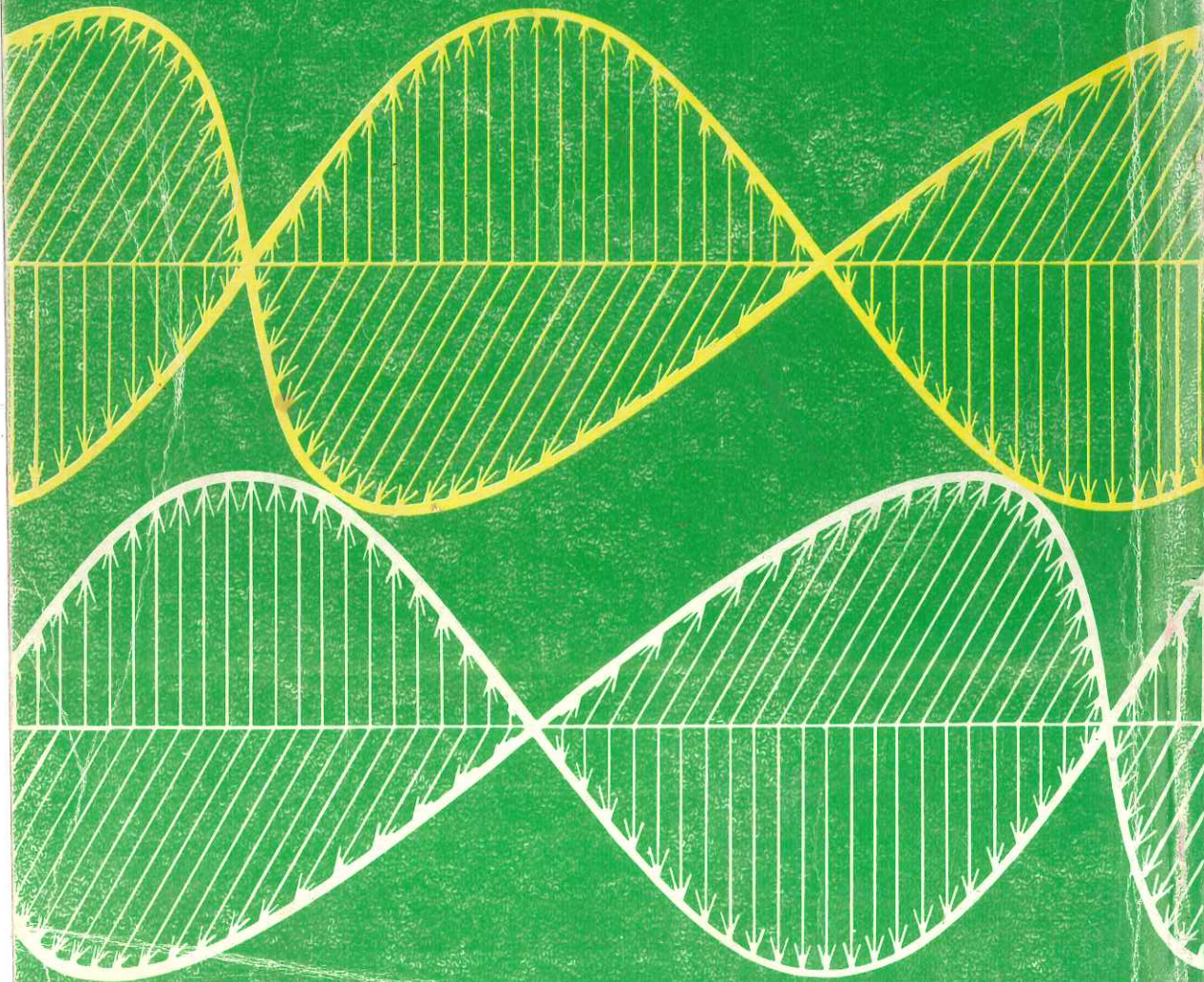
الجمهورية العراقية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل

تخليد الدوائر الكهربائية

ترجمة

الدكتور محمد زكي محمد خضر الدكتور مظفر نور النعمة

الدكتور سامية فاضل الدبايحي



تخليد الدوائر الكهربائية

Engineering Circuit Analysis

William H. Hayt, Jr
Jack E. Kemmerly

Translated by

Dr. Mohammed Zeki Mohammed
Dr. Mudhafar A. Al-Nema
Dr. Maamoon F. Al-Kababjie

هندسة
الدوائر
الكهربائية

الجمهورية الجزائرية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الوهران

بسم الله الرحمن الرحيم
لهديه الى اخي عمي احسن
السلامة
السلامة
السلامة

تخليد الدور الكبرياءيه

تأليف

جاك اي كيمييري

وليم اج هيث

ترجمة

الدكتور منظر النور النعمة

الدكتور محمد زكي محمد خضر

الدكتور عامر فاضل الكبيسي



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والصلوة
والسلام على سيدنا محمد وعلى
آله وصحبه أجمعين .

مقدمة المترجمين

لقد لقي تدرّيس هذا الكتاب بلغته الاصلية نجاحاً في جامعات عالمية متعددة وفي عدد من الجامعات العربية والعراقية بوجه خاص . لذلك فان ترجمته ذات فائدة كبيرة لطلبة الهندسة الكهربائية عامة ولطلبة الصف الثاني خاصة اثناء دراستهم لمقرر الدوائر الكهربائية .

ولقد حاولنا خلال ترجمته التقيّد بفكرة المؤلفين قدر الامكان بل وبالنص كلما كان ذلك مفيداً وان الكتاب يحتوي على معلومات عزيزة في كل فقرة من فقراته او تمرين من تمريناته أو مسألة ومن مسائله ، لذلك كان الحفاظ على فكرة المؤلفين ضرورياً حتى وان احدث قليل من الغموض في الترجمة احياناً وقد حاولنا تحسين لغتها قدر الامكان وكان اعتمادنا في ترجمته على الطبعة الثالثة من الكتاب التي تتضمن تنقيحاً في المسائل والتمرينات حيث كانت كلها جديدة تقريباً .

وحاولنا اثناء ترجمتنا الاعتماد على تعليمات الهيئة العليا للتعريب قدر الامكان وقد اثبتنا في نهاية الكتاب جدولين بالمصطلحات من اللغة العربية الى الانكليزية وبالعكس .

وأخيراً نأمل ان يكون في هذا الجهد فائدة لطلبة الهندسة الكهربائية في الجامعات والمعاهد العراقية وفي غيرها من جامعات الوطن العربي ومعاهده والله الموفق ...

المترجمون

1400 هـ

المصادف 1980 م



مقدمة المؤلفين

وضع هذا الكتاب لكي يستخدم مع المقرر الأول في الهندسة الكهربائية . في كثير من الكليات والجامعات . يسبق هذا المقرر أو يصاحبه مقرر في الفيزياء الأولية ، تقدم فيه المبادئ الأساسية في الكهربائية والمغناطيسية غالباً من وجهة نظر المجالات . إلا أن هذا الأساس ليس ضرورياً . وبدلاً من ذلك فقد نوقشت (أو روجعت) عدة مفاهيم أساسية في الكهربائية والمغناطيسية في الفصل الأول . إن مقررنا في حساب التفاضل والتكامل فقط يعتبر ضرورياً كمقدمة أو مصاحبة أثناء قراءة هذا الكتاب . لقد قدمت عناصر الدائرة وعرفت هنا بدلالة معادلات دوائرها ولم تعط سوى ملاحظات قليلة أحياناً حول علاقات مجالاتها .

إن رغبة المؤلفين أن يكون هذا الكتاب مصدراً للطالب لكي يتعلم منه بنفسه . لقد كتب الكتاب للطالب وليس للاستاذ . وتم تعريف كل مصطلح جديد كلما كان ذلك ممكناً عند ورده لأول مرة وتظهر المادة الأساسية في بداية كل فصل وتعرف بدقة وبتفصيل . وتستخدم الأمثلة العددية عادة لتقديم واقتراح نتائج عامة وتظهر التمارين في نهايات معظم الفقرات وهي في العادة بسيطة وتعطي نتائج الفروع المتعددة بتسلسل عشوائي . أما المسائل الأكثر صعوبة والتي تظهر في نهايات الفصول فهي بالتسلسل الطبيعي لورود المادة في الكتاب .

تستخدم هذه المسائل أحياناً لتقديم المادة الأقل أهمية أو المواضيع الأكثر تقدماً من خلال طريقة حل موجهة خطوة بخطوة ، إضافة إلى تقديم المواضيع التي تظهر في الفصل اللاحق .

إن التقديم والاعادة الناجحة كلاهما مهمان لعملية التعلم . في الكتاب كله هناك 227 تمريناً كل منها يحوي على ثلاثة أفرع وهناك 580 مسألة إضافية في نهاية الفصول . كل هذه المسائل جديدة في هذه الطبعة .

إن التسلسل العام للمادة قد اختير لكي يتعلم الطالب أكثر ما يمكن من أساليب تحليل الدوائر وبأسهل طريقة ابتداءً من الدائرة المقاومة والتي هي موضوع الجزء الأول في هذا الكتاب . إن القوانين الأساسية وبعض النظريات وبعض التركيب البنيوي topology للدوائر الأولية تساعد على تطوير معظم وسائل التحليل

الأساسية . وهناك امكانيات لأمثلة وتمارين لاحصر لها نظراً لأن الحل ليس معقداً رياضياً وان تطوير هذه الاساليب الى دوائر أكثر تعقيداً في الأجزاء اللاحقة من هذا الكتاب يعطي الفرصة للمراجع وللتعميم . ويمكن تغطية الجزء الأول هذا الكتاب في أربعة الى ستة أسابيع حسب أساس الطالب وقابليته وكثافة المقرر .

خصص الجزء الثاني من الكتاب للاستجابة الطبيعية والاستجابة الكاملة لدوائر RL و RC و RLC المثارة بالتيار المستمر . وهناك حاجة الى معرفة حساب التفاضل والتكامل ولكن لا حاجة للمعادلات التفاضلية . ان وحدة الخطوة قدمت كدالة انفرادية مهمة في هذا الجزء ولكن أجلت وحدة الومضة حتى الجزء السادس حينما تصبح الحاجة اليها أكثر ضرورة .

يقدم الجزء الثالث حيز التردد ويبدأ بالتعامل بالاعداد المركبة بالتركيز على التحليل الجيبي في الحالة المستقرة . يحوي هذا الجزء مناقشة للقدرة المتوسطة وقيم ج . م . ت . والدوائر متعددة الأطوار والتي كلها تصاحب الحالة الجيبية المستقرة .

وفي الجزء الرابع من الكتاب قدم مفهوم التردد المركب كما تم التركيز على استخدامه في ربط الاستجابة المرغمة والاستجابة الطبيعية . يبدأ ايجاد الاستجابة الكاملة للدوائر المغذاة جيبياً بربط المادة للاجزاء الثلاثة الاولى .

ويبدأ الجزء الخامس بدراسة التقارن المغناطيسي والذي هو أساساً ظاهرة ذات نهايتين وتؤدي منطقياً الى دراسة تحليل الشبكات ذات النهايتين والمحاكاة الخطية للدوائر الالكترونية المختلفة .

ويقدم الجزء السادس اساليب أكثر فاعلية في تحليل الشبكات . أولها استخدام متغيرات الحالة والذي هو جديد في هذه الطبعة المنقحة وبعد وصف متسلسلات فورير للموجات الدورية . طورت المعالجة الى الدوال المرغمة غير الدورية واستجاباتها باستخدام تحليل فورير . ويغطي الفصل الأخير أساليب تحويلية لا بلاس الأكثر أهمية واستخداماتها في ايجاد الاستجابة الكاملة لدوائر أكثر تعقيداً .

هناك شعور بأن المادة في هذا الكتاب هي أكثر من مقرر لفصلين دارسيين ولكن هناك حاجة لاختيار بعض الفصول من بين الفصول الخمسة او الستة الاخيرة . ولا

يوجد هناك مادة في الكتاب ليس فيها بعض الفائدة لما يعقبها . لذا فان مخططات سريان الاشارة وعلاقة نظرية الدوائر مع نظرية المجالات والمفاهيم النيوية المتقدمة وتفاصيل تحليل الشبكات بمساعدة الحاسبة الالكترونية هي بين المواضيع التي لها علاقة بالموضوع في المقررات اللاحقة والهدف هو منح الطالب القابلية على كتابه معادلات دوائر صحيحة لأي دائرة وعلى قابلية حل الحالات الأقل تعقيداً مع فهم الحل .

لقد تم اجراء عدد من التغييرات في هذه الطبعة اهمها هو اضافة الفصل 17 على اساليب متغيرات الحالة . على الرغم من ان النصف الثاني من هذا الفصل أكثر صعوبة (غير رياضي) مما يتبقى من الكتاب . الا ان هناك فائدة كبيرة حتى من الفقرات الثلاث الاولى من الفصل .

ولقد تم اعطاء الأجوبة في نهاية الكتاب لما يقرب من ثلث المسائل الموجودة في نهاية الفصول وهي المسائل المؤشرة بأشارة خاصة .

نقد تم اضافة جداول وطرق حل خلال الكتاب كله لتوضيح المواضيع . كالتحليل الشبكي والعقدي ومكافئات ثفنن والتحليل العابر لشبكات RL و RC والمقارنة بين حيزي التردد والزمن . كما اضيفت أمثلة واشكال مع التوضيحات المفصلة في مساحات متعددة مثل مفهوم الاشارات في الفصل الاول وتقسيم الفولتية والتيار في الفصل الثاني والشجرات في الفصل الثالث والقدرة المتوسطة في الفصل العاشر ورنين التوازي في الفصل الرابع عشر ومفهوم النقط في الفصل الخامس عشر وتحويل $Y-\Delta$ في الفصل السادس عشر . ان مفهوم الدالة التحويلية قد قدم في الفصل الثالث عشر وربط مع الاستجابة الطبيعية كما تم تحسين الرمز في مادة متسلسلات فورير كما اضيفت خرافة فنية قصيرة الى الفصل الرابع عشر . وقد حذفت احدى فقرات الفصل الخامس عشر التي كانت متعلقة بشبكات RL من الدرجة الثانية .

تضمن الكتاب تسلسلاً منطقياً من التعريف خلال التوضيح الى الوصف الى الاشكال والأمثلة العددية ومن ثم الى قابلية حل المسائل ثم الى ما يتوقعه المؤلفان من قيام الطالب بسؤال نفسه باستمرار لماذا يحدث هذا ؟ كيف يرتبط مع عمل الاسبوع المنصرم ؟ أين سنذهب بعد ذلك بصورة منطقية ؟ هناك مقدار كبير من عزم الدفع للطلاب المبتدئ في الهندسة . وقد تم ابقاء ذلك بالتمارين التي عند حلها

بنجاح تؤيد تقدم الطالب او الطالبة في نفسيهما بتكامل الفقرات السابقة في بوتقة متجانسة وذلك بالاشارة الى التطبيقات المستقبلية والأساليب الأكثر تقدماً مع ابقاء الأهمية والرغبة والاشتياق الى المزيد لدى الطالب . اذا ماظهر الكتاب بعيداً عن اللياقة احياناً وربما مماًزحاً ، فذلك لأن المؤلفين لا يعتقد ان من الضروري ان يكون الأستاذ جافاً او متعالياً . ان ابتسامة مدهشة على شفهي الطالب نادراً ماتكون عقبه في فهمه للمعلومات اذا كانت في كتابة هذا الكتاب لحظات ممتعة فلماذا لا يكون هناك مثل تلك اللحظات عند قراءته .

تستند معظم المادة في هذا الكتاب الى المادة المقررة التي تدرس في جامعة كاليفورنيا الرسمية فوليرتون وجامعة بيردو .

قبل البدء بالعمل على هذه الطبعة الثالثة استفاد المؤلفان من ملحوظات مايقرب من خمسة عشر شخصاً قاموا بمراجعته . وبالأخص من الصفحات الكثيرة من ملاحظات التدريس ومجموعات التمارين التي قدمت من البروفسور روجرسي كونات في جامعة الينوى في دائرة شيكاغو والتي كانت مفيدة جداً . هذا بالإضافة الى سماح الدكتور يوجين بي هنت في جامعة كاليفورنيا الرسمية فوليرتون لأحد المؤلفين بالتفرغ من الواجبات الرسمية أحياناً للعمل في هذا الكتاب وله ذلك الشكر .

وليم اج هيت
جاك اي كيميرلي
1978

الجزء الأول

الدائرة المقاومة

THE RESISTIVE CIRCUIT

الفصل الأول

تعريف ووحدات

DEFINITIONS AND UNITS

1 - 1 مقدمة INTRODUCTION

أن الغرض من هذا الكتاب ، كما يتبين من عنوانه ، تقديم مادة تعطي خبرة ما في موضوع تحليل الدوائر الهندسية . إن هذا الموضوع مفيد جداً لكل فروع الهندسة . إضافة الى كثير من الفيزيائيين والرياضيين التطبيقيين . كما أنه مشوق ومحفز ومسل .

قد يستفسر السامع لأول وهلة ما المقصود بتحليل الدوائر الهندسية ؟ وهذا السؤال وجيه وسنجيب عنه بالرجوع الى أحد المعاجم المعتمدة والتي توجي لنا بما يأتي :

الهندسة : engineering

علم بواسطته يمكن الاستفادة الإنسان من خواص المواد ومصادر الطاقة في الطبيعة .

الدائرة : circuit

ربط لأدوات كهربائية بسيطة فيها على الأقل مسار مغلق واحد يمكن أن يمر فيه تيار .

التحليل : analysis

دراسة (رياضية) لوجود معقد ودراسة العلاقات بين أجزائه .

لذا سنميل الى أن نقرر أن « تحليل الدائرة الهندسية » هو دراسة رياضية لبعض الارتباطات المفيدة بين الأدوات الكهربائية البسيطة والتي تحتوي على الأقل على مسار مغلق واحد للتيار .

وهذا التعريف صحيح أساساً على الرغم من أننا لانستطيع فهمه كاملاً حتى نستوضح ما المقصود « بالتيار » و « بالأدوات الكهربائية » والذي سنقوم به بعد قليل .

وان كتاباً من هذا النوع كان ينظر اليه قبل مدة ليست بالبعيدة ككتاب في الهندسة الكهربائية* لاغير . أما اليوم فقد أصبح من الطبيعي لطلبة الهندسة الميكانيكية والهندسة المدنية والهندسة الكيماوية وفروع الهندسة الأخرى وربما طلبة الرياضيات أو الفيزياء أن يدرسوا تقديماً عن تحليل الدوائر الكهربائية مع المهندس الكهربائي ، وربما تؤخذ المقررات المعتمدة على تحليل الدوائر الكهربائية من قبل طلبة الهندسة حتى قبل توزيعهم الى أقسام تخصصهم .

اذا كنا قد دخلنا قسم الهندسة الكهربائية أو كنا نرغب بدخوله فإن تحليل الدوائر يمثل مقررأ أساساً في مجال اختيارنا . أما إذا كنا قد دخلنا قسماً من أقسام الهندسة فان تحليل الدوائر يمكن أن يمثل جزءاً كبيراً من دراستنا للهندسة الكهربائية ، كما يؤهلنا ذلك للاستمرار بدراسة المزيد من المواضيع الكهربائية كالالكترونات والقياسات وغيرها . والأهم من ذلك كله هو الامكانية التي ستتاح لنا لتوسيع ثقافتنا الأساس لكي نكون أعضاء أكثر علماً ضمن المجموعات المهمة بتطوير الأجهزة الكهربائية والنظم . فالاتصالات الفاعلة داخل مثل هذه الفرق يمكن الحصول عليها اذا كانت اللغة والمصطلحات المستخدمة معروفة للجميع .

ان القليل جداً من الانجازات الهندسية الرائعة خلال الماضي القريب كانت نتيجة جهود أفراد معينين .

وان حقبة الاكتشافات المشابهة لاكتشافات اديسون قد مضت . وبالتدرج أصبح المهندس المتخرج يتوقع أن يكون جزءاً من مجموعة تتضمن تخصصات هندسية متعددة ورياضيين تطبيقيين وفيزيائيين . ان جهود المجموعة يمكن تنسيقها فنياً من قبل مدراء متدرجين ، ثم تنتج النتائج الفنية واحيانا تشغل وتضاف من قبل أناس

* كما يبدو للمؤلفين المعجزين على الأقل

ذوي تأهيل علمي او هندسي . ان المهندسين المتخرجين اليوم لا يستخدمون جميعاً للعمل على مواضيع تصميمية فنية لمسائل هندسية فحسب بل يستخدمون لأمر أخرى .

ان جهودهم الآن تمتد الى ابعد من ايجاد مكواة بخارية أو أنظمة رادار فهي تمتد الى جهود استثنائية لحل مشاكل اجتماعية واقتصادية كتلوث الهواء والماء وتخطيط المدن ووسائل النقل الجماعية واكتشاف مصادر جديدة للطاقة والحفاظ على المصادر الطبيعية الحالية وبالاخص النفط والغاز الطبيعي .

ولفرض المساهمة في حل المشاكل الهندسية . على المهندس الحصول على كفاءات متعددة احدها هو معرفة تحليل الدوائر الكهربائية .

سنبدا هذه الدراسة بالتعرف على نظم الوحدات والتعاريف الاساس والمصطلحات . أما أولئك الذين ليس لهم معرفة بمبادئ علمي الكهربائية والمغناطيسية فقد تم ادراج المواضيع الاساس لهذه المواد لهم في هذا الفصل . ان قراءة سريعة للمواد في هذا الفصل كافية لأولئك الذين لديهم أسس مبادئ الفيزياء . الا انه من الضروري قراءة هذا الفصل بتمعن من قبل الجميع

أما بعد الانتهاء من دراسة هذه المواضيع الأولية بصورة جيدة فيمكننا توجيه اهتمامنا الى الدوائر الكهربائية البسيطة .

1.2 نظم الوحدات SYSTEMS OF UNITS

علينا أولاً أن نتفاهم معاً بلغة واحدة . فالمهندسون لا يمكنهم الاتصال مع بعضهم البعض بطريقة سليمة مالم يكن كل اصطلاح يستخدمونه واضحاً ومحدود المعنى . كما انه من المؤكد ان الفائدة تكون محدودة من استخدام الكتب التي لاتعرف بدقة الكميات الجديدة عند أول ورودها فيها .

إذا تكلمنا بعموميات غير محددة كالاعلان في التلفزيون التجاري مثلاً هذا الصابون يجعل الملابس 40% اكثر بياضاً دون أن نعرف ماهو المقصود بالبياض أو أن نعرف وحدات معينة لقياس البياض فالنتيجة الفشل هندسياً رغم نجاحها تجارياً .

3 ومن أجل اعطاء قيم لكميات يمكن قياسها ، علينا اعطاء أرقام ووحدات . مثلاً (3) انجات . أما للارقام . فاننا نستخدم نظام الاعداد نفسه ونعرفه بشكل جيد . أما للوحدات فان بعض الوقت يجب أن يصرف للتعرف على وحدات مناسبة . وان علينا أن نتفق على تقييس الوحدات وأن نتأكد من ثبوتها وقبولها بصورة عامة . وان الوحدة القياسية للطول يجب أن لاتعرف بدلالة المسافة بين تأشيرتين مع شريط من المطاط مثلاً . فأن ذلك لا يكون دائماً ، وان كل شخص قد يستخدم قياساً مختلفاً .

من الضروري تعريف كل مصطلح علمي في الوقت الذي يستخدم لأول مرة . مع تثبيت التعريف بدلالة وحدات وكميات سبق وأن عرفت بوضوح . ان التعريف لا يمكن أن يكون عاماً دائماً كما ينبغي ان يكون عليه التفكير النظري البحث . فمثلاً سيتحتم علينا قريباً تعريف الفولتية . فيكون علينا اما ان نقبل تعريفاً عاماً وكاملاً لا يمكننا تصوره ولا فهمه الآن . أو أن نقبل تعريفاً أقل عموماً لكنه واضح وبسيط ويستوفي متطلباتنا في الوقت الحاضر . وفي الوقت الذي نحتاج تعريفاً أعم ، ستساعد معرفتنا بالمبادئ البسيطة فهمه في ذلك الوقت .

كما سيكون من الواضح أن كميات كثيرة ترتبط مع بعضها بحيث ان أول كمية تعرّف تحتاج عدداً من التعاريف الأساس قبل أن يكون فهمها ميسوراً . وكمثال على ذلك فحينما يعرّف عنصر الدائرة فان من البديهي تعريفه بواسطة الفولتية والتيار . وحينما تعرّف الفولتية والتيار . فان من المفيد تعريفهما بالرجوع الى عنصر دائرة . ولا يمكن فهم أي من التعاريف الثلاثة بوضوح الى أن يتم تعريفها جميعاً . لذلك فان أول تعريف لعنصر الدائرة سيكون غير تام حيث سيرف التيار والفولتية بدلالة عنصر الدائرة وأخيراً نعود فنعرّف عنصر الدائرة بشكل أدق وستعطينا دراسة النظرية الكهرومغناطيسية فيما بعد تعريفاً أعم لكل من التيار والفولتية .

ان لدينا اختياراً محدوداً في نظم الوحدات . فالنظام الذي سنستخدمه هو النظام المقر من قبل مكتب التقييس القومي عام 1964 والذي يستخدم الآن من قبل كل فروع جمعيات المهندسين الرئيسة . وهو اللغة التي تكتب بها المراجع والكتب . وهذا النظام هو نظام الوحدات العالمي *International System of Units* (والذي يختصر بـ SI في كافة اللغات) . وقد أقر من قبل مؤتمر الأوزان والمقاييس عام 1960 . يتكون نظام SI من ست وحدات اساسية هي : المتر والكيلوغرام والثانية والامبير ودرجة كلفن والكانديلا .

وهذا بالطبع هو « نظام متري » يظهر بشكل أو بآخر في الاستخدامات الاعتيادية في معظم البلاد المتقدمة صناعياً في العالم ويحذر استخدامه بشدة .

وسنحاول تعريف الوحدات الاربع الاولى منها فيما بعد . أما الاختصارات القياسية لها ولغيرها من الوحدات المستخدمة في نظام SI فهي مبينة في جدول في نهاية الكتاب وستستخدم خلال المناقشة في صفحات الكتاب .

لقد عرف المتر لأول مرة في نهاية القرن الثامن عشر بأنه يعادل واحداً من عشرة ملايين من المسافة بين قطب الأرض وخط الاستواء . وقد أشرت هذه المسافة بين خطين دقيقين على قضيب من البلاتينيوم - أريديوم والذي خفضت درجة حرارته الى الصفر المئوي .

وعلى الرغم من ان مسحا أكثر دقة قد أوضح أن المسافة المؤشرة لاتعادل هذا الجزء من قطر الأرض تماماً ، الا أن المسافة المؤشرة قد قبلت عالمياً كتعريف للمتر القياسي الى عام 1960 . ففي هذه السنة أقر المؤتمر العام تعريف المتر (m) على أنه 1650763.73 مرة بقدر طول موجة اشعاع الخط البرتقالي للكريبتون 86 . وهذان التعريفان متطابقان ، الا أن التعريف الأخير أكثر ثبوتاً ويمكن اعادة تحديده بسهولة .

اما الوحدة الأساس للكتلة فهي الكيلوغرام (kg) . فقد عرفت عام 1901 بأنها كتلة قطعة من البلوتونيوم وضعت مع قضيب المتر القياسي في المكتب العالمي للأوزان والمقاييس في سيفرز بفرنسا . وهذا التعريف هو الأخر أعيد إقراره عام 1960 بـ "أن كتلة تلك القطعة تعادل تقريباً 1000 مرة بقدر وزن سنتمر مكعب من الماء في درجة 4 مئوية ."

أما الوحدة الأساس الأخرى : الثانية (ثا) فقد عرفت قبل عام 1956 على أنها 1/86,400 من اليوم الشمسي المتوسط . حيث عرفت في ذلك العام بأنها 1/31,556,925.9747 من السنة الشمسية المدارية 1900 . وفي عام 1964 أعيد تعريفها بدقة أكثر على انها تعادل 9192631770 مرة بقدر فترة التردد الانتقالي بين المستويات الدقيقة العليا $F = 4$ ، $m_F = 0$ ، $F = 3$ ، $m_F = 0$ للمستوى الارضي $^{2}S_{1/2}$ لذرة السيزيوم 133 الذي لم يغير بمجال خارجي . ان التعريف الأخير ثابت ويمكن

اعادة انتاجه بدقة أكثر من التعريف الأول . علماً بأن أي من هذه التعاريف يمثل الثانية التي نتعرف عليها بدقة كافية .

أما تعريف الوحدة الأساس الرابعة ، الامبير (A) فيسظهر في مجال آخر في هذا الفصل بعد أن نكون أكثر معرفة بمبادئ الكهربائية . أما الوجدتان الأساس الباقيتان : درجة كلفن (°K) والكانديلا (cd) فليس لهما حاجة آنيه في دراسة تحليل الدوائر الكهربائية* .

يستخدم SI النظام العشري لربط الوحدات الأكبر والأصغر مع الوحدات الأساس ، ويستخدم مقطع قبل الوحدات لتمثيل مضاعفات العشرة ، وهذه المقاطع هي : -

a-	10 ⁻¹⁸	ديسي	d- 10 ⁻¹
f-	10 ⁻¹⁵	ديكا	da 10 ¹
p-	10 ⁻¹²	هيكو	h- 10 ²
n-	10 ⁻⁹	كيلو	k- 10 ³
μ-	10 ⁻⁶	ميكا	M- 10 ⁶
m-	10 ⁻³	جيكو	G- 10 ⁹
c-	10 ⁻²	تيرا	T- 10 ¹²

ان البدايات المحصورة داخل المضع المغلق في الجدول السابق هي البدايات شائعة الاستخدام بين الطلبة في نظرية الدوائر الكهربائية .

التعاريف الكاملة لكل الوحدات الاساسية مع مناقشة لنظام الوحدات العالمية يمكن الرجوع اليه في المقال ،

IEEE Recommended Practice for Units in Published Scientific and Technical Work

في المجلة

IEEE Spectrum Vol 3 No. 3 PP 169-173 March 1966

لـمؤلفه C.H. Page وزملائه .

ان القيم الرقمية الدقيقة معطاة في الفصل 2 من السلسلة 55 للمكتب القومي للتقييس الممنون

Handbook of Mathematical Functions

الطبعة التاسعة شباط 1971

ان هذه المقاطع تستحق الحفظ نظراً لأنها تظهر احياناً في هذا الكتاب وغيره من المؤلفات العلمية . لذا فان الملي ثانية (ms) هي $1/1000$ من الثانية والكيلومتر (km) هو 1000 متر . من الواضح الآن أن الغرام الذي كان قد عرف أولاً بأنه الوحدة الأساس للكتلة وكان الكيلوغرام يمثل 1000 غرام . أما الآن فان الكيلوغرام هي وحدتنا الأساس ولذا يوصف الغرام بأنه ملي كيلوغرام اذا اردنا أن نوهم القارئ . وان مزج أكثر من مقطع واحد مثلاً ملي مايكروثانية غير مقبول ، حيث أنه يجب أن نستخدم نانوثانية . كما أن المقطع المعروف سابقاً بالميكرون لتمثيل 10^{-6} يجب عدم استخدامه الآن بل استخدام مايكرومتر (μm) . أما الانكستروم فيمكن استخدامه لتمثيل 10^{-10} متر .

ان نظام مضاعفات العشرة غير موجود في نظام الوحدات البريطانية المتداول في الولايات المتحدة الأمريكية ، لذلك فان في حالات عديدة يجب تحويل نتائج التحليل الهندسي الى نظام الوحدات البريطانية لاستخدامه في السوق او عند المناقشة مع الآخرين .

ان لمعظنا تصوراً أكثر وضوحاً للانجين عن تصور الخمس سنتمترات بالرغم من أن الاعتماد على النظام القديم بدأ يقل تدريجياً*

ان الوحدات البريطانية الاساس يمكن تعريفها بدلالة نظام الـ SI كما يلي :-

الانج الواحد يعادل 0.0254 متر وكتلة الباون (Ibm) تعادل تماماً 0.45359237 كيلوغرام ، أما الثانية فمشتركة بين النظامين .

في الجزء الاخير من مناقشتنا للوحدات سنتعرف على ثلاث وحدات مشتقة لقياس القوة والشغل والطاقة والقدرة . فالنيوتن (N) هو الوحدة الأساس للقوة ** وهي القوة اللازمة لتعجيل كيلوغرام واحد من الكتلة متراً واحداً بالثانية . ($1 m/s^2$) . وان قوة نيوتن واحد تعادل 0.22481 باون قوة (Ibf) . فالشاب المتوسط الذي عمره تسعة عشر عاماً وكتلته 68 كيلوغرام يؤثر على الميزان بقوة مقدارها 670 نيوتن .

* مما تجدر الاشارة اليه ان كل الوحدات التي كتبت بأسماء علماء مشهورين تبتدى بحروف كبيرة .

** ان النظام المستخدم في العراق الان هو النظام العالمي للوحدات SI قانوناً (المترجمون)

ان الوحدة الأساس للشغل او الطاقة هي الجول (J) وتعرّف بأنها نيوتن - متر (N-m). ان تسليط قوة مقدارها نيوتن واحد لمسافة متر واحد تحتاج صرف طاقة جول واحد . ونحتاج الطاقة نفسها لرفع كتاب يما يقارب وزن هذا الكتاب الذي يزن 10 نيوتن مسافة مقدارها 10 سنتيمتر . أما الجول فيعادل 0.73756 قدم باون قوة (ft-lbf) .

ان الكمية الأخيرة المشتقة والتي سنهتم بها هي القدرة والتي تعرف على أنها سرعة انجاز شغل أو استهلاك طاقة . والوحدة الأساس للقدرة هي الواط (W) . يعرف الواط بأنه جول واحد بالثانية ، فهو يعادل 0.73756 قدم - باون قوة / ثانية . كما انه يعادل $1/745.7$ من الحصان (hp) ولذي هو وحدة من الافضل تجنبها في الاستخدامات الهندسية بالوقت الحاضر .

ملاحظة : -

ستظهر التمارين في الاجزاء الآتية حينما تكون هناك فكرة جديدة يراد توضيحها لأول مرة لكي يكون بإمكان الطالب التأكد من فهمه للمبادئ الأساس مع نفسه وهي مسائل مفيدة لاكتساب خبرة باصطلاحات جديدة وأفكار جديدة ، ويجب حلها جميعاً .

أما المسائل العامة فتظهر في نهاية الفصل . وتظهر أجوبة التمارين بتسلسل عشوائي فمثلاً للتمرين 1.1 فان جواب الفرع (أ) هو 1.09 و (ب) 2.00 و (ج) 1.67 .

تمرين

1 - 1 املأ الفراغات فيما يأتي : (أ) قوة ثابتة مقدارها 14N نيوتن تؤثر خلال مسافة مقدارها 16 in. لمدة 25 ms — ملي ثانية تمثل قدرة مقدارها 25 kW كيلواط : (ب) كرة كتلتها 16-lb باون تسير بسرعة 16 dm/s — ديسي متر / ثانية لها طاقة حركية مقدارها 100 J جول (ج) يسير جسيم بسرعة الضوء (Mm/s) 300 ميكامتر / ثانية) فيقطع مسافة 300 hm — هكتومتر في 96 ns نانوثانية .
الجواب 0.228 , 0.228 , 52.5

1.3 وحدة الشحنة : THE UNIT OF CHARGE

قبل البدء بمناقشة الكهرباء والدوائر ، علينا أن نعرّف بدلالة بعض الكميات المناظرة ، صنف الظاهرة الكهربائية التي سوف ندرسها . فحين نرفع كرة الطائرة بارتفاع الساعد ونتركها ، نراها تسقط باتجاه الأرض بسبب قوة الجاذبية المسلطة عليها . كما يمكننا أن نصف بالضبط كيف يسقط عليها التعجيل ، وما هي سرعتها في كل لحظة ، ومتى تصل الأرض ؟ وأين تكون في لحظة معينة . ان القليل منا من يفهم لماذا تسقط على الرغم من اننا نفهم جيداً ماذا تفعل القوى الجاذبية ، الا أننا لانعرف ماهي هذه القوى .

وبطريقة مماثلة فالمهندس الكهربائي معتاد على القوى وانحراف مؤشرات المقاييس والتأثيرات الحرارية والاستجابات الأخرى التي يمكن قياسها والنتيجة عن الكهرباء ، لكنه لا يهتم في معظم الأحيان بطبيعة الكهرباء نظرياً (فلسفياً) . لذلك فان هدفنا هو الحصول على الخبرة في ملاحظة الظواهر الكهربائية ووصفها رياضياً ووضعها موضع الاستخدام العلمي ، وسوف لانهتم بأسبابها الا في حالات قليلة .

لنفرض أننا اخذنا قطعة من مادة خفيفة كنخاع البيلسان وعلقناها بخيط رفيع ، فاذا مسحنا مشطاً من المطاط الصلب بقماش صوفي ولسنا كرة النخاع بالمشط ، نجد أن كرة النخاع تحاول التآرجح مبتعدة عنه وذلك يعني وجود قوة تنافر بين المشط وكرة النخاع . وبعد وضع المشط ثم تقرب قطعة القماش من كرة النخاع نلاحظ وجود قوة تجاذب بين القماش الصوفي وكرة نخاع البيلسان .

ويمكننا توضيح هاتين الظاهرتين على كرة نخاع البيلسان بأنهما قوتان كهربائيتان تتسببان عن الشحنات الكهربائية على الكرة والمشط والقماش . وبطريقة مماثلة اضفنا القوة المؤثرة على كرة الطائرة الى الجاذبية الأرضية نتيجة وجود الكتل الجاذبية في كرة الطائرة وفي الأرض .

ولقد اوضحت تجربتنا ان القوة الكهربائية يمكن أن تكون قوة تجاذب أو تنافر وفي هذا الصدد فان التماثل مع القوى الجاذبية لا ينطبق حيث أننا على مانعلم لاتوجد قوة تنافر جاذبية .

ولقد عللنا وجود القوة الكهربائية التجاذبية والتنافرية بفرضية أن هناك نوعين من الشحنة ، وأن الشحنات المتشابهة تتنافر والشحنات المختلفة تتجاذب . يدعى النوعان من الشحنات بالشحنة الموجبة والشحنة السالبة على الرغم من أننا كان يمكن أن ندعوهاما بالذهبية أو السوداء أو الزجاجية أو الراتنجية (كما كانت تدعى قبل سنوات كثيرة مضت) . وقد اختير عشوائياً اعتبار الشحنة التي كانت موجودة على المشط أولاً بأنها الشحنة السالبة من قبل بنيامين فرانكلين ، وأن الشحنة الموجودة على القماش الصوفي موجبة .

ويمكننا الآن وصف تجربتنا السابقة بالمصطلحات الجديدة . فبمسح مشط بقماش تتكون شحنة سالبة على المشط ، وشحنة موجبة على القماش . وبلمس كرة من نخاع البيلسان بالمشط يشغل جزء من الشحنة السالبة إلى الكرة فتولد قوة تنافر بين الشحنتين المتشابهتين على المشط والكرة مما يؤدي إلى حركة الكرة بعيداً عن المشط . وحينما قربنا القماش الصوفي المشحون بشحنة موجبة من كرة النخاع ذات الشحنة السالبة كانت قوة التجاذب بين نوعي الشحنة المختلفتين بديهية .

نعلم الآن أيضاً أن كل المواد تتكون من كتل بنائية أساس يطلق عليها الذرات . وهذه الذرات تتكون من جسيمات أساس . هناك ثلاث جسيمات أساس مهمة هي الالكترون والبروتون والنيوترون . يمتلك الالكترون شحنة سالبة والبروتون شحنة موجبة مساوية لشحنة الالكترون . أما النيوترون فمتعادل الشحنة . عندما مسحنا المشط المطاطي بالقماش الصوفي ، اكتسب المشط شحنة سالبة نظراً لأن عدداً من الالكترونات الموجودة على الصوف انتقلت إلى المشط ، لذلك فقد قل عدد الالكترونات على الصوف والتي تعادل شحنات بروتوناته ، مما أدى إلى تحول شحنة القماش الصوفي من التعادل إلى التصرف وفق شحنة بروتوناته الموجبة .

لقد وجدت كتلة كل من الجسيمات الثلاثة الأخيرة تجريبياً فكانت 9.10908×10^{-31} كيلوغرام للالكترون . وكانت كتلة كل من البروتون والنيوترون حوالي 1840 مرة بقدرها

بذلك أصبحنا على استعداد لتعريف الوحدة الأساس للشحنة والتي تدعى بالكولوم (على اسم العالم جارلس كولوم الذي قام لأول مرة بعملية قياس دقيقة للقوة بين شحنتين) .

يمكن تعريف الكولوم بالطبع بأي طريقة ما . طالما يكون التعريف مناسباً ومعتبراً به عالمياً وثابتاً ولا يتعارض مع أي من التعاريف السابقة . وهذا ، مرة أخرى ، لا يدع لنا مجالاً كبيراً للتصرف نظراً لأن التعريف المقبول عالمياً هو كالآتي : إذا وضع جسيمان متماثلان صغيران مشحونان بشحنتين متساويتين وكانت المسافة بينهما في الفراغ متراً واحداً فتنازراً عن بعضهما بقوة مقدارها $(9 \times 10^{-9} \text{ N})$ نيوتن فان كلا من الجسمين يمتلكان شحنة مقدارها كولوماً (C) واحداً موجباً أو سالباً . يمثل الرمز c سرعة الضوء والتي تساوي $2.997925 \times 10^8 \text{ m/s}$.

واستناداً لهذه الوحدة فان شحنة الالكترن تعادل $1.60210 \times 10^{-19} \text{ C}$ وهي شحنة سالبة . لذلك فالكولوم يمثل حوالي 6.24×10^{18} الكترونات مجتمعة مع بعضها .

سنرمز الى الشحنة بالرمز Q أو q ، حيث يرمز الحرف الكبير للشحنة الثابتة أو التي لا تتغير مع الزمن والحرف الصغير يرمز للشحنة في حالتها العامة والتي تتغير مع الزمن . وتدعى الأخيرة أحياناً القيمة الآنية للشحنة ويمكن التأكيد عليها من ذلك بكتابتها بشكل $(q(t))$.

وسيطبق الامر نفسه الخاص بالحروف الكبيرة والصغيرة لكافة الكميات الكهربائية الأخرى كذلك .

تمرين

2- 1 مامقدار الشحنة (بالبيكوكولوم) التي تمثل بما يلي : (أ) 10^7 الكترون (ب) 10^8 الكترون مع 2×10^7 بروتون (ج) $8e^{-1000} \text{ C}$ حينما تساوي 0.3 s

الجواب pC -1.602 ; 0.749 ; -12.82

1.4 التيار والفولتية والقدرة CURRENT, VOLTAGE, AND POWER

تعود الظاهرة الكهربائية التي نوقشت فيما سبق الى المجال الكهروستاتيكي المتعلق بتصرف الشحنات الكهربائية عند السكون . وهذا أمر ضروري لنا نظراً لاننا مانزال في البداية . ويخدم كأداة لتعريف الشحنة .

لقد تميز أحد أجزاء التجربة على أسس الكهروستاتيكيات وهو عملية تحويل الشحنة من القماش الصوفي الى المشط أو من المشط الى كرة النخاع البيلسان . ان فكرة انتقال الشحنة أو الشحنة المتحركة مهمة جداً لدراسة الدوائر الكهربائية . نظراً لأنه عند نقل شحنة من محل لآخر يمكن ان تنقل طاقة من نقطة الى أخرى . وتمثل خطوط نقل القدرة الكهربائية بين اجزاء القطر أمثلة عملية على ذلك .

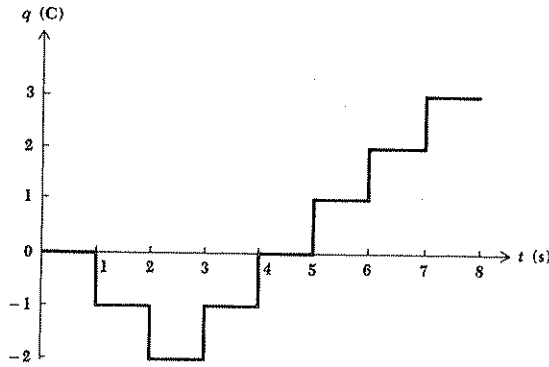
لامكانية تغيير السرعة التي بها تنقل الطاقة في الاتصالات ونقل المعلومات أهمية لاتقل عن الاهمية السابقة . وهذه العملية هي الأساس الذي يعتمد عليه عمل الراديو والتلفزيون والقياس من بعد .

وتمثل الشحنة المتحركة تياراً والذي سنعرفه أدناه بدقة أكثر . يمتلك التيار الموجود في ممر محدود كسلك معدني ، قيمة واتجاهاً مصاحبين له وهو عبارة عن قياس للسرعة التي تسير بها الشحنة عبر نقطة رصد معينة في اتجاه معين . والآن يمكننا أخذ مثال عشوائي يمكن أن يؤدي الى تعريف أعم للتيار الا وهو معدل تغير الشحنة مع الزمن dq/dt .

دعنا نأخذ ممراً محدداً يمكن للشحنة أن تسير فيه . ولنسأل عدداً من الاسئلة حول الوسيلة التي بها تسير الشحنة على طول هذا الموصل . لنضع مراقباً في النقطة A على المسار . كمراقب أولي ولنسأله أن يسجل المجموع الكلي للشحنة التي عبرت منذ الزمن الأساس $t = 0$ وصفر وسنطلب منه أن يسجل المعلومات كل ثانية * ثم نصدر له التعليمات التالية .

- 1 . الاتجاه الموجب الى يمينك
- 2 . اذا مرت بك شحنة موجبة بالاتجاه الموجب أضف مقدار هذه الشحنة
- 3 . اذا تحركت شحنة موجبة بالاتجاه السالب اطرح مقدار هذه الشحنة
- 4 . اذا تحركت شحنة سالبة بالاتجاه السالب اجمع مقدار هذه الشحنة
- 5 . لاحظ المراقب وسجل المعلومات مدة 8 ثواني وسلمنا المنحنى المبين في الشكل 1.1 الذي يبين الشحنة الكلية q التي تحركت منذ الزمن $t = 0$.

* حيث هو مراقب صغير وسريع .



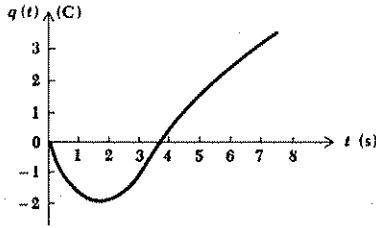
شكل 1.1 منحنى يبين الشحنة الكلية q التي مرت عبر نقطة مرجعية منذ $t = 0$. تقاس الشحنة على مدة ثانية واحدة

ويمكننا الآن أن نلاحظ أن هناك طرقاً متعددة لكيفية تفسير هذه النتائج المسجلة . فمثلاً في الثانية الأولى ربما مرت شحنة موجبة باتجاه اليسار أو ربما مرت شحنة سالبة باتجاه اليمين وهناك الاختياران نفسهما في الفترة $1-s$. وبالحقيقة فانه في كل من هاتين الفترتين ربما كان المراقب قد عد 100 وحدة شحنة موجبة قد مرت الى اليمين و 101 قد تحركت الى اليسار . وربما كان هناك شحنات موجبة وسالبة متحركة في كلا الاتجاهين .

ولحسن الحظ لسنا بحاجة الى معرفة أي من هذه الاحتمالات اللامتناهية حدث بالفعل . حيث أن تأثيراتها الكهربائية متساوية .

ويمكن الآن تنعيم المعطيات بأخذ قياسات أكثر تردداً . ويستدعي ذلك احصاء عناصر أصغر فأصغر من الشحنات . وان الحد الذي لا يمكن تجاوزه في صغر الشحنة هو عند الوصول الى شحنة الكترون واحد .

وهنا يظهر التمثيل البياني منحنياً ناعماً كما مبين في الشكل 1.2



الشكل 1.2 منحنى يبين القيمة الآنية للشحنة الكلية $q(t)$ التي سبق وأن مرت عبر نقطة مرجعية منذ $t = 0$.

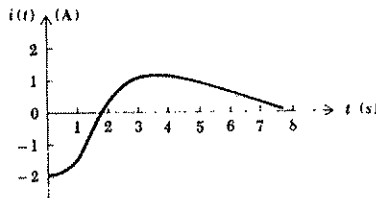
مما تقدم أصبحنا على استعداد لدراسة المعدل الذي به تنتقل الشحنة . ففي الفترة الممتدة من اللحظة t الى $(t + \Delta t)$ ازدادت الشحنة المارة بنقطة الأصل من القيمة q الى القيمة $(q + \Delta q)$. اذا نقص المنحنى في اللحظة فان Δq تكون سالبة . لذلك فان معدل انتقال الشحنة عبر نقطة الأصل في اللحظة t يساوي تقريباً $\Delta q / \Delta t$. وعند تصغير قيمة Δt فان القيمة الدقيقة للمعدل تعطى بالمشتقة .

نعرف التيار الذي يسرى باتجاه معين في نقطة معينة بأنه سرعة حركة الشحنة الموجبة الصافية التي تعبر تلك النقطة باتجاه معين . يرمز للتيار بـ i أو I ولذلك

$$i = \frac{dq}{dt}$$

ان وحدة التيار هي الأمبير (A) والتي تعود الى شحنة تتحرك بسرعة 1 C/s . لقد سمي الامبير على اسم الفيزيائي الالماني (أمبير) الذي عاش في بداية القرن التاسع عشر . يختصر الأمبير احياناً بـ "amp" وهذه التسمية غير رسمية . ويصاحب استخدام رمز التيار بالحرف الصغير القيم الآنية كما هي العادة .

باستخدام معطيات الشكل 1.3 تكون القيمة الآنية للتيار مساوية لانحدار منحنى التيار في كل نقطة كما مبين في الشكل 1.3 .



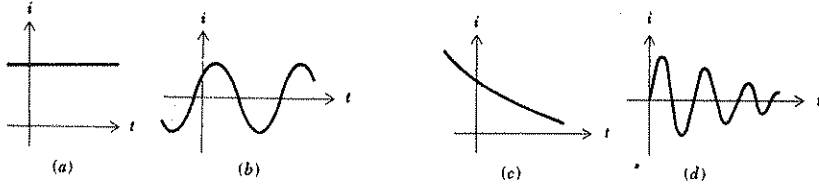
الشكل 1.3 القيمة الآنية للتيار $i = dq/dt$ حيث q معطاة في الشكل 1.2

ويمكن تمثيل الشحنة المنتقلة بين الزمنين t_0 و t بدلالة التكامل المحدد

$$q \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t i dt$$

ويمكن الحصول على الشحنة الكلية المنتقلة خلال الزمن الكلي بجمع الشحنة المتجمعة لغاية اللحظة t_0 أي $q(t_0)$ الى المقدار السابق .

$$q = \int_{t_0}^t i dt + q(t_0)$$



الشكل 1.4 عدة أنواع من التيارات (أ) تيار مستمر dc . (ب) تيار جيبي او ac . (ج) تيار أسي (د) تيار جيبي متنازل

يبين الشكل 1.4 عدة أنواع من التيارات . يدعى التيار الثابت بالتيار المباشر أو المستمر direct current أو باختصار dc . ويبين ذلك في الشكل 1.4 أ . سنجد عدداً من التطبيقات العملية للتيار ذي الشكل الجيبي مع الزمن والمبين في الشكل 1.4 ب ، وهذا النوع من التيار يجهز للدور كافة . ويدعى بالتيار المتناوب alternating current كما يبين الشكلان 1.4 ج و 1.4 د تيارين احدهما ذو دالة اسية Exponential والاخر بدالة جيبيية متضائلة damped sinusoidal . وهذان النوعان سيدرسان فيما بعد .

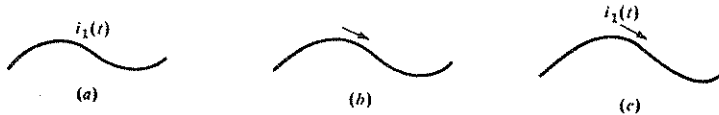
يرمز للتيار بيانياً بسهم قريب من الموصل . ففي الشكل 1.5 أ يمثل سهم التيار والقيمة "3A" أما أن شحنة كلية موجبة مقدارها 3C/s تتحرك نحو اليمين ، أو أن شحنة سالبة قيمتها -3C/s تتحرك نحو اليسار في كل ثانية . في الشكل 1.5 ب هناك أيضاً احتمالان أما -3C/s تسير نحو اليسار ، أو +3C/s تسير نحو اليمين . وتمثل الجمل الأربعة والشكلان المؤشر عليهما التيارين بتأثيرهما الكهربائي الدائرة نفسها ويمكن القول أنها متساوية تماماً .



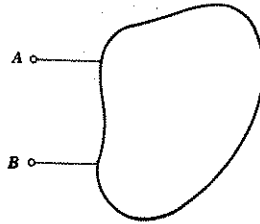
الشكل 1.5 طريقتان لتمثيل التيار نفسه .

من المناسب أن نتصور أن التيار يمثل حركة شحنة ، على الرغم من أنه عبارة عن حركة داخل الموصل المعدني ناتج من حركة الالكترونات . في الغازات المتأينة في المحاليل المتحللة وفي مواد أشباه الموصلات semiconductor تحتوي العناصر ذات الشحنات الموجبة على سريان تيار . لذا فإن أي تعريف للتيار يمكن أن يتفق مع طبيعة خاصية التوصيل الفيزيائي بعض الوقت . وإن التعريف والاصطلاح الذي اتفقنا عليه للتيار هو التعريف القياسي المتعارف عليه .

ومن الضروري أن نتصور أن سهم التيار يعين الاتجاه الحقيقي لسريان التيار ، بل هو عبارة عن جزء من اصطلاح يسهل علينا التكلم عن « التيار في السلك » بطريقة لاليس فيها . والسهم هو جزء من تعريف التيار ! لذا فالتكلم عن قيمة التيار $i_1(t)$ دون تثبيت السهم عبارة عن مناقشة لكمية غير معرفة بدقة . لذا فالشكلان 1.6 أ و ب لا يعينان شيئاً ما بالنسبة للتيار $i_1(t)$ ، بينما الشكل 1.6 ج هو الاصطلاح الدقيق المعروف له .



الشكل 1.6 (أ) و (ب) تعاريف غير كاملة وغير مناسبة وغير صحيحة للتيار . (ج) التعريف الصحيح للتيار $i_1(t)$.



الشكل 1.7 عنصر دائرة عامة تختص بزوج من الاطراف التي تربطها عناصر دائرة عامة أخرى

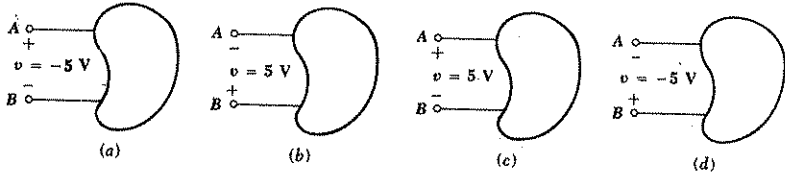
أما الخطوة التالية فتتم بتعريف عنصر دائرة . تمثل الأدوات الكهربائية كالمصهر (قاطع الدورة) fuses ومصباح الضوء light bulbs والمقاوم resistors والبطاريات batteries والمتسعات capacitors والمولدات generators وملفات القدح spark coils بدمج عناصر الدائرة البسيطة . وسنبداً بتوضيح عنصر دائرة عامة بسيط بأنه شيء غير محدد الشكل يحتوي على طرفين يمكن أن يربطوا إلى العناصر الأخرى كما في الشكل 1.6 . وهذه الصورة البسيطة تخدم لتعريف عنصر الدائرة العام . هناك مساران يمكن أن يدخل منهما التيار إلى العنصر أو يخرج منهما . وسنعرف فيما بعد عناصر دائرة محددة بخواصها الكهربائية التي تلاحظ عبر طرفيها .

لنفرض أن التيار المستمر يتجه إلى الطرف A في الشكل 1.6 خلال العنصر العام ثم يخرج من الطرف B . ودعنا نفرض أن مرور هذه الشحنة خلال العنصر يستوجب تبديد بعض الطاقة . من ذلك يمكننا القول أن هناك « فولتية » كهربائية electrical voltage و « فرق جهد » potential difference بين الطرفين أو أن هناك فولتية أو فرق جهد « عبر » العنصر . لذلك فإن الفولتية عبر زوج الأطراف هي قياس للشغل اللازم لحركة شحنة خلال العنصر . وبالأخص سوف نعرف الفولتية عبر العنصر على أنها الشغل اللازم لحركة شحنة موجبة قيمتها كولوماً واحداً من أحد الطرفين خلال الأداة إلى الطرف الآخر . وسنناقش إشارة الفولتية فيما بعد .

أن وحدة الفولتية هي الفولت (V) والتي هي $1J/C$ ، ويرمز لها إما بالرمز V أو v .

أن الطاقة التي تصرف لدفع التيار خلال العنصر يجب أن تظهر في محل آخر وفقاً لقانون حفظ الطاقة . وعندما سنصادف عناصر دائرة فيما بعد سنلاحظ فيما إذا كانت الشحنة مخزونة بشكل يمكن استرجاعها أو أنها تتحول باتجاه واحد إلى حرارة ، طاقة صوتية أو غيرها .

وإن علينا أن نثبت اصطلاحاً يمكن بواسطة التمييز بين الطاقة المخزنة إلى عنصر من مصدر خارجي والطاقة المخزنة من العنصر نفسه إلى أداة خارجية . وسنعمل ذلك بمحض اختيارنا لإشارة فولتية الطرف A بالنسبة للطرف B . إذا كان التيار يدخل الطرف A من العنصر وكان المصدر الخارجي يصرف طاقة لتميرير هذا التيار ، يكون الطرف A موجباً بالنسبة للطرف B أو بشكل آخر يمكن القول أن الطرف B سالب بالنسبة للطرف A .



الشكل 1.8 في (أ) و (ب) النهاية B هي 5 فولت موجبة بالنسبة للنهاية A . في (ج) و (د) النهاية A هي 5 فولت موجبة بالنسبة للنهاية B .

يمكن تحسس الفولتية بإشارتين : احدهما سالبة والاخرى موجبة . ففي الشكل 1.8 أ مثلاً يمثل وضع الاشارة الموجبة على الطرف A الموجب بالنسبة للطرف B بفولتية مقدارها v فولت . واذا وجدنا فيما بعد أن قيمة v صادف وأن كانت سالبة رقمياً مثلاً $-5V$ فانه يمكننا القول أن A موجبة بالنسبة الى B بفولتية مقدارها $-5V$ أو أن B موجبة بالنسبة الى A بمقدار $5V$. ويمثل الشكلان 1.8 ب و ج و د حالات أخرى .

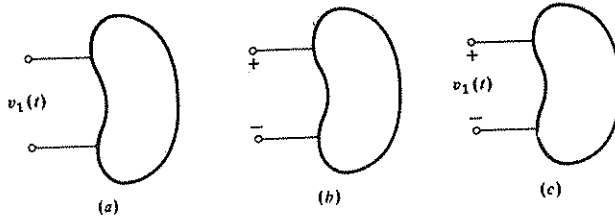
كما لاحظنا الآن في تعريفنا للتيار ، من الضروري أن نفهم أن الاشارة السالبة أو الموجبة لاتعنيان الاشارة « الحقيقية » للفولتية ، بل هما جزء من الاصطلاح الذي يساعدنا على الكلام بدون القياس عن « الفولتية عبر زوج من الاطراف » . وان تعريف أي فولتية يجب أن يحوي زوجاً من الاشارات الموجبة السالبة . ان استخدام الكمية $v_1(t)$ بدون تثبيت موقع الاشارة الموجبة أو السالبة هو عبارة عن استخدام كمية غير معرفة . فالشكلان 1.9 أ و 1.9 ب لا يخدمان لتعريف $v_1(t)$ ، بينما الشكل 1.9 ج يفي بالغرض .

ولا يمكن صياغة جملة تمثل انتقال الطاقة لأي من هذه الحالات الأربع لحين تعيين اتجاه التيار . دعنا نفرض أن سهم التيار قد وضع بالقرب من كل طرف اعلى متجهاً نحو اليمين وأشر عليه “ $+2A$ ” ؛ ونظراً لأن في كل من الحالتين ج و د قد كانت A موجبة بالنسبة الى B بمقدار $5V$ ونظراً لأن التيار يدخل A ، لذا فان الطاقة تجهز الى العنصر . أما في الحالتين الاخرين فان العنصر يجهز طاقة الى اداة خارجية .

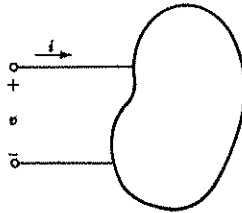
فيما تقدم عرفنا القدرة التي سنرمز لها بالرمز p أو P . اذا بددت طاقة مقدارها جول واحد بنقل شحنة مقدارها كولوم واحد خلال الأداة، فان سرعة تبديد الطاقة في نقل جول واحد في الثانية J/S خلال الأداة هي واط واحد W . وان القدرة يجب أن تكون متناسبة مع عدد الكولومات المنتقلة بالثانية أو التيار ومع الطاقة اللازمة لنقل الكولوم الواحد خلال العنصر أو الفولتية. لذا

$$p = vi$$

بالنسبة للوحدات فان الطرف الأيمن من المعادلة هو حاصل ضرب جول لكل كولوم وكولوم بالثانية والذي ينتج الوحدة المتوقعة وهي الجول بالثانية أو الواط. بوضع سهم التيار بجانب الطرف الأعلى للشكل 1.8 وباتجاه اليمين وتأشيريه بـ "2 A." فان قدرة مقدارها $10 W$ ستسحب من قبل العنصر في ج و د و $-10 W$ تسحب في أ و ب (أي $10 W$ تولد).

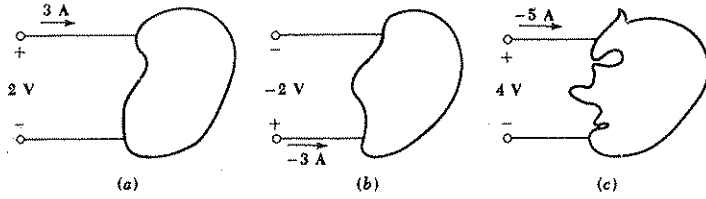


الشكل 1.9 (أ) و (ب) تعريفان غير كافيين لفولتية. (ج) تعريف صحيح يتضمن كلاً من اشارة للمتغير ونوع من الاشارات الموجبة والسالبة



الشكل 1.10 القدرة الممتصة من العنصر معطاة كحاصل ضرب $p = vi$.

تكون اصطلاحات التيار والفولتية والقدرة بالشكل 1.11. يبين التخطيط أنه إذا كان أحد طرفي العنصر موجياً بالنسبة للآخر بمقدار v فولت وكان التيار i داخلاً للعنصر خلال أول طرف، تكون القدرة $p = vi$ مصروفة من قبل العنصر أو مجهزة له. وبكلمة أخرى فإن سهم التيار وإشارات قطبية الفولتية توضع على طرفي العنصر بحيث أن التيار يدخل الطرف المؤشر بالإشارة الموجبة. وإذا كان السهم وزوج الإشارات مؤشران بالكميات الجبرية المناسبة فإن القدرة المصروفة من العنصر يمكن تمثيلها بحاصل الضرب الجبري لهاتين الكميتين. أما إذا كان حاصل الضرب يساوي رقماً سالباً فإن العنصر يستهلك قدرة سالبة أي أنه يجهز قدرة إلى عنصر خارجي. تمثل الأمثلة الثلاثة في الشكل 1.11 أمثلة أخرى.

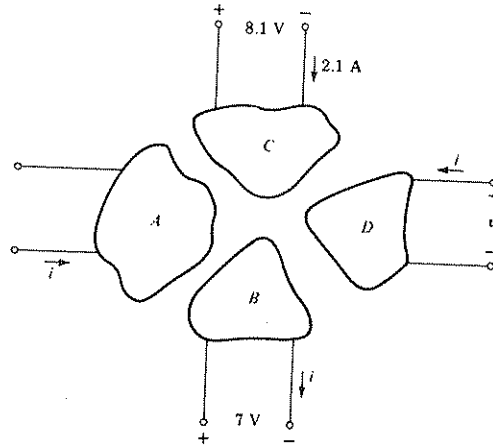


الشكل 1.11 (أ) القدرة $p = (2)(3) = 6$ واط W ، تمتصة من العنصر.
 (ب) القدرة $p = (-2)(-3) = 6$ واط W ، تمتصة من العنصر.
 (ج) القدرة $p = (4)(-5) = -20$ واط W ، تمتصة من العنصر أي معطاة من العنصر.

تمارين

3-1 التيار في العنصر A المبين في الشكل 1-12 يعطى بالمعادلة $4e^{-2t}$ لكل الأزمنة t (أ) ماهي الشحنة الكلية الداخلة إلى الطرف الأسفل من ذلك العنصر عند $t = 0$ ؟ (ب) وما هي الشحنة التي تغادر الطرف الأعلى من ذلك العنصر خلال الفترة $1 \leq t \leq -1$ ؟ (ج) وما هو معدل سرعة مغادرة الشحنة للطرف الأعلى عندما $t = 1$ ؟

الاجوبة $3.46 C$; $2 C$; $0.541 C/s$



الشكل 1-12 انظر التمارين 1-3 و 1-4 و 1-5

1-4 (أ) ماهي القدرة المجهزة للعنصر B في الشكل 1-12 إذا كان التيار $i = 3.61 \text{ A}$ ؟ (ب) وما مقدار القدرة الممتصة في ذلك العنصر إذا كان $i = -2.96 \text{ A}$ ؟ (ج) ماهي القدرة المتولدة في العنصر C ؟
 الأجوبة $17.01; 25.3; -20.7 \text{ W}$

1-5 ماهي القدرة المجهزة للعنصر D في الشكل 1-12 عندما $i = 0$ إذا كان (أ) $i = -0.31 \text{ mA}$, $v = -0.84 \text{ MV}$ ؟
 (ب) $i = 2 \cos 120\pi t \text{ A}$, $v = 120 \cos (120\pi t + \varphi) \text{ V}$ ؟
 الأجوبة $-74.2; 260 \text{ W}$

1.5 أنواع الدوائر وعناصر الدائرة TYPES OF CIRCUITS AND CIRCUIT ELEMENTS

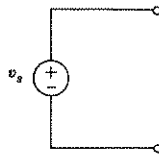
يمكننا الآن ان نعرف عنصر الدائرة بدقة أكثر باستخدام الفولتية والتيار. من المهم التفريق بين الاداة الفيزيائية نفسها وبين النموذج الرياضي للأداة والذي سوف نستخدمه لتحليل تصرف الدائرة. لنتفق على استخدام التعبير « عنصر الدائرة » للإشارة الى النموذج الرياضي. ان اختيار نموذج معين لأي أداة حقيقية يجب ان يتم استناداً الى المعطيات التجريبية او الخبرة. لنفرض ان هذا الاختيار قد تم اجراؤه بالفعل. لذلك علينا ان نتعلم الطرق التي بها يمكن تحليل الدوائر المثالية.

لنفرق الآن بين « عنصر الدائرة » وبين « عنصر دائرة بسيطة ». فالأول يمكن ان يحتوي عنصر دائرة بسيطة بينما الأخير لا يمكن تقسيمه الى عناصر دائرة بسيطة أخرى . وللسهولة سنتفق على استخدام الاصطلاح « عنصر الدائرة » لنعني عنصر الدائرة البسيطة .

ان كل عناصر الدائرة البسيطة التي في الدراسة الآتية يمكن تصنيفها وفق علاقة التيار الذي يمر في العنصر مع الفولتية عبر العنصر . فمثلاً اذا كانت الفولتية عبر العنصر تتناسب مع التيار خلاله أو $v = ki$ سمي العنصر مقاوماً . اما عناصر الدائرة البسيطة الأخرى فتتناسب فولتية الأطراف لها مع مشتقة أو تكامل التيار مع الزمن . كما ان هناك عناصر لا تعتمد فيها الفولتية على التيار قطعاً . أو أن التيار لا يعتمد على الفولتية ايضاً ، وهذه عناصر غير معتمدة . هذا بالاضافة الى اننا سنحتاج تعريف انواع من المصادر يعتمد فيها عنصر الفولتية على التيار او على الفولتية في موقع آخر في الدائرة . سوف نسمي مثل هذه المصادر بالمصادر المعتمدة *dependent sources* أو المصادر المحكومة *controlled sources*

من التعريف يظهر ان عنصر الدائرة البسيط هو النموذج الرياضي للأداة الكهربائية ذات النهايتين ويمكن تمييزها بعلاقات التيار والفولتية لها ولكن لا يمكن تقسيمها بدورها الى أدوات ذوات نهايتين .

ان أول عنصر سنحتاجه هو مصدر الفولتية غير المعتمد *independent voltage source* . يتصف هذا العنصر بفولتية نهايات لا تعتمد نهائياً على التيار المار من خلالها . لذلك اذا اعطينا مصدر فولتية غير معتمد وعلمنا بأن فولتية الأطراف هي $50t^2$ V ، فان الفولتية ستكون بالتأكيد 50 V بعد ثانية واحدة من الزمن مهما كان التيار المار خلال العنصر . ان تمثيل الفولتية غير المعتمدة مبين في الشكل 1.13 . يستخدم الرمز s للإشارة الى أن الفولتية هي فولتية المصدر .

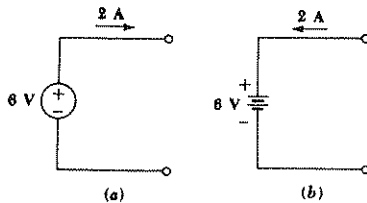


شكل 1.13 اصطلاحات الدائرة لمصدر فولتية غير معتمد . اصطلاحات مصدر الفولتية المعتمد أو المسيطر مبينة في الشكل 1.16

هناك نقطة تستحق التنويه هنا وهي أن وجود الإشارة الموجبة على النهاية العليا من مصدر الفولتية غير المعتمدة في الشكل 1.13 لا تعني بالضرورة ان النهاية العليا تكون دوماً موجبة بالنسبة للطرف الأسفل . بل هي تعني ان النهاية العليا تكون موجبة بالنسبة للنهية السفلى بمقدار v_s فولت . وإذا ما حدث وكانت v_s سالبة في لحظة ما . فان النهاية العليا تكون سالبة بالنسبة للنهية السفلى في تلك اللحظة .

فاذا وضع سهم تيار مجاور للموصل الاعلى من هذا المصدر وكان متجهاً لليسار فان التيار i يدخل الى الطرف المؤشر بالإشارة الموجبة مبدداً قدرة مقدارها $p = v_s i$. وفي أغلب الاحوال يتوقع من المصدر أن يعطي قدرة الى شبكة لا أن يستهلكها . واستناداً الى ذلك يمكننا أن نصلح على اتجاه السهم الى اليمين لكي ترمز $v_s i$ الى القدرة المجهزة الى المصدر . على الرغم من أنه يمكننا استخدام أي من الاتجاهين .

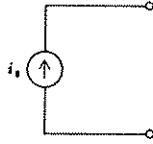
ان مصدر الفولتية غير المعتمد هو مصدر مثالي ولا يمثل أداة فيزيائية حقيقية ومضبوطة . نظراً لأن المصدر المثالي يمكن أن يجيز طاقة لانهاية لها من طرفيه . فكل كولوم يمر خلاله يستلم طاقة مقدارها v_s جولاً وعدداً غير محدود من الكولومات بالثانية . ان مصدر الفولتية المثالي هذا هو تقريب معقول لعدد من مصادر الفولتية العملية . فمثلاً تحوي بطارية السيارة على فولتية أطراف مقدارها 12 V . تبقى ثابتة تقريباً طالما ان التيار خلالها لا يزيد على عدد من الامبيرات . ان تياراً صغيراً يمكن ان يمر بأي من الاتجاهين خلال البطارية ليجيز قدرة من البطارية الى المصابيح عند تفريغ البطارية او ان تستلم قدرة من المولد او شاحنة البطارية عند الشحن . ان مصدر القدرة الموجود في الدور يمكن تقريبه الى مصدر فولتية غير معتمد بشكل $v_s = 115\sqrt{2} \cos 2\pi 60t \text{ V}$ لتمثيل الحالة عندما لا يزيد التيار عن 20 A .



الشكل 1.14 تمثيلات مختلفة لمصدر فولتية ثابت او مستمر لمصدر غير معتمد . في (أ) المصدر يجيز 12 W وفي (ب) البطارية تمتص 12 W .

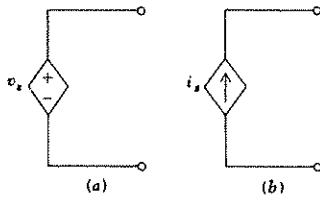
ان مصدر الفولتية غير المعتمد الذى يحوي على فولتية أطراف ثابتة يدعى أحياناً بمصدر فولتية غير معتمد للتيار المستمر ويمكن تمثيله بأي من الاصطلاحين في الشكل 1.14 . لاحظ أنه في الشكل 1.14 ب تمثل البطارية بخطين متوازيين يمثل الاطول منهما القطب الموجب والاقصر القطب السالب ولا يكون هناك حاجة عادة لوضع الاشارة الموجبة في مثل هذه الحالة على الرغم من انها تضاف هي الأخرى أيضاً .

هناك مصدر مثالي آخر سنحتاجه ، ألا وهو مصدر التيار غير المعتمد ، حيث يكون التيار المار خلال العنصر غير معتمد على الفولتية عبره . ويبين الشكل 1.12 اشارة عنصر التيار غير المعتمد . اذا بقي التيار i_s ثابتاً فإن المصدر يدعى بمصدر التيار المستمر غير المعتمد .



الشكل 1.15 اشارات الدائرة لمصدر تيار غير معتمد

وان مصدر التيار غير المعتمد يشابه مصدر الفولتية غير المعتمد في انه عبارة عن تقريب واقعي لعنصر فيزيائي فمن الناحية النظرية يمكن لهذا العنصر أن ينتج قدرة لانتهائية من طرفيه نظراً لأنه ينتج التيار المحدود نفسه لأي فولتية عبر طرفيه مهما كانت كبيرة . فمثلا يمكن تشبيه مصدر التيار المستمر غير المعتمد لحد بعيد بحزمة الكترونية للسينكروترون synchrotron والذي يعمل بتيار حزمة ثابت بحدود $1\mu A$. ويستمر هذا الجهاز باعطاء التيار نفسه الى أية أداة عبر « طرفيه » (اللذان هما الحزمة والأرض) .

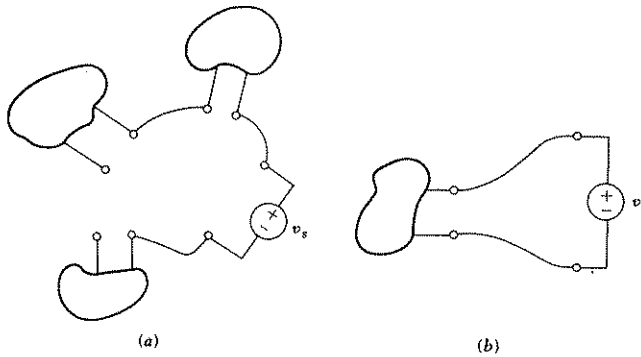


الشكل 1.16 الشكل السداسي المثل لاشارة الدائرة لـ (أ) مصدر فولتية معتمد (ب) مصدر تيار معتمد

يدعى النوعان من المصادر المثالية اللذان ناقشناهما لحد الان بالمصادر غير المعتمدة ، نظراً لان قيمة المصدر لا تتأثر بالفعاليات التي تتم في ماتبقى من الدائرة . هذا بالمقارنة مع مصدر مثالي اخر هو المصدر المعتمد *dependent source* او المصدر المحكوم *controlled source* والذي يمكن ايجاد كمية المصدر بالفولتية والتيار في موقع آخر من النظام الكهربائي تحت الدراسة . وللتمييز بين المصادر المعتمدة وغير المعتمدة تقدم الأشارات الإضافية المبينة في الشكل 1.16 . وستظهر مثل هذه المصادر في نماذج الدوائر الكهربائية المكافئة لعدد كبير من الأدوات الألكترونية كالترانزستورات *transistors* والصمامات المفرغة *vacuum tubes* والدوائر المتكاملة *integrated circuits* . وسنمر على كل ذلك في الفصول القادمة .

ان مصادر الفولتية والتيار المعتمدة وغير المعتمدة هي عناصر فعالة بإمكانها تجهيز قدرة الى أدوات خارجية . سنتصور الآن أن العنصر « غير الفعال » *passive* هو العنصر الذي بإمكانه استلام قدرة . هذا على الرغم من أننا سنرى فيما بعد ان عدداً من العناصر غير الفعالة بإمكانها تخزين طاقة ذات كمية محدودة ثم اعادتها الى عنصر خارجي . ونظراً لأننا مانزال نرغب بدعوة مثل هذا العنصر بالعنصر غير الفعال فانه من الضروري تحسين تعريفنا فيما بعد .

ان الرابط المتداخل بين عنصري دائره بسيطين يدعى بالشبكة الكهربائية . اذا احتوت الشبكة على مسار مغلق واحد على الاقل فسندعو الشبكة هذه بالدائرة الكهربائية . فأن كل دائرة هي شبكة لكن ليس كل شبكة هي دائرة . يبين الشكل 1.17 أ شبكة ليست بدائرة كما يبين الشكل 1.17 ب شبكة تمثل دائرة في الوقت نفسه



الشكل 1.17 (أ) شبكة كهربائية ولكنها ليست دائرة (ب) شبكة ودائرة في الوقت نفسه

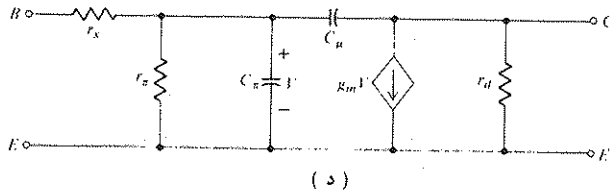
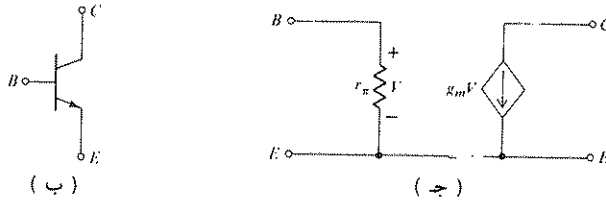
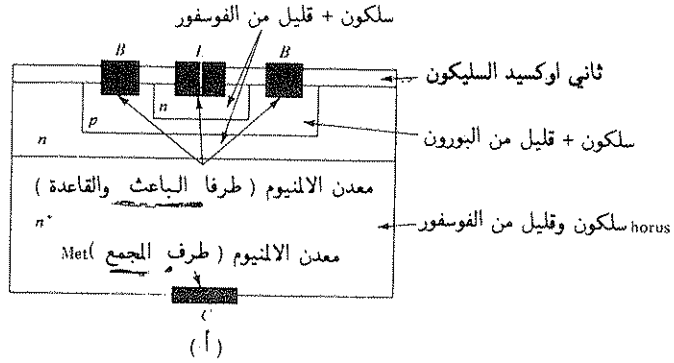
ان الشبكة التي تحوي عنصراً فعالاً واحداً على الاقل كمصدر فولتية غير المعتمد هي شبكة فعالة *active network* . أما الشبكة التي لاتحوي عناصر فعالة فهي شبكة غير فعالة *passive network* .

لقد عرفنا الآن ماذا نعني بعنصر الدائرة . كما أعطينا تعاريف لعدة عناصر معينة من عناصر الدائرة هي : مصادر التيارات والفولتيات المعتمدة وغير المعتمدة . فيما تبقى من هذا الكتاب سوف لانعرف سوى أربعة عناصر دائرة أخرى كلها غير فعالة وهي : المقاوم والمحث والمتسعة وزوج من المحثات المتقارنة تبادلياً . وهذه كلها عناصر مثالية . وان هذه العناصر مهمة لأنه يمكن جمعها مع بعض لتكوين شبكات ودوائر تمثل أدوات حقيقية بالدقة التي نشاء . لذا فالترانزستور الذي اقترحنا بنيته الفيزيائية في الشكل 1.18 أ ، والذي كان رمزه الكهربائي ممثلاً في الشكل 1.18 ب ، يمكن أن يمثل بنموذج مكون من مقاوم منفرد ومصدر واحد معتمد للتيار مبين في الشكل 8.18 ج . هذا اذا اردنا معطيات أداء تقريبيه في ترددات ليست هي بالعالية وليست هي بالواطئة .

ويبين الشكل 1.18 د نموذجاً اكثر دقة لتطبيقات الترددات العالية حيث يحوي على ثلاث مقاومات ومتسعتين ومصدر تيار معتمد .

ان ترانزستورات كالمبينة يمكن أن تكون جزءاً صغيراً فقط في دائرة متكاملة ربما لاتتجاوز مساحتها 2 mm^2 ولا يزيد سمكها على 0.2 mm ، ومع هذا قد تحوي عدة الاف من الترانزستورات اضافة لآلاف المقاومات والمتسعات . لذا فلدينا أدوات فيزيائية مساحتها لاتتجاوز مساحة حرف واحد من حروف هذه الصفحة وتحتاج الى نماذج ربما تبلغ عشرات الالاف من عناصر الدائرة المثالية البسيطة .

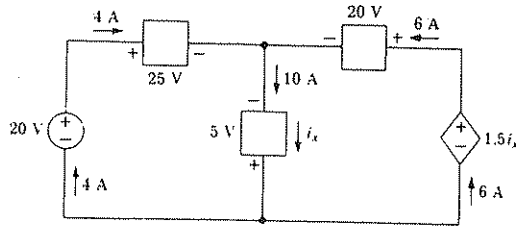
وان النماذج المناسبة للأدوات الفيزيائية المختلفة والتي لها أهمية عملية واسعة تدرس في مواضيع الألكترونيات وتحويل الطاقة والهوائيات والمواضيع الأخرى التي تمر في المناهج الهندسية فيما بعد .



الشكل 1.18 (أ) إحدى الوضعيات الفيزيائية لترانزستور سليكوني ذو قطبين $n-p-n$ (بلا مقياس رسم معين)
 (ب) رمز الدائرة لترانزستور ذي قطبين $n-p-n$ (ج) نموذج لد ر بسيطة مفيدة في مدى التردد المتوسط (د)
 نموذج للتردد العالي أكثر دقة .

تمرين

6 - 1 أوجد القدرة الممتصة من قبل كل عنصر في الدائرة المبينة في الشكل 19 - 1
 الجواب $-90; -80; -50; 100; 120$ W



الشكل 19 - 1 انظر التمرين 6 - 1

مسائل :

□ 1 مراسل كتلته 90 kg يمكن ان يصعد بناية عالية ارتفاعها (200-m) مرة واحدة بسرعة عالية تبلغ (600 m/s) . (أ) كم مقدار طاقته الحركية بالجول حينما يتحرك بأقصى سرعته ؟ .

(ب) كم من الوقت يمكن لهذه الطاقة ان تزود حاسبة ألكترونية صغيرة تستهلك 500 mW ؟

(ج) كم السرعة بالقدم / ثانية . التي يجب ان يغادر بها الارض لكي يفلح في الوصول الى قمة البناية ؟

(د) ما اسم المراسل ؟ .

* 2 لكي نلمس التكافؤ بين القدرة الميكانيكية والقدرة الكهربائية ، لنفرض أن عربة وزنها 150-kg تصعد منحدر بسرعة ثابتة . ارتفاع المنحدر 90-m وميله 10° عن المستوى الأفقي . تصل نهاية المنحدر بمدة 20 s . اذا كانت القدرة تتحول الى طاقة كهربائية مآقصى عدد من المصابيح ذات الـ 100-W التي يمكن تجهيزها باضاءتها القصوى خلال فترة الـ 20-s ؟

* 3 تجهز مرسلة اذاعية مستخدمة للاغراض العسكرية بالقدرة بواسطة عجلة يدوية تدار من قبل عامل متصل بها مولد صغير . لنفرض أن مثل هذه المرسلة ذات كفاءة مقدارها 60 % وانها قد أرسلت قدرة خارجة مقدارها 25 W وكان طول ذراع العجلة 12 cm . اذا دارت العجلة بسرعة 30 دورة بالدقيقة حينما كانت المرسلة تحت التشغيل . مامقدار القوة الثابتة بالكيلوغرام وبالنيوتن التي يجب تسليطها على الذراع ؟ مامقدار الطاقة بالجول التي يجب ان يجهزها العامل خلال مدة ثلاثة دقائق من عمله ؟

* □ 4 لنفرض أن مستقبلاً تلفزيونياً ذا 400-W يعمل مدة ساعة واحدة دون أن يراقبه أحد . أفرض أن الوقود يزن 0.8 طن للمتر المكعب ويمكن الحصول منه على 40700 وحدة حرارية بريطانية BTU لكل متر مكعب . وهي قيم معقولة . اذا علمت ان الوحدة الحرارية البريطانية تحوى 105.6Kg-m كم مقدار الوقود المفقود نتيجة هذا الاهمال ؟

المسائل المؤشرة بالاشارة □ يمكن الرجوع الى أجوبتها في نهاية الكتاب .

المسائل المؤشرة بالاشارة * تم تحويلها من قبل المترجمين الى نظام الوحدات العالمية .

5 التيار i في الشكل 10 - 1 كان صفراً قبل اللحظة $t=0$ وكانت قيمته 0.4 A للفترة من $t=0$ الى 2 ms و صفراً من $t=0$ الى $t=4 \text{ ms}$ و 0.4 A للفترة من $t=4$ الى 6 ms ويستمر على ذلك بشكل دوري . (أ) ما قيمة التيار في اللحظة 85 ms ؟ (ب) ما مقدار الشحنة التي تدخل الطرف العلوي بين $t=85 \text{ ms}$ و $t=100 \text{ ms}$ ؟ (ج) ما مقدار الشحنة التي تدخل الطرف العلوي في اللحظة $t=100 \text{ ms}$ ؟

6 الشحنة الكلية التي تعبر حيز الباعث emitter الى حيز القاعدة base في ترانزستور transistor نوع «npn» تعطى كدالة للزمن بشكل

$$[(t + 4)/500] + [10^{-12}/(t^2 + 10^{-6})] \text{ C.}$$

(أ) ما مقدار التيار المار من الباعث الى القاعدة في اللحظة $t=1 \text{ ms}$ ؟ (ب) ما مقدار الشحنة التي تعبر التوصيلة في الفترة $1 \leq t \leq 3 \text{ ms}$ ؟

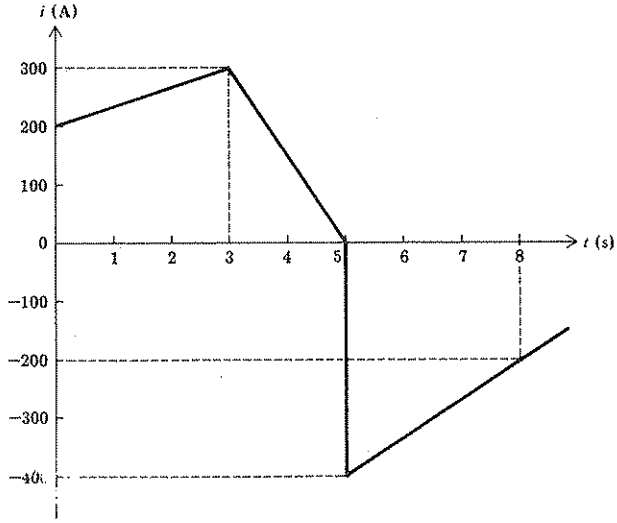
□ 7 الشحنة الداخلة الى الطرف العلوي من العنصر المبين في الشكل 1 - 10 يعطى بالمعادلة $5 \sin 1000\pi t \text{ } \mu\text{C}$. (أ) ما مقدار الشحنة التي تدخل ذلك الطرف بين $t = -0.5 \text{ ms}$ و $t = 0.5 \text{ ms}$ ؟ (ب) ما مقدار الشحنة التي تغادر الطرف الأسفل في الفترة الزمنية نفسها ؟

(ج) أوجد قيمة i عندما $t = 0.2 \text{ ms}$

8 التيار الذي يدخل الطرف المؤشر X من مجهر نغمات مستخدم كجزء من سماعة جهاز الصوت الجسم stereo يمكن تمثيله بالشكل $i = 0.8 \cos 200\pi t \text{ A}$. (أ) ما مقدار القيم القصوى والدنيا للتيار i ؟ (ب) كم مقدار الشحنة التي تدخل الطرف X بين $t = 2.5 \text{ ms}$ و $t = 7.5 \text{ ms}$

(ج) بين $t = 2.5 \text{ ms}$ و $t = 12.5 \text{ ms}$ ؟

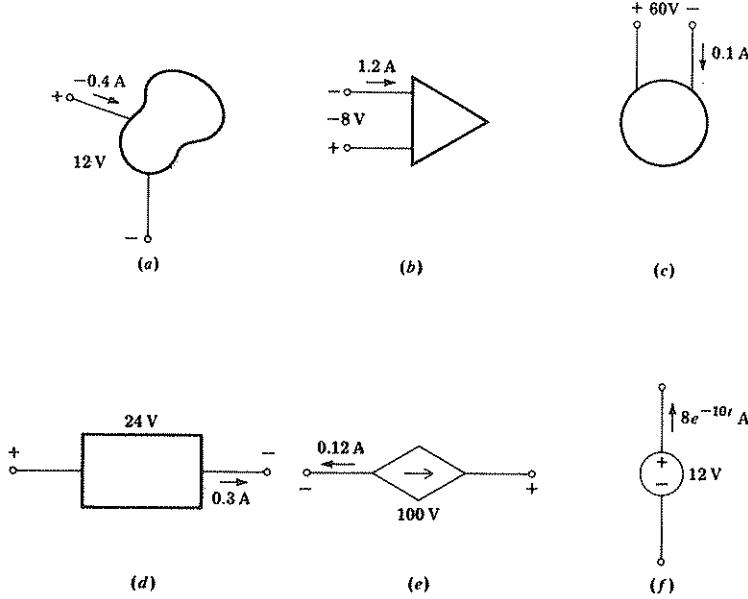
□ 9 للتيار ذي شكل الموجة المبينة في الشكل 20 - 1 ، اوجد الشحنة الكلية المحولة بين $t=0$ و $t=4$ ثواني (أ) و $t=7$ ثواني (ب)



الشكل 20 - 1 انظر المسألة 9 .

10 أوجد القدرة الممتصة بين كل عنصر من عناصر الدائرة المبينة في الشكل 21-1

11 بالرجوع الى العنصر المبين في الشكل 10 - 1 ، لنفرض ان $v = 0$ لـ $t < 0$ ، و $v = e^{-10,000t}$ لـ $t > 0$. افرض ان العنصر هو عبارة عن أداة بإمكانها تخزين الطاقة وان الفولتية عبر العنصر تتناسب مع الشحنة الكلية التي تدخل الطرف المؤشر بالاشارة الموجبة او $v = 10^4 q$. (أ) مامقدار التيار الداخل الى الطرف العلوي في اللحظة $t = 0.1$ ms ؟ (ب) مامقدار القدرة الواصلة الى العنصر في اللحظة $t = 0.1$ ms . (ج) اذا كان هناك $0.1 \mu J$ مخزونة في العنصر في اللحظة $t = 0$ ، مامقدار الطاقة المخزونة عندما $t = 0.1$ ms ؟

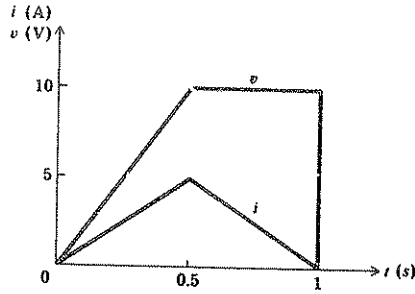


الشكل 22 - 1 انظر المسألة 13

12□ تيار شحن بطارية سيارة ذات 12-V فولت يدخل الى قطبها الموجب . ويعطى
 بالدالة التالية مع الزمن $t = 4e^{-t/10,000}$ A, $0 \leq t \leq 15,000$ s. و
 $t = 0$ حينما $t < 0$ وكذلك حينما $t > 15,000$ s . (أ) مامقدار الشحنة
 الكلية المجهزة الى البطارية في فترة شحن مقدارها $15,000$ -s ؟
 (ب) مامقدار القدرة الممتصة من قبل البطارية ؟ (ج) مامقدار الطاقة
 الكلية المجهزة ؟ . (د) مامقدار القدرة المتوسطة المجهزة خلال الفترة
 $15,000$ -s ؟

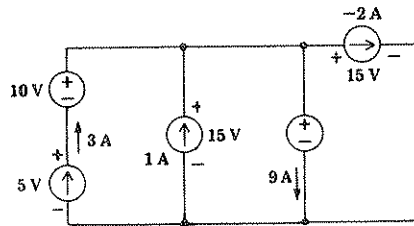
13 شكلا موجتي الفولتية والتيار المعرفتين بالشكل 10 - 1 مبيانان في الشكل 22 -

1
 (أ) ارسم منحنى تقريبي للقدرة المجهزة لعنصر الدائرة للفترة $0 \leq t \leq 1$ s
 (ب) مامقدار الطاقة الكلية المجهزة للعنصر خلال الفترة الزمنية هذه ؟
 14□ الطرف الموجب للفولتية v هو عند الطرف A لعنصر دائرة معين . والقدرة
 الممتصة من قبل عنصر الدائرة هي $4(t^2 - 1)$ W $t > 0$. اذا كانت
 $v = (2t - 2)$ V لـ $t > 0$. كم مقدار الشحنة التي تدخل الطرف A بين
 $t = 0$ و $t = 2$ s ؟



الشكل 23 - 1 انظر المسألة 15

15- أوجد اي من المصادر الخمسة في الشكل 93 - 1 قد شحن (امتص قدرة موجبة)
 وبرهن ان المجموع الجبري للقدرات الخمس الممتصة يساوي صفراً .



الشكل 21 - 1 انظر المسألة 10

- الفصل الثاني -

قوانين تجريبية ودوائر بسيطة

EXPERIMENTAL LAWS AND SIMPLE CIRCUITS

1 - 2 مقدمة : INTRODUCTION

تعرفنا في الفصل السابق على كل من مصادر التيار والفولتية المعتمدة وغير المعتمدة وقد كنا حذرين في أن تكون هذه المصادر عناصر مثالية والتي هي تقريب لما يحصل في الدوائر الحقيقية والعنصر المثالي الآخر الذي سيعرف في هذا الفصل فهو المقاوم الخطي .

اما الآن فعلياً تقبل قانونين أساسيين واعتبارهما بديهتين ثابتتين . فبالدوائر الكهربائية البسيطة الحاوية على خمسة عناصر وبعض التعاريف المعروفة يمكننا الابتداء بدراسة الدوائر الكهربائية البسيطة . وهذه الدراسة ستنحصر بالتحليل *analysis* وهي العملية التي بها توجد الفولتية والتيار المصاحبتين لكل عنصر في الدائرة المعطاة . ولحسن الحظ فان التحليل الكامل لا يكون ضرورياً في العادة لأنه على الأغلب يطلب حساب فولتية أو تيار أو قدرة بعينها .

وبعد الحصول على المهارة في التحليل في هذا الموضوع ومواضيع أولية أخرى فان حل مسائل التركيب *synthesis* يغدو سهلاً . حيث يعطى تعبيراً رياضياً لحالة دائرة حسب الطلب ثم يتم ايجاد العناصر اللازمة وطريقة ربطها لكي تحقق الاستجابة المطلوبة . لذا يكون لمسائل التركيب غالباً أكثر من حل واحد .

والنوع الأخير لمسائل الدوائر والتي يتعامل معها الكثير من المهندسين لغرض كسب معيشتهم هو التصميم *design* .

ويكون الانتاج النهائي المطلوب هو معدات مصنعة يمكن بيعها وتكون اقتصادية ومعمل عليها . وفي بعض الأحيان يكون الحجم والوزن والخصائص الحرارية والمظهر الخارجي كلها عوامل يجب أخذها بنظر الاعتبار عند التصميم . ومن الواضح أن الخبرة عامل أساسي عند محترفي التصميم ، لذا فان التحليل والتركيب يجب ان يأتيأ أولاً .

هذا الفصل والفصل التالي مخصصان لتحليل الدوائر البسيطة الحاوية على مصادر تيار ومصادر فولتية مع مقاومات . ويمكن ان تكون المصادر معتمدة او غير معتمدة . وعند تحليل هذه الدوائر سوف نستعمل عدة تحويلات للشبكة ونظريات الشبكة اضافة الى الطرق الرياضية والتي سنستطيع تطبيقها بعدئذ مع تحويل بسيط للدوائر الحاوية على العناصر غير الفعالة المربوطة الى مصادر تتغير مع الزمن . وستعلم الطرق المفيدة في تحليل الدوائر بتطبيقها على الحالات البسيطة الممكنة ، الا وهي دوائر المقاومات .

2.2 قانون أوم : OHM'S LAW

إن ابسط عنصر غير فعال هو المقاوم . ويمكن عرضه بالرجوع الى دراسة الفيزيائي الألماني جورج سيمون أوم السيء الصيت والذي نشر كتيباً عام 1827 بعنوان التحقيق الرياضي للدائرة الكلفانية "Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet."* ويحوي النتائج لاحدى المحاولات الاولى لقياس التيار والفولتية وكذلك لشرحها وربطها بعلاقة رياضية . واحدى النتائج كان منطوق العلاقة الأساس المسماة حالياً بقانون اوم . على الرغم من أنه من المعروف اليوم أن هذه النتيجة كانت مكتشفة قبل ذلك بـ 46 سنة في انكلترا من قبل العالم الفذ هنري كفنديش .

وعلى أي حال لم يكن أحد و (نأمل) ان اوم منهم كان يعرف بالعمل الذي قام به كفنديش لأن تلك النتائج لم تكتشف او تنشر الا بعد مدة طويلة من وفاة الاثنين .

نال كتيب أوم كثيراً من الانتقاد والتأنيب لعدد من السنوات بعد النشر ولكن بعدها قبلت نتائجه وزال الدم الذي كان مقترناً باسمه .

* . حققت الدوائر الكلفانية رياضياً .

وينص قانون أوم على ان الفولتية عبر عدة أنواع من المواد الموصلة تتناسب مباشرة مع التيار المار في المادة .

$$v = Ri$$

حيث ان ثابت التناسب R يدعى المقاومة *resistance* ووحدة المقاومة هي الأوم *ohm* والذي هو 1 V/A ويختصر اعتيادياً بالحرف أوميكا الكبير Ω .

عند رسم هذه المعادلة على المحاور v و i ينتج خط مستقيم يمر خلال نقطة الصفر . والمعادلة خطية وسوف نعتبرها تعريفاً للمقاومة الخطية . لذا اذا كانت نسبة التيار والفولتية لعنصر دائرة بسيطة معروفة على انها نسبة ثابتة ، فان العنصر هو مقاوم خطي وله مقاومة تساوي نسبة الفولتية الى التيار .

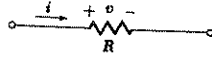
ويجب التأكيد مرة اخرى على أن المقاومة الخطية هي عنصر لدائرة مثالية . وانها التمثيل الرياضي لأداة فيزيائية . يمكن شراء المقاومات او صنعها بسهولة . ولكن سيلاحظ فيما بعد بأن نسبة الفولتية الى التيار لهذه الأداة ثابتة نوعاً ما في حدود معينة للتيار او الفولتية او القدرة . وكذلك تعتمد على درجة الحرارة وبعض الظروف البيئية الاخرى . وسوف نرجع للمقاوم الخطي اعتيادياً كمقاوم وسنرجع الى التسمية الطويلة حين يطلب التأكيد على الطبيعة الخطية للعنصر . وان اي مقاوم غير خطي سوف يوصف كذلك . وهنا تجدر الاشارة الى ان المقاومات غير الخطية ليست عناصر غير مزعوب فيها . وعلى الرغم من ان وجودها بالواقع يعقد التحليل ، الا ان مميزات الأداة ربما تعتمد على اللاخطية بل يمكن تحسين المميزات كثيراً باللاخطية .

ان ثنائي زينر والثنائي النفقي والمصهرات هي عناصر من هذا النوع . يبين الشكل (1 - 2) رمز الدائرة العام لتمثيل المقاوم . وعليه فبالنسبة للفولتية والتيار والقدرة وبالاعتماد على الأسس الواردة في الفصل السابق فان حاصل ضرب الفولتية والتيار يعطي القدرة الممتصة من قبل المقاوم ، وان هذه القدرة الممتصة تظهر بشكل فيزيائي كحرارة وانها دائماً موجبة .

يعتبر المقاوم عنصراً غير فعال لأنه لايعطي قدرة أو يخزن طاقة . والتعابير البديلة للقدرة الممتصة هي :

$$p = vi = i^2R = \frac{v^2}{R}$$

* حققت الدوائر الكلفانية رياضياً



الشكل 1 - 2 اشارة الدائرة لمقاوم

وفي تجربة غير موفقة لأحد المؤلفين (والذي يفضل عدم الافصاح عن اسمه) *
 ربط عنفويًا المقاوم الكربوني $2-W$ $100-\Omega$ عبر المصدر $110-V$. فنشأ لهب
 ودخان وتحطمت المقاومة نتيجة الربط هذا بشكل غير متوقع تماماً والذي يبين
 بوضوح ان المقاوم العملي فيه تحديات معينة تمكنه من التصرف كنموذج خطي
 مثالي. ففي هذه الحالة امتص المقاوم غير المحظوظ $121 W$ بينما هو مصمم لتحمل
 $2 W$ فقط لذا من المفهوم ان يكون رد الفعل عنيفاً .
 ونسبة التيار للفولتية ثابتة أيضاً .

$$\frac{i}{v} = G$$

حيث G تدعى بالتوصيلية . ووحدات التوصيلية هي mho (موه) $1 A/V$
 ويمكن اختصارها بالحرف الاغريقي المقلوب أوميكا U . يستعمل رمز الدائرة
 نفسه لتمثيل كل من المقاومة والتوصيلية . ان امتصاص القدرة يكون موجباً ويمكن
 التعبير عنه بدلالة التوصيلية ب :

$$p = vi = v^2 G = \frac{i^2}{G}$$

لذا فان المقاوم $2-\Omega$ له توصيلية مقدارها $\frac{1}{2} U$ وان مرّ تيار مقداره $5 A$
 خلاله ، فان الفولتية $10 V$ تظهر عبر طرفيه والقدرة الممتصة فيه هي : $50 W$

وان جميع التعابير المارة أعلاه مكتوبة بدلالة القيم الآنية للتيار والفولتية
 والقدرة حيث $v = Ri$ و $p = vi$ والواضح ان التيار خلال المقاوم والفولتية عبره
 يجب ان يكونا متغيرين مع الزمن بالاسلوب نفسه . عليه اذا كانت $R = 10 \Omega$
 و $v = 2 \sin 100t V$ فان $i = 0.2 \sin 100t A$ والقدرة على أي حال
 تساوي $0.4 \sin^2 100t W$ ، ويمكن توضيح طبيعة الفرق لتغيرهما مع الزمن برسم
 بسيط . وعلى الرغم من ان التيار والفولتية يكون كل منهما سالب في فترات معينة
 من الزمن ، الا ان القدرة الممتصة سوف لن تكون سالبة .

* سيزود القاريء بكل سرور بالاسم الغامض بعد الطلب من المؤلف الاول W.H.H.

ويمكن استخدام المقاومة كأساس لتعريف اصطلاحين مستخدمين بكثرة هما ، دائرة قصر *short circuit* ودائرة مفتوحة *open circuit* . تعرف دائرة القصر كمقاومة صفر من الأومات ، ونظراً لأن $v = Ri$ ، فالفولتية عبر دائرة القصر يجب ان تكون صفراً بالرغم من ان التيار يمكن أن يأخذ اي قيمة كان . وبطريقة مشابهة تعرف الدائرة المفتوحة بأن مقاومتها تصل لانهاية . اضافة الى ان التيار يجب ان يساوي صفراً مهما كانت الفولتية عبر الدائرة المفتوحة .

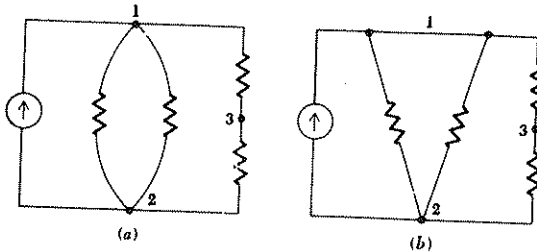
تمرين :-

- 1- 2 بالرجوع الى الشكل 1- 2 ، أوجد (أ) i ، اذا كانت $R = 12 \Omega$ و $v = -6V$ (ب) اذا كانت $R = 10 \Omega$ ويستهلك المقاوم $100 W$. (ج) القدرة المستهلكة اذا كانت $R = 6 \Omega$ و $v = -12 V$. (د) R ، اذا $i = -5 A$ ويستهلك $16 W$ (هـ) v ، اذا كانت $G = 2 mU$ $i = -5 mA$.
الجواب $-2.5 V$; $\pm 31.6 V$; $-0.5 A$; $24 W$; 0.64Ω

2.3 قانونا كرشوف :- KIRCHHOFF'S LAWS

بناء على ماتقدم نستطيع ان ندرس علاقات التيار والفولتية للشبكات البسيطة المتكونة نتيجة ربط عنصرين أو أكثر في دائرة بسيطة .

والعناصر تربط بموصلات كهربائية او نهايات مقاومتها صفراً او انها توصل توصيلاً مثالياً . وبما أن الشبكة سوف تظهر بعدد من العناصر البسيطة متصلة بنهايات ربط . لذا تدعى بالشبكة ذات الثوابت *lumped-constant network* . ومسائل التحليل الأعقد تنشأ عندما تواجه بشبكة ذات ثوابت موزعة *distributed-constant network* . والتي تحوي بالضرورة على عدد



الشكل 2.2 (أ) دائرة تحتوي على ثلاث عقد . (ب) العقدة 1 رسمت مرة اخرى لتشبه عقدتين ولكنها مازال عقدة واحدة

لانهائي من العناصر الصغيرة جداً . وسيدرس النوع الأخير للشبكات في مواضيع أخرى . وتسمى النقطة التي يشترك فيها عنصران أو أكثر الربط بالعقدة *node* والشكل 2.2 أ يرينا دائرة تحوي ثلاث عقد . وفي بعض الأحيان ترسم الشبكات بحيث يتوهم فيها الطالب غير المنتبه للاعتقاد بأن هناك عقداً ظاهرة أكثر من الحقيقة . ويحدث ذلك حينما تظهر عقدة كالعقدة 1 المبينة في الشكل 2.2 أ فإذا ظهرت نقطتا الاتصال وكأنهما منفصلتان ومرتبطتان فيما بينهما بموصل « مقاومته صفراً » كما في الشكل 2.2 ب فإن كل ما حدث هو استبعاد النقطة المشتركة وجعلها خطأ مشتركاً . وقد رسمت العقدة 1 مرة أخرى بهذه الصورة في الشكل 2 - 2 ب .

الا ان كل ماتم هو مد النقطة المشتركة الى خط مشترك . لذا يجب ان نعتبر كل الاطراف الموصلة المرتبطة بالعقدة هي جزء من العقدة . لاحظ ايضاً ان كل عنصر يحوي عقدة في كل طرف من طرفيه .

افرض اننا بدأنا من عقدة ما في الشبكة ثم انتقلنا خلال عنصر بسيط الى العقدة على الطرف الآخر ، ثم واصلنا الحركة من العقدة خلال عنصر مختلف الى عقدة اخرى ثم واصلنا الحركة الى أن نكون قد مررنا خلال كل العناصر التي نرغب بالمرور فيها . فاذا لم نمر بعنصر أكثر من مرة واحدة ، فإن مجموعة العقد والعناصر التي مررنا بها تدعى مساراً *path* . وإذا كانت العقدة التي بدأنا بها هي العقدة التي انتهينا بها فإن المسار يدعى مساراً مغلقاً أو دائرة .

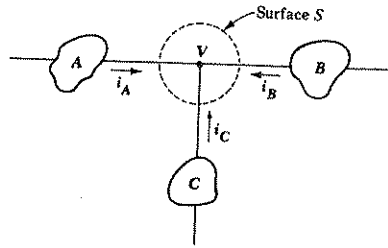
فمثلاً في الشكل 2 - 2 أ إذا سرنا من العقدة 2 خلال مصدر التيار الى العقدة 1 ، ثم خلال المقاوم الأيمن الأعلى الى العقدة 3 ، فنكون قد كوّنا مساراً . وحيث أننا لم نصل بعد العقدة 2 مرة اخرى ، لذا فليس لدينا مساراً مغلقاً أو دائرة . اما اذا سرنا من العقدة 2 خلال مصدر التيار الى العقدة 1 ثم خلال المقاوم الأيسر الى العقدة 2 ثم الى الاعلى خلال المقاوم الاوسط الى العقدة 1 مرة أخرى فلا يكون لدينا مساراً نظراً لأن عقدة (بالحقيقة هما عقدتان) تم المرور بها أكثر من مرة واحدة كما أنه ليس لدينا دائرة نظراً لأن الدائرة يجب أن تكون مساراً .

وهناك اصطلاح آخر من المناسب استعماله وهو الفرع وسوف نفسر الفرع على أنه الممر المنفرد الحاوي على عنصر بسيط واحد والذي يربط عقدة بعقدة اخرى . والدائرتان المبيتان في الشكل 2.2 أ و ب تحويان على خمسة فروع .

وبهذا تتمكن من دراسة القانون الأول* من قانوني العالم غوستاف روبرت كرشوف بنظر الاعتبار. والذي كان استاذاً في إحدى الجامعات الألمانية والمولود في الوقت نفسه الذي كان فيه العالم أوم يقوم بتجاربه تقريباً. هذا القانون البديهي يدعى بقانون التيار لكرشوف. وينص على أن المجموع الجبري لجميع التيارات الداخلة إلى عقدة يساوي صفراً.

وعلى الرغم من أننا لانستطيع تقديم برهان دقيق جداً للقانون في هذا الوقت**، يجب علينا على الأقل الاتفاق على أنه مقبول في الظاهر. ولو أخذنا العقدة المشار إليها في الشكل 2.3 والتي عندها تلتقي ثلاثة عناصر سوية ووضع حول هذه العقدة سطح مغلق يحوي الحجم V ولنفرض أنه كان فيها شحنة كلية مقدارها q فإن التيار الكلي الذي يدخل V إذاً هو المجموع الجبري لجميع التيارات الداخلة إلى V . وهذا يماثل قولنا بأن الشحنة الداخلة إلى V بالمتوسط $i_A + i_B + i_C$ كولوم / ثا. لذلك تكون الشحنة q ضمن V يجب أن تزداد بمعدل $i_A + i_B + i_C$ كولوم / ثا. كما أن

$$i_A + i_B + i_C = \frac{dq}{dt}$$



الشكل 2.3 سطح مغلق يحيط بحجم V ويضم داخله عقدة. التيار الكلي الذي يدخل السطح المغلق يساوي صفراً

$$i_A + i_B + i_C = 0.$$

-
- * يمكننا تصور القانون الأول لكرشوف مطبقاً على سريان المياه في الانابيب أو الترع حيث إن الماء الداخل إلى نقطة التلاقي يساوي مجموع المياه الخارجة كما سيتم شرحه في الصفحة الآتية.
 - ** يعتمد البرهان على أن الشحنة تحفظ ولا يمكن استحداثها ولا فناؤها. كما علينا قبول قانون التيار لكرشوف كشكل من أشكال قانون حفظ الطاقة.

والآن لنفرض ان V تقترب من الصفر الى التلاشي وأنه لاوجود لأي أداة كهربائية عدا العقدة ضمن V . وحيث أن العقدة على أي حال لايمكنها تخزين أو اتلاف أو توليد الشحنة وعليه فان dq/dt يجب ان تكون صفراً وان :

$$i_A + i_B + i_C = 0$$

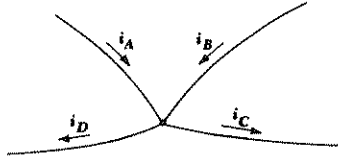
ان هذا القانون يمكن أن يمتد الى أي عدد من الفروع المرتبطة مجتمعة في عقدة . ومن الواضح اننا يمكن ان نعبر عن قانون التيار لكروشوف بطرق اخرى .

وعلى سبيل المثال ، المجموع الجبري لجميع التيارات التي تغادر العقدة يساوي صفراً . أو أن المجموع الجبري لجميع التيارات التي تدخل العقدة يجب ان يساوي المجموع الجبري لجميع التيارات التي تغادر العقدة . وان هذه الصيغ الثلاث تؤدي الى المعادلات المتطابقة الثلاث المكتوبة أدناه للعقدة الموضحة في الشكل 2.4

$$i_A + i_B - i_C - i_D = 0$$

$$i_C + i_D - i_A - i_B = 0$$

$$i_A + i_B = i_C + i_D$$



الشكل 2.9 قانون التيار لكروشوف يمكننا من كتابة

$$i_C + i_D - i_A - i_B = 0,$$

$$i_A + i_B - i_C - i_D = 0,$$

أو

أو

والتعبير المختصر لقانون التيار لكروشوف هو

$$\sum_{n=1}^N i_n = 0 \quad (1)$$

وهو عبارة عن اختصار لـ :

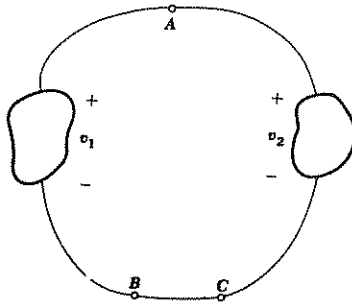
$$i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = 0 \quad (2)$$

عند استعمال (1) أو (2) ، من المفهوم أن اتجاه أسهم التيارات التي عددها N اما ان يكون متجهاً الى العقدة في المسألة أو مبتعداً عنها .

ومن الامور المساعدة في بعض الأحيان لفهم قانون التيار لكرشوف بالمقارنة بالموائع . فالماء كالشحنة لا يمكن خزنه في نقطة . لذا لو مثلنا عقدة مجموعة من الانابيب بالعقدة الكهربائية ، من الواضح أن عدد الغالونات من الماء الداخلة الى العقدة كل ثانية يجب ان يساوي عدد الغالونات المغادرة لها كل ثانية .

والآن نعود الى قانون الفولتية لكرشوف . ينص القانون على ان المجموع الجبري للفولتيات حول ممر مغلق في دائرة يساوي صفراً . مرة أخرى علينا تقبل القانون كبدئية ، على الرغم من أنه مشتق من مبادئ نظرية الكهرومغناطيسية .

وفي ضوء تعريفنا للفولتية عبر عنصر ما على أنها الطاقة المصروفة لتحريك وحدة الشحنات الموجبة خلال العنصر ، يمكن صياغة قانون الفولتية لكرشوف بدلالة ذلك ، بأنه لاتصرف أي طاقة لتحريك وحدة الشحنات الموجبة حول أي ممر مغلق . ويتبين بأن هذا النص صحيح لدائرة أو على الاقل لنموذجها الرياضي . وغير صحيح لمسار عام في حيز حاوٍ على مجالات مغناطيسية متغيرة مع الزمن . ويمكن توضيح هذا بالتشبيه بالجاذبية الارضية . فلغرض رفع كتلة من نقطة واقعة في مستو الى نقطة أعلى ثم اعادتها الى مكانها الاصلي لا يتطلب صرف أي طاقة بغض النظر عن الممر المتخذ لهذا الغرض . ويعود هذا التفسير الى تطبيق قانون الفولتية لكرشوف على دائرة . ولنفرض أن هناك فتحة نافورية ضيقة لرياح متجهة للأعلى في نقطة ما على سطح الأرض . فاذا رفعنا كتلة خارج الفتحة النافورية ثم خفضناها ضمن الفتحة فاننا ننجز شغلاً أكثر مما لو حدث العكس ، أي أن نرفع الكتلة بتأثير النافورة الهوائية ونخفضها خارجاً . يعتمد الشغل المنجز على الممر . ولوجود مجال مغناطيسي متغير مع الزمن له التأثير نفسه . ان الطاقة المصروفة لتحريك الشحنة خلال المجال المغناطيسي تعتمد على المسار الذي سلكته الشحنة . أما المجالات المغناطيسية المتغيرة مع الزمن فتصاحب المحثات كما سنرى في الفصل 4 .



الشكل 2.5 دائرة بسيطة تستخدم لتأكيد حقيقة أن $v_1 = v_2$

ولكن قانون الفولتية لكرشوف يبقى نافذ التطبيق على الدوائر الحاوية على المحثات ويعود ذلك الى أن قيمة المحثة تتحدد بالمر المتع .

وخلاصة القول ، اذا كان قانون الفولتية لكرشوف يستخدم في الدوائر ، لأن الادوات الفيزيائية تحور الى نماذج رياضية بطريقة بحيث ان القانون يصبح ممكن التطبيق ، يجب ان لانستغرب اذا وجدنا أن الشغل المصروف لنقل وحدة الشحنات الموجبة حول ممر مغلق أكثر شمولاً في الفراغ لايساوي على الدوام صفرأ .

وفي دائرة ما هناك قيمة واحدة محددة للطاقة تتحد بنهايتي العنصر . فلنر كيف يسري هذا النص على قانون الفولتية لكرشوف ؟ ان كل واحد يقوم بتجربة نقل للكولوم يتوصل الى نفس النتيجة . ونفرض أن يكون لنا الخيار لممرين تحرك خلاهما الشحنة من نقطة الى أخرى في دائرة كالتي تظهر في ربط العنصرين المبيينين في الشكل 2.5 . اذاً يمكننا التنقل من A الى B اما من خلال العنصر على اليسار او من خلال العنصر الذي على اليمين . وعلينا أن نتوقع أن الطاقة المصروفة هي نفسها على طول أي من المسارين . لذا فان الفولتيتين v_1 و v_2 متساويتان .

$$v_1 = v_2 \text{ او } v_2 - v_1 = 0$$

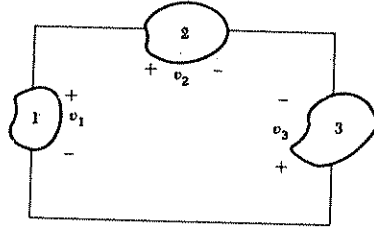
وبما ان $v_2 - v_1$ هو المجموع الجبري للفولتيات حول الممر المغلق لذا فان قانون الفولتية لكرشوف قد تحقق .

لنأخذ الدائرة نفسها بطريقة مختلفة قليلاً ، فانه لايجاد الفولتية بين النقاط B

و C ،
أولاً ننقل شحنة الكولوم من B الى A خلال العنصر الأيسر ونجهز طاقة كهربائية مقدارها v_1 من الجولات لهذا الكولوم ثم نستمر الى النقطة C خلال العنصر الأيسر ونفقد طاقة كهربائية مقدارها v_2 من الجولات من الكولوم نفسه والفولتية بين B و C على طول هذا الممر تكون :

$$-v_1 + v_2 = v_2 - v_1$$

وعلى أي حال فاننا ربما نختار الممر القصير على طول الموصل المثالي الذي يربط B مع C مباشرة . فالفولتية يجب ان تكون صفرأ لأي قيمة فولتية غير الصفر عبر المقاومة التي قيمتها صفرأ ، حيث يصعد التيار الى مالانهاية وهي قيمة مرفوضة مادامت غير ممكنة فيزيائياً . واذا فرضنا مرة اخرى ان الفولتية او الطاقة المستحصلة عبر ممرات مختلفة متساوية فان $v_2 - v_1 = 0$



الشكل 2.6 قانون الفولتية لكروشوف يؤدي الى المعادلة $-v_1 + v_2 - v_3 = 0$

وان الفكرة الأخيرة تساعدنا لأخذ الدائرة المتكونة من عدد من العناصر بنظر الاعتبار والمرتبطة بدارة واحدة . بما ان الفولتية عبر الجزء القصير لموصلات مثالية يجب ان تكون صفراً ، فان الفولتية حول ماتبقى من الدائرة يجب ان تكون هي الأخرى صفراً . ويمكن القول بأن ،

$$\sum_{n=1}^N v_n = 0 \quad \text{or} \quad v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N = 0 \quad (3)$$

حيث تتفق على ان كل عنصر يتم الدخول اليه من جهة الفولتية الموجبة باتجاه عقرب الساعة (أو عكس عقرب الساعة) اثناء التنقل في الدائرة .

يمكننا تطبيق قانون الفولتية لكروشوف يطرق متعددة فمثلاً في الدائرة التي في الشكل 2 - 6 . لسوء الحظ - يلاقي التنقل باتجاه عقرب الساعة حول الدائرة اشارة موجبة واحدة وشارتين سالبتين . لذا يجب ان نختار عكس الاشارة عبر العناصر 1 و 3 بحيث تصبح هذه الفولتيات $-v_1$ و $-v_3$. ونتيجة لذلك يكون .

$$(-v_1) + v_2 + (-v_3) = 0$$

وعوضاً عن ذلك فاننا نعكس اشارة مرجع الفولتية على العنصر 2 ثم نبدل اشارة

v_2 ; ثم ننتقل بعكس عقرب الساعة . فنحصل على

$$v_3 + (-v_2) + v_1 = 0$$

من الأسهل عادة التحرك حول الدائرة عقلياً وكتابة الفولتية مباشرة لكل عنصر يتم الدخول اليه من نهايته الموجبة وكتابة سالب كل فولتية عند مقابلتها باشارتها السالبة .

عند الحركة باتجاه عقرب الساعة فان الدائرة السابقة تعطينا .

$$-v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

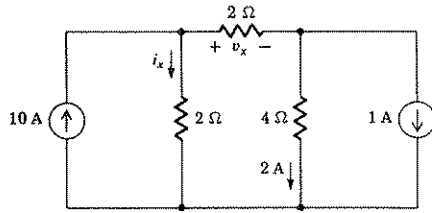
بينما بعكس عقرب الساعة نحصل على

$$v_3 - v_2 + v_1 = 0$$

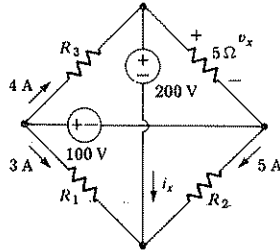
ومن الواضح ان النتائج الأربع الأخيرة متشابهة .

تمارين :

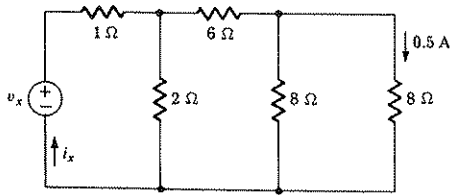
2 - 2 أوجد عدد العقد والفروع في كل من الدوائر المبينة في الشكل 2 - 7
 الجواب 4,6 ; 4,6 ; 3,5



(a)



(b)



(c)

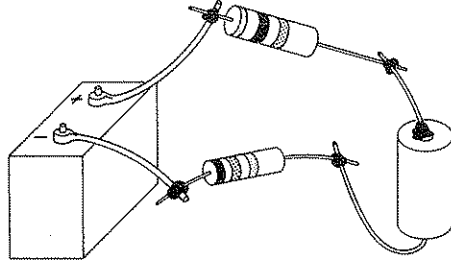
الشكل 2 - 7 انظر التمارين 2 - 2 و 2 - 3 و 2 - 4

2 - 3 اوجد i_x في كل من دوائر الشكل 2 - 7 :

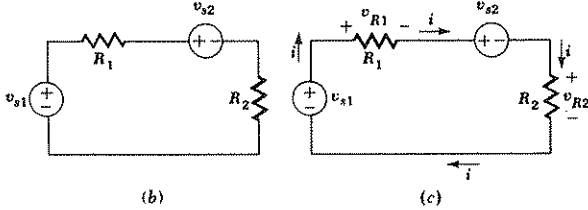
الجواب 6; -8 A ; 7

2 - 4 اوجد v_x في كل من دوائر الشكل 2 - 7 :

الجواب 6; 16; 60 V



(a)



(b)

(c)

الشكل 8 - 2 (أ) مخطط لدائرة فيزيائية منفردة تحتوي على أربعة عناصر . وقد أشير الى ربط اللحام وأسلاك التوصيل (ب) نموذج الدائرة مع فولتيتي المصدرين وقد أعطيت قيم المقاومتين (ج) اشارات التيار والفولتية المرجعية أضيفت للدائرة .

4 - 2 تحليل دائرة ذات دائرة واحدة :

ANALYSIS OF A SINGLE-LOOP CIRCUIT

بعد ان درسنا قانون أُر وقانوني كرشوف ، يمكننا ان نقوم بتطبيق هذه الأدوات في تحليل دائرة مقاومة بسيطة . اذ يوضح الشكل 2.8 كيفية ربط بطاريتين ومقاومتين من قبل طالب مبتدىء يحاول استخدام آلة اللحام . لاحظ أن طرف توصيل قد ربط بالطرف الموجب للبطارية اليسرى ولحمت نهاية السلك الأخرى باحد طرفي المقاوم . ان طرف التوصيل وسلك التوصيل وقطعة اللحام كلها قد فرض بان مقاومتها صفراً وانها كلها تكون عقدة في الزاوية العليا اليسرى من مخطط الدائرة المبين في الشكل 2.8 ب . لقد استعوض عن كلا البطاريتين بمصدر فولتية مثالي وقد فرض ان اي مقاومة يحويانها انها صغيرة جداً لحد امكان اهمالها . واذا لم يكن اهمالها فتندمج مع R_1 و R_2 . اما المقاومان فقد فرض انهما يمكن الاستعاضة عنهما بمقاومين خطيين مثالين

وسنفرض أن قيم المقاومات ومصادر الفولتية في الشكل 2.8 ب معلومة ثم سنحاول أن نجد التيار خلال كل عنصر والفولتية خلاله والقدرة المجهزة او المستهلكة من قبل كل عنصر .

ان خطواتنا الاولى في التحليل تكون بفرض اتجاه مرجعي للتيارات المجهولة حيث اننا لانعلم مسبقاً هذه الاتجاهات . ولنفرض اعتباطاً ان هناك تياراً غير معلوم i يسري من الطرف العلوي للمصدر الايسر وهذا الاختيار مؤشر بسهم مبين عليه الرمز i كما في الشكل 2.8 ج . فان تطبيقاً بسيطاً لقانون التيار لكشوف يطمئنا ان التيار هذا يجب ان يسري خلال كل عنصر آخر في الدائرة . وقد اكدنا هذه الحقيقة هنا بتأشير التيار في عدة مواقع حول الدائرة باشارته المعروفة .

ومن التعريف ، اذا كانت جميع العناصر تحمل نفس التيار يقال عنها إنها مربوطة على التوالي . وهنا تجدر الملاحظة بأن هناك عناصر يمكن أن تحمل نفس التيار ولكنها ليست على التوالي . فمثلاً ان مصباحين كهربائيين قدرة الواحد 100 واط موجودان في بيتين متجاورين يحملان تيارين متساويين طبعاً ، ولكنها لا يحملان نفس التيار وليسا مربوطين على التوالي .

وتكمن الخطوة الثانية من التحليل في اختيار مرجع الفولتية لكل من المقاومين . فقد وجد ان تطبيق قانون اوم $v = Ri$ يتطلب اختيار اتجاه التيار والفولتية بحيث أن التيار يدخل من النهاية التي يكون فيها مرجع الفولتية موجباً . واذا كان اختيار اتجاه التيار عشوائياً ، فان اختيار اتجاه الفولتية يكون ثابتاً اذا كنا نروم استخدام قانون اوم بالصيغة $v = Ri$. ويوضح الشكل 2.8 ج الفولتيات .

$$v_{R1} \text{ و } v_{R2}$$

اما الخطوة الثالثة فتكون بتطبيق قانون الفولتية لكشوف لممر منفرد مغلق . نفرض اننا قررنا التحرك حول الدائرة باتجاه عقرب الساعة مبتدئين من الزاوية السفلى اليسرى ، لذا نكتب مباشرة كل فولتية نلاقيها أولاً بمرجعها الموجب ثم نعطي الاشارة السالبة لكل فولتية تصادف في نهايتها السالبة لذا

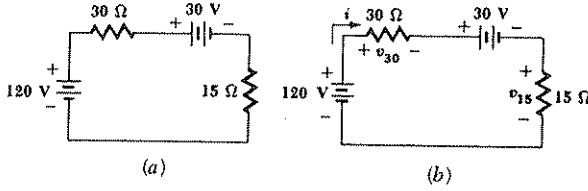
$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0$$

واخيراً لو طبقنا قانون اوم لعناصر المقاومات

$$v_{R1} = R_1 i \quad v_{R2} = R_2 i$$

لحصلنا على

$$-v_{s1} + R_1 i + v_{s2} + R_2 i = 0$$



الشكل 2.9 (أ) دائرة توالي (ب) الدائرة مع التيار والفولتية مؤشرين

وعند حل المعادلة هذه لقيمة i نجد

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

حيث ان جميع الكميات على الجهة اليمنى معلومة وتساعدنا في ايجاد قيمة i ويمكن ايجاد الفولتية او القدرة لاي عنصر بخطوة واحدة وذلك بتطبيق $v = Ri$.

$$p = i^2 R \text{ او } p = vi,$$

دعنا نأخذ مثالا رقمياً كالموضح في الشكل 9 - 2 أ والذي يظهر فيه بطاريتان ومقاومتان مربوطة في دائرة توالي. كما يوضح الشكل 9 - 2 ب التيارات والفولتيات في الدائرة.

يصبح قانون الفولتية لكروشوف

$$-120 + v_{30} + 30 + v_{15} = 0$$

ويسمح لنا تطبيق قانون أوم لكل مقاوم كتابة المعادلة

$$-120 + 30i + 30 + 15i = 0$$

ومنها

$$i = \frac{120 - 30}{30 + 15} = 2 \text{ A}$$

لذا فان الفولتية عبر كل مقاوم تكون:

$$v_{30} = 2(30) = 60 \text{ V} \quad v_{15} = 2(15) = 30 \text{ V}$$

كما تنتج القدرة الممتصة من قبل كل عنصر من حاصل ضرب الفولتية عبر العنصر والتيار المار فيه في المكان الذي يوجد فيه مرجع الفولتية الموجب. وللبطارية 120 V فان القدرة الممتصة تساوي

$$p_{120V} = 120(-2) = -240 \text{ W}$$

لذا فان 240 W تجهز الى العناصر الاخرى في الدائرة من قبل المصدر وبطريقة متشابهة

$$p_{30V} = 30(2) = 60 \text{ W}$$

من ذلك يتضح بأن هذا العنصر الفعال بالحقيقة يمتص القدرة (او انه يُشحن)
المجهزة له من قبل البطارية الاخرى .

ومن الضروري ان تكون القدرة الممتصة من قبل كل مقاوم موجبة . ويمكن حسابها
كالآتي :

$$p_{30} = v_{30}i = 60(2) = 120 \text{ W}$$

$$p_{30} = i^2R = 2^2(30) = 120 \text{ W}$$

$$p_{15} = v_{15}i = i^2R = 60 \text{ W}$$

او بواسطة

وكذلك من السهل التأكد من صحة النتائج وذلك لان القدرة الكلية الممتصة يجب ان
تكون صفراً او بتعبير آخر : القدرة المجيزة من قبل البطارية ذات 120-V فولت
تساوي بالضبط مجموع القدرات الممتصة من قبل العناصر الاخرى وتوازن القدرة
عادة فيفيد لغرض التحقيق في حالة حدوث اخطاء او هفوات في الحساب .

وقبل ترك هذا المثال من الضروري ان نقتنع بان الفرضيات الاولية لاتجاه مسار
التيار مع النتائج التي حصلنا عليها كانت صحيحة . اذاً دعنا نتصور بأننا فرضنا
اتجاه التيار بعكس عقرب الساعة . فان كلاً من فولتيات المقاومات يجب تأشيرها
بعكس الاتجاهات المبينة أيضاً ومن ثم نحصل على :

$$-120 - 30i + 30 - 15i = 0$$

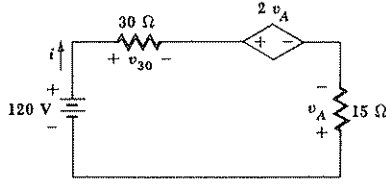
$$v_{15} = -30 \text{ V}, v_{30} = -60 \text{ V}, i = -2 \text{ A}$$

وكذلك

نظراً لان كل مرجع فولتية يصبح الان معكوساً وان كل كمية هي سالب
الكمية الناتجة سابقاً فمن الواضح ان النتائج هي نفسها . كما ستكون كل قدرة
ممتصة مساوية للقيمة السابقة نفسها . ان اي اختيار عشوائي او مناسب لاتجاه التيار
يمكن ان يعمل به . وان من يصر على النتائج الموجبة يمكنه الرجوع دائماً بشكل
رجعي لعكس اتجاهات أسهم التيارات ثم اعادة حل المسألة . والآن
لنعقد التحليل قليلاً بفرض ان احد مصادر الفولتيات هو مصدر معتمد
dependent source كما هو ممثل في الشكل 10 - 2 . نؤشر اتجاه المرجع
للتيار i والفولتية v_{30} كما سبق .

ليس هناك حاجة لتأشير الفولتية للمقاوم $15-\Omega$ نظراً لان فولتية السيطرة v_A
للمصدر المعتمد متوفرة . ولا يغير عكس اشارة v_A عما مؤشر . كما ان قانون أوم
لهذا العنصر يجب أن يعبر عنه $v_A = -15i$. وبتطبيق قانون الفولتية لكرشوف
حول الدائرة

$$-120 + v_{30} + 2v_A - v_A = 0$$



الشكل 10 - 2 التيار i والفولتية v_{30} مؤشرتين بدائرة ذات دائرة واحدة محتوية على مصدر معتمد

وباستخدام قانون أوم مرتين

$$v_{30} = 30i$$

$$v_A = -15i$$

نحصل على

$$-120 + 30i - 30i + 15i = 0$$

$$i = 8 \text{ A}$$

وإن علاقات القدرة تبين بأن البطارية تجهز 960 W ويجهز المصدر المعتمد 1920 W .

أما المقاومان سوية فيستهلكان 2880 W .

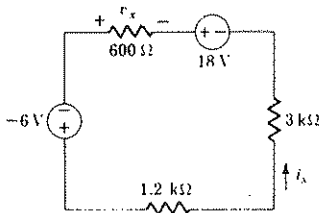
وإن معظم التطبيقات العلمية للمصدر المعتمد إلى الترانزستور والدوائر المكافئة للصمام المفرغ سوف تبدأ بالظهور في الفصل القادم.

تمارين

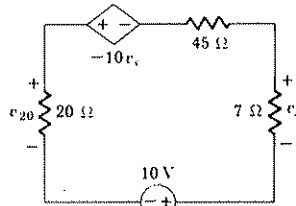
5 - 2 للدائرة المبينة في الشكل 11 - 2 أ) أوجد i_x ، (ب) v_x ، (ج)

القدرة المجهزة من المصدر ذي 6 V -

$$2.5 \text{ mA}; -1.5 \text{ V}; -15 \text{ mW}$$



(a)



(b)

الشكل 11 - 2 انظر التمرينين 5 - 2 و 6 - 2

2 - 6 في الدائرة المبينة في الشكل 11 - 2 ب ، اوجد (أ) i_{30} (ب) v_{20} (ج) القدرة المجهزة من مصدر غير معتمد (د) القدرة المجهزة من مصدر معتمد

الجواب $-35 \text{ V}; 100 \text{ V}; 1750 \text{ W}; 50 \text{ W}$

2.5 الدوائر المفردة المزدوجة العقد : THE SINGLE NODE-PAIR CIRCUIT

الدائرة المرادفة لدائرة الدارة المنفردة المشروحة سابقاً هي الدائرة المزدوجة العقد ، وفيها يرتبط عدد من العناصر البسيطة بين نفس الزوج من العقد .
ويبين الشكل 12 - 2 (أ) مثلاً لهذه الدائرة . وان قيم مصدري التيار والتوصيلات معروفة والمطلوب ايجاد الفولتية والتيار والقدرة العائدة الى كل عنصر مرة اخرى .

خطوتنا الاولى الآن تكمن بافتراض الفولتية عبر اي عنصر بتأشير قطبيه مرجعية كيفما اتفق .

بعدها فان قانون الفولتية لكروشوف سيجبنا للاعتراف بأن الفولتية عبر كل فرع هي الفولتية نفسها لان ممراً مغلقاً يتكون من اي فرع حينما يسير من احدى العقد الى الاخرى ثم يكتمل باي فرع آخر . ولكي يكون مجموع الفولتيات صفراً يتطلب تشابه الفولتية عبر عنصر .

وهنا سندعو العناصر التي تكون الفولتية عبرها مشتركة بأنها مربوطة على التوالي . دعنا نسم هذه الفولتية v ونختارها اعتباطياً كما يبين في الشكل 12 - 2 (ب)
بعدها ينتقى تياران يسريان في المقاومتين كتأكيد للقاعدة التي يقرها قانون أوم ، وهذه التيارات مبينة في الشكل 12 - 2 (ب) ايضاً .

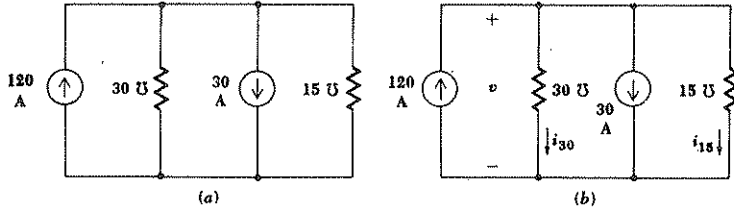
أما خطوتنا الثالثة في تحليل الدائرة المفردة المزدوجة العقد فتكون بتطبيق قانون التيار لكروشوف على اي من العقد في الدائرة . ومن الواضح عادة تطبيق القانون على العقدة التي يقع فيها مرجع الفولتية الموجب ، لذا فاننا سنساوي المجموع الجبري للتيارات المغادرة للعقدة العلوية بالصفر .

$$-120 + i_{30} + 30 + i_{15} = 0$$

واخيراً فان التيار في كل مقاومة يعبر عنه بدلالة الفولتية والتوصيلية بقانون أوم .
فنحصل على

$$i_{30} = 30v \quad \text{و} \quad i_{15} = 15v$$

$$-120 + 30v + 30 + 15v = 0$$



الشكل 12 - 2 (أ) دائرة ذات زوج واحد من العقد (ب) فولتية وتيارين مؤشرة

$$v = 2 \text{ V}$$

$$i_{30} = 60 \text{ A} \quad \text{and} \quad i_{15} = 30 \text{ A}$$

القيم المختلفة للقدرة المتصة يمكن الحصول عليها بسهولة . ففي المقاومين

$$p_{30} = 30(2)^2 = 120 \text{ W} \quad p_{15} = 15(2)^2 = 60 \text{ W}$$

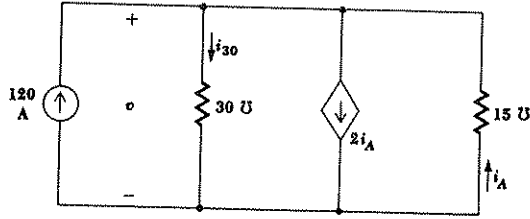
وللمصدرين :

$$p_{120A} = 120(-2) = -240 \text{ W} \quad p_{30A} = 30(2) = 60 \text{ W}$$

لذا فان مصدر التيار الايسر يجهب 240 W الى العناصر الثلاثة الاخرى في الدائرة .
وبذا فقد تحقق قانون حفظ الطاقة ايضاً .

ان تشابه هذا المثال مع المثال الذي أكمل سابقاً والذي أوضح فيه حل دائرة التوالي مع مصادر معتمدة فقط يجب ان لاتذهب بدون ملاحظة . فان الارقام كانت نفس الارقام الا ان التيارات والفولتيات والمقاومات والتوصيليات والتوالي والتوازي كانت متبادلة . وهذا هو مثال للخاصية الثنائية *duality* كما يقال للدائرتين ان احدهما ثنائية للاخرى . اذا تم تغيير قيم العناصر او قيم المصادر في اي دائرة بدون تغيير معالم الشبكة . فان الدائرتين تكونان ثنائيتين . وسوف ندرس ونستعمل الخاصية الثنائية بعدئذ . اما الان فسننتوق انه لاي قيمة نحصل عليها بدلالة التيار والفولتية والمقاومة في دائرة التوالي سيكون لها ماينظرها بدلالة الفولتية والتيار والتوصيلية لدائرة توازي .

بعد هذه المقدمة عن أسس الخاصية الثنائية ، دعنا نأخذ ثنائي الشكل 10 - 2 ، فالدائرة متوالية حاوية على المصدر المعتمد . والدائرة المفردة المزدوجة العقد مع مصدر التيار المعتمد مبينة في الشكل 13 - 2 . والفولتية v مؤشرة كما مبين والتيار i_{30} خلال التوصيلية 30Ω . وبما ان التيار في العنصر 15Ω معرف بـ i_A فاننا لانحتاج لتأشير اضافي هناك .

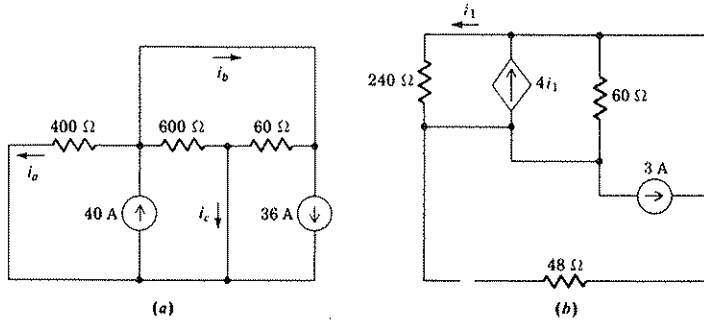


السكل 13 - 2 الفولتية v_{30} والتيار i مؤشران في دائرة ذات زوج واحد من العقد محتوية على مصدر معتمد

$$\begin{aligned}
 -120 + i_{30} + 2i_A - i_A &= 0 && \text{بتطبيق قانون التيار لكرشوف مرة واحدة} \\
 i_{30} &= 30v && \text{وقانون أوم مرتين} \\
 -i_A &= 15v && \text{ينتج لدينا} \\
 -120 + 30v - 30v + 15v &= 0 && \text{وأن} \\
 v &= 8 \text{ V} && \text{وهذا يعود الى النتيجة السابقة } 8 \text{ A} \text{ والذي يؤكد الخاصية الثنائية.}
 \end{aligned}$$

تمارين

7 - 2 للدائرة ذات الزوج الواحد من العقد المبينة في الشكل 14 - 2 (أ) ،
 اوجد (أ) i_a (ب) i_b (ج) i_c .
 الجواب A 0.48; 3.52; 39.2



الشكل 14 - 2 انظر التمرين 7 - 2 و 8

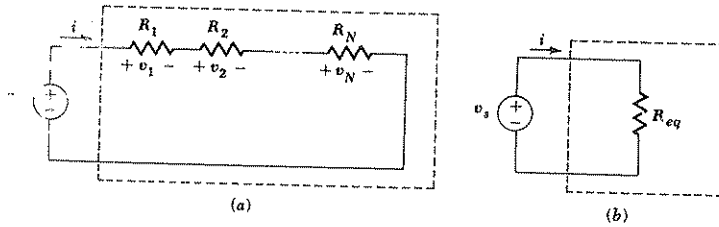
8 - 2 للدائرة ذات الزوج الواحد من العقد المبينة في الشكل 14 - 2 (ب) ،
 اوجد انقدرة المستهلكة في كل من العناصر الخمسة .

الجواب w 60; 240; 300; -240; -360

6 - 2 دمج المصدر والمقاومة RESISTANCE AND SOURCE COMBINATION

ان بعض المعادلات التي كنا نكتبها لدوائر التوالي السليطة ودوائر التوازي يمكن تجنبها . ويمكن تحقيق ذلك بالتعويض عن ربط المقاومات المقدم نسبياً بمقاوم مكافئ منفرد أينما كنا دون الاهتمام لتيار معين أو فولتية أو القدرة المتصلة مع أي من المقاومات المفردة الداخلة في الدمج . ان جميع علاقات الفولتية والتيار والقدرة في بقية الدائرة ستكون نفس العلاقات .

سوف نعتبر أولاً دمج N من المقاومات المتواليّة المبينة في الشكل التوضيحي 15 - 2 .



الشكل 15 - 2 (أ) دائرة تحتوي على N من المقاومات المتواليّة (ب) دائرة مكافئة بسيطة

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

يشير الخط المنقط الذي يحيط بالمقاومات الى ان المقاومات كأنها موضوعة في صندوق مبهم "black box," ، او ربما في غرفة اخرى واننا نرغب بأبدال N من المقاومات بمقاوم مفرد مقاومته R_{eq} ، وذلك لكي لا تشع بقية اجزاء الدائرة (في هذه الحالة فقط مصدر الفولتية) بأي تغيير يحدث . فمصدر التيار والقدرة والفولتية سوف تكون نفسها قبل ذلك وبعده . بتطبيق قانون الفولتية لكرشوف .

$$v_s = v_1 + v_2 + \dots + v_N$$

وقانون أوم

$$v_s = R_1 i + R_2 i + \dots + R_N i = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) i$$

وبمقارنة هذه النتيجة بالمعادلة البسيطة المطبقة على الدائرة المكافئة المبينة في الشكل

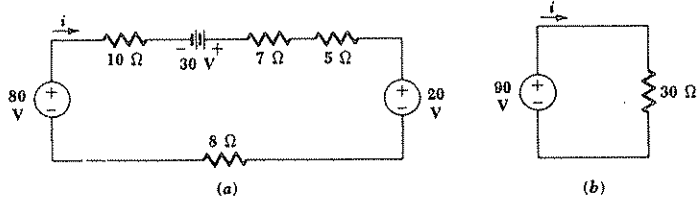
15 - 2 (ب)

$$v_s = R_{eq} i$$

فان قيمة المقاومة المكافئة لـ N من المقاومات المتواليّة تساوي

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (4)$$

ويجب التأكيد مرة اخرى باننا يمكن أن نركز اهتمامنا خاصةً على التيار والفولتية او القدرة لاحد العناصر الاصلية وكذلك تكون الحالة عندما تكون فولتية مصدر فولتية معتمدة مثلاً على الفولتية عبر R_3 . فاذا دمجت R_3 بعدد من المقاومات المتوالية تشكل مقاومة مكافئة فانها تزول ولا يمكن ايجاد الفولتية عبرها الى أن تعرف R_3 بعزلها عن الدمج . والافضل هو النظر مسبقاً وعدم جعل R_3 جزء من الدمج الاولي .



الشكل 2.16 (أ) دائرة متوالية (ب) دائرة مكافئة بسيطة

ولدى فحص معادلة الفولتية لكشوف لدائرة توألي يتبين ايضاً بأنه يمكن عمل تبسيطين آخرين وطريقة ترتيب العناصر الموضوعة في دائرة التوآلي لا تؤثر كذلك . حيث يمكن وضع مصدر مكافئ لعدد من مصادر الفولتية المتوالية بعد جمعها منفردة بشكل جبري . وفي العادة ليس هناك فائدة كبيرة من ضم مصدر الفولتية الى عند دمج دائرة التوآلي .

هذه التبسيطات يمكن توضيحها بالدائرة التي في الشكل 16 - 2 وفي البداية نبدل أماكن العناصر في الدائرة للاحتفاظ بالاتجاه الصحيح للمصادر ثم ندمج المصادر الثلاثة بمصدر مكافئ مقداره 90 V والمقاومات الاربعة الى المقاومة المكافئة 30-Ω كما مبينة في الشكل 16.2 (ب) . لذا فبدلاً من ان نكتب :

$$-80 + 10i - 30 + 7i + 5i + 20 + 8i = 0$$

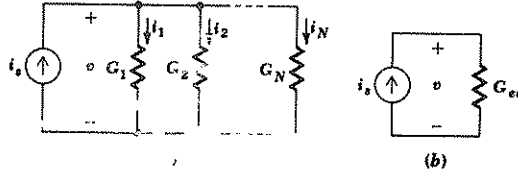
وبساطة

$$-90 + 30i = 0$$

$$i = 3 \text{ A}$$

وان

ولاجل حساب القدرة المجهزة الى الدائرة من قبل المصدر 90 V الظاهر في الدائرة الموضحة . من الضروري العودة الى تلك الدائرة . وبمعرفة ان التيار هو 3 A فان القدرة المطلوبة تساوي 240 W .



الشكل 2.17 (أ) دائرة تحتوي على N من المقاومات المتوازية ذات توصيليات G_1, G_2, \dots, G_N (ب) دائرة مكافئة

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_N.$$

من المفيد ملاحظته بأنه لم يبق أي عنصر في الدائرة الجديدة المكافئة من الدائرة الاصلية الا اذا اعتبرنا أسلاك الربط عناصر في الدائرة .

ويمكن تطبيق تبسيط مشابه في دوائر التوازي والدائرة التي تحتوي على N من التوصيليات على التوازي كما في الشكل 2.17 ب . تؤول معادلة قانون التيار لكشوف

$$i_s = i_1 + i_2 + \dots + i_N \quad \text{الى}$$

$$i_s = G_1 v + G_2 v + \dots + G_N v = (G_1 + G_2 + \dots + G_N) v \quad \text{او}$$

$$i_s = G_{eq} v \quad \text{بينما مكافئها في الشكل 2.17 (ب)}$$

لذا

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_N$$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad \text{وبدلالة المقاومات عوضاً عن التوصيليات}$$

او

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N} \quad (5)$$

والمعادلة الاخيرة هذه يحتمل ان تكون اكثر السبل المستعملة لدمج عناصر المقاومات المتوازية والحالة الخاصة لمقاومين فقط على التوازي

$$R_{eq} = \frac{1}{1/R_1 + 1/R_2} \quad \text{or} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad 6$$

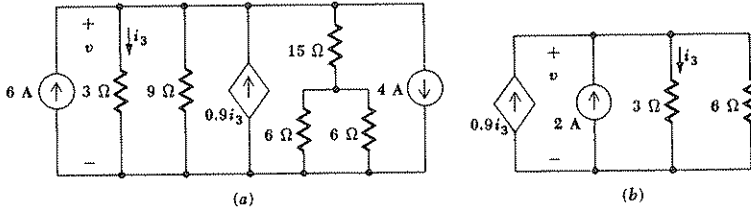
وهذه العلاقة متعددة الاستخدام وتستحق التذكر بصيغتها الاخيرة .

مصادر التيار المتوازية هي الاخرى يمكن دمجها بجمع التيارات منفردة واما ترتيب العناصر المتوازية فيمكن تبديله حسب الرغبة .

وان مختلف انواع الدمج المشروح في هذه الفقرة مستعملة لتبسيط الدائرة في الشكل

2.18 (أ) فلنفترض بأننا نرغب معرفة القدرة والفولتية للمصدر المعتمد .

كما ويمكننا تركها كما هي ثم دمج المصدرين الباقيين بمصدر واحد قيمته 2-A تدمج المقاومات ابتداء بدمج المقاومتين المتوازيين 6 - 2 الى 3 - 2 ويعقب ذلك دمج المقاومين المتواليين 3Ω ، 15Ω والمقاومان $18-\Omega$ و $9-\Omega$ يدمجان على التوازي لتكوين 6Ω



الشكل 2.18 (أ) دائرة (ب) دائرة مكافئة بسيطة .

هذه نهاية مايمكن عمله مع بقاء عملنا مفيداً . وبالتأكيد فان المقاومة 6Ω سي على التوازي مع 3Ω ودمجها نحصل على 2Ω . ولكن التيار i_3 والذي يعتمد عليه المصدر سيختفي . ومن الدائرة المكافئة في الشكل 2.18 (ب) لدينا .

$$-0.9i_3 - 2 + i_3 + \frac{v}{6} = 0$$

وان

$$v = 3i_3$$

$$i_3 = 10/3 \text{ A}$$

$$v = 10 \text{ V}$$

تؤدي الى

لذا فان المصدر المعتمد يزود $30 \text{ W} = (10) (10 / 3) \cdot 0.9$ الى الجزء المتبقي من الدائرة .

ولو سئلنا عن القدرة المبذودة في المقاوم $15-\Omega$ فان علينا أن نعود الى الدائرة الاصلية، ان هذه المقاومة على التوالي مع المقاومة المكافئة $3-\Omega$ والفولتية 10 V هي عبر كل الـ $18-\Omega$ ، لذا فان تياراً مقداره $5/9 \text{ A}$ يسري خلال المقاوم $15-\Omega$ والقدرة الممتصة من قبل هذا العنصر هي $4.63 \text{ W} = (5/9)^2(15)$.
وقبل الانتهاء من دراسة دمج العناصر المتوازية والمتوالية سوف نأخذ بنظر الاعتبار دمج مصدري فولتية متوازيين ومصدري تيار متواليين .

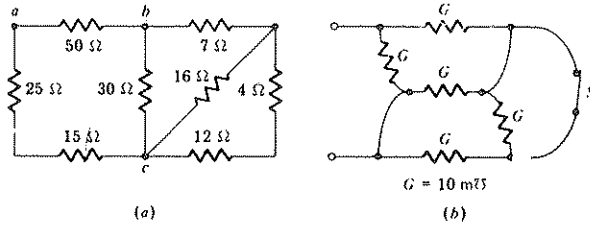
مثلاً مامكافيء المصدر 5-V على التوازي مع المصدر 10-V ؟ ومن تعريف مصدر الفولتية فان الفولتية عبر المصدر لا تتغير . بقانون الفولتية لكرشوف فان 5 تساوي 10 وذلك يعني أننا افترضنا حالة فيزيائية غير ممكنة . لذا فان ربط مصادر الفولتيات على التوازي يكون ممكناً فقط اذا كان لكل منها نفس فولتية النهايات في اي لحظة . وسوف نرى بعدئذ بأن مصادر الفولتية العملية يمكن دمجها على التوازي بدون صعوبات نظرية .

وبطريقة مشابهة فان مصدرين للتيار لا يمكن وضعهما على التوالي الا اذا كان كل منهما يحمل نفس التيار بضمنه الاشارة في اي لحظة من الزمن . ان مصدر الفولتية على التوازي او التوالي مع مصدر التيار يظهر حالة التحويل من شكل لآخر . والحالتان الممكنتان موضحتان في المسألة 34 في نهاية الفصل .

تمرينان

2-9 الاوميتير هو جهاز لقياس المقاومة بين طرفيه . ماهي القراءة الصحيحة اذا ربط الجهاز الى الشبكة المبينة في الشكل 2-9 (أ) بين النقطتين (أ) ab (ب) ac (ج) bc ؟

الجواب $9; 24; 25 \Omega$

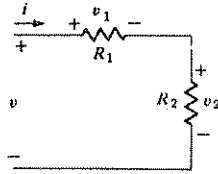


الشكل 2-9 انظر التمرينين 2-9 و 2-10

2-10 مامقدار التوصيلية المقاسة بين طرفي الشبكة المبينة في الشكل 2-19 ب اذا كان الزر S : (أ) مفتوحاً (ب) مقفلاً (ج) قد استعير عنه بتوصيلية مقدارها 10-mU . الجواب $16; 16.25; 16.67 \text{ mU}$

2.7 تقسيم الفولتية والتيار VOLTAGE AND CURRENT DIVISION

درسنا طريقة واحدة لتقليل الجهد عند تحليل الدائرة بدمج المقاومات والمصادر .
وهناك طريقة اخرى لاختصار الطريق بتطبيق فكرة تقسيم الفولتية والتيار .



الشكل 2 - 20 توضيح تقسيم الفولتية $v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$

يستخدم تقسيم الفولتية لتمثيل الفولتية عبر احد مقاومين بدلالة الفولتية عبر
المزيج في الشكل 20 - 2 بالطبع فان الفولتية عبر R_2 تساوي :

$$v_2 = R_2 i = R_2 \frac{v}{R_1 + R_2} \quad \text{أو}$$

$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v$$

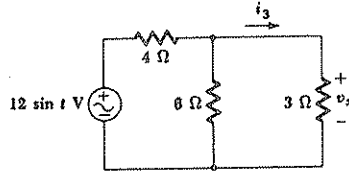
وبشكل مشابه فالفولتية عبر R_1 تكون :

$$v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v$$

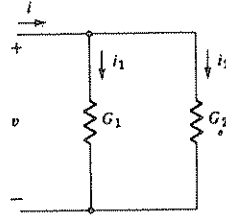
فالفولتية التي تظهر عبر أي من المقاومات المتوالية هي الفولتية المسلطة مضروبه
بنسبة تلك المقاومة الى مجموع المقاومات . ويمكن تطبيق كل من تقسيم الفولتية
ودمج المقاومات كما مبين في الشكل 2.21 . ودمج المقاومتين 3Ω مع
 6Ω نحصل على 2Ω . لذا نجد أن v_x هي $2/6$ من قيمة
 $12 \sin t \text{ V}$ أو $4 \sin t \text{ V}$

ان ثنائي مقسم الفولتية هو مقسم التيار . ولقد اعطينا الآن مصدراً للتيار على
التوازي مع التوصيلتين كما هو مفصل في الدائرة التي في الشكل 2.21 . فالتيار المار
في G_2 هو

$$i_2 = G_2 v = G_2 \frac{i}{G_1 + G_2}$$



الشكل 2.21 مثال عددي يوضح دمج مقاومات وتوزيع الفولتية . يبين الخط التتموج داخل المصدر اشارة للتغير الجيبي مع الزمن .



الشكل 2 - 22 توضيح تقسيم التيار $i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i$$

وبشكل مشابه

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i$$

لذا فان التيار المار خلال اي من التوصيلتين المتوازيتين هو التيار المسلط مضروباً بنسبة تلك التوصيلية الى مجموع التوصيلتين .

فاننا غالباً مانعطي قيمة رقمية للمقاومات أكثر من التوصيليات فان الهيئة الأهم للنتيجة الأخيرة نحصل عليها بابدال G_1 بـ $1/R_1$ و G_2 بـ $1/R_2$.

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i \quad i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i$$

هنا نلاحظ شذوذاً في الخاصية الثنائية لأن المعادلتين الاخيرتين تحويان عاملاً يختلف عنه في حالة العامل المستعمل مع مقسم الفولتية . ويتطلب هذا بعض الجهد لتلافي الاخطاء . لا يلاقي معظم الطلبة صعوبة عند النظر في تعبير مقسم الفولتية . اما مقسم التيار فيختلف . ومما يساعدنا في هذا أيضاً معرفة ان المقاومة الأكبر دائماً تحمل تياراً أقل .

ومثالاً لاستعمال كل من مقسم التيار ودمج المقاومات . دعنا نعد الى المثال في الشكل 2.22 ونكتب التعبير عن التيار خلال المقاوم $3\text{-}\Omega$. فالتيار الكلي المار في المقاومين $3\ \Omega$ و $6\text{-}\Omega$ مندمجين هو :

$$i = \frac{12 \sin t}{4 + (6)(3)/(6 + 3)}$$

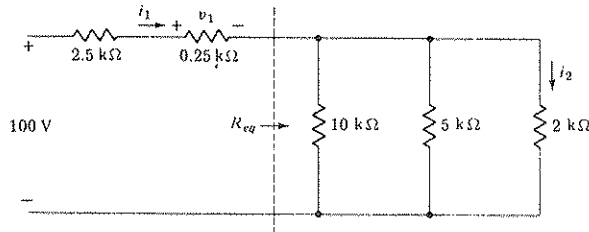
لذا فان التيار المطلوب هو :

$$i_3 = \frac{12 \sin t}{4 + (6)(3)/(6 + 3)} \cdot \frac{6}{6 + 3} = \frac{4}{3} \sin t$$

تمارين

11 - 2 بدمج المقاومات في الدائرة المبينة في الشكل 23 - 2 وجدنا ان $R_{eq} = \text{---} \text{ k}\Omega$. ثم بتقسيم الفولتية حصلنا على $v_1 = \text{---} \text{ V}$ وحيث ان $i_1 = \text{---} \text{ mA}$ فان تقسيم التيار يبين ان $i_2 = \text{---} \text{ mA}$.

الجواب $25; 15.62; 6.25; 1.25$



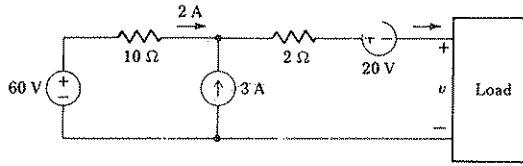
الشكل 2.23 انظر التمرين 11 - 2 .

مسائل

□ 1 مقاومة سلك نحاسي عيار رقم 8 (وفق ما يسمى بالترقيم القياسي للاسلاك SWG) تساوي $2.1\ \Omega$ لكل كيلومتر وقطره 0.326 cm يمكن ان يتحمل 70 A اذا عزل بعازل ما دونما حرارة مفرطة . حينما يعمل عند أقصى تيار (أ) ماقيمة الفولتية الموجودة بين نهايتي سلك طوله كيلومتر واحد؟ (ب) كم من القدرة تستهلك في الموصل (ج) كم من القدرة تستهلك لكل سم مربع من المساحة السطحية .

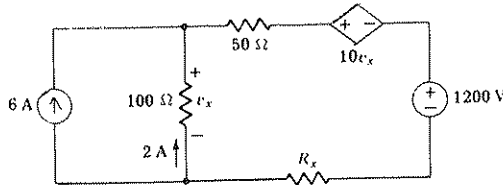
2 ربطت فولتية مقدارها 20 V الى مقاوم $5\text{-}\Omega$. (أ) كم من القدرة تستهلك في المقاوم؟ (ب) كم يجب ان تصبح المقاومة لرفع القدرة المستهلكة الى الضعف؟

(ج) كم يجب ان يصبح مصدر الفولتية بعد ذلك لاعادة P الى قيمتها الاصلية ؟
 3 مقاومة التيار المستمر لموصل طوله l ومساحة مقطعه العرضي A تساوي
 $R = \rho l/A = l/\sigma A$ حيث ρ (رو) هي المقاومة الكهربائية و σ (سيكما) هي
 الموصلية الكهربائية. إن قيماً نموذجية لموصلية النحاس $5.8 \times 10^7 \text{ U/m}$
 والالمنيوم $3.5 \times 10^7 \text{ U/m}$ والكربون $2.9 \times 10^4 \text{ U/m}$ (أ) قضيب عمومي
 من النحاس مقطعه العرضي 5 cm وطوله 30 cm . أوجد المقاومة
 وفرق الجهد بين نهايتيه حينما يحمل تياراً مقداره 250 A : (ب) موصل من
 الألمنيوم طوله 50 km ومقطعه العرضي دائري قطره 1 cm . كم من القدرة
 يستهلك اذا حمل 100 A ؟ (ج) افرض ان احد مصابيح اديسون كان ذا
 30-W ويعمل بفولتية مقدارها 36-V مجهزة من بطارية. اذا كان قطر
 فتيلة الكربون يساوي 0.4 mm . كم يجب ان يكون طولها؟ مقاومة
 الكربون عند درجة حرارة الفتيلة يمكن اعتبارها ضعف قيمتها عند درجة حرارة
 الغرفة التي اعطيت فيما سبق.
 □ 4 للدائرة المبينة في الشكل 2 - 24. أوجد (أ) v (ب) i (ج) القدرة
 المتصة من قبل الحمل.



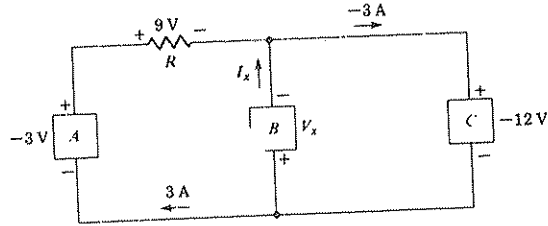
الشكل 24 - 2 انظر المسألة 4

5 (أ) أوجد R_x والقدرة المتصة من كل عنصر من عناصر الدائرة في الشكل
 2 - 25 (ب) برهن ان الطاقة يمكن الاحتفاظ بها.



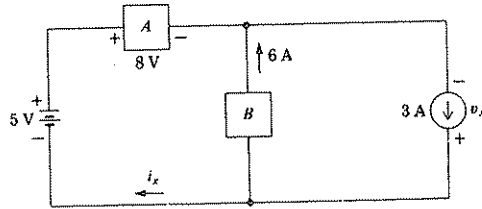
الشكل 25 - 2 انظر المسألة 5

6 أوجد القيم الجبرية لـ V_x و I_x و R للدائرة المبينة في الشكل 26 - 2 والقدرة الممتصة من قبل كل عنصر من العناصر A و B و C .



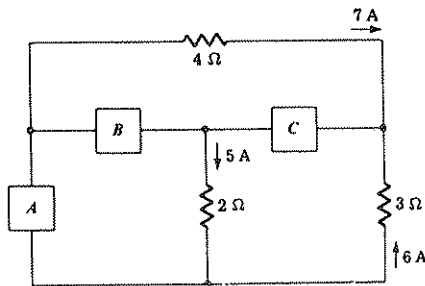
الشكل 26 - 2 انظر المسألة 6

7 □ بالرجوع الى الشبكة المبينة في الشكل 27 - 2 أوجد i_x و v_x والقدرة التي تزودها البطارية



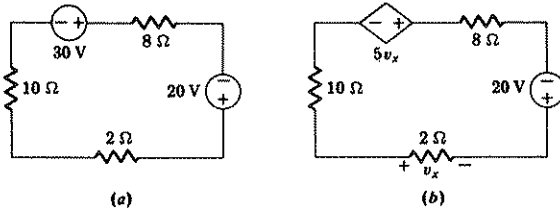
الشكل 27 - 2 انظر المسألة 7

8 العناصر A و B و C في الشكل 28 - 2 هي عناصر خطية مجهولة اي من هذه لا يمكن ان يكون مقاوماً ذا قيم موجبة ؟



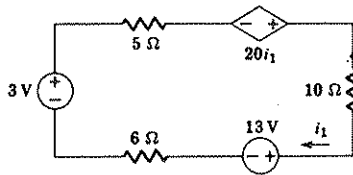
الشكل 28 - 2 انظر المسألة 8

9 (أ) أوجد القدرة الممتصة من قبل مصدر الفولتية ذي 20-V في الشكل 29 - 2 : (ب) استبدل المصدر ذي الـ 30-V بمصدر معتمد كما مبين في الشكل 29 - 2 ب . ثم أوجد القدرة الممتصة من قبل المصدر 20-V . (ج) كيف تتغير النتيجة الأخيرة إذا عكست الفولتية v_x المؤشرة ؟



الشكل 29 - 2 انظر المسألتين 9 و 25

10 أوجد القدرة المجهزة من المصدر ذي الـ 3-V في الشكل 30 - 9



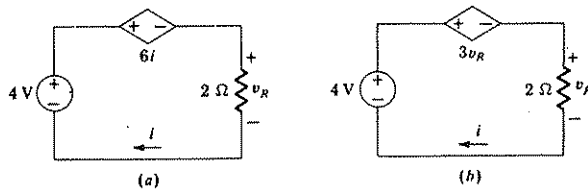
الشكل 30 - 2 انظر المسألة 10

11 أوجد i و v_R في الدائرة المبينة في (أ) الشكل 31 - 2 : (ب) الشكل

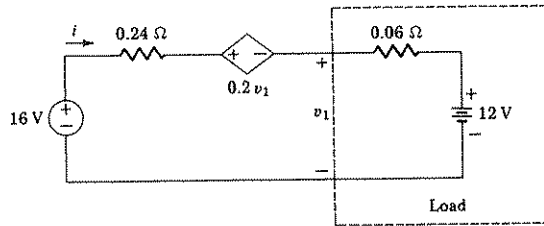
31 - 2 ب .

12 أوجد i لدائرة شحن البطارية المبينة في الشكل 32 - 2 (ب) احسب

القدرة المجهزة للحمل . (ج) مامقدار i إذا زيدت فولتية البطارية الى 12.6 V .

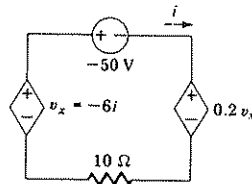


الشكل 31 - 2 انظر المسألة 11



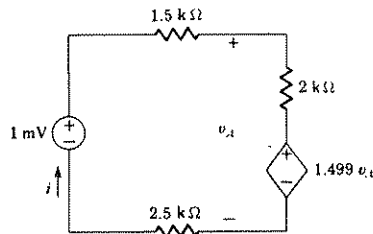
الشكل 31 - 2 انظر المسألة 12

13 أوجد القدرة الممتصة من كل من عناصر الدائرة المبينة في الشكل



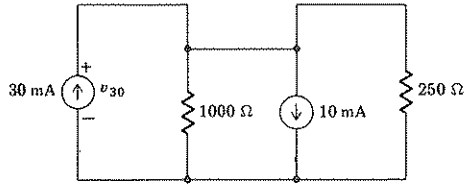
الشكل 33 - 2 انظر المسألة 13

14 (أ) أوجد i و v_1 في الدائرة المبينة في الشكل 34 - 2
 (ب) أوجد القدرة المجهزة من كل مصدر



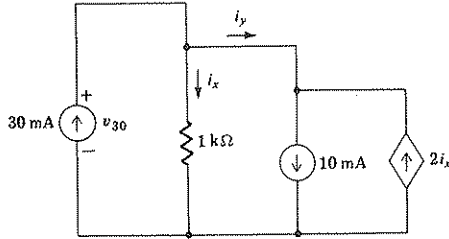
الشكل 34 - 2 انظر المسألة 14

15 أوجد v_{30} للدائرة المبينة في الشكل 35 - 2 والقدرة المجهزة من المصدر ذي 10-mA



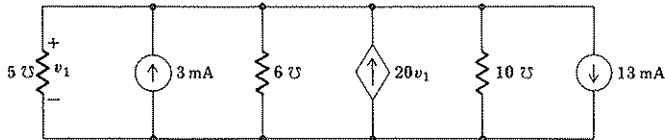
الشكل 35 - 2 انظر المسألتين 15 و 25

16□ (أ) أوجد v_{30} و i_x و i_y للدائرة المبينة في الشكل 36 - 2 .
 (ب) استبدل السيطرة على المصدر المعتمد في الشكل 36 - 2 من $2i_x$ الى $2i_y$ ثم أوجد v_{30} و i_x و i_y .



الشكل 36 - 2 انظر المسألة 16

17 أوجد القدرة المجهزة من كل من مصادر الدائرة المبينة في الشكل 37 - 2



الشكل 37 - 2 انظر المسألتين 17 و 18

18 يتطلب استبدال التوصيلية $5-U$ في الشكل 37 - 2 بتوصيلية G تمتص $100 \mu W$ عندما تستخدم في تلك الدائرة . أوجد أكبر قيمة لـ G يمكن أن تحقق ذلك .

19 □ أ) أوجد v و i والقدرة المجهزة من المصدر غير المعتمد في الدائرة المبينة في الشكل 2 - 38

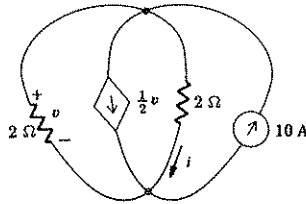
(ب) أعد ذلك إذا عكس سهم المصدر المعتمد .

20 أوجد القدرة المستهلكة من كل مصدر في الدائرة المبينة في الشكل 39 - 2 .

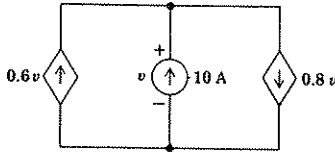
21 أوجد R_{eq} لكل من الشبكات المبينة في الشكل 40 - 2 .

22 أوجد R_{eq} لكل من الشبكات المبينة في الشكل 40 - 2 إذا استبدلت كل Ω بـ

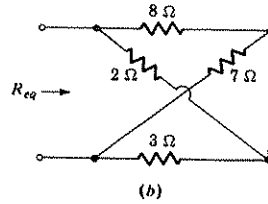
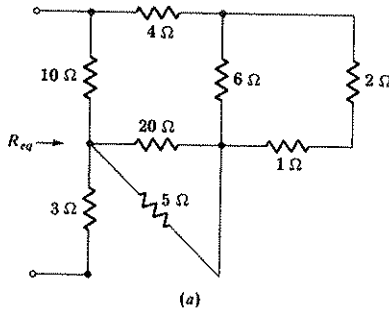
U



الشكل 38 - 2 أنظر المسألة 19

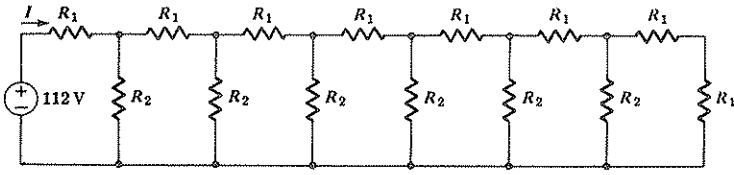


الشكل 39 - 2 أنظر المسألة 20



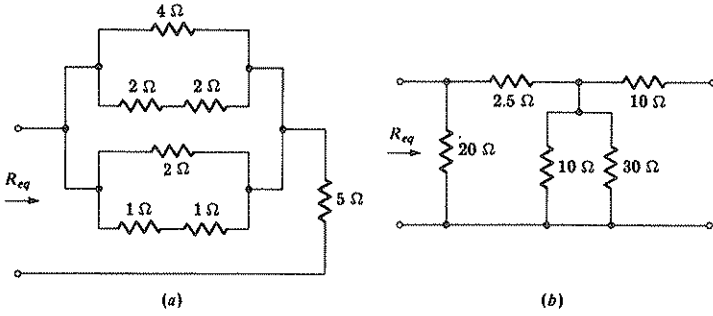
الشكل 40 - 2 أنظر المسألتين 21 و 22

23 للدائرة المبينة في الشكل 41 - 2 $R_1 = 2800 \Omega$ و $R_2 = 5600 \Omega$ باستخدام مزج المقاومات مرة بعد أخرى. أوجد المقاومة المكافئة التي تربط المصدر. ثم أوجد التيار I الذي يسحب من المصدر.



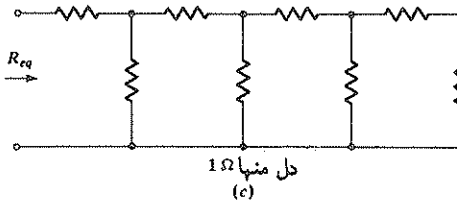
الشكل 41 - 2 انظر المسألة 23

- 24 اوجد R_{eq} لكل من الشبكات المبينة في الشكل 41 - 2 .
 25 بمزج المصادر غير المعتمدة والمقاومات المناسبة اوجد (أ) التيار الدوار باتجاه عقارب الساعة في الشكل 29 - 2 أ : (ب) v_{30} في الشكل 35 - 2 .



(a)

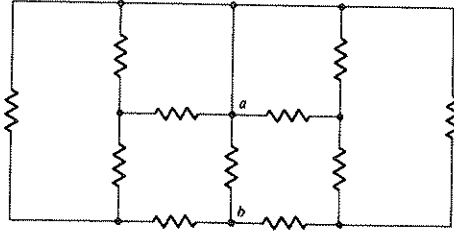
(b)



دل منها 1Ω
(c)

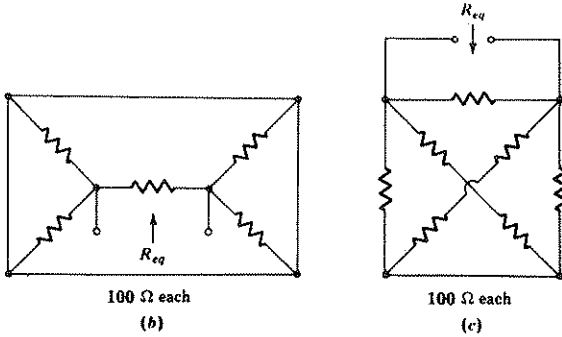
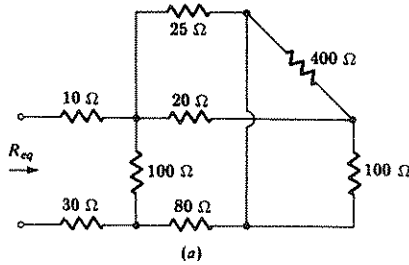
الشكل 42 - 2 انظر المسألة 24

- 26 اذا كانت كل قيم المقاومات في الشبكة 43 - 2 هي 1Ω . مامقدار المقاومة المكافئة التي يمكن قياسها عبر الطرفين a و b ؟ (ب) كيف تصبح هذه النتيجة اذا استبدلت المقاومتان الخارجيتان بدائرتي قصر ؟

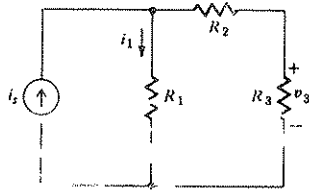


الشكل 43 - 2 انظر المسألة 26

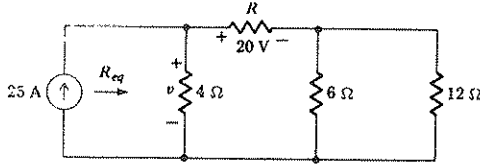
- 27 أوجد R_{eq} لكل من الشبكات المبينة في الشكل 44 - 2 .
 28 استخدم قواعد توزيع التيار وتوزيع الفولتية ومزج المقاومات لكتابة تعبير الفولتية v_s والتيار i_1 (بمجرد النظر الى الدائرة) لدائرة الشكل 45 - 2 .
 29 للدائرة المبينة في الشكل 46 - 2 (أ) أوجد R_{eq} كدالة لـ R (ب) أوجد v كدالة لـ R (ج) استخدم قاعدة تقسيم الفولتية في النتيجة الاخيرة لغرض الحصول على معادلة بدلالة R ثم أوجد R .



الشكل 44 - 2 انظر المسألة 27



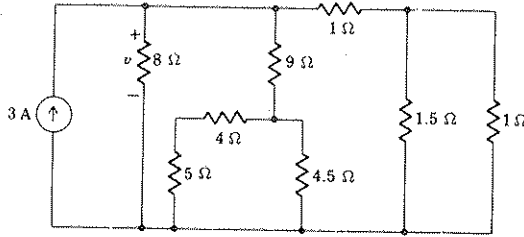
الشكل 45 - 2 انظر المسألة 28



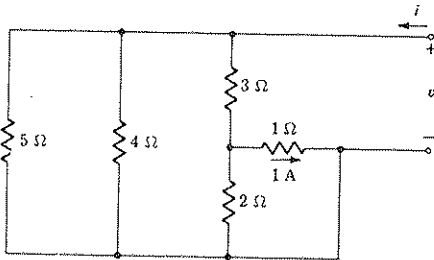
الشكل 46 - 2 انظر المسألة 29

30 . أوجد v للدائرة المبينة في الشكل 2 - 74 والقدر المتص من المقاوم $5\text{-}\Omega$ للأوم

31 . أوجد القيم اللازمة من v و i في الدائرة المبينة في الشكل 48 - 2 . □



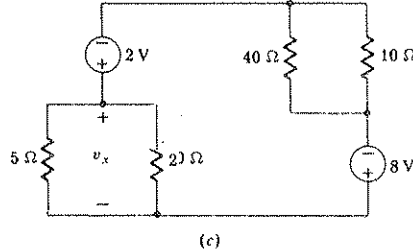
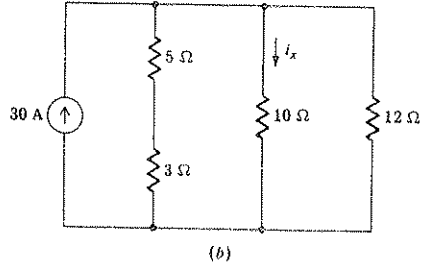
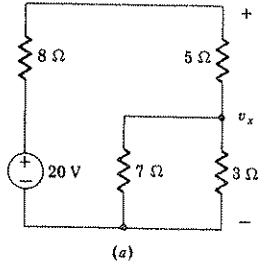
الشكل 47 - 27 انظر المسألة 30



الشكل 48 - 2 انظر المسألة 31

32 استخدم قاعدتي تقسيم الفولتية والتيار ليجاد v_x أو i_x في الدوائر المبينة في

الشكل 49 - 2



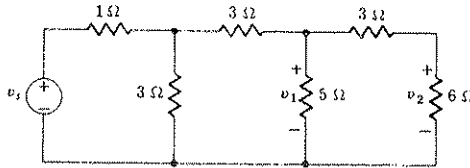
الشكل 49 - 2 أنظر المسألة 32

33 بالرجوع الى الدائرة المبينة في الشكل 2 - 50 (أ) اذا كانت v_1 معلومة

وتساوي 90 V

أوجد v_2 و v_3 اذا كانت v_2 تساوي 50 V . أوجد v_1 و v_3 (ج) اذا كانت v_3

تساوي 100 V . أوجد v_1 و v_3 .



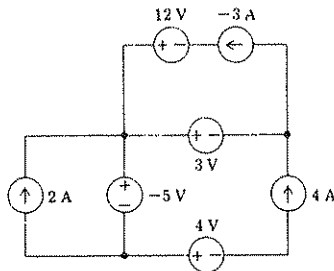
الشكل 50 - 2 أنظر المسألة 33

□ 34 الدائرة المبينة في الشكل 51 - 2 تعطي عدداً من الأمثلة لمصادر التيار

والفولتية المربوطة على التوالي والتوازي . (أ) أوجد القدرة المجهزة من قبل المصدر

5-5V - كم يجب أن تصبح قيمة مصدر التيار 4-A لتقليل القدرة المجهزة من

المصدر 5-5V الى الصفر .



الشكل 51 - 2 أنظر المسألة 34

الفصل الثالث

بعض الأساليب لتحليل الدائرة

SOME USEFUL TECHNIQUES OF CIRCUIT ANALYSIS

1 - 3 مقدمة : Introduction

من المفروض أن يكون كل من قانون أوم وقانون كرشوف قد أصبحا مألوفين لدينا مع تطبيقاتهما في تحليل دوائر المقاومات البسيطة المتوالية والمتوازية وفي الحالات التي ينتج هذان القانونان نتائج بصورة أسهل فيجب علينا أن نكون قادرين على أن نجمع المقاومات والمصادر على التوالي أو على التوازي ، كما نكون قادرين على استعمال قواعد التوزيع للتيارات . ولقد كانت الدوائر التي كنا نتمرن عليها بسيطة ومشكوكاً في أهميتها العملية ، وهي مفيدة لمساعدتنا على التعليم لتطبيق القوانين الأساسية ، والآن يجب أن نبدأ بتحليل دوائر أكثر تعقيداً .

ستحوي النظم الفيزيائية التي سنحللها ونصممها في السنوات القادمة على دوائر كهربائية وألكترونية وسيطرة ، ونظم موصلات ومحولات للطاقة كالمولدات والمحركات ، ونظم توزيع القدرة والتسليّة أو الأجهزة غير المعرفة الآن . وسنواجه بمسائل تحوي على جريان حرارة وجريان موّاع وتصرفات نظم ميكانيكية مختلفة من المفيد في تحليل أي من هذه الحالات عادة تحويل هذه النظم الى دوائر كهربائية مكافئة وكمثال يمكن أن نأخذ مضخم الترانستور والذي هو جهاز إلكتروني يشكل جزءاً من عدة نظم موصلات ودوائر سيطرة .

يستعمل الترانستور الذي معه عدة مقاومات وعناصر غير فعالة أخرى لتضخيم إشارة كهربائية وتوجيه الإشارة الكهربائية المضخمة الى الحمل المطلوب . ومن الممكن ابدال الترانستور والمقاومات وعناصر الدائرة غير الفعالة الأخرى والمصدر الوحيد والحمل بمجموعة عناصر دوائر بسيطة كمصادر للفولتية ومقاومات . وان حل المسألة يمكن التوصل له بطرق حل الدائرة والاساليب التي نعرفها سابقاً أو طرق ستمر في هذا الفصل .

وعندما نكون قادرين على توضيح تصرف جريان المائعات ونظم جريان الحرارة والاستجابة الفعالة للسطوح المسيطرة للحافلة الهوائية والظواهر غير الكهربائية الأخرى ، سوف نرى أن المعادلات الناتجة تكون مناظرة تماماً للعلاقات بين التيار والفولتية في الدوائر الكهربائية . وبعدئذ يمكن أن نقرر أنه من الأسهل والأرخص بناء الدوائر الكهربائية المقابلة بدلاً من بناء النموذج الاصلى للنظام الفيزيائي . وهذه الدوائر الكهربائية المناظرة من الممكن بعد ذلك أن تستعمل للتنبؤ بمواصفات النظام عندما تغير عناصر مختلفة في هذه الدائرة ومن الممكن أن توصلنا الى التصميم النهائي المفضل . هذه هي القواعد التي تستعمل بموجبها الحاسبة الألكترونية التناظرية analog computer

ومن الواضح أن أحد الاهداف الرئيسية لهذا الفصل هو تعليم طرق تبسيط التحليل للدوائر الأكثر تعقيداً . وستتضمن هذه الطرق استخدام نظرية التراكب superposition والتحليل الحلقي loop والعقدي nodal والشبكي mesh . وإن علينا ان نحاول تحسين قابلية القدرة على تحديد التحليل المناسب . إذ غالباً ما تكون مهتمين في التفاصيل الأساسية لجزء معزول من دائرة معقدة .
 * يكون من المستحسن التعويض عن الباقي من الدائرة بمكافئ مبسط .
 ومن الممكن عادة استخدام نظرية ثيفنن أونورتن لايجاد المكافئ والذي يكون مقابلاً واحداً على التوالي او على التوازي مع مصدر مثالي . وسنبداً بدراسة طرق تبسيط تحليل الدائرة باعتبارها طريقة عامة فعالة وهي التحليل العقدي .

2 - 3 التحليل العقدي * : NODAL ANALYSIS

في الفصل السابق أخذنا بنظر الاعتبار تحليل دائرة بسيطة تحوي على عقدتين فقط . وجدنا أن الخطوة الرئيسية للتحليل كانت لايجاد معادلة وحيدة بدلالة كمية غير معلومة وحيدة وهي الفولتية بين تلك العقدتين . والآن لندع عدد العقد يزداد ، وتبعاً لذلك نعطي كمية مجهولة أخرى ومعادلة لكل عقدة مضافة . وهكذا فان الدائرة التي تحوي على ثلاث عقد سيكون لها فولتيتين ومعادلتين ، والدائرة ذات عشر عقد سيكون لها تسع فولتيات مجهولة وتسع معادلات والدائرة التي تحوي على N من العقد ستحتاج الى $(N - 1)$ من المعادلات وسيكون لها $(N - 1)$ من الفولتيات المجهولة .

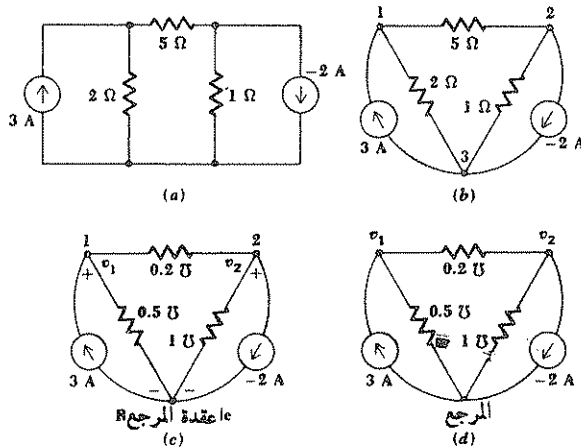
* سوف يمرنا ملخص لبعض التعاريف كالعقدة والفرع والدارة والشبكة وغيرها في الفقرة 7 - 3 (المترجمون)

لنأخذ بنظر الاعتبار ميكانيكية التحليل العقدي في المقطع ولكن البرهان سيظهر في نهاية هذا الفصل .

وكمثال : لنأخذ الدائرة الثلاثية العقد والمبينة في الشكل 1 - 3 (أ) . إذ بالإمكان تعيين مواقع ثلاث عقد في إعادة رسم الدائرة كما هو مبين في 1 - 3 (ب) والتي تعرف فيها كل عقدة برقم . والان لنصحب كل عقدة بفولتية . ولكن علينا أن نتذكر بأن الفولتية يجب أن تكون بين عقدتين في الشبكة .

لذلك نختار واحدة من العقد كعقدة مرجعية . ثم نعرف فولتية بين كل من العقدتين الباقيتين وعقدة المرجع .

ولذلك سنرى مرة أخرى بأن $(N - 1)$ من الفولتيات ستعرف في دائرة لها N من العقد . ولنختار العقدة (3) كعقدة مرجعية علماً بأنه كان بالإمكان اختيار أي عقدة من العقد الأخرى ولكن تبسيطاً قليلاً في المعادلة سينتج إذا اختيرت العقدة المربوط بها أعلى عدد من الأفرع كعقدة مرجعية .



شكل 1 - 3 (أ) دائرة ذات ثلاث عقد : (ب) الدائرة مرسومة مرة أخرى مبيناً فيها العقد الثلاث وكل عقدة مرقمة . (ج) فولتيات وقطبيتها نسبة لعقدة المرجع مؤشرة بين كل عقدة وعقدة المرجع . (د) الفولتيات المفروضة قيد بسطت بحذف القطبية حيث يُشعر بأن كل فولتية هي موجبة بالنسبة لعقدة المرجع .

وفي بعض الدوائر العملية من الممكن أن يكون هناك عدد كبير من العناصر المربوطة بالغلاف المعدني القاعدة التي تبنى عليها الدائرة . وترتبط القاعدة عادة بواسطة موصل جيد الى الارض . لذلك فان الغلاف المعدني بالإمكان تسميته

بالارضي وعقدة الأرضي هذه تصيح أنسب عقدة لتكون عقدة المرجع . وتظهر في اغلب الأحيان كتوصيل عرضي عبر أسفل رسم الدائرة

عرفت الفولتية v_1 بين العقدة 3 والعقدة المرجعية والعقدة رقم 1 والفولتية v_2 عرفت بين العقدة 2 والمرجع . وان هاتين الفولتيتين كافيتان لذلك .
وان أي فولتية بين أي عقدتين في الدائرة يمكن ايجادها بدالتهما ، فمثلاً الفولتية بين العقدة 1 نسبة للعقدة 2 هي $(v_1 - v_2)$. الفولتيتان v_1 و v_2 وأشارتهما المرجعية مبينة في الشكل 1 - 3 (ج) .

كما أن قيم المقاومة قد استبدلت بقيم توصيلية في هذا الشكل وأخيراً فأن تبسيطاً لرسم الدائرة في الشكل 1 - 3 (د) قد وجد بحذف كل الرموز المرجعية للفولتية . وقد أشرت النقطة المرجعية بصورة واضحة ، كما أن الفولتيات الموضوعة على كل من العقد الباقية تفهم بأنها الفولتية لتلك العقدة نسبة للعقدة المرجعية .

والان يجب أن نطبق قانون كرشوف للتيار للعقدتين 1 و 2 . ونجري ذلك بمساواة التيار الكلي المغادر للعقدة خلال التوصيليات المختلفة للتيار الداخل الى العقدة ولذلك ،

$$\begin{aligned} 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2) &= 3 \\ 0.7v_1 - 0.2v_2 &= 3 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad (1)$$

في العقدة 2 نحصل على

$$\begin{aligned} v_2 + 0.2(v_2 - v_1) &= 2 \\ -0.2v_1 + 1.2v_2 &= 2 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad (2)$$

المعادلتان (1) و (2) هما المعادلتان المطلوبتان الحاويتان على مجهولين ، ومن

$$\begin{aligned} v_1 &= 5 \text{ V} \\ v_2 &= 2.5 \text{ V} \end{aligned} \quad \text{الممكن حلها بسهولة والنتيجة هي}$$

وكذلك الفولتية للعقدة 1 نسبة للعقدة 2 هي $(v_1 - v_2)$ أو 2.5 V والان فان أي قدرة أو تيار في الدائرة يمكن ايجاده بخطوة واحدة فمثلاً التيار المتجه للأسفل خلال التوصيلية 0.5 A هو $0.5v_1$ أو 2.5 امبير .

والان لنزد عدد العقد بواحد . يبين الشكل 2 - 3 (ب) دائرة جديدة فيها العقد معرفة مع نقطة مرجعية مناسبة . وقد حددت فولتيات العقد ، تكون الخطوة التالية هي جمع التيارات المغادرة للعقدة 1 :

(1) يغطي الملحق (1) مراجعة قصيرة للمحددات والحل لنظم المعادلات الخطية المتزامنة بقاعدة كرامر

$$3(v_1 - v_2) + 4(v_1 - v_3) - (-8) - (-3) = 0$$

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \quad \text{أو (3)}$$

في العقدة 2 :

$$3(v_2 - v_1) + 1v_2 + 2(v_2 - v_3) - 3 = 0$$

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \quad \text{أو (4)}$$

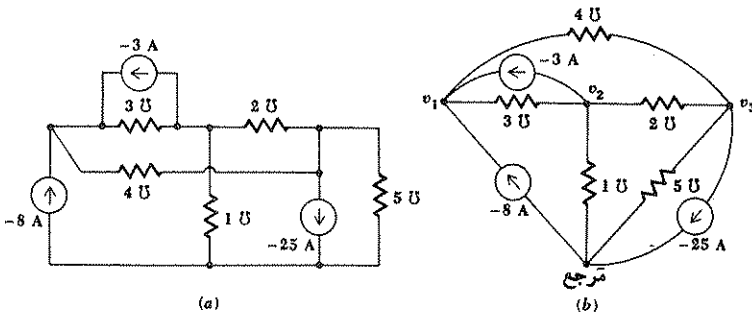
وفي العقدة 3 :

$$4(v_3 - v_1) + 2(v_3 - v_2) + 5v_3 - 25 = 0$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \quad \text{أو (5)}$$

المعادلة (3) يمكن حلها بواسطة المعادلة (5) بمعالجة بسيطة لاختصار المتغيرات أو بواسطة قاعدة كرايمر (1) والمحددات . وباستعمال الطريقة الأخيرة يكون لدينا

$$v_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \\ 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$



الشكل 2-3 (أ) دائرة تحوي على اربعة عقد وثمانية افرع (ب) الدائرة نفسها اعيد رسمها مع تبيان الفولتيات .

وبفتح المحددان في البسط والمقام حول العمود الاول نتوصل الى

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{-11 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{7 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{-11(62) - 3(-41) + 25(30)}{7(62) + 3(-41) - 4(30)} = \frac{-682 + 123 + 750}{434 - 123 - 120} \\
&= \frac{191}{191} = 1 \text{ V}
\end{aligned}$$

وبنفس الطريقة

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix}}{191} = 2 \text{ V}$$

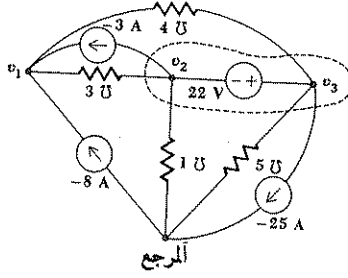
$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix}}{191} = 3 \text{ V}$$

محدد المقام هو مشترك لكل من الحسابات السابقة للدوائر التي لا تحوي على مصدر فولتية أو مصادر معتمدة (نعني دوائر تحوي على مصادر تيار غير معتمدة) وهذا المحدد في المقام يمكن أن يكتب على شكل مصفوفة (2) ويعرف بمصفوفة التوصيلات للدائرة.

$$G = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

كما أنه يجب أن يلاحظ بأن العناصر التسعة للمصفوفة هي التنظيم التسلسلي لمعاملات المعادلات (3)، (4) أو (5)، وكل منها هي قيمة توصيلية. يتألف الصف الأول من معاملات قانون التيار لكروشوف للعقدة الأولى، والمعاملات معطاة بالتسلسل v_1 و v_2 و v_3 . والصف الثاني يعود إلى العقدة الثانية وهكذا.

(2) سنبدأ بمعالجة المصفوفات رياضياً في الفصل 17 أما الآن فسنفترض أن الطالب ملم بمبادئ الجبر الخطي.



الشكل 3 - 3 التوصيلية 2- V في دائرة الشكل 2 - 3 قد استبدلت بمصدر فولتية غير معتمد للفولتية وقد استعمل قانون كرشوف للعقدة التراكية والمحاطة بخط منقط . ومصدر الفولتية أخذ يساوي $v_3 - v_2$.

ان مصفوفة التوصيلية متناظرة حول القطر الرئيسي (القسم الأعلى الأيسر مع القسم الأسفل الأيمن) وهذه نتيجة عامة للطريقة النظامية والتي أعطيت فيها المتغيرات وطبق فيها قانون كرشوف للتيار . ورتبت المعاملات اضافة لنظرية التبادل والتي سنناقشها في الفصل السادس عشر . نقدر حالياً التناظر في هذه الدوائر والتي تحوي فقط على مصادر تيار غير معتمدة ونقبل ماسيعطينا اياه هذا التماثل بدقة والذي سيساعدنا على اكتشاف أي خطأ يمكن أن نكون قد ارتكبناه في كتابة معادلات الدائرة .

وينبغي علينا أن نرى كيف تؤثر مصادر الفولتية والمصادر المعتمدة على استراتيجية التحليل العقدي . وسنمحص نتيجة ادخال مصدر للفولتية أولاً .

لنأخذ مثلاً شائعاً وهو الدائرة المبينة في الشكل 3 - 3 . حيث استبدلت الدائرة السابقة ذات العقد الأربع بابدال التوصيلية $2V$ بين العقدتين 2 و 3 بمصدر للفولتية مقداره 22 فولت . الفولتيات v_1 و v_2 و v_3 وما زالت معتبرة بين العقد نفسها وعقدة المرجع . كانت الخطوة التالية فيما سبق هي تطبيق قانون كرشوف للتيار في كل من العقد الثلاث غير مرجعية . اذا حاولنا أن نقوم بنفس العملية الآن فسوف نرى أننا سنصادف بعض العقبات في العقدتين 2 و 3 لأننا لانعلم التيار في فرع مصدر الفولتية .

ليس هناك أي طريقة للتعبير عن التيار بدلالة الفولتية ، لأن تعريف مصدر الفولتية (غير المعتمد) هو بالضبط أن الفولتية غير معتمدة على التيار .

وهناك طريقتان للتخلص من هذه العقبات . فالطريقة الاعقد هي تعيين تيار غير معلوم في فرع مصدر الفولتية ثم تطبيق قانون كرشوف للتيار ثلاث مرات ، ثم تطبيق قانون كرشوف للفولتية مرة واحدة بين العقدتين 2 و 3 ، لذا سيكون الناتج اربع معادلات بأربعة مجاهيل .

والطريقة الأسهل هي أن نوافق على أننا مهدياً نهتم بفولتيات العقد ، لذلك يمكننا أن نتجنب استعمال فرع مصدر الفولتية الذي سبب لنا بعض المشاكل يمكننا أن نعامل العقدة 2 والعقدة 3 ومصادر الفولتية كلها كأنواع من عقد متراكبة supernodes ثم نطبق قانون التيار لكرشوف لكل من العقدتين في نفس الوقت . وهذا بالتأكيد ممكن لأنه لو كان التيار الكلي المغادر للعقدة 2 يساوي صفراً والتيار المغادر للعقدة 3 يساوي صفراً لكان المجموع الكلي للتيار المغادر لكلا العقدتين صفراً .

ركطريق سهل لاعتبار هاتين العقدتين معاً ، نصور أن مصدر الفولتية هو عبارة عن دائرة قصيرة تربط فيزيائياً بين هاتين العقدتين . ولهذا فإن كل مصدر للفولتية سينقص عدد العقد غير المرجعية بواحد ، ونطبق قانون كرشوف للتيار عليها ، غير مبالين فيما لو كان مصدر الفولتية يمتد بين عقدتين غير مرجعيتين أو مربوط بين عقدة المرجع وبين احدى العقد الأخرى .

لهذا فلنعتبر مصدر الفولتية 22-V كدائرة قصر تربط بين العقدتين 2 و 3 . وسنجد أن هناك ستة فروع مربوطة في هذه العقدة المتراكبة supernode مؤشرة بخطوط مقطعة في الشكل 3 - 3 مبتدئين بفرع التوصيلية 3-2 ومتجهين باتجاه عقرب الساعة . نجمع التيارات الستة المغادرة لهذه العقدة المتراكبة :

$$3(v_2 - v_1) - 3 + 4(v_3 - v_1) - 25 + 5v_3 + 1v_2 = 0$$

$$-7v_1 + 4v_2 + 9v_3 = 28$$

أو

معادلة كرشوف للتيار في العقدة 1 لم تتغير ومن المعادلة (3) :

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11$$

ولكننا نحتاج الى معادلة اضافية أخرى حيث أن لدينا ثلاثة مجاهيل . كما يجب أن تستخدم الحقيقة بأن هناك مصدر للفولتية 22-V بين العقدتين 2 و 3

$$v_3 - v_2 = 22$$

وبإعادة ترتيب المعادلات الثلاث الاخيرة

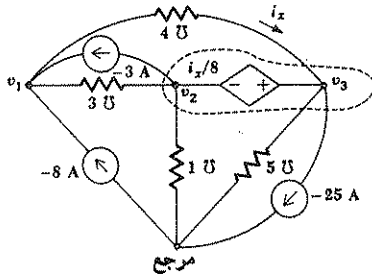
$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11$$

$$-7v_1 + 4v_2 + 9v_3 = 28$$

$$-v_2 + v_3 = 22$$

الحل بالمحددات لـ v_1 هو

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 28 & 4 & 9 \\ 22 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-189}{42} = -4.5 \text{ V}$$



شكل 4 - 3 التوصيلية في دائرة الشكل 2 - 3 استبدلت بمصدر معتمد للفولتية . وقد عومل المجال المحصور بالخط المنقط كمقدمة متراكبة . أما الفولتية $i_x/8$ فقد عبر عنها بـ $4(v_1 - v_2)/8$ وجعلت تساوي $v_3 - v_2$.

لاحظ عدم وجود التماثل في محددة المقام . وهذه نتيجة وجود مصدر الفولتية . ولاحظ أيضاً انه لا داعي لأن نسمي محددة المقام بمصفوفة الدائرة لأن الصف الأول من المعادلة $-v_2 + v_3 = 22$ وهذه المعادلة لا تعتمد على أي توصيلية بأي شكل من الاشكال .

والآن دعنا ندخل مصدر غير معتمد لنسبدل التوصيلية 2V في الشكل 2 - 3 هذه المرة بمصدر معتمد للفولتية وكما مبين في الشكل 4 - 3 . لقد اخترنا مصدراً معتمداً

للفولتية بدلاً من مصدر التيار المعتمد . لأنه قد وجدنا أن مصادر الفولتية تعطينا مجالاً أوسع بالتحليل العقدي أكثر من مصادر التيار . إضافة الى انه سندع المصدر المعتمد يسيطر عليه بواسطة تيار بدلاً من فولتية لأن هذه الحالة هي أبسط الحالتين للتحليل .

الشكل 4 - 3 يبين مصدر الفولتية المعتمد $8 \angle 0^\circ$ ، حيث i_x هو التيار المتجه يساراً في التوصيلية 4Ω . وباختيار نفس الفولتيات العقدية الثلاثة نسبة الى العقد المرجعية . ولأننا ايضاً لانعرف، التيار في فرع المصدر المعتمد ، لنفرض العقدة 2 و 3 والمصدر كعقدة متراكبة وتطبيق قانون التيار لكرشوف نحصل على

$$\begin{aligned} 3(v_2 - v_1) - 3 + 4(v_3 - v_1) - 25 + 5v_3 + 1v_2 &= 0 \\ -7v_1 + 4v_2 + 9v_3 &= 28 \end{aligned}$$

وبالعقدة 1

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11$$

والتي لم تتغير . ثم أخيراً نوجه انتباهنا الى المصدر المعتمد . نصف الاعتماد الرياضي بدلالة الفولتيات بين العقد وعقدة المرجع

$$v_3 - v_2 = \frac{i_x}{8} = \frac{4(v_1 - v_3)}{8}$$

$$0.5v_1 + v_2 - 1.5v_3 = 0$$

أو

وبالمحددات ، v_1 هو

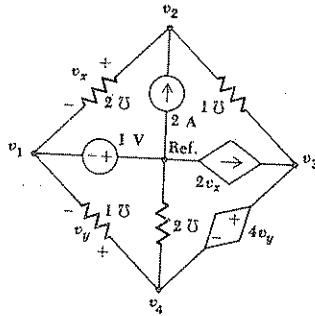
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 28 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & -1.5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 9 \\ 0.5 & 1 & -1.5 \end{vmatrix}} = \frac{-73}{-51} = 1.431 \text{ V}$$

ومن ثم تكون فولتيتا العقدتين الأخرتتين $v_2 = 3.37 \text{ V}$ و $v_3 = 2.73 \text{ V}$.
والآن دعنا نختصر الطريقة والتي بواسطتها نحصل على مجموعة من المعادلات العقدية لأي دائرة مقاومات .

7 . كون رسماً للدائرة ، مرتب ، بسيط . بين كل قيم العناصر وقيم المصادر . ومن المستحسن أن تظهر القيم بالتوصيلية بدلاً من المقاومة . وكل مصدر يجب أن يكون له رمزه المرجعي .

- 2 . معتبراً أن الدائرة تحتوي على N من العقدة اختر إحداهما كعقدة المرجع . ثم اكتب فولتيات العقد v_2, v_1, \dots, v_{N-1} كل لعقدته . متذكراً بأن كل فولتية تفهم بأنها مقاسة نسبة للمرجع المختار .
- 3 . إذا كانت الدائرة تحوي على مصادر للتيار فقط طبق قانون كرشوف للتيار في كل العقد غير المرجعية . لأجل أن تحصل على مصفوفة التوصيلية إذا كانت الدائرة تحوي على مصادر غير معتمدة للتيار ، يساوي المجموع الكلي للتيار المغادر لكل عقدة خلال كل التوصيلات . بالتيار الكلي للمصدر الداخل بتلك العقدة ، ورتب الحدود من v_1 إلى v_{N-1} . لكل مصدر تيار معتمد يظهر : أوجد علاقة بين مصدر التيار والكمية المسيطرة بالمتغيرات v_1, v_2, \dots, v_{N-1} إذا لم تكن في هذه الصيغة .

لنأخذ الدائرة المبينة في الشكل 5 - 3 متذكرين الاقتراحات السابقة والتي تحوي على الانواع الاربعة من المصادر ولها خمس عقد



الشكل 5 - 3 دائرة بخمس عقد تحوي على كل الانواع الاربعة من المصادر .

وسنختار العقدة الوسطية كعقدة مرجعية وسنعين v_1 إلى v_4 باتجاه عقرب الساعة مبتدئين من العقدة التي الى اليسار . بعد أن نعتبر بأن كل مصدر للفولتية هو دائرة نرى بأننا نحتاج أن نكتب قانون التيار لكرشوف فقط في العقدة 2 وفي العقدة المتراكبة والتي تحوي على العقدتين ومصدر الفولتية المعتمد . في العقدة

$$2(v_2 - v_1) + 1(v_2 - v_3) = 2$$

بينما تكون العقدة المتراكبة

$$1(v_3 - v_2) - 2v_x + 2v_4 + 1(v_4 - v_1) = 0$$

ثم نجد علاقة بين مصادر الفولتية وفولتية العقد :

$$v_1 = -1$$

$$v_3 - v_4 = 4v_x = 4(v_4 - v_1)$$

وأخيراً نعبر عن مصدر التيار المعتمد بواسطة المتغيرات المعينة :

$$2v_x = 2(v_2 - v_1)$$

ولذا سنحصل على اربع معادلات بفولتيات العقد الاربع :

$$-2v_1 + 3v_2 - v_3 = 2$$

$$v_1 = -1$$

$$v_1 - 3v_2 + v_3 + 3v_4 = 0$$

$$4v_1 + v_3 - 5v_4 = 0$$

$$v_1 = -1 \text{ V}$$

$$v_2 = 17/9 \text{ V}$$

$$v_3 = 17/8 \text{ V}$$

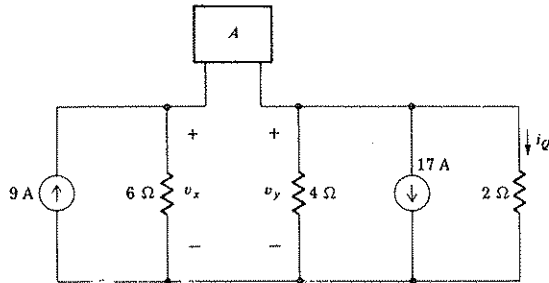
$$v_4 = 1/3 \text{ V}$$

والتي سيكون الحل لها هو

تمارين

3 - 1 استخدام التحليل العقدي لاجاد v_x في الدائرة المبينة في الشكل 6 - 3 اذا كان العنصر A يساوي (أ) مصدر تيار ذا 2-A ويؤشر السهم نحو اليمين (ب) مقاوماً ذا 8-Ω و (ح) مصدر فولتية ذا 10-V ويؤشر المرجع الموجب نحو اليمين .

الجواب V 42; 24; -16.91



الشكل 6 - 3 انظر التمرينين 1 - 3 و 2 - 3

2 - 3 استخدم التحليل العقدي لاجاد v_r في دائرة الشكل 6 - 3 اذا كان العنصر

(أ) مصدر تيار معتمد $0.2v_r$ ويؤشر السهم نحو اليسار

(ب) مصدر فولتية معتمد $3i_e$ والمرجع الموجب الى اليسار

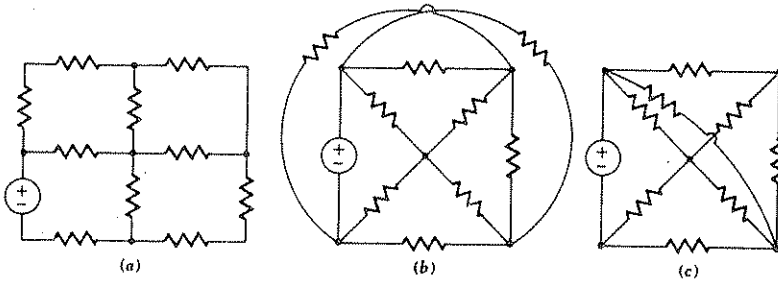
(ج) دائرة مفتوحة (د) دائرة قصر

الجواب V 32.5; -17.14; -8.73; 54

3 - 3 التحليل الشبكي MESH ANALYSIS

أسلوب التحليل العقدي الذي شرحناه في المقطع السابق كان عاماً ومن الممكن تطبيقه على أي دائرة كهربائية .

وهذه ليست الطريقة الوحيدة التي يمكن أن يدعى بها . وعلى كل حال ، وعلى وجه التحديد ستمر بنا طريقة شاملة للتحليل العقدي وأسلوب يعرف بالتحليل الداري *loop analysis* في خلاصة هذا الفصل .



شكل 7 - 3 (أ) دائرة مسطحة من الممكن رسمها على سطح مستو بدون أن تتقاطع (ب) دائرة غير مسطحة من غير الممكن رسمها على سطح مستو بدون تقاطع واحد على الأقل تقدير . (ج) دائرة مسطحة من الممكن رسمها بحيث تظهر كأنها غير مسطحة .

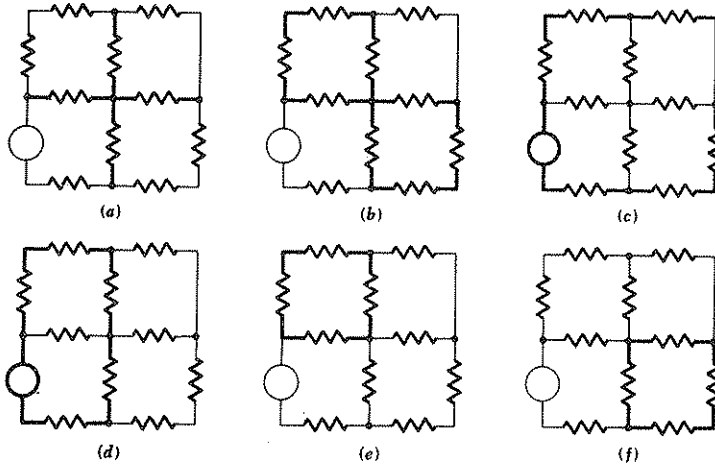
على كل حال دعنا أولاً نعتبر طريقة تدعى بالتحليل الشبكي . ولو أن هذا الأسلوب لا يمكن تطبيقه على أي شبكة الا أنه يمكن تطبيقه على معظم الشبكات التي سنحتاج الى تحليلها . وهذه الطريقة تستعمل بصورة واسعة . يطبق التحليل الشبكي *mesh analysis* على الشبكات المسطحة فقط وسنعرّف الاصطلاح الأخير فيما يأتي .

إذا كان من الممكن رسم الدائرة على مستوى مسطح بطريقة ما بحيث أن أي فرع لا يمر فوق ولا تحت أي فرع آخر . عندئذ فان تلك الدائرة تسمى بالدائرة المسطحة . لذلك فالشكل 7 - 3 (أ) يبين شبكة مسطحة . والشكل 7 - 3 (ب) يمثل شبكة غير مسطحة والشكل 7 - 3 (ج) يمثل شبكة مسطحة ولو أنها مرسومة بطريقة بحيث تظهر كشبكة غير مسطحة لأول وهلة .

في الفصل الأول . عرفت الدائرة بأنها الشبكة الحاوية على أقل تقدير على مسار مغلق واحد يمر فيه التيار والاسم المعروف لهذا المسار المغلق هو الدارة . ولهذا لو بدأنا بعقدة معينة ومررنا بمسار مغلق خلال الشبكة غير مارين بعقدة أو بعنصر أكثر من مرة واحدة وانتهينا بنفس العقدة ، فان المسار يدعى بالدائرة . يوضح الشكل 8 - 3 عدة أمثلة . المسارات المعتبرة هي المسارات المرسومة بخطوط غامقة ومن البديهي أن المسارين الأولين لا يمكن أن يكونا دارات لأن المسار إما أن لا يكون مغلقاً أو أن يمر خلال عقدة مرتين . وان المسارات الاربعة المتبقية كلها دارات . وتحتوي الدائرة على 11 فرعاً .

الشيبكة هي خاصية من خواص الدائرة المسطحة وهي غير معرفة بالنسبة لدائرة غير مسطحة وتعرف الشبكة بأنها دارة لا تحوي أي دارة أخرى داخلها . ولهذا فالدارات المؤشرة في الشكل 8 - 3 ج و د هي ليست شبكات . بينما تلك في ه و وهي شبكات وهذه الدائرة تحوي اربع شبكات .

وإذا كانت هناك شبكة مسطحة . فان التحليل الشبكي يمكن أن يستعمل لانجاز تحليلها . وهذا الاسلوب يحوي على مفهوم التيار الشبكي والذي سوف تقدمه عند دراسة التحليل للدائرة ذات الشبكتين للشكل 9 - 3 .

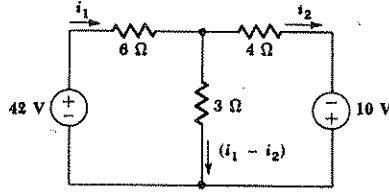


شكل 3-8 (أ) المسارات الموضحة بخطوط غامقة هي ليست بدارة لكونها ليست مغلقة (ب) والمسار هنا ليس بدارة لأنه يمر خلال العقدة المركزية مرتين .
 (ج) هذا المسار هو دارة ولكن ليس بشبكة لكونها تحتوي على دارات أخرى .
 (د) هذا المسار هو أيضاً دارة ولكن ليس بشبكة .
 (هـ) و (و) كل واحد من هذه المسارات هو دارة وشبكة .

كما فعلنا في دائرة الدارة الوحيدة ، سوف نبدأ بفرض تيار خلال أحد الفروع .

دعنا نسم التيار الساري الى اليمين خلال المقاوم 6Ω أوم ب i_1 . فاننا نروم تطبيق قانون الفولتية لكرشوف حول كل من الشبكتين ، والمعادلتان الناتجتان كافتتان لتعيين التيارين المجهولين . لذلك نختار تياراً ثانياً i_2 يسري الى اليمين في المقاوم 4 أوم .

كما بالامكان أن نسمي التيار الساري للأسفل خلال الفرع المركزي i_3 ، ولكن بديهي من قانون التيار لكرشوف ان i_3 يمكن أن يعبر عنه بواسطة التيارين المفروضين سابقاً ك $(i_1 - i_2)$. التيارات المفروضة مبينة في الشكل (9 - 3)



شكل 9-3 تياران i_1 و i_2 . مفروصان في دائرة ذات شبكتين .

وباتباع طريقة الحل لدائرة دائرة وحيدة ، نطبق قانون الفولتية لكرشوف للشبيكة

$$\begin{aligned} \text{على طرف اليسار ،} \quad -42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) &= 0 \\ \text{أو (6)} \quad 9i_1 - 3i_2 &= 42 \end{aligned}$$

وبعد ذلك لشبيكة الطرف الايمن .

$$\begin{aligned} -3(i_1 - i_2) + 4i_2 - 10 &= 0 \\ \text{أو (7)} \quad -3i_1 + 7i_2 &= 10 \end{aligned}$$

المعادلتان (6) و (7) هما معادلتان غير معتمدتين ولا يمكن اشتقاق احدهما من الأخرى (3)

وتوجد معادلتان ومجهولان وبحلها نجد : i_1 وهو 6 أمبير i_2 وهو 4 أمبير و $(i_1 - i_2)$ اذن هو 2A . أما علاقة الفولتية مع القدرة فيمكن ايجادها بسهولة اذا احتيجت .

ولو أن دائرتنا كانت تحوي على M من الشبيكات نفرض M من التيارات الفرعية ونكتب M من المعادلات غير المعتمدة (4) الحل بصورة عامة وبصورة نظامية يمكن ايجاده باستعمال المحددات .

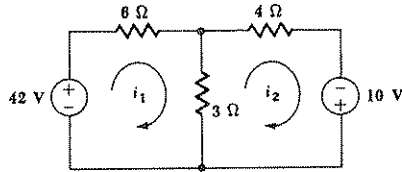
والآن دعنا نعتبر نفس المسألة بشكل مختلف قليلاً باستعمال تيارات الشبيكة نفرض تياراً يمر فقط حول محيط الشبيكة . اذا سمينا الشبيكة اليسرى بالشبيكة رقم 1 ، لذلك يمكننا أن نعين تياراً شبيكياً i_1 يسري في اتجاه عقرب الساعة حول هذه الشبيكة .

التيار الشبيكي مؤشر بسهم منحني مغلق على نفسه تقريباً ومرسوم داخل شبيكة مناسبة كما مبين في الشكل 10 - 3 . والتيار الشبيكي i_2 معين في الشبيكة الباقية . أيضاً باتجاه عقرب الساعة . على الرغم من أن الاتجاهات يمكن أن تؤخذ بأي اتجاه

(3) سوف نبين في الفقرة 3 - 8 بأن معادلات الشبيكة هي دائماً غير معتمدة

(4) البرهان لهذه العبارة يمكن ايجاده في الفقرة 3 - 8 .

كان ولكننا دائماً سنختار التيارات الشبيكة باتجاه عقرب الساعة لأن هذا يقلل من الخطأ نتيجة التماثل في المعادلات .
وليس لدينا بعد الآن تيار أو سهم مؤشر مباشرة على كل فرع في الدائرة .



شكل 10 - 3 تيارات شبيكة باتجاه عقرب الساعة معينة في كل شبيكة للدائرة المسطحة .

إن التيار خلال أي فرع يجب أن يحسب باعتبار التيارات الشبيكية المارة في كل شبيكة والتي يظهر فيها ذلك الفرع . وهذا ليس بالصعب لأنه من الواضح أنه لا يوجد فرع يظهر في أكثر من شبيكتين . فعلى سبيل المثال المقاوم 3Ω يظهر في كل من الدائرتين المقفلتين والتيار الذي يسري خلاله الى الأسفل هو $(i_1 - i_2)$. والمقاوم 6Ω يظهر فقط في الدائرة المقفلة 1 والتيار الذي يسري الى اليمين في ذلك الفرع يساوي تيار الدائرة المقفلة i_1 .

وإن تيار الدائرة المقفلة يمكن أن يعتبر وكأنه تيار الفرع كما عرفت التيارات i_1 و i_2 أعلاه وهذا ليس صحيحاً دائماً على أية حال لأنه قريباً سيتم اعتبار شبكة الدوائر التسع المقفلة المربعة وسنين بأن تيار الشبيكة الوسطية لا يمكن تعريفه كغيره من التيارات في أي فرع ما .

وإن واحداً من أكبر الفوائد في استعمال تيارات الشبيكات هو أن قانون التيار لكروشوف يمكن تطبيقه فيها بصورة ذاتية . فإذا سرى تيار شبيكة نحو عقدة ما فمن الواضح أن التيار يسري خارجاً عنها أيضاً .

فربما نلقت انتباهنا الى تطبيق قانون الفولتية لكروشوف . في الشبيكة اليسرى

$$-42 + 6i_1 + 3(i_1 - i_2) = 0$$

بينما للشبيكة اليمنى

$$3(i_2 - i_1) + 4i_2 - 10 = 0$$

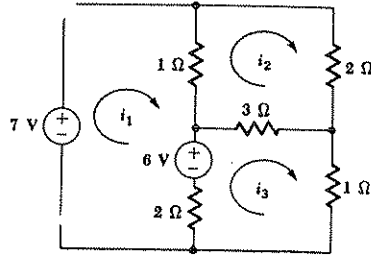
وهاتان المعادلتان تشبهان (6) و (7)
 دعنا نعتبر الدائرة الأخرى ذات العقد الخمس والفروع السبعة والشبكات الثلاثة
 المبينة في الشكل 11 - 3. وقد أشرت تيارات الشبكات الثلاثة المطلوبة كما
 موضح .

وبتطبيق قانون الفولتية لكرشوف حول كل شبكة .

$$-7 + 1(i_1 - i_2) + 6 + 2(i_1 - i_3) = 0$$

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

$$2(i_3 - i_1) - 6 + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 = 0$$



الشكل 11 - 3 تيارات الشبكات i_1 و i_2 و i_3 مفترضة في دائرة ذات خمس عقد وسبعة فروع وثلاث شبكات

$$3i_1 - i_2 - 2i_3 = 1$$

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$-2i_1 - 3i_2 + 6i_3 = 6$$

ولدى التبسيط

تودي قاعدة كرامر لاجاد i_3 الى

$$i_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{117}{39} = 3 \text{ A}$$

وتيارات الشبكة الاخرى هي $i_1 = 3 \text{ A}$ و $i_2 = 2 \text{ A}$.

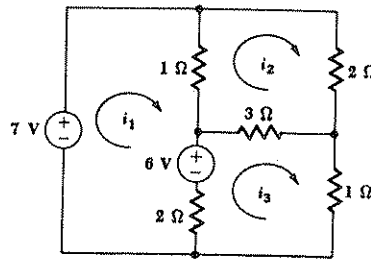
مرة أخرى نلاحظ أن لدينا محدد المقام متناظر حول القطر الرئيسي . وان هذا يحدث للدوائر التي تحوي فقط مصادر فولتية غير معتمدة عند تأشير تيار الشبكة

باتجاه عقارب الساعة حيث تظهر العناصر في الصف الأول للمحدد هي المعاملات التابعة لـ i_1, i_2, \dots, i_M في معادلة قانون الفولتية لكرشوف حول الشبكة الأولى كما أن الصف الثاني يعود الى الشبكة الثانية وهكذا . وان هذا النظام المتناظر الذي يظهر في محدد المقام يعبر عن محدد مصفوفة المقاومة للشبكة .

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

كيف يجب علينا تحويل هذه الطريقة بشكل مباشر عند ظهور مصدر تيار في الشبكة ؟ بالاستفادة من التحليل العقدي (والثنائي) يجب أن نشعر بأن هناك طريقتين ممكنتين . أولاً يمكننا تأشير الفولتية المجهولة عبر مصدر التيار ونطبق قانون الفولتية لكرشوف حول كل شبكة كالسابق ثم ننسب تيار المصدر الى تيارات الشبكات المؤشرة . وهذا على العموم هو الأسلوب الأكثر صعوبة .

والاسلوب الأفضل هو طريقة ثنائي العقدة المتراكبة للتحليل العقدي . وبدلاً من قصر دوائر مصادر الفولتية لخلق العقد المتراكبة وبالنتيجة ينقص عدد العقد فاننا الآن نفتح الدوائر أو نزيل مصادر التيار لتكوين الدارات (الشبكات المتراكبة) وبها نقلل العدد الكلي للدوائر المقفلة . نطبق قانون الفولتية لكرشوف فقط لتلك الشبكات في الشبكة المحورة .



الشكل 12 - 3 التحليل الشبكي مطبق على هذه الدائرة المحتوية على مصدر تيار بكتابة معادلة قانون الفولتية لكرشوف حول الدارة ،
7 فولت و 1 أوم و 3 أوم و 1 أوم

وكمثال لهذه الطريقة اعتبر الشبكة المبينة في الشكل 3.12 والتي فيها مصدر التيار غير المعتمد 7-A في الحدود المشتركة للدائرتين المقفلتين . لقد أشرت التيارات للدوائر المقفلة بـ i_1, i_2, i_3 وبفتح مصدر التيار للدائرة ذهنياً تتولد عندنا شبكة جديدة والتي تحوي الشبكة 1 و 3 . وبتطبيق قانون الفولتية لكرشوف حول هذه الدائرة .

$$\begin{aligned} -7 + 1(i_1 - i_2) + 3(i_3 - i_2) + 1i_3 &= 0 \\ i_1 - 4i_2 + 4i_3 &= 7 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad (8)$$

وحول الشبكة 2

$$\begin{aligned} 1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) &= 0 \\ -i_1 + 6i_2 - 3i_3 &= 0 \end{aligned} \quad \text{أو} \quad (9)$$

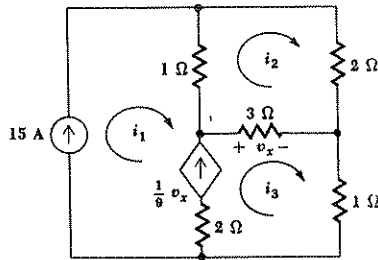
وأخيراً فان تيار المصدر ينسب الى تيارات الشبكات المفترضة .

$$i_1 - i_3 = 7 \quad (10)$$

وبحل (8) الى (10) لدينا

$$i_3 = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 0 \\ 1 & -4 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{28}{14} = 2 \text{ A}$$

ويمكننا ايضاً ايجاد أن $i_1 = 9 \text{ A}$ وأن $i_2 = 2.5 \text{ A}$



الشكل 13 - 3 التحليل الشبكي مطبق على هذه الدائرة المحتوية على مصدر تيار بكتابة معادلة قانون الفولتية لكرشوف حول الدارة ، 7 فولت و 1 أوم و 3 أوم و 1 أوم

وإن ظهور مصدر واحد أو أكثر يتطلب التعبير عن قيم هذه المصادر والمتغيرات التي تعتمد عليها بدلالة تيارات الشبيكات . ففي الشكل 13 - 3 على سبيل المثال نلاحظ بأن كلا من مصادر التيار المعتمدة وغير المعتمدة مشمولان في الشبكة . تيارات لثلاث شبيكات مؤشرة في الشكل وعند تطبيق قانون الفولتية لكرشوف على الدائرة المقفلة 2 :

$$1(i_2 - i_1) + 2i_2 + 3(i_2 - i_3) = 0$$

أن تيارات المصادر تظهر في الشبيكات 1 و 3 . وعندما تفتح دوائرها تبقى الشبيكة 2 فقط وتكون المعادلة جاهزة لها . لذا نكرس اهتمامنا الى معرفة كميات المصادر حاصلين على :

$$i_1 = 15$$

$$\frac{1}{2}v_s = i_3 - i_1 = \frac{1}{2}[3(i_3 - i_2)]$$

وإن
لذا

$$-i_1 + 6i_2 - 3i_3 = 0$$

$$i_1 = 15$$

$$-i_1 + \frac{1}{2}i_2 + \frac{3}{2}i_3 = 0$$

ومنها امامنا $i_1 = 15 A$ و $i_2 = 11 A$ و $i_3 = 17 A$. ويمكننا ملاحظة أننا ضيعنا قليلاً من الوقت بافتراض تيار الشبيكة i_1 الى الشبيكة اليسرى حيث كان يجب علينا افتراض تيار الشبيكة واعطائه القيمة $15 A$. دعنا نوجز الطريقة التي بها يمكننا الحصول على مجموعة معادلات الشبيكات لدائرة مقاومة :

1 - تأكد بأن الشبكة هي شبكة مستوية وإذا كانت غير مستوية فأن تحليل الشبيكات لا ينطبق عليها .

2 - اعمل مخططاً لدائرة بسيطة وأنيقة موضحاً جميع قيم العناصر والمصادر . وإن قيم المقاومة مفضلة على قيم التوصيلية وكل مصدر يجب أن يكون له رمز المرجع .

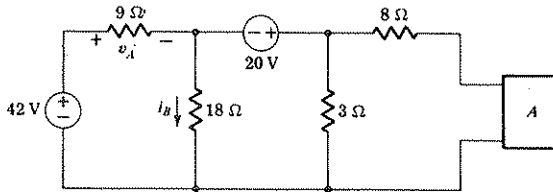
3 - مفترضين أن الدائرة لها M من الشبيكات أشر تيارات الشبيكات باتجاه عقرب الساعة في كل دائرة مقفلة بـ i_1 و i_2 و . . . و i_M .

4 - إذا كانت الدائرة تحوى فقط مصادر فولتية طبق قانون الفولتية لكرشوف حول كل شبيكة لغرض الحصول على مصفوفة المقاومة ، إذا كانت الدائرة فيها فقط مصادر فولتية غير معتمدة ساو فولتيات جميع المقاومات باتجاه عقرب الساعة فولتيات جميع المصادر عكس اتجاه عقرب الساعة ورتب الحدود من i_1 الى i_M .

ولكل مصدر فولتية معتمد يظهر ، أنسب فولتية المصدر والكمية المسيطرة الى المتغيرات i_1, i_2, \dots, i_M بما فيهما لو كانت جاهزة بهذا الشكل .
 5- إذا احتوت الدائرة على مصادر تيار ، استبدل الدائرة المعطاة مؤقتاً بأخرى بحيث أن كل مصدر يستبدل بدائرة مفتوحة ويساعد ذلك على تقليل عدد الشبكات بوحدة لكل مصدر تيار موجود في الدائرة .
 وان تيارات الشبكات المفترضة يجب عدم تغييرها . باستخدام تيارات الشبكات هذه يطبق قانون الفولتية لكرشوف حول كل من الشبكات أو الشبكات المتراكبة sunermeshes في الدائرة المعدلة . اربط كل مصدر تيار مع المتغيرات i_1 و i_2 . . . i_M إذا لم تكن بتلك الصيغة .

تمارين

3.3 استخدام التحليل الشبكي لايجاد القدرة المجهزة من المصدر ذي الـ 20-V في دائرة الشكل 3-14 إذا كان العنصر A : (أ) مصدر فولتية ذا 4-V اشارته الموجبة الى الأسفل (ب) مقاوماً ذا 10-Ω (ج) مصدر تيار ذا 16-A يتجه سهمه نحو الأعلى
 الجواب 0; 112; 120 W



الشكل 3-14 انظر التمرينين 3.3 و 3.4

3.4 استخدام التحليل الشبكي لايجاد التيار الذي يدخل الطرف الأعلى من العنصر A في الشكل 3-14 . إذا كان العنصر A : (أ) مصدر فولتية معتمدة 4V و اشارته الموجبة الى الأعلى (ب) مصدر تيار معتمد 0.1A ، واتجاه سهمه نحو الأعلى .
 الاجوبة 5.83A ، 1.767

4.3 تحويلات المصادر SOURCE TRANSFORMATIONS

في دراستنا السابقة كنا نستخدم باستمرار مصادر الفولتية والتيار المثالية . وقد حان الوقت الآن لأخذ اجراءات اقرب للحقيقة بدراسة عملية للمصادر . هذه المصادر

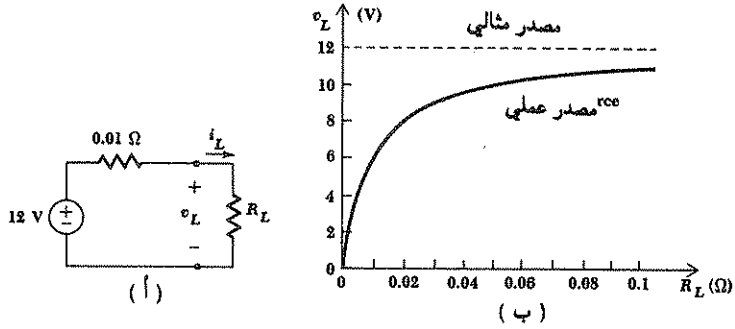
ستمكننا من عمل تمثيل أكثر واقعية للأدوات الحقيقية . ولدى تعريفنا للمصادر العلمية سوف ندرس الطرق التي بها يمكن استبدال مصادر التيار العملية والفولتية بعضها البعض الاخر دون أن يؤثر ذلك على بقية أجزاء الدائرة . وتدعى مثل هذه المصادر بالمصادر المكافئة . اذ يمكن تطبيق هذه الطرق لكل من المصادر غير المعتمدة والمعتمدة على حد سواء .

وان مصدر الفولتية المثالي قد عرف أنه الأداة التي فولتية نهاياتها لاتعتمد على التيار المار خلالها . فمصدر التيار المستمر 1 A ينتج تياراً قيمته 1 A خلال المقاوم $1-\Omega$ وتياراً قيمته $1,000,000\text{ A}$ خلال المقاوم $1-\mu\Omega$ ويمكنه تزويد كمية غير محدودة من القدرة . ومن البديهي أنه لا يوجد مثل هذه الأداة عملياً وان كنا متفقين على أن المصدر الحقيقي يمكن أن يمثل بمصدر مثالي فقط طالما أن التيارات والقدرات المسحوبة منه قليلة نسبياً . فعلى سبيل المثال يمكن تقريب بطارية الخزن في المركبة بمصدر فولتية تيار مستمر اذا كان التيار محدداً بعدة أمبيرات .

وعلى أية حال فان كل من يحاول تشغيل المركبة حينما يكون الضوء الامامي مشتغلاً يلاحظ بأن الأضوية تعتم قليلاً حينما يطلب من البطارية تزويد تيار التشغيل الذي هو بحدود 100 A أو أكثر إضافة الى تيار الأضوية . فان مصدر الفولتية المثالي لا يكافىء بطارية الخزن هذه بدقة تحت هذه الظروف .

ان مصدر الفولتية المثالي يجب ان يحور ليدخل في حساب فولتية النهايات عند سحب تيارات كبيرة منها . دعنا نفترض بأننا لاحظنا في التجربة ان بطارية الخزن لها فولتية نهايات 12 V عند عدم سريان التيار خلالها . وأن الفولتية قلت الى 11 V حين سريان 100 A . لذا فان التمثيل الأكثر صحة يمكن ان يكون مصدر فولتية مثالي 12 V على التوالي مع المقاوم الذي تظهر عبره الفولتية 1 V حينما يسري تيار مقداره 100 A . وان المقاوم يجب ان يكون $0.01\ \Omega$ هذا وان مصدر الفولتية المثالي وهذه المقاومة المتواليه يكون مصدر الفولتية العملي . يبين الشكل 15 - 3 (أ) مصدر الفولتية العملي هذا مربوطاً الى مقاوم حمل عام R_L وفولتية النهايات للمصدر العملي هي نفسها الفولتية عبر R_L ومؤشرة ب v_L . ففي الشكل 15 - 3 (ب) رسم مخطط فولتية النهايات كدالة لمقاومة الحمل ويمكن منها الاستدلال على الحقيقة التي تقول بأن فولتية الاخراج تقترب من فولتية المصدر المثالي فقط لقيم كبيرة لمقاومة الحمل

حيث ان التيار المسحوب قليل نسبياً . ان فولتية النهايات تكون نصف فولتية المصدر فقط عندما تكون مقاومة الحمل مساوية للمقاومة الداخلية للمصدر العملي .
دعنا الآن نعتبر مصدر للفولتية عملي عاماً كالمتين في الشكل 16 - 3 . فولتية المصدر المثالي هي v_s والمقاومة R_{sr} تدعى المقاومة الداخلية ومربوطة على التوالي معها . ان هذه المقاومة هي ليست المقاومة التي تسلك أو تلحم في الدائرة ولكنها مقاومة تخدم فقط لحساب فولتية النهايات التي تقل كلما زاد تيار الحمل



الشكل 15 - 3 (أ) مصدر عملي يقرب تصرف بطارية خزن معينة ذات 12 فولت ربطت الى حمل مقاومي R_L (ب) فولتية الاطراف تنقص بنقصان R_L ويزداد i_L

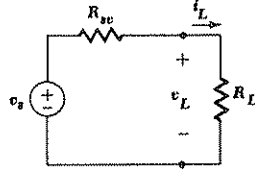
لذا فان وجودها يمكننا من تمثيل مصدر الفولتية الحقيقي بشكل أكثر واقعية .
فالفولتية v_L عبر مقاوم الحمل R_L هي

$$v_L = \frac{v_s}{R_{sr} + R_L} R_L \quad (11)$$

وتيار الحمل هو

$$i_L = \frac{v_s}{R_{sr} + R_L} \quad (12)$$

وان مصدر التيار المثالي هو الآخر لاجود له في الواقع وليس هناك اداة حقيقية تزود تياراً ثابتاً بغض النظر عن مقاومة الحمل التي تربط اليها . وهناك بعض الدوائر تستخدم ترانزسترات معينة بإمكانها ان تجهز تياراً ثابتاً لمدى كبير من مقاومات الحمل ولكن مقاومة الحمل يمكن دائماً جعلها كبيرة مافيه الكفاية بحيث ان التيار خلالها يصبح قليل جداً . وان القدرة اللانهائية ببساطة لاجود لها .



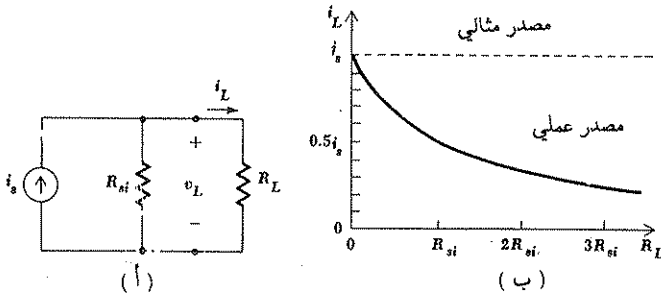
الشكل 3-16 مصدر فولتية عملي عام مربوط الى حمل مقاومي R_L .

ويعرف مصدر التيار العملي بأنه مصدر التيار المثالي على التوازي مع المقاومة الداخلية. وان مثل هذا المصدر مبين في الشكل 17 - 3 (أ) كما يتضح فيه التيار i_L والفولتية v_L الناتجة عبر مقاوم الحمل R_L ويظهر ان :

$$v_L = \frac{R_{si} R_L}{R_{si} + R_L} i_s \quad (13)$$

وكذلك

$$i_L = \frac{R_{si}}{R_{si} + R_L} i_s \quad (14)$$



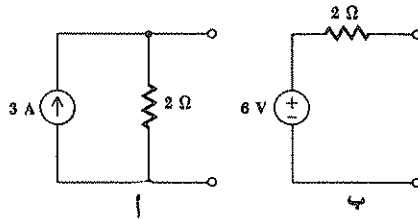
الشكل 17 - 3 (أ) مصدر تيار عملي عام مربوط الى حمل مقاومي R_L . (ب) تيار الحمل المجهز من مصدر التيار العملي مبين كدالة لمقاومة الحمل

ان التغيير في تيار الحمل مع تغير مقاومة الحمل مبين في الشكل 17 - 3 (ب) ومن الواضح ان قيم تيار الحمل وتيار المصدر المثالي متساوية تقريباً فقط لقيم مقاومة الحمل الصغيرة بالمقارنة مع R_{si} .

بعد تعريف كل من المصادر العملية يمكننا الآن دراسة مكافئاتها. وسوف نعرف مصدرين كأنهما متكافئين اذا كان كل منهما ينتج تياراً وفولتية مماثلين لأي حمل يربط على نهايتيهما وبكلمة أخرى اذا كان لدينا صندوقين مبهمين black

boxes كل منهما يحوي زوجاً واحداً من النهايات فليس هناك طريقه يمكننا بها التفريق بين الصندوقين إلا بقياس التيار أو الفولتية في حمل مقاومي ويجب ان يلاحظ بدقة بأنه على الرغم من أن المصادر المتكافئة تجهز نفس التيار والفولتية والقدرة الى الاحمال المقاومية المتشابهة فان القدرة التي تجهزها كل من المصادر المثالية والقدرة الممتصة في R_{st} و $R_{st'}$ يمكن أن تكونا مختلفتين تماماً .
ان الشروط اللازمة للتكافؤ يمكن تثبيتها الآن طالما أن تيارات الحمل يجب أن تكون متشابهة . فمن المعادلتين (12) و (14) لدينا .

$$i_L = \frac{v_s}{R_{st} + R_L} = \frac{R_{st'} i_s}{R_{st} + R_L}$$



الشكل 18 - 3 (أ) مصدر تيار عملي (ب) المكافئ العملي كمصدر فولتية .
 $v_s = R_{st'} i_s$ $R_{st} = R_{st} = R_{st'}$.

وإذا طلب أن يكون هذان التعبيران متساويان لأي R_L فانه ينتج لدينا أن

$$R_{st} = R_{st} = R_{st'} \quad (15)$$

$$v_s = R_{st'} i_s \quad (16)$$

حيث أننا سوف نفرض أن R_s تمثل المقاومة الداخلية لأي من المصدرين العمليين فمن السهل تبيان أن هذين الشرطين يمكن الحصول عليهما من (11) و (13) .

وكمثال لاستعمال هذه الأفكار لنأخذ مصدر التيار المبين في الشكل 18 - 3 (أ) ولما كانت مقاومته الداخلية هي 2Ω فان المقاومة الداخلية لمصدر الفولتية العملي المكافئ هي أيضاً 2Ω وفولتية مصدر الفولتية المثالي الموجود ضمن الفولتية العملي هي $6V = (2)(3)$. ومصدر الفولتية العملي المكافئ مبين في الشكل 18 - 3 (ب) .

فغرض تدقيق التكافؤ دعنا ننظر الى المقاوم 4Ω مربوط الى كل مصدر ، ففي كلتا الحالتين نجد أن تياراً مقداره $1A$ وفولتية $4V$ وقدرة $4W$ تلازم الحمل 4Ω .

وعلى أي حال فإن مصدر التيار المثالي يجهز قدرة كلية مقدارها 12 W بينما مصدر الفولتية المثالي يجهز فقط 6 W .
هذا يناظر تبدد قدرات مختلفة في المقاومات الداخلية .

لنسلط مزيداً من الضوء على شروط التكافؤ بطريقة مغايرة قليلاً . فلو كان لدينا مصدر تيار عملي وطلب منا إيجاد مصدر الفولتية المكافئ ، فهناك مجهولان v_s و R_{sv} وعليه نحتاج الى حقيقتين أو معادلتين وربما نحصل على ذلك باجبار التيار الذي يجهزه كل مصدر الى دائرة قصر والفولتية التي تجهز من قبل كل منها فتح الدائرة أن تكون متشابهة . فتساوى أولاً تيارات دائرتي القصر حيث

$$i_{Loc} = i_s = \frac{v_s}{R_{sv}}$$

لذا فإن

$$v_s = R_{sv} i_s$$

ثم إن فولتية الدائرة المفتوحة تكونان .

$$v_{Loc} = v_s = R_{sv} i_s \quad \text{أو} \quad v_s = R_{sv} i_s$$

$$R_{sv} = R_{st} = R_s \quad \text{وأن} \quad v_s = R_s i_s \quad \text{وأخيراً}$$

كالسابق

يمكن تطوير نظرية للقدرة لكي تكون مفيدة جداً وذلك بالرجوع الى الفولتية العملية أو مصدر التيار . فلمصدر الفولتية العملي (شكل 16 - 3 مع $R_{sv} = R_s$) فإن القدرة المجهزة الى الحمل R_L هي

$$p_L = i_L^2 R_L = \frac{v_s^2 R_L}{(R_s + R_L)^2}$$

ولايجاد قيمة R_L التي تمتص أقصى قدرة من المصدر العملي المعطى نفاضل المقدار اعلاه بالنسبة الى R_L .
ونساوي التفاضل بالصفر لنحصل على .

$$\frac{dp_L}{dR_L} = \frac{(R_s + R_L)^2 v_s^2 - v_s^2 R_L (2)(R_s + R_L)}{(R_s + R_L)^4}$$

$$2R_L(R_s + R_L) = (R_s + R_L)^2$$

$$R_s = R_L$$

أو أن

وبما أن كلا من $R_L = 0$ و $R_L = \infty$ يعطي القيمة الصغرى ($p_L = 0$) وبما أننا وجدنا تساوي مصادر التيار والفولتية ، لذا فاننا برهنا نظرية انتقال القدرة القصوى التالية .

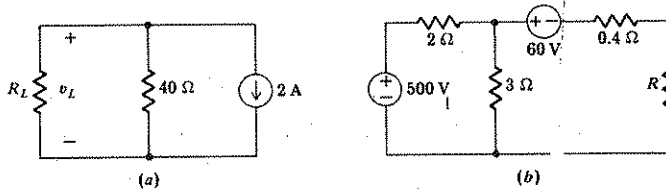
ان مصدر الفولتية غير المعتمد المربوط على التوالي مع مقاومة R_e أو مصدر التيار غير المعتمد المربوط على التوازي مع مقاومة R_L يجهزان أقصى قدرة الى حمل مقاومي $R_e = R_L$ حينما

لذا فان نظرية انتقال القدرة القصوى تخبرنا أن مقاوماً ذا $2-\Omega$ يسحب أقصى قدرة (4.5 W) من أي من المصدرين العمليين المبينين في الشكل 3 - 18 بينما تستلم مقاومة مقدارها 0.01Ω قدرة عظمى (مقدارها 3.6 kW) في الشكل 3 - 15

تمارين

3 - 5 باستخدام $R_L = 10 \Omega$ في الدائرة المبينة في الشكل 3 - 19 ، أوجد v_L (ب) حول مصدر التيار العملي الى مصدر فولتية عملي ثم أوجد v_L مرة أخرى اذا كانت $R_L = 10 \Omega$ (ح) مامقدار القدرة المجهزة الى المقاوم $40-\Omega$ في كل حالة (د) ماقيمة R_L التي تستهلك أقصى قدرة .

الجواب $-16 \text{ V}; -16 \text{ V}; 102.4 \text{ W}; 6.4 \text{ W}; 40 \Omega$



الشكل 3 - 19 انظر التمرينين 3 - 5 و 3 - 6

3 - 6 بعد تحويل مصدر الفولتية العملي المبين في الشكل 3 - 19 ب المتكون من $2-\Omega$ و 500-V الى مصدر تيار عملي ، امزج المقاومات المتوازية ثم أعد تحويلها مرة أخرى الى مصدر فولتية عملي ثم امزج المقاومات والمصادر المتواليه . (أ) مامقدار القدرة المجهزة الى المقاوم R ، اذا كانت $R = 1.4 \Omega$ (ب) مامقدار أقصى قدرة يمكن أن تجهز الى R (ج) مامقدار R الكبيرة التي تستهلك 1 W بالضبط

الجواب $8.96 \text{ kW}; 9 \text{ kW}; 57.6 \text{ k}\Omega$

5 - 3 الخطية والتراكب LINEARITY AND SUPERPOSITION

ان جميع الدوائر التي حللناها لحد الآن (والتي سوف نحللها بعد) هي دوائر خطية لذا علينا الآن أن نكون أكثر دقة في تعريف الدائرة الخطية . واذا تم لنا ذلك فانه يمكننا دراسة أهم نتائج الخطية الا وهي نظرية التراكب . ان هذه القاعدة هي الأساس وسوف تظهر بصورة متكررة في دراستنا لتحليل الدائرة الخطية . وبالحقيقة فان عدم تطبيق التراكب على الدوائر غير الخطية هو السبب الذي يعقد التحليل . وان قاعدة التراكب تنص على أن الاستجابة (التيار المطلوب او الفولتية) في أي نقطة في دائرة خطية لها أكثر من مصدر غير معتمد يمكن الحصول عليها كمجموع الاستجابات المسببة من قبل كل مصدر غير معتمد يعمل بانفراد . وفي المناقشة التالية سوف نستقصي معنى « الخطي » و « يعمل بانفراد » وسوف نأخذ الملاحظات على شكل أوسع للنظرية .

دعنا أولاً نعرف العنصر الخطي على أنه العنصر غير الفعال الذي تكون فيه علاقة الفولتية والتيار خطية . وبالعلاقة الفولتية والتيار الخطية سوف نعني بأن ضرب التيار المتغير مع الزمن خلال العنصر بالثابت K يؤدي الى ضرب الفولتية المتغيرة مع الزمن عبر العنصر بنفس الثابت K . لحد الآن عرف المقاوم فقط العنصر غير الفعال بعلاقة الفولتية والتيار التالية

$$v(t) = Ri(t)$$

ومن الواضح أنها خطية وبالحقيقة اذا رسم مخطط لـ $v(t)$ كدالة لـ $i(t)$ فالنتيجة هي خط مستقيم وسوف نرى في الفصل 4 بأن معادلات تعريف الفولتية والتيار للمحثة والسعة هي أيضاً علاقات خطية شأنها شأن معادلة تعريف المحثة التبادلية التي ستمر بنا في الفصل 15 .

يجب أيضاً تعريف المصدر المعتمد الخطي كمصدر التيار أو الفولتية المعتمد الذي يتناسب تياره او فولتيته الخارج له فقط مع اس الدرجة الاولى لبعض التيار او الفولتية المتغيرين في الدائرة أو مع مجموع كميات كهذه أي أن مصدر الفولتية المعتمد $v_s = 0.6i_1 - 14v_2$ هو خطي ولكن $v_s = 0.6i_1^2$ و $v_s = 0.6i_1v_2$ ليست خطية .

ربما نعرف الدائرة الخطية كانها الدائرة المتكونة كلياً من المصادر غير المعتمدة والمصادر المعتمدة الخطية والعناصر الخطية . ومن هذا التعريف من الممكن تبين

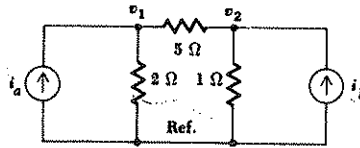
أن (5) « الاستجابة تتناسب مع المصدر) أو أن ضرب جميع الفولتيات للمصادر غير المعتمدة والتيارات بالثابت K يزيد كل استجابات التيار والفولتية بنفس العامل K (بضمنها إخراج فولتية أو تيار المصدر المعتمد).

ان أهم نتيجة للخاصية الخطية هي التراكب. دعنا نبرهن أساس التراكب بدراسة الدائرة التي في الشكل 20 - 3 التي تحوي مصدرين غير معتمدين علماً بأن مولدي التيار هما اللذان يجبرا التيارين على السريان i_n و i_b على السريان في الدائرة. لهذا السبب تدعى المصادر غالباً بالدالات المرغمة كما تدعى الفولتيات التي تنتجها بين العقد 1 و 2 وعقدة المصدر دالات الاستجابة أو ببساطة الاستجابات. وأن كلا من الدالات المرغمة والاستجابات يمكن أن تكون دالات للزمن.

إن معادلات العقدة لهذه الدائرة هي

$$0.7v_1 - 0.2v_2 = i_n \quad (17)$$

$$-0.2v_1 + 1.2v_2 = i_b \quad (18)$$



الشكل 20 - 3 دائرة ذات ثلاث عقد تحتوي على دالتين قسريتين مستخدمتان لتوضيح قاعدة التراكب

والان دعنا نقوم بالتجربة x فنغير الدالتين المرغمتين الى i_{ax} و i_{bx} فالفولتيتان المجهولتان ستختلفان الآن وسوف نفرضها v_{1x} و v_{2x} لذا

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_{ax} \quad (19)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_{bx} \quad (20)$$

(5) يتضمن البرهان أولاً تبين أن استعمال تحليل العقدة لدائرة خطية يمكن أن ينتج فقط معادلات خطية

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n = b \quad \text{بالشكل}$$

حيث أن a_i هي ثوابت (مزيج المقاومة أو قيم المعثات والثوابت التي تظهر في تعابير المصادر المعتمدة) والفولتيات المجهولة (الاستجابات) و b هي قيمة المصدر غير المعتمد أو مجموع قيم المصادر غير المعتمدة. فلو أعطينا مجموعة معادلات كهذه وضربت كافة القيم لـ K فإنه من الواضح بأن حل المجموعة الجديدة هذه ستكون فولتيات العقدة Kv_1, Kv_2, \dots, Kv_n

بعدها نقوم بالتجربة y بتغيير تيارى المصدرين الى i_{av} و i_{bv} وبفرض أن الاستجابتين هما v_{1v} و v_{2v}

$$0.7v_{1v} - 0.2v_{2v} = i_{av} \quad (21)$$

$$-0.2v_{1v} + 1.2v_{2v} = i_{bv} \quad (22)$$

وهذه المجموعات الثلاثة تصنف نفس الدائرة مع تيارات المصادر المختلفة وبالإضافة (19) الى (21)

$$(0.7v_{1x} + 0.7v_{1v}) - (0.2v_{2x} + 0.2v_{2v}) = i_{ax} + i_{av} \quad (23)$$

$$0.7v_{1x} - 0.2v_{2x} = i_a \quad (17)$$

وبإضافة (20) الى (22)

$$-(0.2v_{1x} + 0.2v_{1v}) + (1.2v_{2x} + 1.2v_{2v}) = i_{bx} + i_{bv} \quad (24)$$

$$-0.2v_{1x} + 1.2v_{2x} = i_b \quad (18)$$

حيث كتبت (17) مباشرة أسفل (23) و (18) أسفل (24) لسهولة المقارنة .

ان خطية جميع هذه المعادلات تسمح لنا مقارنة (23) مع (17) و (24) مع (18) والحصول على استنتاج مفيد . اذا اخترنا i_{ax} و i_{av} بحيث ان المجموع هو i_a واخترنا i_{bx} و i_{bv} بحيث أن مجموعها هو i_b وعليه فان الاستجابات المطلوبة v_{1x} و v_{2x} يمكن ايجادها بجمع v_{1v} الى v_{1x} و v_{2v} الى v_{2x} على التعاقب . وبكلمة اخرى يمكننا ان نقوم بالتجربة x ونلاحظ الاستجابات ونقوم بالتجربة y ونلاحظ الاستجابات وأخيراً نجمع الاستجابات المتناظرة . فهذه الاستجابات هي استجابات الدائرة الاصلية للمصادر غير المعتمدة الكلية التي هي مجموع المصادر غير المعتمدة المستعملة في التجربتين x و y . وهذا هو مضمون فكرة قاعدة التراكب .

ومن الواضح أنه يمكننا توسيع هذه النتائج بتجزئة أي من تيار المصدر الى عدة أجزاء حسب رغبتنا . وليس هناك من سبب في استطاعتنا القيام بالتجارب z و q أيضاً . أنه من الضروري فقط ان يكون المجموع الجبري للأجزاء مساو للتيار الاصيلي .

ان نظرية التراكب تظهر عادة كالآتي :

(في أي شبكة مقاومة خطية تحوي عدة مصادر يمكن حساب الفولتية عبر او التيار خلال اي مقاوم او مصدر بالجمع الجبري للفولتيات على انفراد او التيارات

المتسببة بواسطة كل مصدر غير معتمد يعمل لوحده مع جميع مصادر الفولتية غير المعتمدة مستبدلة بدوائر قصر وجميع مصادر التيار غير المعتمدة مستبدلة بدوائر مفتوحة .

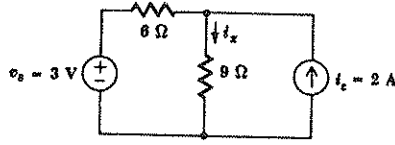
لذا لو كان هناك عدد من المصادر المعتمدة مقداره N علينا ان نجري عدداً من التجارب مقداره N ان كل مصدر غير معتمد يكون فعالاً في تجربة واحدة فقط ويكون هناك مصدر غير معتمد واحد فقط في كل تجربة . ان مصدر الفولتية غير الفعال وغير المعتمد يكافئ دائرة قصر أما مصدر التيار غير المعتمد وغير الفعال فيكافئ دائرة مفتوحة . لاحظ ان المصادر المعتمدة بصورة عامة تكون فعالة في كل تجربة .

وان الدائرة المستخدمة مثلاً فيما سبق يجب ان تشير الى ان نظرية اقوى يجب ان تكتب : ان مجموعة من المصادر غير المعتمدة يمكن ان تجعل معتمدة وغير معتمدة معاً اذا أردنا ذلك . فمثلاً لنفرض ان هناك ثلاثة مصادر . تنص النظرية أعلاه على أنه يمكن ايجاد استجابة معطاة بافتراض كل من المصادر الثلاثة يعمل منفرداً ثم جمع النتائج الثلاث أو بطريقة أخرى يمكن ايجاد الاستجابة الناتجة من المصدرين الاول والثاني مع جعل الثالث غير فعال ثم اضافة الاستجابة الناتجة من المصدر الثالث حينما يعمل منفرداً . ولهذا يؤدي بنا الى معالجة عدد من المصادر مجتمعة مع بعضها كنوع من المصادر المتراكبة .

وليس هناك سبب يستدعي ان يأخذ المصدر غير المعتمد قيمته المفترضة في قيمة مقدارها صفر في عدة تجارب . من الضروري فقط لمجموع عدة قيم ان تكون مساوية للقيمة الأصلية . ان مصدراً غير فعال *inactive* يؤدي دائماً تقريباً الى دائرة بسيطة .

دعنا نوضح تطبيق قاعدة التراكب باخذ مثال يظهر فيه كل من نوعي المصدر غير المعتمد . ومن غير الضروري تحويل أي من المصدرين لدائرة الشكل (21 - 3) دعنا نستعمل التراكب لكتابة تعبير تيار الفرع المجهول i_x . دعنا نلغ أولاً مصدر التيار ونحصل على جزء i_x بسبب مصدر الفولتية والذي هو i_x . ثم نلغ مصدر الفولتية ونطبق تقسيم التيار فالجزء المتبقي لـ i_x يتضح بأنه $0.8A$. ويمكننا كتابة الجواب بالتفصيل كالآتي :

$$i_x = i_x|_{i_s=0} + i_x|_{v_s=0} = \frac{3}{6+9} + 2 \frac{6}{6+9} = 0.2 + 0.8 = 1.0 \text{ A}$$



الشكل 21 - 3 دائرة تحتوي على مصدر تيار غير معتمد ومصدر فولتية غير معتمد يمكن تحليلها بقاعدة التراكب .

وكمثال لتطبيق قاعدة التراكب على دائرة تحوي مصدراً معتمداً لناخذ الشكل (22 - 3) ونفتش عن i_x ونفتح أولاً دائرة المصدر 3-A. ومعادلة الدائرة المقفلة هي

$$-10 + 2i_x' + 1i_x' + 2i_x' = 0$$

$$i_x' = 2$$

وعليه

بعدها نقصر دائرة المصدر 10-V ونكتب معادلة العقدة المفردة

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'' - 2i_x''}{1} = 3$$

ونسب الكمية المسيطرة للمصدر المعتمد v'' ,

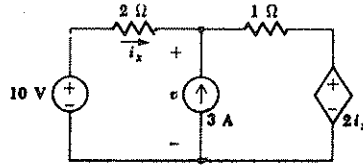
$$v'' = -2i_x''$$

ونجد أن

$$i_x'' = -0.6$$

ولذا

$$i_x = i_x' + i_x'' = 2 - 0.6 = 1.4$$



الشكل 22 - 3 يمكن استخدام نظرية التراكب لتحليل هذه الدائرة أولاً بالاستعاضة عن المصدر 3-A بدائرة مفتوحة ثم بالاستعاضة عن المصدر 10-V بدائرة قصر. يبقى مصدر الفولتية المعتمد فعالاً دائماً (الا إذا كان $i_x = 0$)

ومن الطبيعي أن يتم توفير قليل من الوقت أو ربما لا يمكن توفير أي وقت في تحليل الدائرة الحاوية على مصدر أو أكثر من المصادر المعتمدة باستعمال قاعدة التراكب . لأنه يجب أن يكون هناك على الأقل مصدرين في حالة اشتغال : أحدهما مصدر غير معتمد وجميع المصادر المعتمدة .

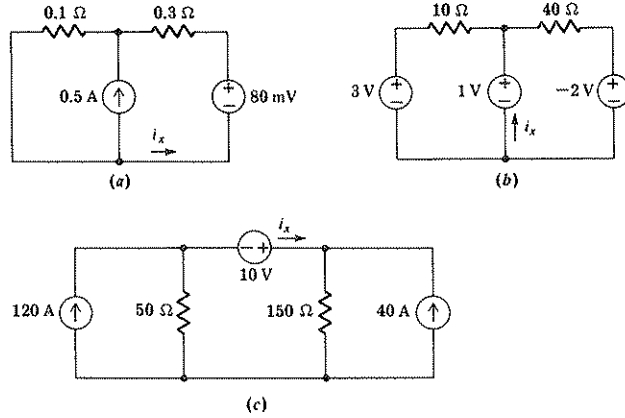
يجب أن نكون على الدوام حذرين من تحديدات التراكب فهي ممكنة التطبيق فقط على الاستجابات الخطية ، لذا فإن الاستجابة الشائعة كثيراً غير الخطية (القدرة) لاتخضع للتراكب . فعلى سبيل المثال لنأخذ بطاريتين 1-V على التوالي مع المقاومة 1-Ω فالقدرة المجهزة الى المقاوم من الواضح أنها 4 W ولكن لو طبقنا خطأ نظرية التراكب يمكن أن نقول أن كل بطارية لوحدها تجهز 1W لذا فإن القدرة الكلية 2W وهذا غير صحيح .

تمرين :

7 - 3 استخدم نظرية التراكب لايجاد i_x في كل من الدوائر المبينة في الشكل

2 - 32

الجواب 125; 50; 75 mA



الشكل 23 - 3 انظر التمرين 3-7

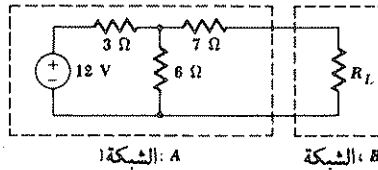
3 - 6 نظريات ثيفن ونورتن THÉVENIN'S AND NORTON'S THEOREMS

بعد ان درسنا قاعدة التراكب من الممكن تطوير نظريتين اخريتين واللتين تبسطان التحليل لدوائر خطية كثيرة . تدعى أولى هذه النظريات نسبة للعالم أيم . ايل ثيفن (M. L. Thévenin) المهندس الفرنسي الذي اشتغل في التلغرافات والذي نشر نص النظرية أولاً في 1883 والثانية يمكن أن تعتبر ملازمة للأولى وتنسب الى أى . ايل . نورتن (E. L. Norton) العالم في مختبرات شركة بيل للتلغرافات دعنا الآن

نفترض بأننا نحتاج الى اجراء تحليل علمي للدائرة فربما نرغب في حساب التيار والفولتية والقدرة المجهزة الى مقاوم حمل منفرد من قبل ماتبقى من الدائرة التي ربما تتكون من أي عدد من المصادر والمقاومات أو ربما نرغب في ايجاد الاستجابة لقيم مختلفة من الحمل المقاوم . وان نظرية ثيفنن تخبرنا بأنه بالإمكان استبدال كل شيء عدا الحمل المقاوم بدائرة مكافئة تحوي فقط مصدر فولتية غير معتمد على التوالي مع المقاوم . فالاستجابة المقاسة على الحمل المقاوم سوف لا تتغير وباستعمال نظرية نورتن نحصل على مكافئ يتكون من مصدر تيار غير معتمد على التوازي مع المقاوم .

لذا يجب أن يكون واضحاً بأن أحد الاستعمالات الرئيسة لنظريات ثيفنن ونورتن هو استبدال الجزء الكبير من الشبكة وغالباً ماتكون الجزء المعقد أو غير المفيد بمكافئ بسيط . وان الدائرة البسيطة الجديدة تمكننا من اجراء حسابات سريعة لفولتية والتيار والقدرة والتي باستطاعة الدائرة الاصلية أن تجهزها للحمل . كذلك تساعدنا لاختيار أحسن قيمة لمقاومة الحمل . ففي مضخم القدرة الترانزستور على سبيل المثال يمكننا مكافئ ثيفنن أونورتن من حساب القدرة القصوى الممكن أخذها من المضخم وكذلك ايجاد الحمل المطلوب لتحقيق أقصى تحويل للقدرة او للحصول على أقصى فولتية عملية او تضخيم للتيار .

كمثال أولي لناخذ الدائرة المبينة في الشكل 24 - 3 ففيها يفصل الخط المنقط الدائرة الى الشبكتين A و B وسنفرض أننا مهتمون بالشبكة B المحتوية على مقاوم الحمل R_L . ويمكن تبسيط الشبكة باجراء عدد من تحويلات المصادر المتكررة . وفي البداية نعتبر المصادر ذات 12-V والمقاوم $3\text{-}\Omega$ كمصدر عملي للفولتية ونستعيض عنه بمصدر تيار عملي مقداره 4-A على التوازي مع $3\text{-}\Omega$.

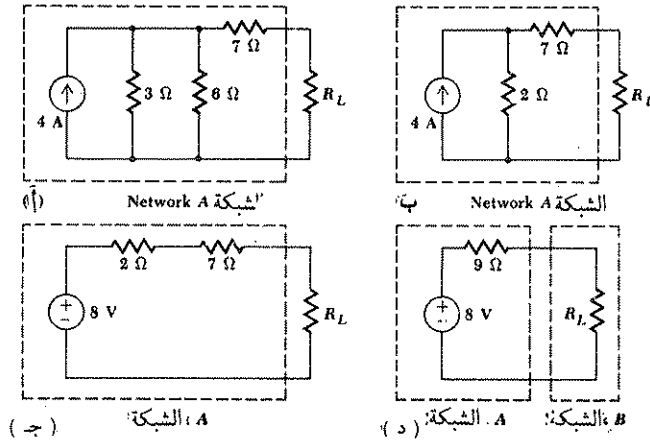


الشكل 24 - 3 دائرة مقاومة بسيطة قسمت الى شبكتين ، الشبكة A التي لاتهمنا بدقة والشبكة B التي هي حمل مقاومي يهمنا في دراستنا .

وان المقاومات المتوازية تدمج بعدئذ وتكون 2Ω وأن مصدر التيار العملي الناتج يعاد تحويله الى مصدر فولتية عملي وهذه الخطوات موضحة في الشكل (26 - 3) والنتيجة النهائية تظهر في الشكل (26 - 3 د) . ومن وجهة نظر مقاوم الحمل R_L فإن هذه الدائرة (مكافئ ثفينين) تكافئ الدائرة الاصلية . ومن وجهة نظر الحمل فإن الدائرة تكون أبسط كثيراً . ونستطيع الان بسهولة حساب القدرة المجهزة الى الحمل وهي

$$P_L = \left(\frac{8}{9 + R_L} \right)^2 R_L$$

بالاضافة الى ذلك نستطيع من الدائرة المكافئة أن نجد أن الفولتية القصوى الممكن الحصول عليها عبر R_L هي 8 V وتحويل سريع للشبكة A الى مصدر تيار عملي (مكافئ نورتن) ، يتضح بأن أقصى تيار ممكن أن يجهز الى الحمل هو



الشكل 25 - 3 تحويل المصادر ودمج المقاومات يتضمن تبسيط الشبكة A كما هو مبين حسب الترتيب . النتيجة هي مكافئ ثفينين المبين في (د)

$8/9 \text{ A}$ وأن نظرية تحويل القدرة القصوى المجهزة لـ R_L عندما R_L هي 9Ω . ولا تظهر أي من هذه الحقائق بشكل جاهز من الدائرة الاصلية .
وإذا كانت الشبكة أكثر تعقيداً فإن عدد تحويلات المصادر ودمج المقاومات للحصول على مكافئ ثفينين أو نورتن يمكن أن تكون كثيرة جداً . ان نظريتي ثفينين ونورتن تسمحان لنا بايجاد الدائرة المكافئة بسرعة أكثر وبسهولة وحتى في دوائر أكثر تعقيداً .

دعنا الآن ندرج نص نظرية ثيفنن بنصها المعروف :

لأي دائرة خطية معطاة أعد ترتيبها بشكل شبكتين A و B مربوطتين سوية بموصلات بدون مقاومة . عرف الفولتية v_{oc} بأنها فولتية الدائرة المفتوحة الممكن اظهارها عبر النهايات A اذا فصلت B بحيث لا يسحب تيار من A . وعليه فإن جميع التيارات والفولتيات في B سوف تبقى غير متغيرة اذا اميتت A (جميع مصادر الفولتية غير المعتمدة ومصادر التيار غير المعتمد في A تستبدل بدوائر قصر ودوائر مفتوحة على التعاقب) وان مصدر الفولتية غير المعتمد v_{oc} مربوط بقطبية مناسبة على التوالي مع شبكة A الميتة (غير فعالة)

ان التعابير اميتت وميتة فيها شيء من اراقة الدم ولكنها دقيقة الوصف ومختصرة وسوف نستعملها بطريقة ودية بالاضافة الى انه من الممكن ان الشبكة يمكن أن تكون قائمة لأنها يمكن أن تحوي حتى مصادر معتمدة لا يكون لها حياة الا حينما يكون لتيارات أو فولتيات السيطرة قيمة غير الصفر .

دعنا نر اذا تمكنا من تطبيق نظرية ثيفنن بنجاح على الدائرة المعبرة في الشكل (3.25) . بعد فصل R_L فان تقسيم الفولتية يمكننا من ايجاد ان v_{oc} هي $8V$. وبأمارة الشبكة A اي باستبدال المصدر $12V$ بدائرة قصر ، نرى حين النظر الى الخلف نحو الشبكة A الميتة المقاوم 7Ω مربوطاً على التوالي مع مزيج التوازي 6Ω و 3Ω . لذا فإن الشبكة A الميتة يمكن أن تمثل هنا ببساطة بالمقاوم 9Ω . وهذا يتفق مع النتيجة السابقة .

ان الدائرة المكافئة التي حصلنا عليها لا تعتمد كلياً على الشبكة B ، لأننا تعلمنا أولاً ازالة الشبكة B ثم قياس فولتية الدائرة مفتوحة المنتجة من قبل الشبكة A وهذه العملية بالتأكيد لا تعتمد على الشبكة B على أي حال ، ثم جعل الشبكة غير الفعالة A على التوالي مع مصدر الفولتية v_{oc} . ان الشبكة B المذكورة في النظرية والبرهان هي فقط لتبيان أن مكافئ A يمكن الحصول عليه بغض النظر عن الترتيب الذي به تربط العناصر الى الشبكة A وتمثل الشبكة B هذه الشبكة العامة .

ان برهان نظرية ثيفنن بالشكل الذي ذكرناه مطول نوعاً ما ، ولذا فقد وضع في الملحق 2 في نهاية الكتاب لمن يرغب متابعة ذلك .

هناك عدة نقاط حول النظرية والتي تستحق التأكيد . أولاً : من غير الضروري وضع أي تحفظات على A أو B غير الطلب من أن تكون الدائرة الاصلية المكونة لـ A و B دائرة خطية وليس هناك أي تحفظات على درجة تعقيد A أو B أي منها يمكن أن يحوي أي مزيج من مصادر الفولتية أو التيار غير المعتمدة ومصادر الفولتية

او التيار المعتمدة والمقاومات أو اي عناصر دائرة خطية . ان الطبيعة العامة للنظرية (والبرهان) ستمكنا من أن تطبق على الشبكات الحاوية على المحثات والمتسعات والتي هي عناصر دائرة غير فعالة وخطية والتي سنعرفها في الفصل التالي . اما الآن فان المقاومات هي عناصر الدائرة غير الفعالة الوحيدة التي عرفناها لحد الآن . وان تطبيق نظرية ثيفنن على الشبكات المقاومة هي حالة خاصة بسيطة . والشبكة الميتة يمكن ان تمثل بمقاومة مكافئة منفردة R_{th} .

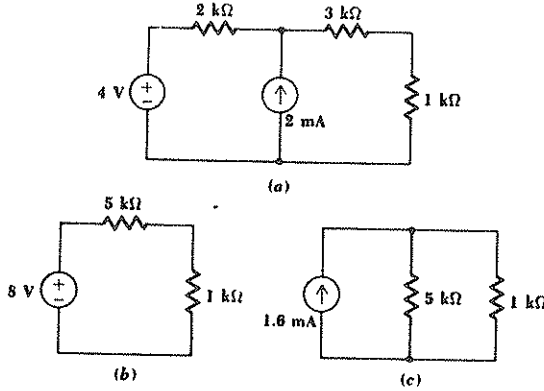
ان نظرية نورتن لها شبه كبير بنظرية ثيفنن ، وهي نتيجة اخرى للتماثل . وكحقيقة فان النظريتين سستعملان كمثال للغة التماثل لدى شرح قاعدة التماثل في الفصل التالي . وان نظرية نورتن يمكن ان توضع بالنص التالي :

في اي دائرة خطية اعد ترتيبها بشكل شبكتين A و B مربوطتين سوية بموصلين بدون مقاومة . عرف التيار i_{sc} بانه تيار قصر الدائرة الذي يمكن ان يظهر في نهايات A اذا جعلت B دائرة مقصورة بحيث لا يمكن تجهيز فولتية بواسطة A . وعليه فان جميع الفولتيات والتيارات في B سوف تبقى غير متغيرة اذا قتلت A (جميع مصادر الفولتية غير المعتمدة ومصادر التيار غير المعتمدة في A تستبدل بدوائر قصر ودوائر مفتوحة على التعاقب .) وان مصدر التيار غير المعتمد i_{sc} مربوط بقطبية مناسبة على التوازي مع شبكة A الميتة (غير الفعالة) .

اذا كانت A شبكة مقاومة فعالة فانه من الواضح بان الشبكة A غير الفعالة يمكن استبدالها بمقاومة مكافئة منفردة والتي سوف نسميها بمقاومة ثيفنن وذلك لانها هي المقاومة المنظورة من نهايتي الشبكة A غير الفعالة ايضاً . ان مكافئ نورتن لشبكة مقاومة فعالة هو مصدر تيار نورتن i_{sc} على التوازي مع مقاومة ثيفنن R_{th}

وهناك علاقة بين مكافئات ثيفنن ونورتن لشبكة مقاومة فعالة فالعلاقة يمكن الحصول عليها بتطبيق تحويل المصدر لأي من الشبكة المكافئة فعلى سبيل المثال اذا حولنا مكافئ نورتن نحصل على مصدر الفولتية $R_{th}i_{sc}$ على التوالي مع المقاومة R_{th} وهذه الشبكة هي بشكل مكافئ ثيفنن لذا

$$i_{sc} = R_{th}i_{sc} \quad (25)$$



الشكل 27 - 3 (أ) دائرة معطاة فيها المقاوم $1\text{-k}\Omega$ اعتبر الشبكة B (ب) مكافئ ثفنن اعتبر الشبكة A (ج) مكافئ نورتن للشبكة A

في الدوائر المقاومة التي تحوي على مصادر معتمدة وكذلك على مصادر غير معتمدة سوف نجد من الاكثر ملاءمة غالباً حساب مكافئ ثيفنن او نورتن بايجاد كل من فولتية الدائرة مفتوحة وتيار قصر الدائرة ثم حساب قيمة R_{th} كحاصل قسمتهما . ولذا فينصح أن نلم بحساب فولتيات الدائرة مفتوحة وتيارات الدائرة مقصورة حتى في المسائل البسيطة التي تلي . فاذا حسبت مكافئات ثيفنن ونورتن بصورة مستقلة فان المعادلة (25) يمكن استخدامها للتحقيق .

دعنا نأخذ ثلاثة أمثلة لحساب دائرة ثيفنن او دائرة نورتن المكافئة فالاول مبين في الشكل 27 - 3 أ او ان مكافئات ثيفنن ونورتن هي المطلوبة للشبكة المواجهة من قبل المقاوم $1\text{-k}\Omega$ اي ان الشبكة B هي هذا المقاوم والشبكة A هي ماتبقى من الدائرة المعطاة .

ولا تحتوي هذه الدائرة على مصادر معتمدة . وان ابسط طريقة لايجاد مكافئ ثيفنن تكون بايجاد R_{th} للشبكة الميتة مباشرة ثم يعقب ذلك حساب v_{oc} او i_{sc} وعلينا ان نقلل كلاً من المصادر المعتمدة لايجاد هيئة الشبكة A الميتة . وبقصر دورة المصدر ذي 4-V وفتح دورة المصدر ذي 2-mA تكون النتيجة مزيجاً متوالياً من مقاومين مقدارهما $2\text{-k}\Omega$ و $3\text{-k}\Omega$ اي مقاوم مقداره $5\text{-k}\Omega$. يمكن ايجاد فولتية الدائرة المفتوحة بسهولة باستخدام نظرية التراكب . وعند اشتغال المصدر ذي 2-mA وحده ، تكون فولتية الدائرة المفتوحة . وعند اشتغال المصدر ذي 4V لوحده ، تكون فولتية الدائرة المفتوحة 4-V ايضاً . لذا فانه عندما يعمل

المصدران معاً نرى ان v_{oc} تساوي 4 + 4 وتساوي 8 V . وبهذا نحصل على مكافئ ثفنن المبين في الشكل 26 - 3 (ب) ومنه نجد مكافئ نورتن المبين في الشكل 26.3 (د) والذي يمكن رسمه بسرعة . وكتحقيق للحل دعنا نجد i_{sc} لدائرة معينة سنستخدم نظرية التراكب وقليلاً من تقسيم التيار :

$$i_{sc} = i_{sc}|_{4V} + i_{sc}|_{2mA} = \frac{4}{2+3} + 2 \frac{2}{2+3} = 0.8 + 0.8 = 1.6 \text{ mA}$$

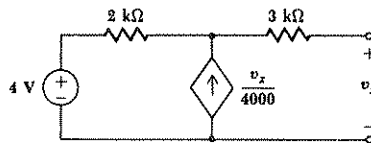
والتي تكمل التحقيق .

وكمثال ثان نعتبر الشبكة A المبينة في الشكل 28 - 3 والتي تحوي المصدر المعتمد . والتي نرغب فيها الحصول على مكافئ ثفنن . فلايجاد v_{oc} نلاحظ ان $v_x = v_{oc}$ وان تيار المصدر المعتمد يجب ان يمر خلال المقاوم 2-k Ω طالما ان هناك دائرة مفتوحة الى اليمين وجمع الفولتيات حول الدائرة الخارجية :

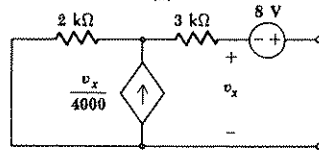
$$-4 + 2 \times 10^3 \left(\frac{-v_x}{4000} \right) + 3 \times 10^3(0) + v_x = 0$$

وان

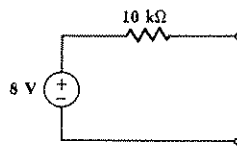
$$v_x = 8 = v_{oc}$$



(a)



(b)

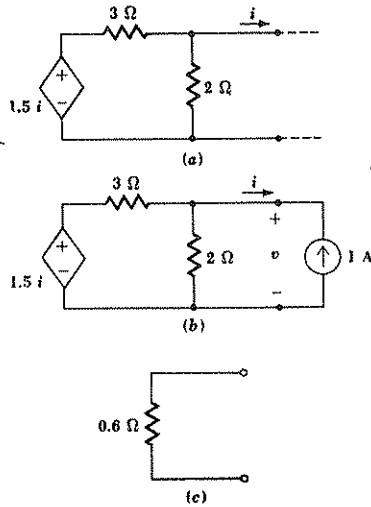


(c)

الشكل 27 - 3 (أ) يطلب ايجاد مكافئ ثفنن لهذه الدائرة (ب) مكافئ ثفنن للدائرة لكن غير مفيد (ج) افضل شكل ثفنن لهذه الشبكة الخطية المقاومة .

وبنظرية ثفنن يمكن تكوين المكافئ مع الشبكة الميتة A على التوالي مع المصدر 8-V كما مبين في الشكل (3.27 ب) وهذا صحيح ولكنه ليس سهلاً وغير مساعد ففي حالة الشبكات المقاومة الخطية يجب ان توضح مكافئاً للشبكة غير الفعالة A اكثر بساطة وبالتخصيص R_{th} . لذا فنحن نفتش عن i_{sc} . فلدَى قصر الدائرة عند نهائي الاخراج في الشكل 3.2 (أ) يظهر بأن $v_s = 0$ وأن مصدر التيار المعتمد هو صفر. لذا $i_{sc} = 4/(5 \times 10^3) = 0.8 \text{ mA}$. لذا فإن $R_{th} = v_o/i_{sc} = 8/(0.8 \times 10^{-3}) = 10 \text{ k}\Omega$ ، وأن مكافئ ثفنن المقبول للشكل 3.27 (ج) هو الناتج .

وكمثال أخير دعنا نعتبر أن في الشبكة مصدراً معتمداً وليس فيها مصدر غير معتمد كما مبين في الشكل 28 - 3 (أ) . وان الشبكة تكافئ الشبكة A الميتة وان $v_{oc} = 0$ ، لذا فاننا نفتش عن قيمة R_{th} ممثلة من قبل هذه الشبكة ذات النهائيين . على أي حال اننا لانستطيع ايجاد v_{oc} و i_{sc} ونأخذ النسبة بينهما لأنه لا يوجد مصدر غير معتمد في الشبكة وأن كلاً من v_{oc} و i_{sc} صفرأ . اذاً دعنا نكون مخادعين قليلا حيث نسلط المصدر 1-A الخارجي ونقيس الفولتية الناتجة ثم نجعل $R_{th} = v/i$ وبالعودة الى الشكل 3.28 (ب) نرى ان $i = -1$ وان



الشكل 28 - 3 (أ) شبكة لاحتوي على مصادر غير معتمدة يطلب ايجاد مكافئ ثفنن لها (ب) R_{th} مساوية رقمياً لـ v (ج) مكافئ ثفنن لـ (أ)

$$\frac{v - 1.5(-1)}{3} + \frac{v}{2} = 1$$

$$v = 0.6 \text{ V}$$

$$R_{th} = 0.6 \text{ } \Omega$$

ان مكافىء ثفنن مبين في الشكل 28 - 3 (ج) .

حيث أن

وأن

لقد درسنا حتى الآن ثلاثة أمثلة وجدنا فيها دائرة ثفنن المكافئة أو نورتن ولقد احتوى المثال (الشكل 26 - 3) على مصادر غير معتمدة فقط ومقاومات . وقد كان بإمكاننا استخدام عدة طرق لايجاد ذلك . احتوت احدى الطرق R_{th} لشبكة ميتة ثم حسبت v_{oc} لشبكة حية . وقد كان بإمكاننا أن نجد R_{th} و i_{sc} أو v_{oc} و i_{sc}

وفي المثال الثاني (الشكل 27 - 3) هناك مصادر معتمدة وغير معتمدة وقد تطلبت الطريقة الوحيدة التي استخدمناها ايجاد v_{oc} و i_{sc} . ولم يكن بإمكاننا ايجاد R_{th} للشبكة الميتة نظراً لان المصدر المعتمد لم يكن بالإمكان تحويله الى مصدر غير فعال .

أما المثال الثالث فلم يحتو أي مصدر غير معتمد . وقد وجدنا R_{th} بتسليط أمبير واحد ثم ايجاد $v = 1 \times R_{th}$ كما كان بإمكاننا تسليط فولت واحد ثم ايجاد $i = 1/R_{th}$ ودائرتا ثفنن ونورتن المكافئتان هاتان لاتحتويان على اي مصدر غير معتمد .

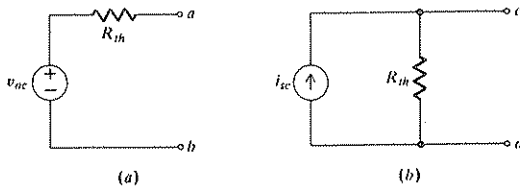
وأن هذه الاساليب المهمة وانواع الدوائر التي طبقت عليها مشار إليها في الجدول 3 - 1 . لم تظهر كل الطرق الممكنة في الجدول ولقد استخدمنا تحويلات المصادر مرات متعددة على عدة شبكات حينما لا يوجد مصادر معتمدة .

وهذا الاسلوب بالتأكيد أسلوب سهل للشبكات التي لاتحتوي على عناصر متعددة كما أن هناك طريقة أخرى مغرية نظراً لانه بالإمكان استخدامها لأي من الانواع الثلاثة من الشبكات المبينة في الجدول المذكور . وبساطة استغن عن الشبكة B بمصدر فولتية v_s وبتعريف التيار المغادر للطرف الموجب على انه i_s فانه يمكن تحليل الشبكة A لايجاد i_s ثم ضع المعادلة بالصيغة $v_s = ai_s + b$ ومن البديهي ان $b = v_{oc}$, $a = R_{th}$. اذن فأن بإمكاننا تسليط مصدر تيار i_s لنفرض أن فولتيتها v فسنجد أن $v = ai_s + b$ وان هذه الطريقة هي طريقة عامة ولكن هناك طرق أخرى أسهل منها وأسرع .

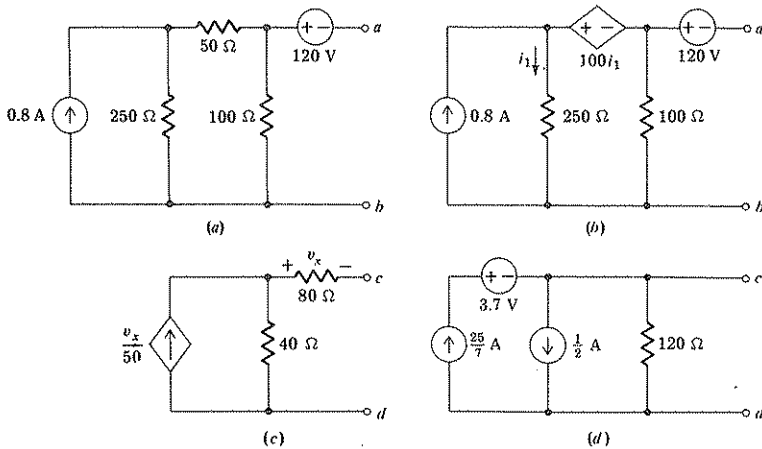
وعلى الرغم من أننا قد ركزنا انتباهنا كله تقريباً على تحليل الدوائر الخطية .
فإن من المفيد أن نعلم أن نظريتي ثفنن ونورتن كليهما تنطبقان إذا كانت الشبكة
B غير خطية ولكن يشترط في A أن تكون خطية .

تمرينان

3 - 8 أوجد قيم v_{oc} و R_{th} في الشكل 29 - 3 (أ) إذا كانت تلك الشبكة
مكافئة للشبكة المبينة في (أ) الشكل 30 - 3 (أ) (ب) الشكل 30 - 3 (ب)
الجواب $-70 \text{ V}, 75 \Omega$; $-72 \text{ V}, 60 \Omega$



الشكل 29 - 3 انظر التمرينين 3 - 8 و 3 - 9 .



الشكل 30 - 3 انظر التمرينين 3 - 8 و 3 - 9

3 - 9 أوجد قيم i_{sc} و R_{th} في الشكل 29 - 3 (أ) بحيث أن الشبكة تكافئ تلك المبينة في (أ) الشكل
30 - 3 (ب) جـ 30 - 3 (ب)
الجواب $3.07 \text{ A}, 120 \Omega$; $0 \text{ A}, 56 \Omega$

TREES AND GENERAL NODAL ANALYSIS

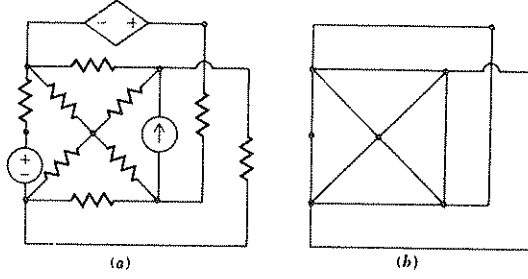
في هذه الفقرة سوف نعمم طريقة التحليل العقدي التي أصبحنا نميل إليها كثيراً. وبما أن هذه الطريقة ممكنة التطبيق على أية شبكة عامة فانه لا يمكننا ان نعد بأنه سيكون باستطاعتنا حل صنف أوسع من مسائل الدوائر. ونستطيع على أي حال النظر مستقبلاً بأن يكون بإمكاننا اختيار طريقة تحليل العقدة لأي مسألة خاصة يمكن أن تنتج أقل عدد من المعادلات وبأقل جهد.

ويجب أن نوسع قائمتنا أولاً للتعريف التي تعود الى التركيب البنيوي للشبكة ونبدأ بتعريف التركيب البنيوي نفسه لفرع من الهندسة الوصفية التي تعني بتلك الخصائص للأشكال الهندسية التي لا تتغير عند دوران الشكل أو انحنائه أو طيه أو تمطيطه أو ضغطه أو شدّه بمسامير مع الأخذ بنظر الاعتبار عدم اقتطاع أي جزء من الشكل أو ربطها ببعض. فالكرة والشكل الرباعي السطوح هي أجسام متماثلة التركيب البنيوي. واننا لانهتم الآن بأنواع خاصة من العناصر التي تظهر في الدائرة ولكن فقط بالطريقة التي فيها تنظم الفروع والعقد والحقيقة فاننا اعتيادياً نحجب طبيعة العناصر ونبسط مخطط الدائرة بتبيان العناصر كخطوط مستقيمة. والمخطط الناتج يدعى بالشكل البياني الخطي أو ببساطة بالشكل البياني. والدائرة وشكلها البياني مبينة في الشكل 31 - 3. لاحظ بأن جمع العقد معرفة بنقاط غامقة في الشكل البياني.

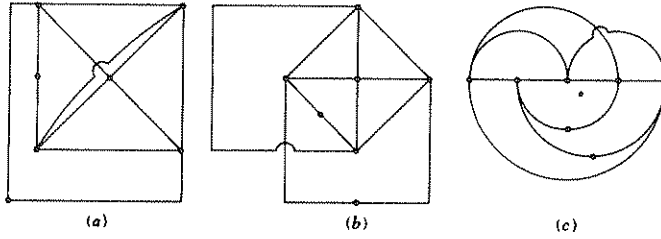
وبما ان خصائص التركيب البنيوي للدائرة أو الشكل البياني لم يتغير عندما تشوه فالمخططات الثلاثة المبينة في الشكل (32 - 3) كلها متماثلة التركيب البنيوي مع الدائرة والشكل البياني في الشكل 31 - 3. وان تعابير التركيب البنيوي والتي تعلمناها والتي استعملت بصورة صحيحة هي :

العقدة : هي النقطة التي فيها عنصران أو أكثر بينها ربط مشترك .

الفرع : المر المنفرد الذي يحوي عنصراً بسيطاً والذي يربط عقدة واحدة الى أية عقدة أخرى .



الشكل 31 - 3 (أ) دائرة معطاة (ب) مخطط خطي للدائرة



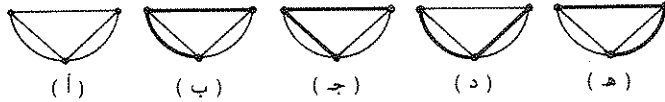
الشكل 32 - 3 ثلاثة مخططات متطابقة طوبوغرافياً مع بعضها وكذلك للمخطط المبين في الشكل 31 - 3 (ب) وكل منها هو مخطط للدائرة في الشكل 31 - 3 (أ)

الدائرة **loop** : مجموعة من الفروع التي تكون ممراً مغلقاً والذي لا يمر خلال العقدة أكثر من مرة واحدة .
 الشبكة : هي الدائرة التي لاتحتوي أي دارات داخلها .
 الدائرة المسطحة **planar circuit** : الدائرة الممكن رسمها على سطح مستو بحيث لا يمر أي فرع فوق أو تحت الفروع الأخرى .
 الدائرة غير المسطحة **nonplanar circuit** : أي دائرة غير مسطحة .

ان الاشكال البيانية للشكل (32 - 3) كل منها يحوي 12 فرع و 7 عقد .
 وهناك وضعيتان جديدتان للشكل البياني الخطي يجب ان تعرفا الآن : الشجرة **tree** والرباط **link** .

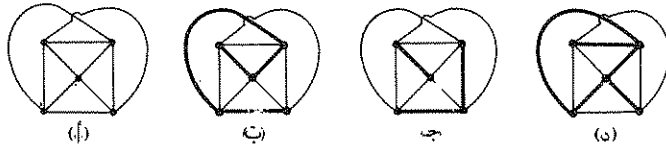
ويمكن ان نعرف الشجرة بأنها أي مجموعة من الفروع التي لاتحتوي الدارات ولكن تربط كل عقدة الى أي عقدة أخرى ولا يشترط أن يكون ذلك الربط مباشراً .

وهناك عادة عدد من الاشجار الممكن رسمها للشبكة والتي يزداد عددها بسرعة كلما زاد تعقيد الشبكة . للشكل البياني البسيط المبين في الشكل 33 - 3 (أ) ثمانية أشجار ممكنة الرسم أربعة منها مبينة بالخطوط الغامقة في الشكل 33 - 3 (ب) ، (ج) ، (د) ، (هـ) .



الشكل 33 - 3 (أ) مخطط خطي للشبكة ذات الثلاث عقد (ب) 3 (ج) و (د) و (هـ) اربع من ثمانية اشجار مختلفة يمكن رسمها لهذا المخطط مبينة بخطوط سميكة

يبين الشكل 34 - 3 (أ) شكلاً بيانياً أكثر تعقيداً والشكل 34 - 3 (ب) يبين شجرة واحدة ممكنة الرسم والشكل 34 - 3 ج و د يبين مجموعات الفروع التي هي ليست أشجار لان أي من المجموعات لايفي بالتعريف أعلاه .
وحالما نفهم انشاء الشجرة فان مفهوم الرباط بسيط جداً فالرباط هو أي فرع في الشكل البياني الخطي والذي هو ليس فرع في الشجرة . ومن الواضح بأن أي فرع خاص يمكن أن يكون رباطاً ويعتمد ذلك على الشجرة المعينة المختارة .
وان عدد الرباطات في الشكل البياني يمكن أن يعتمد ببساطة على عدد الفروع والعقد . فاذا كان الشكل البياني له N عقدة فانه يتطلب $(N - 1)$ من الفروع لانشاء الشجرة لأن الفرع الأول المختار يربط عقدتين وأن كل فرع اضافي يضم عقدة أخرى لذا فلو أعطينا B من الفروع فان عدد الرباطات L يجب أن يكون



الشكل 34 - 3 (أ) مخطط خطي (ب) شجرة ممكنة لهذا المخطط (ج) و (د) هذه المجموعات من الفروع لايفي بتعريف شجرة

$$L = B - (N - 1)$$

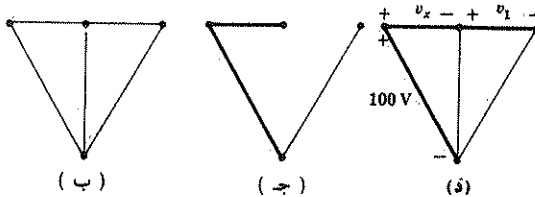
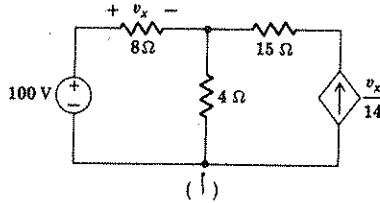
$$L = B - N + 1$$

(26)

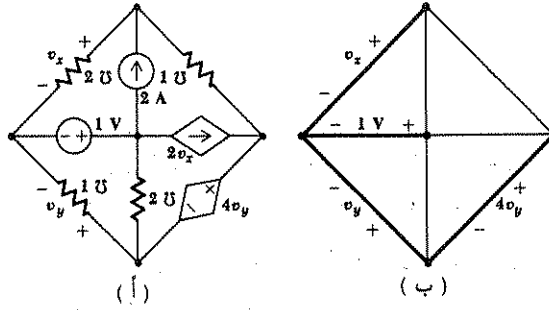
أو أن

ففي أي من الأشكال البيانية المبينة في الشكل 3-33 نلاحظ بأن $3 = 5 - 3 + 1$ وفي الشكل البياني للشكل 3-34 (ب) ، $3 = 10 - 5 + 1$ ، فالشبكة يمكن أن تكون بعدة أجزاء منفصلة وأن (26) يمكن أن تجعل أكثر شمولاً باستبدال $+1$ مع $+S$ ، حيث S هو عدد الأجزاء المنفصلة . على أي حال من الممكن أيضاً ربط جزئين منفصلين بموصل منفرد يتسبب في تكوين عقدة واحدة من عقدتين فلا يمر تيار خلال هذا الموصل المنفرد . وإن هذه الطريقة يمكن استعمالها لربط أي عدد من الأجزاء المنفصلة . لذا فإننا سوف لانضطر الى اي تخصيص اذا ركزنا انتباهنا على الدوائر التي فيها $S = 1$.

مما سبق يمكننا الآن المضي لشرح الطريقة التي بها يمكن كتابة مجموعة المعادلات العقدية لشبكة والتي هي غير معتمدة وكافية . وهذه الطريقة ستساعدنا للحصول على عدة مجموعات مختلفة لمعادلات لنفس الشبكة وأن جميع المجموعات سيتم تقييمها . على أي حال فالطريقة لاتبنيء لناكل مجموعة ممكنة من المعادلات . دعنا أولاً نشرح الطريقة ونوضحها بمثال ثم نشير الى السبب الذي تكون به المعادلات غير معتمدة وكافية .



الشكل 3-35 (أ) دائرة مستخدمة كمثال لتحليل عقدي عام (ب) مخطط للدائرة المعطاة (ج) مصدر فولتية وفولتية مسيطرة وضعتا في الشجرة بينما مصدر التيار ادخل في الشبكة المصاحبة (د) الشجرة قد اكملت شجرة فولتية عبر فرع الشجرة



الشكل 36 - 3 (أ) دائرة الشكل 5 - 3 اعيد رسمها (ب) اختيرت شجرة بحيث ان كل من فولتية المصدرين والفولتيتين المسيطرتين هي فروع شجرة .

إذا اعطينا شبكة ما فان علينا أن :

- 1 نرسم مخططاً بيانياً ثم نؤشر الشجرة
- 2 نضع كل مصادر الفولتية في الشجرة tree
- 3 نضع كل مصادر التيار في الشجرة المصاحبة cotree
- 4 نضع كل فروع الفولتية المسيطرة للمصادر المعتمدة المسيطر عليها بالفولتية في الشجرة اذا أمكن .
- 5 نضع كل فروع التيار المسيطر في المصادر المعتمدة المسيطر عليها بالتيار في الشجرة المصاحبة اذا أمكن

ان الخطوات الأربع الأخيرة تربط فعلياً الفولتيات مع الشجرة والتيارات مع الشجرة المصاحبة والآن نثبت متغير فولتية (مع زوج اشارتها الموجبة - السالبة) عبر كل من الفروع التي عددها $(N - 1)$ في الشجرة . وان فرعاً يحتوي على مصدر فولتية (معتمد أو غير معتمد) يجب أن يشار اليه بفولتية المصدر والفرع المحتوى على فولتية مسيطرة ويجب أن يشار اليه بتلك الفولتية المسيطرة . لذا فان عدد المتغيرات الجديدة الذي أدخلناه يساوي عدد فروع الشجرة ويساوي $(N - 1)$ ناقصاً عدد مصادر الفولتية في الشجرة ناقصاً كذلك عدد الفولتيات المسيطرة التي تمكننا من تحديدها في الشجرة . في المثال الثالث أدناه سوف نجد أن عدد المتغيرات الجديدة المطلوب يمكن أن يكون صفراً .

وبعد الحصول على مجموعة من المتغيرات نحتاج الآن ان نكتب مجموعة من المعادلات الكافية لايجاد هذه المتغيرات . يمكن الحصول على المعادلات بتطبيق قانون التيار - لكروشوف . تعامل مصادر الفولتية بالطريقة التي عالجنا بها التحليل .

العقدي نفسها حيث يستعاض ذهنياً عن كل مصدر فولتية بدائرة قصر ومن ثم تتكون عقدة متراكبة. ثم يطبق قانون كرشوف على كل العقد الباقية والعقد المتراكبة عدا واحدة فقط. نساوي مجموع التيارات المغادرة للعقدة في كل الفروع المربوطة بها بالصفير. وكل تيار يمثل بدلالة متغيرات الفولتية التي أشرنا لها سابقاً. ويمكن اهمال عقدة واحدة كما تم اهمال احدى العقد باعتبارها عقدة مرجعية وأخيراً اذا كان هناك مصادر معتمدة ذات سيطرة بالتيار يجب ان تكتب معادلة لكل تيار مسيطر يربطها مع متغيرات الفولتية. وهذه لا تختلف عن الطريقة المستخدمة سابقاً مع التحليل العقدي.

لنحاول هذه الطريقة على الدائرة المبينة في الشكل 35 - 3 (أ). تحتوي هذه الدائرة على اربع عقد وخمس فروع ويتضح مخططها البياني في الشكل 35 - 3 (ب). وفق الخطوتين 3-2 من خطوات رسم الشجرة، ونستعيز عن مصدر الفولتية في الشجرة وعن مصدر التيار في الشجرة المصاحبة وباتباع الخطوة 4 نرى ان الفرع v_x يمكن ان يوضع في الشجرة نظراً لانها لا تشكل اي دورة تناقض تعريف الشجرة. والآن قد وصلنا الى فرعي الشجرة والرباط المنفرد المبين في الشكل 35 - 3 (ج)، نرى الآن انه لم نحصل بعد على شجرة، نظراً لان العقدة الصحيحة غير مرتبطة مع العقد الاخرى بمسار خلال فروع الشجرة. ان الطريقة الوحيدة الممكنة لاكمال الشجرة مبينة في الشكل 35 - 3 (د). ان مصدر الفولتية ذا 100V والفولتية المسيطرة v_x ومتغير الفولتية الجديد v_1 بعد ذلك تؤثر على فروع الشجرة الثلاث كما مبين.

لذلك فان لدينا متغيران v_x و v_1 . ومن البديهي اننا نحتاج الحصول على معادلتين بدالتهما. هناك اربع عقد، ولكن وجود مصدر الفولتية يسبب انهيار اثنتين منهما ليكونا عقدة متراكبة. ويمكن تطبيق قانون التيار لكرشوف على كل عقدتين من العقد او العقد المتراكبة الثلاث الباقية. ولنحاول حل العقدة الصحيحة أولاً. وان التيار المتجه لليسار يساوي $-v_1/15$ بينما التيار المغادر نحو الاسفل هو $-v_x/14$ لذا فان اول معادلة تكون

$$-\frac{v_1}{15} - \frac{v_x}{14} = 0$$

وان العقدة الوسطية في الاعلى تظهر ابسط من العقدة المتراكبة. لذا تساوي مجموع التيار الى اليسار وهو $-v_x/8$ والتيار الى اليمين وهو $v_1/15$ والتيار المتجه نحو الاسفل خلال المقاوم 4Ω بالصفير. وان التيار الاخير يعطى بالفولتية عبر المقاوم مقسومة على 4Ω ولكن لا يوجد فولتية مؤشرة على ذلك الرباط. الا انه حينما

تبني شجرة وفق ذلك التعريف يكون هناك مسار خلالها من كل عقدة الى اي عقدة اخرى . ونظراً لان كل فرع في الشجرة قد اشرت عليه فولتيته فانه يمكن تمثيل الفولتية عبر كل رباط بدلالة فولتيات فروع الشجرة . لذا فالتيار المتجه نحو الاسفل $(-v_x + 100)/4$ ونحصل على المعادلة الثانية :

$$-\frac{v_x}{8} + \frac{v_1}{15} + \frac{-v_x + 100}{4} = 0$$

ويعطي الحل $v_1 = -60 \text{ V}, v_x = 56 \text{ V}$

وكمثال ثانٍ , دعنا ندرس ثانية دائرة اكثر تعقيداً من الدائرة التي تم تحليلها اولاً وذلك بتعريف كل فولتيات العقد بالنسبة الى عقدة المرجع . الدائرة التي مرت في الشكل 5 - 3 معادة في الشكل 36 - 3 نرسم شجرة بحيث ان كل مصادر الفولتية وكل فولتيات السيطرة تظهر كفولتيات فروع الشجرة ومن ثم كمتغيرات مؤشرة . وبالمناسبة فان الفروع الاربعة لهذه تكون شجرة كما في الشكل 36 - 3 (ب) وقد اختيرت فولتيات فروع الشجرة $v_x, 1, v_v, 4v_v$ كما مؤشر .

نأخذ كلا من مصادر الفولتية كدوائر قصر ونطبق قانون التيار لكرشوف مرتين مرة على العقدة العلوية .

$$1v_v + 2(v_v - 1) + 1(4v_v + v_v - v_x) = 2v_x$$

ومرة على العقدة المتراكبة المحتوية على العقدة اليمنى والعقدة السفلى ومصدر الفولتية المعتمد .

$$2v_x + 1(v_x - v_v - 4v_v) = 2$$

وبدلاً من المعادلات الأربع التي كانت عندنا سابقاً فان لدينا فقط اثنتين فقط حيث نجد بسهولة بأن $v_x = 26/9 \text{ V}$ و $v_v = 4/3 \text{ V}$ وكلا القيمتين تتفقان مع الحل السابق .

وكمثال أخير سندرس الدائرة المبينة في الشكل 37 - 3 (أ) . فان مصدري الفولتية والفولتية المسيطرة تكون الفروع الثلاثة للشجرة المبينة في الشكل 37 - 3 (ب) . ونظراً لأن العقدتين العلوية واليمنى متصلان لتكونا عقدة متراكبة واحدة فاننا نحتاج معادلة واحدة وفق قانون التيار لكرشوف وباختيار العقدة اليسرى نحصل على .

$$-1 - \frac{v_x}{4} + 3 + \frac{-v_x + 30 + 6v_x}{8} = 0$$

ومن ثم ينتج أن $v_x = -32/3 \text{ V}$ وعلى الرغم من أن هذه الدائرة تظهر معقدة فان استخدام التحليل العقدي العام قد أدى الى حل سهل . وان استخدام التيارات

الشبكية أو الفولتيات بين العقد والعقدة المرجعية يحتاج الى معادلات أكثر وإلى جهد أكبر .

سناقش مسألة ايجاد افضل حل في الفقرة الآتية .

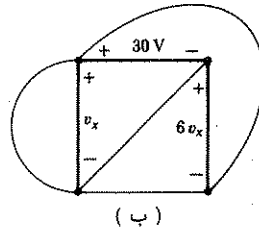
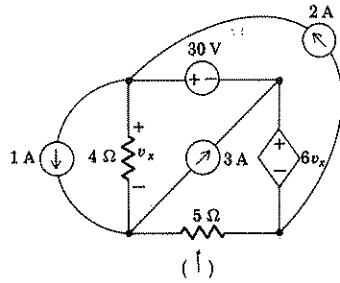
أما اذا احتجنا الى معرفة فولتية أخرى أو تيار آخر أو قدرة في المثال السابق فان خطوة اضافية تعطى النتيجة . فمثلاً أن القدرة المجهزة من المصدر ذي 3 أمبير تساوي $W = 122 = 3(-30 - 32/3)$ دعنا ننه استنتاجاتنا بمناقشة فيما اذا كانت مجموعة فولتيات فروع الشجرة كافية وكذلك عدم اعتماد فولتيات العقد على شيء آخر . اذا كانت فولتيات فروع الشجرة كافية فان كل فولتيات الفروع في الشجرة أو الشجرة المصاحبة يجب أن يكون الحصول عليها ممكناً من معرفة قيم كل فولتيات فروع الشجرة . وهذا بالتأكيد صحيح للفروع في الشجرة . أما للرباطات فاننا نعلم ان كل رباط يمتد بين عقدتين . ومن التعريف فان الشجرة يجب أن تربط عقدتين .

لذا فان كل فولتية رباط يمكن أن تثبت بدلالة فولتيات فروع الشجرة .

وما ان يتم الحصول على الفولتيات عبر فرع في الدائرة المعطاة حتى يمكن ايجاد كل التيارات أما باستخدام القيمة المعطاة للتيار اذا احتوى الفرع على مصدر للتيار أو باستخدام قانون أوم اذا كان فرعاً مقاومياً أو باستخدام قانون التيار لكروشوف مع قيم التيارات هذه اذا حدث وإن كان الفرع مصدر فولتية . لذا فان كل الفولتيات والتيارات يمكن الحصول عليها وكونها كافية قد أوضح أيضاً .

اما لتوضيح عدم اعتمادها . دعنا نظمئن أنفسنا بافتراض وضع فيه كل المصادر الموجودة في الشبكة هي مصادر تيارات غير معتمدة . كما لاحظنا قبل قليل فان مصادر الفولتية غير المعتمدة في الدائرة تنتج معادلات أقل بينما تستوجب المصادر المعتمدة عدداً أكبر من المعادلات لمصادر التيار غير المعتمدة هناك بالضبط $(N - 1)$ من المعادلات العقدية تكتب بدلالة $(N - 1)$ من فولتيات فروع الشجرة . وللبهران

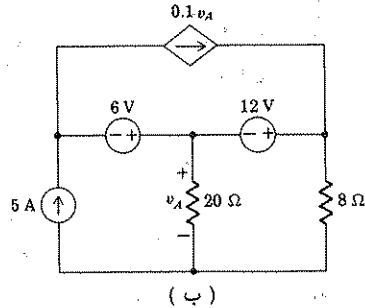
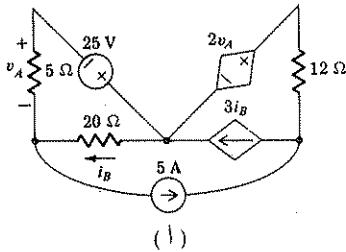
على أن هذه الـ $(N - 1)$ من المعادلات غير معتمدة دعنا ننظر الى تطبيق قانون التيار لكروشوف على العقد المختلفة التي عددها $(N - 1)$ في كل مرة حينما نكتب معادلة قانون التيار لكروشوف فاننا نشمل فرع شجرة جديد أي ذلك الفرع الواصل بين تلك العقدة الى ما يتبقى من الشجرة . وحيث أن عنصر الدائرة لم يظهر في اي من المعادلات السابقة فاننا يجب ان نحصل على معادلة غير معتمدة . وهذا صحيح لكل من العقد التي عددها $(N - 1)$ كل واحدة منها بالتناوب . وسنحصل على $(N - 1)$ من المعادلات غير المعتمدة .



الشكل 37 - 3 (أ) دائرة يراد كتابة معادلة عقدية عامة واحدة لها (ب) الشجرة وفولتيات فروع الشجرة المستخدمة

تمارين

10 - 3 برهن على ان الاشجار المناسبة للتحليل العقدي العام أكثر من غيرها في الشكل 38 - 3 تظهر مبينة الحرفين MT



الشكل 38 - 3 انظر التمرينين 10 - 3 و 11 - 3

11 - 3 (أ) أكتب معادلتى قانون التيار لكروشوف ومعادلة السيطرة بالتيار ثم أوجد i_B في الشكل 38 - 3 (ب) أكتب معادلة قانون التيار لكروشوف ثم أوجد v_A في الشكل 38 - 3 ب

الجواب 2 A; 20 V

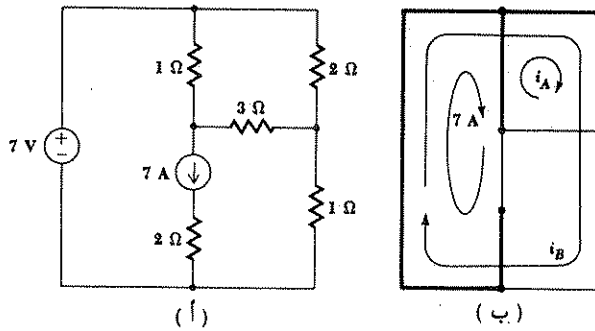
سوف نعتبر الآن استعمال الشجرة tree للحصول على مجموعة مناسبة لمعادلات الدارة . ففي بعض المناسبات يعتبر هذا هو ثنائي طريقة كتابة معادلات العقدة . مرة أخرى يجب الإشارة الى أنه على الرغم من أننا بإمكاننا ضمان بأن كل مجموعة معادلات نكتبها ستكون كافية وغير معتمدة ولكننا يجب ان لا نتوقع بأن الطريقة ستؤدي مباشرة الى كل مجموعة معادلات ممكنة .

نبدأ مرة أخرى ببناء شجرة ونستخدم مجموعة القواعد نفسها كما فعلنا في التحليل العقدي العام . وان الفرض من كل من التحليل العقدي او الشبكي هو وضع فولتيات في الشجرة وتيارات في الشجرة المصاحبة cotree وهذه القاعدة ضرورية للمصادر ولكنها محبذة في الكميات المسيطرة والآن بدلاً من اعطاء فولتية لكل فرع في الشجرة نعطي تياراً (مع سهم مرجعي بالطبع) لكل عنصر في الشجرة المصاحبة أو لكل رباط . فاذا كان هناك عشر رباطات يجب ان نعطي عشر تيارات رباطات بالضبط . ان كل رباط يحوي مصدر تيار يعطى له تيار المصدر ذلك كتيار رباط . لاحظ ان كل تيار رباط يمكن تصوره أيضاً كتيار دارة حيث ان الرباط link يجب ان يمتد بين عقدتين كما يجب ان يكون هناك مسار بين هاتين العقدتين خلال الشجرة . لذا فانه يوجد مع كل رباط دارة واحدة مصاحبة تحتوي على رباط واحد ومسار وحيد خلال الشجرة . ومن الواضح أن اعطاء تيار يمكن تصوره اما كتيار دارة او كتيار رباط . وان المصطلح المصاحب للرباط مفيد جداً في وقت تعريف التيار حيث ان مثل هذا المصطلح يجب ان يوضع لكل رباط . اما معنى الدارة فهو مناسب أكثر عند وقت كتابة المعادلة ، نظراً لأننا سنطبق قانون الفولتية لكرشوف حول كل دارة .

لنحاول تجربة هذه العملية من عمليات تعريف تيارات الرباطات وذلك باعادة النظر في مثال سابق تم حله بطريقة تيارات الشبكات . تظهر الشبكة في الشكل 12 - 3 وقد أعيد رسمها في الشكل 39 - 3 (أ) . وان الشجرة المختارة هي واحدة من عدة اشجار يمكن انشاؤها والتي لها مصدر فولتية في فرع الشجرة ومصدر تيار في الرباط . لنحاول أولاً أخذ الرباط المحتوي على مصدر تيار . وان الدارة المصاحبة لهذا الرباط هي الشبكة اليسرى . لذا نشير الى تيار دارتنا حول محيط هذه الشبكة كما في الشكل 39 - 3 ب . ان الاختيار البديهي لاشارة تيار الرباط هذا هو "7A"

تذكر انه لا يمكن لتيار آخر ان يسري خلال هذا الرباط على الخصوص . ولذا فان قيمته يجب ان تساوي شدة مصدر التيار .

ثم بعد ذلك نركز انتباهنا الى رباط المقاوم $3-\Omega$. فان الدارة المصاحبة لها هي الشبكة العليا اليمنى وتيار الدارة (أو الشبكة) هذا يعرف على انه i_1 وهو مبين في الشكل 39 - 3 (ب) . وان الرباط الأخير هو المقاوم الأسفل $1-\Omega$ والمسار الوحيد بين هذين الطرفين خلال الشجرة هو حول محيط الدائرة . ويدعى رباط التيار هذا i_B ويظهر السهم المؤشر الى مساره واتجاهه المرجع المرجعي في الشكل 39 - 3 (ب) . وهوليس تيار دارة .



شكل (39 - 3) (أ) دائرة الشكل 12 - 3 مبينة مرة أخرى
(ب) شجرة مختارة بحيث ان مصدر التيار في الرباط ومصدر الفولتية في فرع شجرة .

لاحظ ان كل رباط له تيار واحد يوجد فيه . اما فرع الشجرة فيمكن ان يحوي اي عدد بين الواحد الى حد مجموع عدد تيارات الرباطات المفترضة . وان استخدام سهم مغلق تقريبا وطويل لكي يشير الى الدارات يساعد للاشارة الى اي من تيارات الدارات يسري خلال اي من فروع الاشجار وما هي الاتجاهات المرجعية لها . ومن الضروري الآن كتابة معادلة قانون الفولتية لكشوف حول كل من الدارات . وان المتغير المستخدم هو تيار الرباط المفترض . وحيث ان الفولتية حول مصدر التيار لا يمكن ان تكتب بدلالة تيار المصدر وحيث اننا قد استخدمنا قيمة تيار المصدر كتيار رباط لذا نهمل كل دارة تحتوي على مصدر تيار .
فمثلاً في الشكل 39 - 3 نبدأ باعتراض تيار الدارة i_1 ونسير باتجاه عقرب الساعة من الزاوية اليسرى السفلى . وان التيار الذي يسير في اتجاهنا في المقاوم $1-\Omega$

أوم هو $(i_A - 7)$ وفي العنصر $2\text{-}\Omega$ هو $(i_A + i_B)$ وفي الرباط هو ببساطة i_A لذا

$$1(i_A - 7) + 2(i_A + i_B) + 3i_A = 0$$

وللرباط i_B فان الدوران باتجاه عقرب الساعة من الزاوية السفلى اليسرى يؤدي

$$-7 + 2(i_A + i_B) + 1i_B = 0$$

الى

وان اعتراض الدارة المعرفة بالرباط ذي $7\text{-}A$ هو المطلوب . وبحل ذلك نحصل على

$i_A = 0.5\text{ A}$, $i_B = 2\text{ A}$. مرة اخرى . لقد تم الوصول الى الحل بعدد من المعادلات

يقبل عن الحالة السابقة بوحدة .

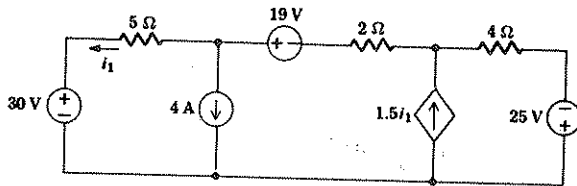
يظهر في الشكل 3 - 40 (أ) مثال يحتوي على مصدر معتمد . تحتوي هذه

الدائرة على ستة عقد ولهذا فان شجرتها يجب ان تحتوي على خمسة فروع . وحيث

انه يوجد ثمانية عناصر في الشبكة لذا فهناك ثلاثة رباطات في الشجرة المصاحبة . اذا

وضعنا مصادر الفولتيات الثلاثة في الشجرة ومصدري التيار والتيار المسيطر في الشجرة

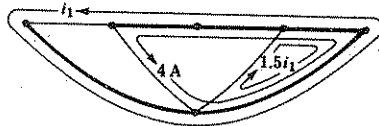
المصاحبة فاننا نصل الى الشجرة المبينة في الشكل 3 - 40 (ب) .



(a)



(b)



(c)

الشكل 3 - 40 (أ) دائرة فيها i_1 يمكن الحصول عليه باستخدام معادلة واحدة بواسطة التحليل الداري العام

(ب) الشجرة الوحيدة التي توفي بالقاعدة المبينة في الفقرة 7 - 3 (ج) تيارات الرباطات الثلاثة مبينة مع

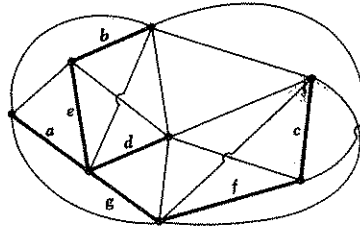
داراتها .

أن مصدر التيار ذا 4 A يعرف الدارة المبينة في الشكل 40 - 3 (ج) .
 أن المصدر المعتمد يكون تيار دائرة مقداره $1.5i_1$ حول الشبكة اليمنى والتيار
 المسيطر i_1 يعطينا التيار الداري الباقي حول محيط الدائرة . لاحظ أن كل التيارات
 الثلاثة تسري خلال المقاوم $4-\Omega$.

وإن لدينا كمية واحدة مجهولة فقط هي i_1 وبعد إهمال الدارة المعرفة بمصدري
 التيارين نطبق قانون الفولتية لكروشوف حول الدائرة الخارجية .

$$-30 + 5(-i_1) + 19 + 2(-i_1 - 4) + 4(-i_1 - 4 + 1.5i_1) - 25 = 0$$

وبجانب مصادر الفولتية الثلاثة هناك ثلاثة مقاومات في هذه الدارة . والمقاوم $5-\Omega$ له
 تيار دائرة واحدة فيه نظراً لأنه عبارة عن رباط والمقاوم $2-\Omega$ يحوي تيارين
 والمقاوم $4-\Omega$ يحوي على ثلاثة تيارات دائرة. إن رسماً واضحاً لمجموعة تيارات الدارات
 هو ضروري إذا أريد تجنب أي خطأ بنيسان تيار ما أو أخذ تيار إضافي أو السير
 باتجاه مخطوء . إلا أن المعادلة السالفة مضبوطة وتؤدي إلى $i_1 = -12\text{ A}$



الشكل 41 - 3 شجرة استخدمت كمثال لتوضيح كفاية تيارات الرباطات

والآن كيف يمكننا أن نبين أنها كافية؟ دعنا نتصور شجرة لا تحتوي على دائرة . لذا
 فهي تحتوي على عقدتين في الأقل . ولكل من هاتين العقدتين يربط فرع شجرة
 واحد . ويمكن إيجاد التيار في كل من هذين الفرعين من تيار الرباط المعلوم
 بتطبيق قانون التيار لكروشوف . إذا كان هناك عقد أخرى مربوط بها فرع شجرة
 واحد فقط ، فإن تيارات فروع الشجرة هذه يمكن الحصول عليها فوراً . لذا ففي
 الشجرة المبينة في الشكل 41 - 3 وجدنا التيارات في الفروع $d; a, b, c$. والآن
 ننتقل عبر فروع الشجرة فنجد التيارات في فرعي الشجرة $f; e$ ويمكن أن تستمر

العملية حتى يتم ايجاد كل تيارات الفروع . لذا فان تيارات الرباطات كافية لايجاد كل تيارات الفروع . ومن المفيد النظر الى الوضع حينما ترسم دائرة شجرة تحتوي على دائرة وحتى اذا كانت كل تيارات الرباطات مساوية للصفر فان تياراً ما يزال يدور حول "دائرة الشجرة" . لذا فان تيارات الرباطات لا يمكن ان تعطي هذا التيار ولا تمثل مجموعة كافية . وان مثل هذه الشجرة من التعريف غير ممكنة .

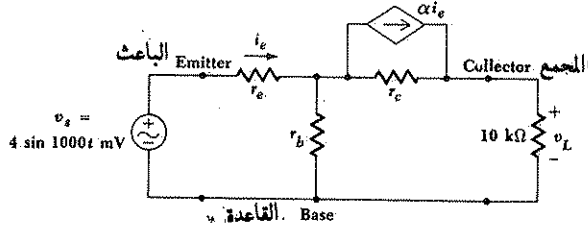
ولتبيين عدم الاعتماد ، دعنا تقنع أنفسنا بفرض الوضعية حينما تكون المصادر الموجودة في الشبكة هي مصادر فولتية غير معتمدة . فكما لاحظنا سابقاً فان مصادر التيارات غير المعتمدة في الدائرة تنتج معادلات أقل ، بينما المصادر المعتمدة عادة تستوجب معادلات ذات عدد أكبر. أما لمصادر الفولتية غير المعتمدة فهناك بالضبط $(B - N + 1)$ معادلة دائرة تكتب بدلالة $(B - N + 1)$ من تيارات الرباطات . للبرهنة على أن معادلات الدارة هذه التي عددها $(B - N + 1)$ غير معتمدة ، فان من الضروري الاشارة الى ان كل منها يمثل تطبيقاً لقانون الفولتية لكروشوف حول الدارة التي تحتوي على رباط واحد غير ظاهر في أي من المعادلات الأخرى . يمكن تصور مقاومة مختلفة مثل $R_1, R_2, \dots, R_{B-N+1}$ في كل رباط من هذه الرباطات وسيوضح أنه لا يمكن الحصول على معادلة واحدة من معادلة اخرى نظراً لأنها تحتوي على معامل واحد لا يظهر في أي من المعادلات الأخرى .

لذا فان تيارات الرباطات كافية للحصول على حل كامل . كما ان مجموعة معادلات الدارات التي نستخدمها لايجاد تيارات الرباطات هي عبارة عن مجموعة من المعادلات غير المعتمدة .

بعد أن نظرنا الى التحليل العقدي العام والتحليل الداري العام ، علينا دراسة فوائد ومضار كل من الطريقتين لكي نتمكن من اختيار الخطة المناسبة بذكاء عند الحل .

وان طريقة التحليل العقدي بصورة عامة تحتاج الى $(N - 1)$ من المعادلات . ولكن هذا العدد ينقص بواحد لكل مصدر فولتية معتمد او غير معتمد في فرع الشجرة ويزداد بواحد لكل مصدر تيار معتمد أي مصدر مسيطر بالفولتية بواسطة فولتية رباط أو تيار مسيطر .

وان طريقة الدارة بالأساس تحتوي على $(B - N + 1)$ من المعادلات . الا ان كل مصدر تيار معتمد او غير معتمد في رباط يقلل هذا العدد بواحد بينما لكل مصدر معتمد مسيطر بالتيار بواسطة تيار فرع شجرة او مسيطر بالفولتية يزداد العدد بواحد .



الشكل 42 - 3 مصدر فولتية جيبي وحمل $10\text{-k}\Omega$ مربوطان الى دائرة T- المكافئة لترانزستور. الربط المشترك بين الادخال والاخراج هو عند قاعدة الترانزستور وتدعى هذه الوضعية بوضعية القاعدة المشتركة المجمع الباعث القاعدة

وأخيراً وقبل انهاء مناقشتنا هذه ، دعنا ننظر ثانية الى نموذج دائرة T- المكافئة لترانزستور المبينة في الشكل 42 - 3 والتي ربط بها مصدر جيبي $4 \sin 1000t$ mV، وحمل مقداره $10\text{-k}\Omega$. نختار قيماً نموذجية لمقاومة الباعث emitter $r_e = 50 \Omega$ ولقائمة القاعدة base $r_b = 500 \Omega$ ولقائمة المجمع collector $r_c = 20 \text{ k}\Omega$ والنسبة التحويلية للتيار الأمامي للقاعدة المشتركة هي $\alpha = 0.99$. لنفرض اننا نرغب بايجاد تيار الادخال (الباعث) i_e وفولتية الحمل v_L

وعلى الرغم من ان التفاصيل ستطلب في التمارين 13 - 3 و 14 - 3 فيما بعد ، الا اننا يجب ان نتأكد الآن ان تحليل هذه الدائرة يمكن الحصول عليه برسم شجرات تحتاج الى ثلاث معادلات عقدية عامة $(N - 1 - 1 + 1)$ او معادلتى دارة $(B - N + 1 - 1)$ وربما نلاحظ ايضاً ان هذه المعادلات الثلاث مطلوبة بدلالة الفولتيات بين العقد والمرجع وهي عبارة عن ثلاث معادلات شبيكية .

وبغض النظر عن الطريقة التي نختارها فان هذه النتائج يمكن الحصول عليها لهذه الدائرة خاصة :

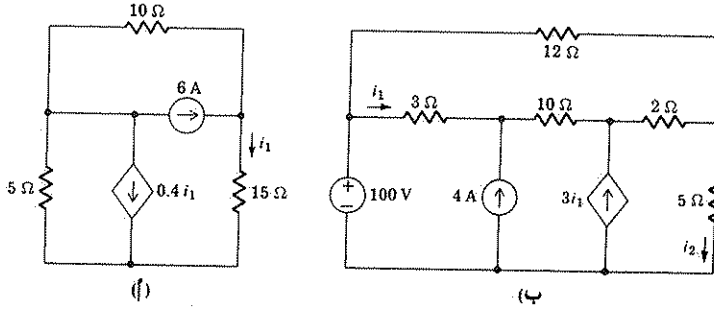
$$i_e = 18.42 \sin 1000t \mu\text{A}$$

$$v_L = 122.6 \sin 1000t \text{ mV}$$

لذا نجد ان دائرة الترانزستور هذه تغطي كسب gain فولتية (v_L/v_s) مقداره 30.6 وكسب تيار $(v_L/10,000i_e)$ مقداره 0.666 وكسب قدرة يساوي حاصل ضربهما ومقداره $(0.666) = 20.4 = 30.6$ والكسب يكون أكبر بتشغيل هذه الترانزستور بوضعية الباعث المشترك كما مبين في الدائرة المكافئة في المسألة 32

تمارين

12 - 3 ارسم شجرة مناسبة واستخدم التحليل العقدي العام لاجاد i_1 في دائرة الشكل (أ) 3 - 43 بكتابة معادلة واحدة فيها i_1 كمتغير (ب) 3 - 43 بكتابة معادلتين فقط فيهما i_1 و i_2 كمتغيرين



الشكل 3 - 43 انظر المسألة 12 - 3

13 - 3 للدائرة المكافئة لمضخم الترانزستور المبين في الشكل، 3 - 42 افرض ان $r_o = 50 \Omega$ و $r_e = 500 \Omega$ و $r_o = 20 \text{ k}\Omega$ و $\alpha = 0.99$ ثم جد كلا من i_e و v_e برسم شجرة مناسبة مستخدماً (أ) معادلتين دارتين (ب) ثلاث معادلات عقدية منسوبة الى مرجع مشترك للفولتيات (ج) ثلاث معادلات عقدية بدون عقدة مرجع مشتركة .

الجواب : $122.6 \sin 1000t \text{ mV}$; $18.42 \sin 1000t \text{ }\mu\text{A}$

14 - 3 اوجد دائرتي ثيفنن ونورتن المكافئتين اللتين تظهران للحمل $10 \text{ k}\Omega$ في الشكل 3 - 42 بايجاد : (أ) قيمة v_e للدائرة المفتوحة (ب) تيار دائرة القصر (نحو الاسفل) (ج) مقاومة ثيفنن المكافئة . كل قيم الدائرة معطاة في التمرين 3 - 13

الجواب : 2045Ω ; $72.2 \sin 1000t \text{ }\mu\text{A}$; $147.6 \sin 1000t \text{ mV}$

مسائل

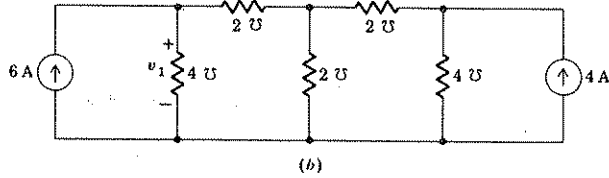
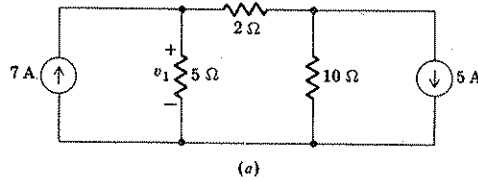
10 (أ) اوجد قيمة المصفوفة

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(ب) استخدم قاعدة كرامير لايجاد v_1, v_2, v_3 اذا كانت

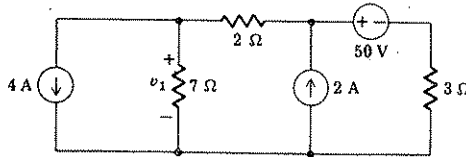
$$v_2 + 3v_1 - 4 - v_3 = 0 \text{ و } -2v_3 - 3v_2 - 4v_1 = 8, \text{ و } 2v_1 - 5 - v_2 + 3v_3 = 0,$$

2 استخدم التحليل العقدي لايجاد v_1 في كل دائرة من دوائر الشكل 44 - 3 .



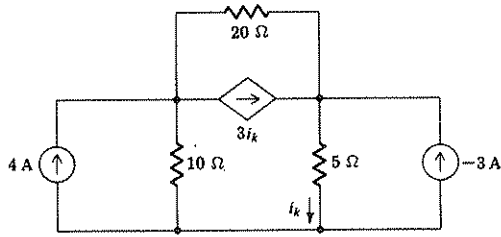
الشكل 44 - 3 انظر المسألة 2 .

3 طبق التحليل العقدي على الدائرة المبينة في الشكل 45 - 3 لايجاد v_1 .



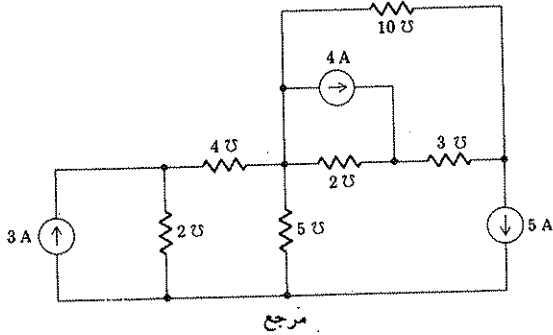
الشكل 45 - 3 انظر المسألة 3 .

4 استخدم اسلوب التحليل العقدي لايجاد i_k في الشبكة المبينة في الشكل 46 - 3 .



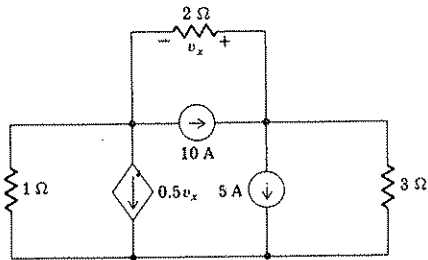
الشكل 46 - 3 انظر المسألة 4 .

- 5 (أ) بين الفولتيات بين العقد والمرجع في الدائرة المبينة في الشكل 47 - 3 .
 وكتب معادلات العقد (ب) اوجد القدرة المبينة من المصدر 4-A .



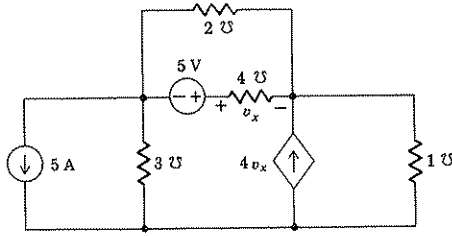
الشكل 47 - 3 انظر المسألة 5 .

- 6 اوجد القدرة المبينة من كل عنصر في الدائرة المبينة في الشكل 48 - 3 .



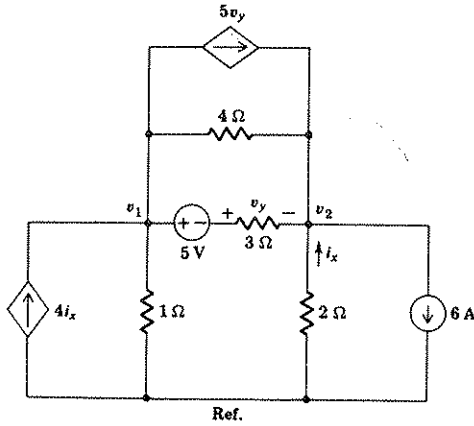
الشكل 48 - 3 انظر المسألة 6 .

- 7 اكتب المعادلات العقدية للدائرة المبينة الشكل 49 - 3 ثم اوجد القدرة المبينة من المصدر ذي 5-٧ .



الشكل 49 - 3 انظر المسألة 7 .

8 اكتب نظاماً من معادلات العقد للدائرة المبينة في الشكل 50 - 3 باستخدام v_1 و v_2 كمتغيرين . حاول تجنب استخدام i_x و v_y ضمناً في اي من المعادلات التي تكتبها . مامقدار القدرة المجهزة من المصدر المعتمد الى اليسار ؟



الشكل 50 - 3 انظر المسألة 8

□ اكتب معادلات الشيكات ثم اوجد i_x في كل دائرة مبينة في الشكل 51 - 3 .

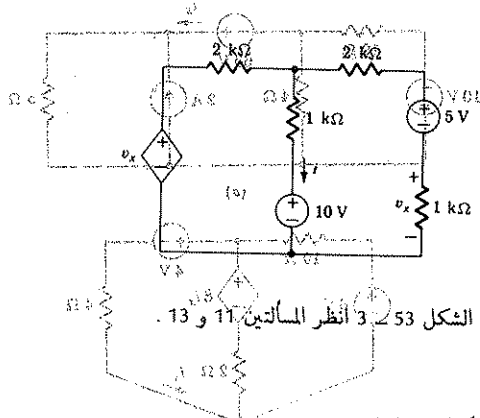
1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for a systematic approach to data collection and the importance of using reliable and valid measurement instruments.

3. The third part of the document discusses the ethical considerations that must be taken into account when conducting research. It emphasizes the need to protect the privacy and confidentiality of participants and to obtain their informed consent before any data collection begins.

4. The fourth part of the document discusses the importance of data analysis and interpretation. It highlights the need to use appropriate statistical methods to analyze the data and to draw valid conclusions from the results. It also emphasizes the importance of reporting the findings in a clear and concise manner.

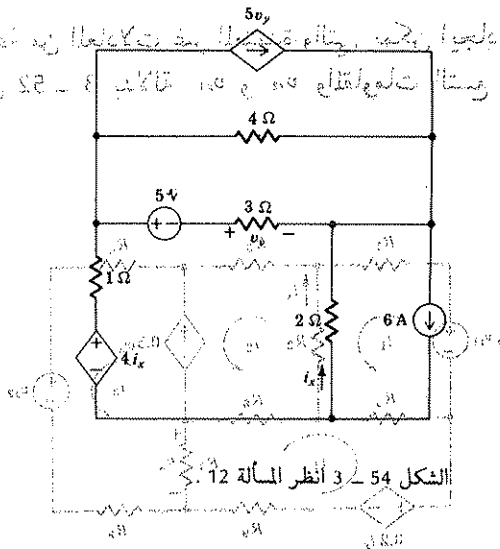
5. The fifth part of the document discusses the importance of data management and storage. It highlights the need to use secure and reliable methods to store and manage data, and to ensure that the data is accessible and usable for future research.



الشكل 53 - 3 أنظر المسألتين 11 و 13 .

12 أكتب معادلات الشبكات للدائرة المبينة في الشكل 54 - 3 ثم احس القدرة المستهلكة من قبل كل عنصر .

لنحدد اتجاهات التيار في كل فرع من فروع الدائرة كما يلي: i_1 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على $5V$ ، i_2 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على 4Ω ، i_3 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على $5V$ ، i_4 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على 3Ω ، i_5 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على 1Ω ، i_6 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على 2Ω ، i_7 في اتجاه التيار في الفرع الذي يحتوي على $6A$.



الشكل 54 - 3 أنظر المسألة 12 .

13 استخدم معادلات الشبكات للمساعدة في إيجاد القيمة الجديدة للمقاوم $1-k\Omega$ الأيمن ، بحيث أن $i = 0$ في دائرة الشكل 53 - 3 .

14 بالرجوع إلى الدائرة المبينة في الشكل 55 - 3 استخدم المعادلات الشبكية لإيجاد i_1 والقدرة المجهزة من المصدر المعتمد .

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the auditor in this regard. It emphasizes that the auditor must ensure that all transactions are properly recorded and that the records are complete and accurate.

2. The second part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the auditor in this regard. It emphasizes that the auditor must ensure that all transactions are properly recorded and that the records are complete and accurate.

3. The third part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the auditor in this regard. It emphasizes that the auditor must ensure that all transactions are properly recorded and that the records are complete and accurate.

4. The fourth part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the auditor in this regard. It emphasizes that the auditor must ensure that all transactions are properly recorded and that the records are complete and accurate.

5. The fifth part of the document discusses the importance of maintaining accurate records and the role of the auditor in this regard. It emphasizes that the auditor must ensure that all transactions are properly recorded and that the records are complete and accurate.

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities related to the business.

2. It also emphasizes the need for regular audits and reviews to ensure compliance with applicable laws and regulations.

3. Furthermore, the document highlights the significance of proper documentation and record-keeping for tax purposes.

4. In addition, it provides guidance on how to effectively manage and organize financial data for better decision-making.

5. The document also addresses the importance of maintaining accurate and up-to-date financial statements.

6. Moreover, it discusses the role of internal controls in preventing fraud and ensuring the integrity of financial reporting.

7. The document further explores the benefits of using modern accounting software and technology to streamline financial processes.

8. It also provides insights into the importance of transparency and accountability in financial management.

9. Finally, the document concludes by emphasizing the overall importance of sound financial practices for the long-term success and sustainability of any business.

10. The document is intended to serve as a comprehensive guide for business owners and managers seeking to optimize their financial operations.

11. It is hoped that this document will provide valuable insights and practical advice to help businesses thrive in a competitive market.

12. The document is a result of extensive research and consultation with industry experts and professionals.

13. It is designed to be a practical and accessible resource for businesses of all sizes and industries.

14. The document is subject to periodic updates and revisions to reflect changes in laws, regulations, and industry practices.

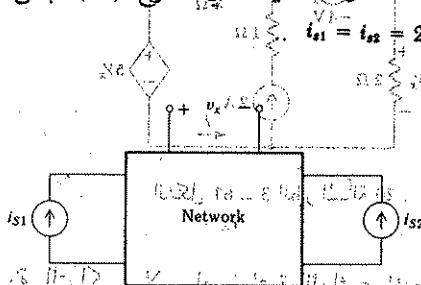
15. It is important to consult with a qualified professional for specific advice and guidance tailored to your business's unique circumstances.

16. The document is provided as a general informational resource and does not constitute an offer of financial or legal advice.

17. It is intended to be used in conjunction with other financial and legal resources and professional advice.

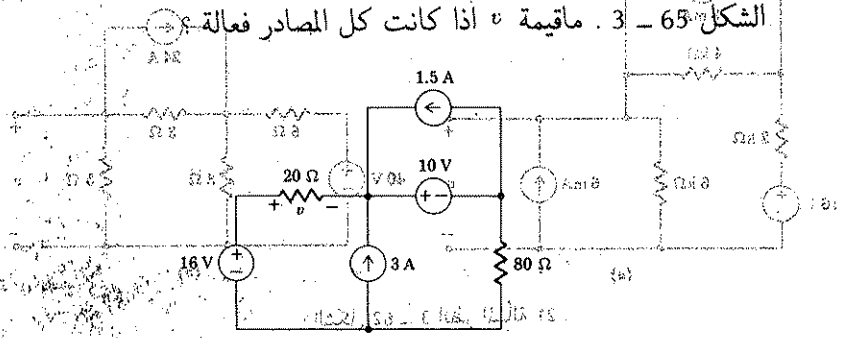
18. The document is a confidential and proprietary resource and should be handled accordingly.

23 □ (أ) الشبكة الخطية المبينة في الشكل 64 - 3 تحتوي على مقاومات فقط .
 قسمة i_{s1} و i_{s2} إذا كان $i_{s1} = 8A$ و $i_{s2} = 12A$ وقد وجد أن v_x تساوي $80V$. إلا أنه
 إذا كان $i_{s1} = -8A$ و $i_{s2} = 4A$ فإن $v_x = 0$ صفر . أوجد v_x حينما
 (ب) الشبكة الآن تحتوي على مصدر بحيث أن $v_x = -40V$.
 حينما $i_{s1} = i_{s2} = 0$ كل المعطيات في الفرع (أ) تبقى صحيحة . أوجد v_x
 ثانية حينما $i_{s1} = i_{s2} = 20A$



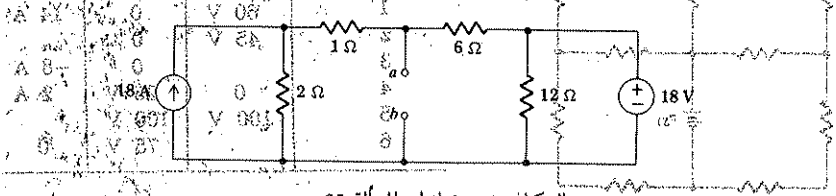
الشكل 64 - 3 انظر المسألة 23

24 أوجد مكونات v التي تتسبب من كل مصدر يعمل منفرداً في الدائرة المبينة في



الشكل 65 - 3 انظر المسألة 24

25 □ (أوجد مكافئ نورتن للدائرة المبينة في الشكل 66 - 3 ب) بعد ذلك أوجد
 القدرة العظمى التي يمكن أن تسحب من الطرفين a و b إذا ربطت مقاومة
 متغيرة R بينهما حيث R مقاومة التي تنتج أقصى قدرة خارجة .

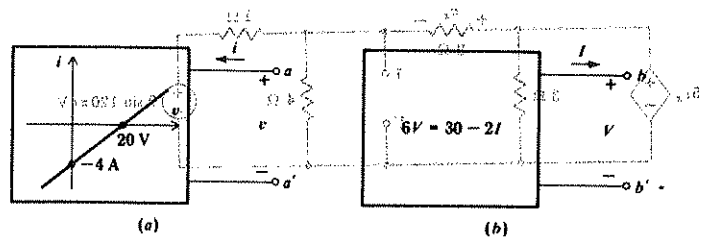
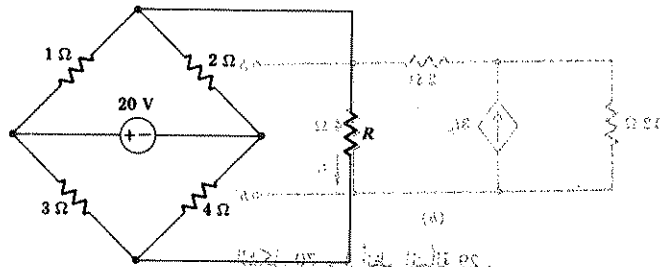
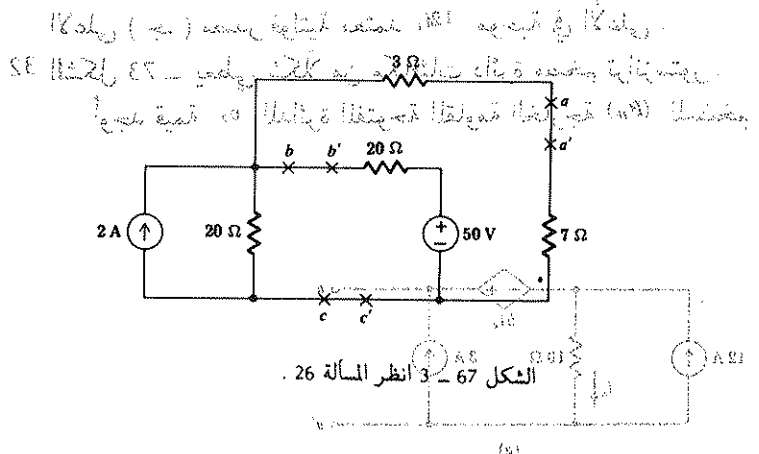


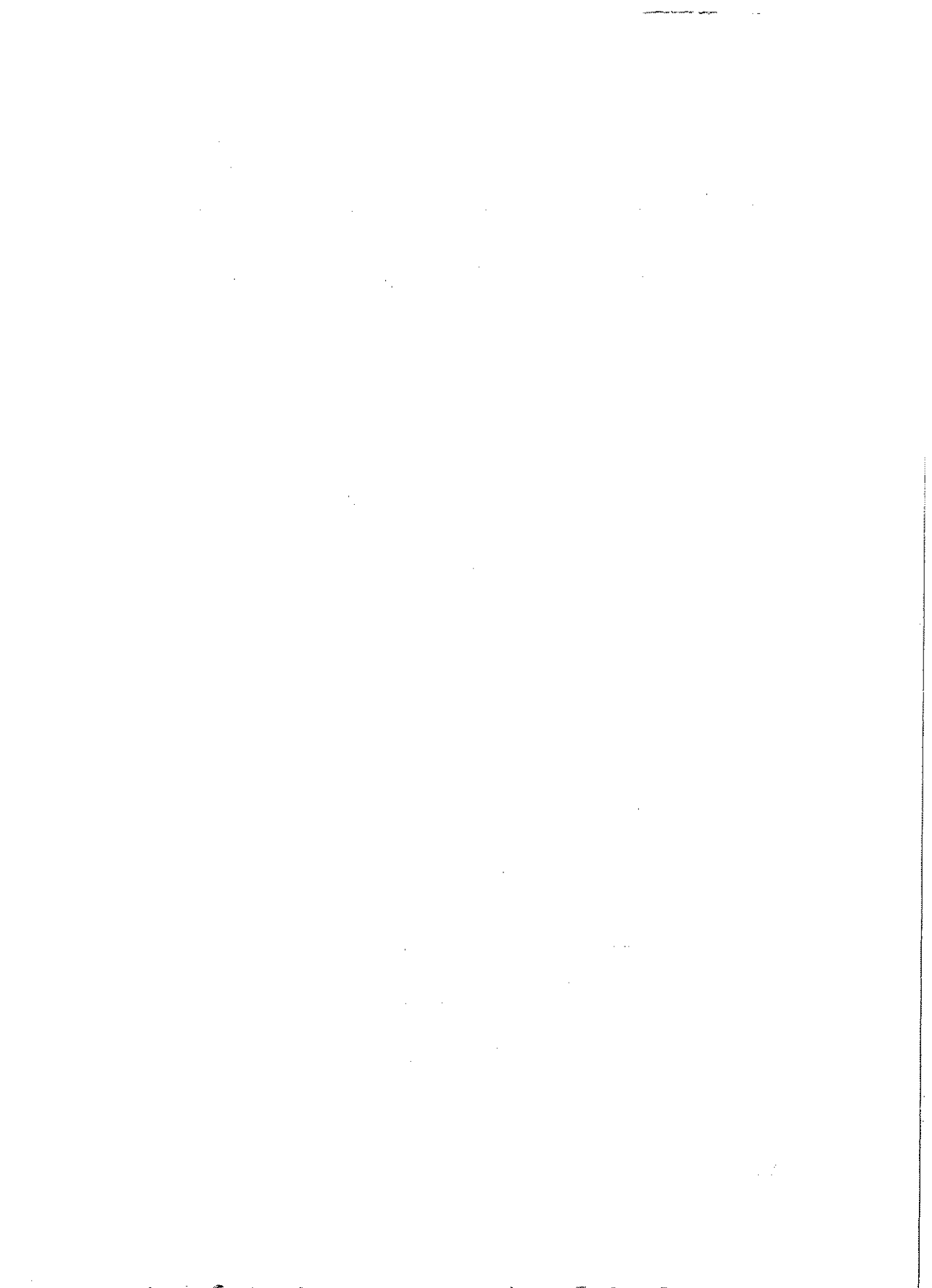
الشكل 66 - 3 انظر المسألة 25

26 بأشهر الاطراف بدقة ارسم مكافئ دائرة ثفنن الناتجة عند قطع الشبكة المبينة

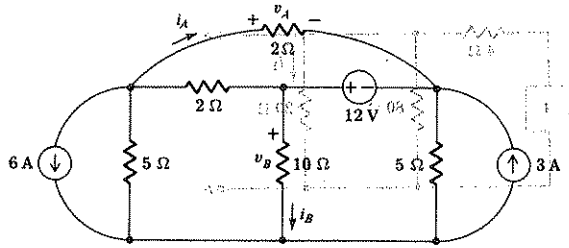
في الشكل 3-73 في (أ) 'aa' (ب) 'bb' (ج) 'cc' \square 27 أوجد أقصى قدرة يمكن أن تجهز الي المقاوم R في الدائرة المبينة في الشكل

3-68 \Rightarrow 28 ارسم مكافئ نورتن لكل من الشكات التي خواصها معرفة في الشكل 3-69





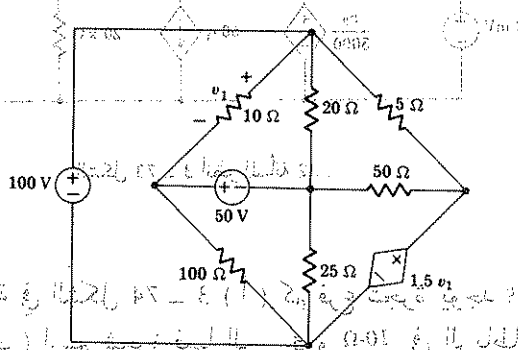




الشكل 34 - 3. أنظر المسألة 34 و 39.

35 □ كون شجرة للدائرة المبينة في الشكل 76 - 3 والتي يمكن منها كتابة معادلة

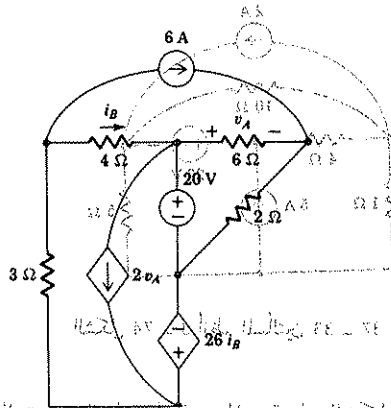
واحدة لغرض إيجاد v_1 ما هي v_1 ؟



المسألة 35 (ب) ؟ شجرة فولتية في الشكل 76 - 3. $v_1 = 1.5 v_1$ في المسألة 35 (ب) ؟ شجرة
 المسألة 35 (ج) ؟ شجرة فولتية في الشكل 76 - 3. $v_1 = 1.5 v_1$ في المسألة 35 (ج) ؟ شجرة
 المسألة 35 (د) ؟ شجرة فولتية في الشكل 76 - 3. $v_1 = 1.5 v_1$ في المسألة 35 (د) ؟ شجرة
 المسألة 35 (هـ) ؟ شجرة فولتية في الشكل 76 - 3. $v_1 = 1.5 v_1$ في المسألة 35 (هـ) ؟ شجرة

36 ارسم شجرة للشبكة المبينة في الشكل 77 - 3.

أشر فولتيات فروع الشجرة ثم جد v_A

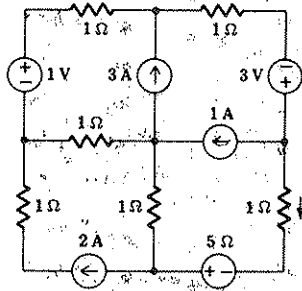


المسألة 36 (ب) ؟ شجرة فولتية في الشكل 77 - 3. $v_A = 20V$ في المسألة 36 (ب) ؟ شجرة
 المسألة 36 (ج) ؟ شجرة فولتية في الشكل 77 - 3. $v_A = 20V$ في المسألة 36 (ج) ؟ شجرة
 المسألة 36 (د) ؟ شجرة فولتية في الشكل 77 - 3. $v_A = 20V$ في المسألة 36 (د) ؟ شجرة
 المسألة 36 (هـ) ؟ شجرة فولتية في الشكل 77 - 3. $v_A = 20V$ في المسألة 36 (هـ) ؟ شجرة

الشكل 77 - 3 أنظر المسألة 36.

37 □ للدائرة الميَّنة في الشكل 74 - 3 (أ) ارسم شجرة فيها مقاومين $5\text{-}\Omega$ و $10\text{-}\Omega$ في الرباطين (ب) اكتب مجموعة من المعادلات لتيارات الرباطات . (ج) ما مقدار القدرة المجهزة للمقاوم $5\text{-}\Omega$ ؟

38. كَوِّن شجرة للدائرة الميَّنة في الشكل 78 - 3. وعرف تيارات الرباطات ثم جد بكتانة معادلة واحدة فقط.

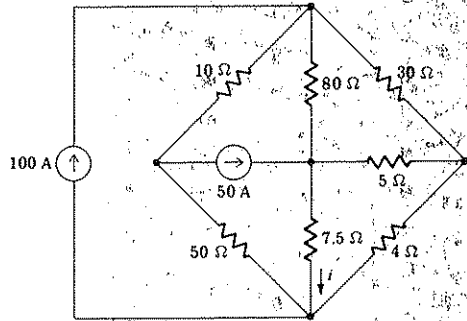


الشكل 78 - 3 أنظر المسألة 38 .

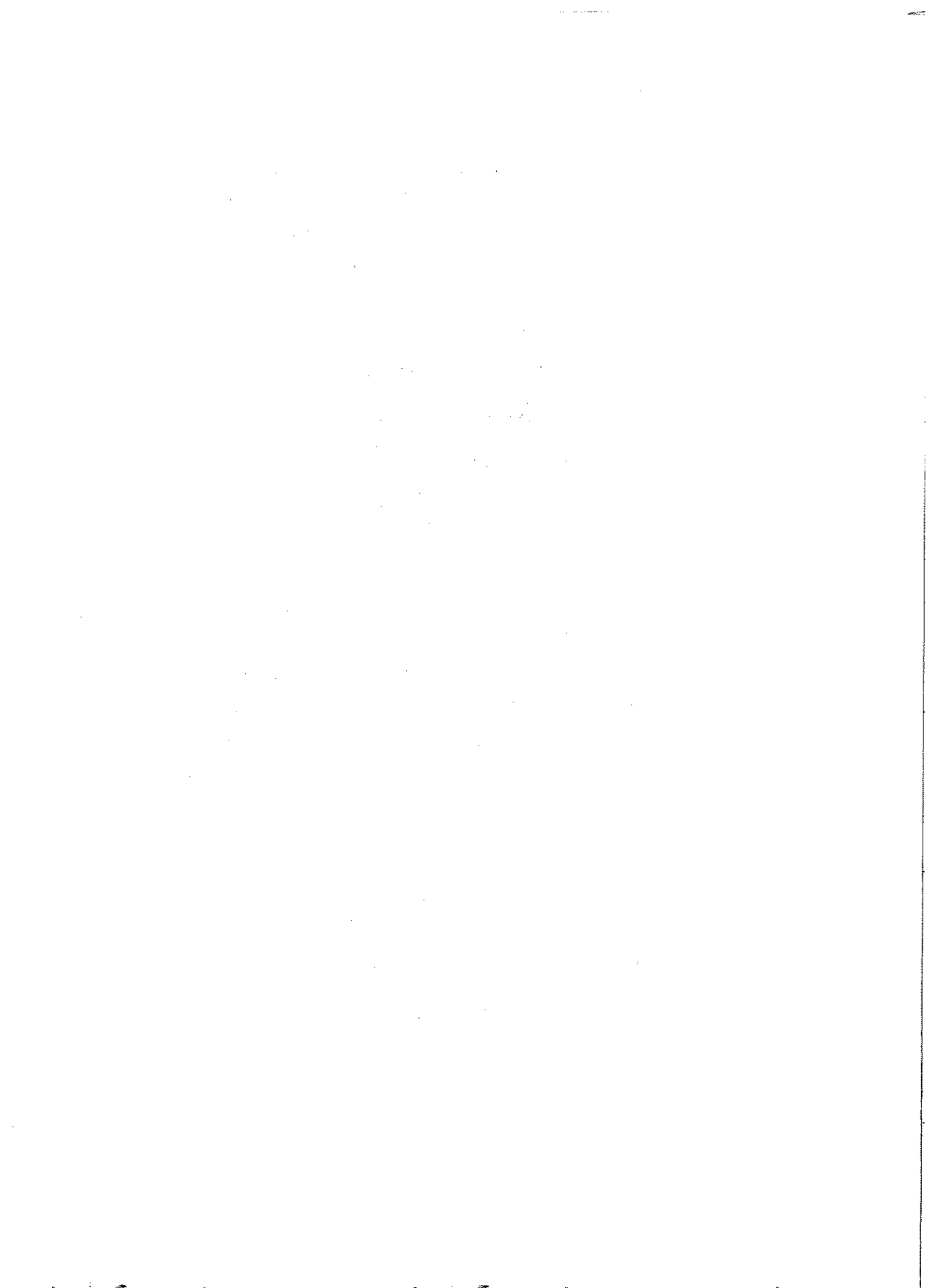
39 (أ) استخدم التحليل الداري العام للدائرة الميَّنة في الشكل 75 - 3 ليجاد i_1 و i_2 حول مصادر التيار العملية 6-A $5\text{-}\Omega$. وكذلك 3-A $5\text{-}\Omega$ الى

مصادر فولتية عملية ثم استخدم التحليل الداري العام ليجاد i_A و i_B .

40. أنشئ شجرة للدائرة الميَّنة في الشكل 79 - 3 بحيث أن كل تيارات الرباطات الخمسة تسري خلال المقاوم $5\text{-}\Omega$. ثم اوجد i



الشكل 79 - 3 أنظر المسألة 40 .





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

TRANSIENT CIRCUIT

المحاضرة السادسة
الفصل الرابع
 المحاضرة والسعة
INDUCTANCE AND CAPACITANCE

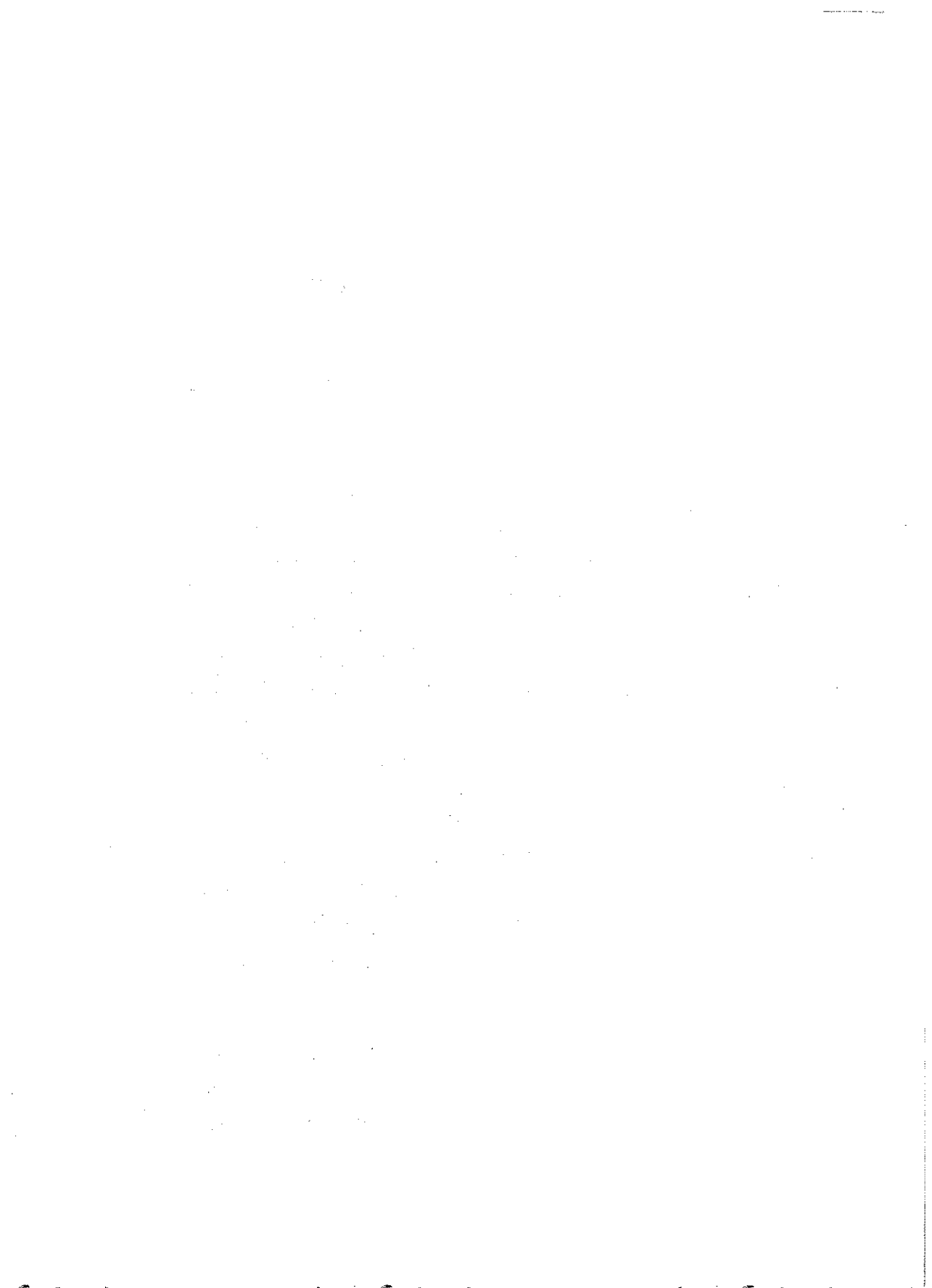
INDUCTANCE AND CAPACITANCE
 THE INDUCTOR

سواءً كانت دارة مستقلة، أو متصلة مع دارة أخرى، فإنها تتفاعل مع كل ما

INTRODUCTION مقدمة

تتفاعل مع كل ما حوله. في هذا الفصل سنتعرف على عنصرين جديدين من عناصر الدائرة. وتتضمن العلاقات بين التيار والفولتية لهذين العنصرين معدلات تغيير التيار أو الفولتية. وقبل البدء بدراستنا الجديدة هذه من المفيد التوقف قليلاً والرجوع إلى ماسبق من دراستنا لتحليل الدوائر المقاومة. فالمناقشات المنطقية تساعد أحياناً في فهم بعض التفاصيل بعد أن اتفقنا على نظام مرض للوحدات بدأتنا دراستنا للدوائر الكهربائية بتعريف التيار والفولتية وخمسة عناصر بسيطه من عناصر الدائرة الكهربائية. لقد سميت مصادر الفولتية والتيار المعتمدة وغير المعتمدة بالعناصر الفعالة "active" أما المقاوم الخطي فقد سمي بالعنصر غير الفعال "passive". هذا على الرغم من أن تعريفي المصطلحين فعال وغير فعال ما يزالان غير واضحين. وسنعرف العنصر الفعال بأنه ذلك العنصر الذي يمكن أن يزود قدرة متوسطة أكبر من الصفر على امتداد فترة غير محدودة من الزمن إلى أداة خارجية. وأن كل العناصر المثالية هي عناصر فعالة. أما العنصر غير الفعال فيعرف بأنه ذلك العنصر الذي لا يمكنه تزويد قدرة متوسطة أكبر من الصفر على امتداد فترة غير محدودة من الزمن، ويقع المقاوم الاعتيادي ضمن هذا التعريف. وأن الطاقة التي يستهلكها العنصر غير الفعال تتحول إلى حرارة بصورة اعتيادية.

لقد عرف كل من هذه العناصر بدلالة التحفظات الموضوعة على علاقة الفولتية والتيار فيها. ففي حالة مصدر الفولتية غير المعتمد على سبيل المثال فإن فولتية النهايات يجب أن تكون غير معتمدة كلياً على التيار المسحوب من نهاياتها وسنأخذ الدوائر المتكونة من وحدات البناء المختلفة. لحد الآن وبصورة عامة استعملنا فقط





شكل 1 - 4 الاشارات المرجعية للفولتية والتيار مبنية على رمز الدائرة للمحثة $v = L di/dt$

إن رمز الدائرة للمحث مبين في الشكل 1 - 4 ويجب الملاحظة أن اصطلاح إشارة العنصر غير فعال استعملت كما كانت الحالة في المقاوم . تقاس المحثة بوحدة الهنري $(H)^2$. وتبين المعادلة المعروفة بأن الهنري هو فقط اصطلاح مختصر للفولت ثانية لكل أمبير .

المحث الذي محثته معرفة بالمعادلة (1) هو النموذج الرياضي وهو العنصر المثالي والذي من الممكن استعماله لتقريب خصائص الأداة الحقيقية . وإن المحث الحقيقي يمكن أن ينشأ بلف سلك على شكل ملف . وذلك يساعد بشكل مؤثر لزيادة التيار المسبب للمجال المغناطيسي . وكذلك لزيادة عدد الدوائر المجاورة التي تحث فيها فولتية فراداي . والنتيجة لهذا التأثير المزدوج هو أن المحثة للملف تتناسب تقريباً مع مربع عدد اللفات الكاملة من الموصل المؤلفة له . ووجد أن المحث أو الملف الذي له شكل حلزوني طويل ذو فجوات صغيرة له مجاثة هي $\mu N^2 A/s$ حيث A مساحة المقطع العرضي ، s الطول المحوري للحلزون ، N عدد اللفات الكاملة للسلك ، μ (ميو) ثابت المادة التي داخل الحلزون والذي يدعى انفاذية permeability وتبلغ إنفاذية الهواء $4\pi \times 10^{-7} \mu = \mu_0$.

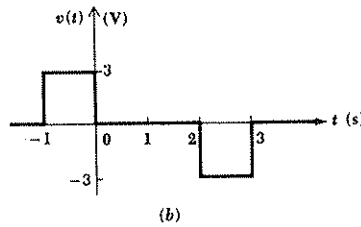
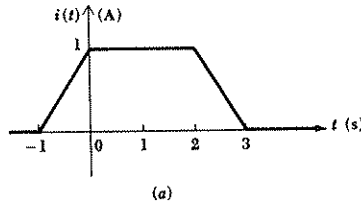
يجب أن ينظر الى المحثات الحقيقية في موضوع المختبر المصاحب لهذا الموضوع . اما المواضيع الخاصة بالندفوق المغناطيسي والانفاذية والطرق المستخدمة لايجاد خواص الملفات الحقيقية لغرض حساب محثة مناسبة لنموذج رياضي ، فتدرس في مواضيع الفيزياء ونظرية المجالات الكهرومغناطيسية .

ومن الممكن ايضاً تجميع الشبكات الألكترونية التي لا تحتوي على أي محث ومع هذا يمكن ان تعطى علاقة بين $v-i$ كالمعادلة (1) عند طرفي ادخالها . وسندرس مثلاً على ذلك في الفقرة 2 - 16 .

دعنا نتمعن النظر في المعادلة (1) لايجاد بعض الخصائص الكهربائية لهذا النموذج الرياضي . وإن هذه المعادلة تبين بأن الفولتية عبر المحث تتناسب مع المعدل الزمني لتغير التيار خلاله . وتبين بصورة خاصة بأنه ليس هناك فولتية عبر المحث الناقل لتيار ثابت بغض النظر عن قيمة هذا التيار . وعليه يمكننا رؤية المحث

كدائرة قصر للتيار المستمر وحقيقة أخرى توضحها هذه المعادلة تتعلق بمعدل تغير تيار المحث اللامحدودة مثلاً عند حدوث تغير فجائي في التيار من قيمة محدودة الى قيمة أخرى محدودة أيضاً . وإن هذا التغير الفجائي أو المتقطع في التيار يجب أن يصاحبه فولتية لانهاية في المحث . وبكلمة أخرى إذا رغبتنا في انتاج تغير فجائي في تيار المحث يجب أن يرافق هذا التغير تسليط فولتية لانهاية عبر الملف . وعلى الرغم من أنه يمكن تصور دالة مرغمة لانهاية للفولتية الا أن مثل هذه الدالة لا يمكن تحقيقها وقياسها بجهاز عملي حقيقي . كما سنرى بعد برهة بأن التغير الفجائي في تيار المحث يتطلب أيضاً تغييراً فجائياً في الطاقة المخزونة في المحث . وأن هذا التغيير الفجائي في الطاقة يتطلب قدرة لانهاية في تلك اللحظة . وإن القدرة اللانهاية كما أسلفنا هي ليست جزءاً من العالم الحقيقي . ولأجل تجنب الفولتية اللانهاية والقدرة اللانهاية فان تيار المحث يجب أن لا يسمح له بالقفز بشكل أني من قيمة الى أخرى . وإذا جرت محاولة لفتح دائرة محث حقيقي يسري فيه تيار محدود فإن شرارة تظهر عبر نهايتي الزر . وتتبدد الطاقة المخزونة في تأين الهواء في ممر الشرارة . ويفيد ذلك في منظومة بدء الاحتراق في السيارة حيث إن التيار خلال ملف القدح يقطع بموزع الشرارة distributor وتظهر شرارة عبر شمعات plug القدح .

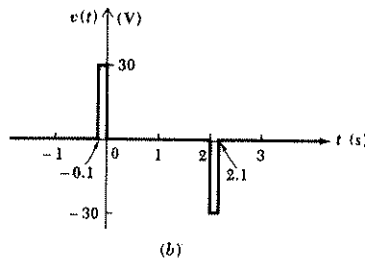
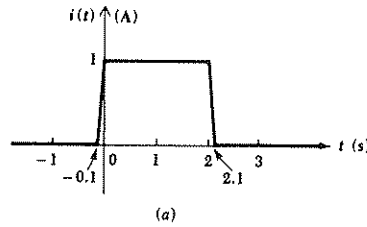
سنقل الآن دراسة دائرة المحث الذي تفتح دائرته بشكل مفاجيء تاركين ذلك الى حين دراسة وجود دالة مرغمة للفولتية أو إمكان حدوث استجابة لانهاية بصورة أنية .



شكل 2 - 4 شكل موجة التيار في محث مقداره 3 هنري . (ب) موجة الفولتية العائدة للموجة السابقة
 $v = 3 \, di/dt$

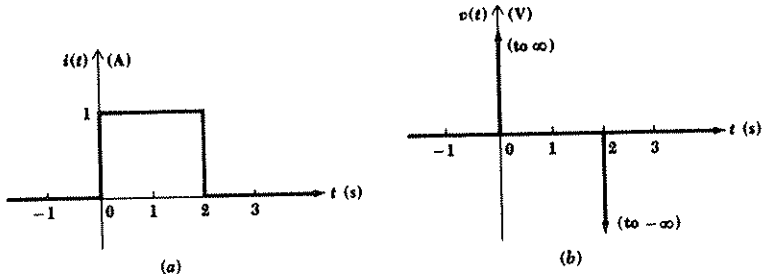
ويمكن تفسير المعادلة (1) (وحلها اذا كان ذلك ضرورياً) بالطرق التخطيطية . دعنا نفرض أن قيمة التيار كانت صفراً قبل الزمن $t = -1$ s وتزداد بشكل خطي الى 1 A في الثانية التالية ثم تبقى 1 A لمدة ثانيتين ثم تتناقص الى الصفر في الثانية التالية وتستمر صفراً بعد ذلك . إن شكل التيار مرسوم كدالة للزمن في الشكل 2 - 4 (أ) . واذا مر هذا التيار في المحث 3-H وكانت اتجاهات الفولتية والتيار مؤشرة لتفي بالغرض في حالة مصطلح اشارة العنصر الخامل فانه يمكننا استعمال المعادلة (1) للحصول على شكل موجة الفولتية . وبما أن التيار يساوي صفراً وهو ثابت على هذه القيمة للزمن $t < -1$ فان الفولتية في هذه الفترة تساوي صفراً ثم يبدأ التيار بعدها بالازدياد بمعدل خطي مقداره 1 A/s . لذا تتولد فولتية ثابتة مقدارها 3 V . وخلال فترة الثانية التاليتين اذا كان التيار ثابتاً فالفولتية تكون صفراً وهذا التناقص الأخير للتيار يسبب فولتية سالبة مقدارها 3 V ولا يوجد أي استجابة أخرى بعد ذلك . ويبين الشكل 2 - 4 (ب) موجة الفولتية مرسومة على نفس مقياس الزمن .

دعنا الآن نتحقق من تأثير الزيادة الأسرع وتلاشي التيار بين قيم الصفر و 1-A اذا قلت الفترات المطلوبة للزيادة والهبوط الى 50 ثانية فان تفاصيل ذلك سيكون أكبر من ذلك عشر مرات بالقيمة وهذه الحالة مبينة في رسم التيار والفولتية في الشكل 3 - 4 (أ) و (ب) . ففي شكل موجة الفولتية في الشكل 2 - 4 (ب) و 3 - 4 (ب) من المفيد ملاحظة أن المساحة تحت كل نبضة فولتية هي $3\text{ V}\cdot\text{s}$



شكل 3 - 4 (أ) الزمن اللازم للتيار في الشكل 2 - 4 ليتغير في 0 الى 1 ومن 10 الى 0 قد تقص بمعامل مقداره 10 (ب) شكل موجة الفولتية الناتجة .

أن أي تقليل في طول هذه الفترات ينتج قيمة فولتية أكبر تناسبياً ضمن الفترة التي يزداد أو يتناقص فيها التيار فقط . وإن التغير المفاجيء للتيار يسبب فولتيتين لانهائيتين بشكل « مسماري » « spikes » (كل واحدة لها مساحة $3V \cdot s$) كما يتضح من شكل الموجة في الشكل 4 - 4 أ و ب حيث انهما متساويتان بالمقدار ومتعاكستان بالاتجاه . وهذه الفولتية المسماة اللانهائية تعمل على انتاج تغيرات فجائية في التيار . ومن الملائم بعدئذ تهيئة مثل هاتين الفولتيتين اللانهائيتين وكذلك تيارات والتي نسسمها « نبضات » « impulses » . على اي حال سنكون قريين من الحقيقة بعدم السماح للفولتية بالوصول الى اللانهاية وكذلك التيار والقدرة لذلك فان التغير الفجائي في تيار المحث سيكون بدون قوانين مؤقتاً .



شكل 4 - 4 (أ) الزمن اللازم لتغير التيار في الشكل 4 - 2 (أ) من 0 الى 1 ومن 1 الى 0 الى صفر قد قلل الى صفر .
التغير في الزيادة والنقصان اصبح فجائياً : (ب) الفولتيات الظاهرة عبر المحث 3 هنري وهي مسماة لانهاية موجبة وسالبة .

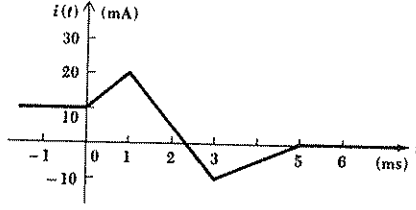
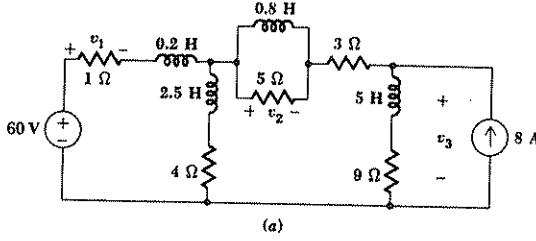
تمرينان :-

4 - 1 للدائرة المبينة في الشكل 4 - 5 (أ) . أوجد (أ) v_1 (ب) v_2 (ج) v_3

الجواب $0; 10.5; 55.1 V$

4 - 2 يبين الشكل 4 - 5 تغير التيار خلال المحث 25-mH مع الزمن . (ب) أوجد فولتية المحث حينما تساوي (أ) 0.5 ms (ب) 2.7ms (ج) 4.02 ms

الجواب $-0.375; 0.125; 0.25 V$



شكل 4-5 أنظر تمرين 4-1 و 4-2 .

3 - 4 العلاقات المثالية للمحث INTEGRAL RELATIONSHIPS FOR THE INDUCTOR

عرفنا المحثة بالمعادلة التفاضلية البسيطة

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (2)$$

ويمكن الحصول على عدة استنتاجات عن خصائص المحث من هذه العلاقة فمثلاً وجدنا بأننا يمكن أن نعتبر المحث عبارة عن دائرة قصر للتيار المستمر وكما اتفقنا فإننا لانستطيع السماح لتيار المحث للتغير بصورة فجائية من قيمة الى قيمة أخرى لأن ذلك يتطلب فولتية وقدرة لانهاية مرافقة للمحث ومن كل ذلك مازالت المعادلة المعروفة للمحثة تحوي معلومات أكثر . لنعد كتابة

$$di = \frac{1}{L} v dt$$

هذه المعادلة بهيئة مختلفة قليلاً :

لكي نتقبل التكامل دعنا نحدد حدود التكاملين على جهتي المعادلة فان التيار i في الزمن t يوفر زوجاً من الكميات تعطي الحد الأعلى في التكامل والذي يظهر على الجهتين اليسرى واليمنى من المعادلة على التعاقب . أما الحد السفلي فيمكن أن يكون عاماً بفرض أن التيار في الزمن t_0 هو $i(t_0)$. لذا

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt$$

أو

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

وكذلك
(3)

تعتبر المعادلة (2) عن فولتية المحث بدلالة التيار. بينما (3) تعطي التيار بدلالة الفولتية. كما أن الاشكال الأخرى للمعادلة الأخيرة هذه ممكنة أيضاً. كما يمكن

أن نكتب التكامل غير المحدد مع اضافة ثابت التكامل k .

$$i(t) = \frac{1}{L} \int v dt + k \quad (4)$$

لنفترض بأننا نحل مسألة حقيقية ففيها نختار t_0 كأنها $-\infty$ وهذا يؤكد انه لاوجود للتيار أو الطاقة في المحث فاذا كانت $i(t_0) = i(-\infty) = 0$ فان

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt \quad (5)$$

دعنا نطبق هذه المعادلة بحل مثال بسيط. فلو فرضنا بأن الفولتية عبر المحث 2-H معروفة وقيمتها $6 \cos 5t$ فولت ماهي المعلومات المؤثرة حول تيار المحث؟

من المعادلة (3)

$$i(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 6 \cos 5t dt + i(t_0)$$

$$i(t) = 1/2 \cdot 6/5 \sin 5t - 1/2 \cdot 6/5 \sin 5t_0 + i(t_0) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin 5t_0 + i(t_0)$$

ويوضح الحد الأول بأن تيار المحث يتغير جيئياً أما الحد الثاني والثالث سوية فيمثلان ثابتاً معلوماً عندما يكون التيار معروفاً عددياً في زمن معين. دعنا نفرض بأن منطوق مثالنا هذا أيضاً يبين لنا بأن التيار يساوي 1 A في اللحظة $t = -\pi/2$ ثانية. لذا فاننا نعرف t_0 بالقيمة $-\pi/2$ وان $i(t_0)$ يساوي 1

ونجد أن

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin (-2.5\pi) + 1$$

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

أو

ربما نحصل على القيمة نفسها من (4) حيث لدينا

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + k$$

ونجد القيمة العددية لـ k بجعل التيار 1 A في الزمن $t = -\pi/2$

$$1 = 0.6 \sin (-2.5\pi) + k$$

$$k = 1 + 0.6 = 1.6$$

أو

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + 1.6$$

وكذلك

مرة أخرى

تسبب المعادلة (5) بعض الاشكال حيث انها تعتمد على فرضية أن التيار هو صفر عندما $t = -\infty$ ولغرض التأكد من صحة هذه الفرضية يجب أن يتم ذلك عملياً إلا أننا في مجال البرهان الرياضي ، فالعناصر والدالات المرغمة كلها اعتبرت مثالية . تبدأ الصعوبة بعد التكامل

$$i(t) = 0.6 \sin 5t \Big|_{-\infty}^t$$

نحاول ايجاد التكامل في الحد الأسفل

$$i(t) = 0.6 \sin 5t - 0.6 \sin (-\infty)$$

إن اشارة $\pm\infty$ غير معرفة ، وربما نمثلها وكأنها ثابت مجهول .

$$i(t) = 0.6 \sin 5t + k$$

ان هذه النتيجة تماثل تلك التي حصلنا عليها عندما فرضنا ثابتاً اعتباطياً في (4) .

علينا أن لانسرع باستنتاج خلاصة تعتمد على هذا المثال ونعممها على سيرنا في المستقبل بشكل نهائي فان لكل نتيجة فوائد تعتمد على المسألة وتطبيقاتها . تمثل المعادلة (3) طريقة عامة وطويلة ولكنها تبين بوضوح بأن ثابت التكامل هو التيار . وإن المعادلة (4) تعبر بدقة أكثر عما في المعادلة (3) ، ولكن طبيعة ثابت التكامل أصبحت مخفية . وأخيراً فان (5) هي أحسن تعبير ممكن لأنه لا حاجة فيها الى ثابت . وعلى أي حال فهي تطبق فقط عندما يكون التيار صفراً في الزمن $t = -\infty$ وعندما يكون التعبير التحليلي للتيار فانه يكون غير محدد .

دعنا الآن نلفت انتباهنا الى القدرة والطاقة . فالقدرة الممتصة تعطى بحاصل

$$p = vi = Li \frac{di}{dt} \quad W \quad \text{ضرب التيار والفولتية .}$$

تخزن الطاقة التي تقبلها المحاطة في المجال المغناطيسي حول الملف ويعبر عنها بتكامل القدرة في الفترة الزمنية المرغوبة .

$$\int_{t_0}^t p \, dt = L \int_{t_0}^t i \frac{di}{dt} \, dt = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} i \, di = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \}$$

ولذا

$$w_L(t) - w_L(t_0) = \frac{1}{2} L \{ [i(t)]^2 - [i(t_0)]^2 \} \quad J \quad (6)$$

حيث أننا فرضنا بأن التيار هو $i(t_0)$ في الزمن t_0 . وباستعمال تعبير الطاقة يفرض تقليدياً بأن قيمة t_0 تنتخب ويكون التيار فيها صفراً وكذلك يفرض تقليدياً بأن الطاقة تكون صفراً في هذا الزمن ، فعندنا ببساطة .

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li^2$$

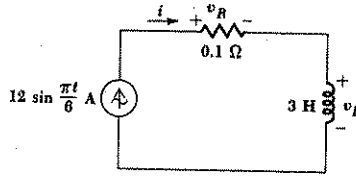
(7)

حيث أننا الآن فهمنا بأن المرجع للطاقة صفر هو أي وقت يكون فيه تيار المحث صفرًا . وفي أي وقت آخر يكون التيار فيه صفرًا نجد أيضاً أن الطاقة المخزونة في الملف تساوي صفره ومتى كان التيار لا يساوي صفرًا ، وبغض النظر عن اتجاهه أو اشارته ، فإن الطاقة المخزونة في المحثة تكون موجودة وعليه يتبع ذلك بأن القدرة يجب أن تجهز الى المحث لجزء من الزمن ثم تستعاد من المحث بعدئذٍ . وإن جميع الطاقة المخزونة ربما تستعاد من الملف المثالي وليس هناك شحنات تفقد في النموذج الرياضي .

ويبنى الملف الحقيقي على أي حال من سلك حقيقي ، لذا فهناك دائماً مقاومة ملازمة له لذا فالطاقة لا يمكن أن تخزن وتستعاد بدون ضياع .

يمكن توضيح ذلك بمثال بسيط في الشكل 6 - 4 محث محاثته 3 H على التوالي مع المقاومة 0.1-Ω ومصدر للتيار جيبي . إن المقاوم يمكن أن يكون مقاومة السلك الذي يجب أن يلزم الملف الحقيقي . تعطى الفولتية عبر المقاوم بالمعادلة :

$$v_R = Ri = 1.2 \sin \frac{\pi}{6} t$$



شكل 6 - 4 مصدر جيبي للتيار مسلط كدالة مرغمة للتوصيل التواليي في دائرة RL .

والفولتية عبر المحثة تحسب بتطبيق المعادلة التي تعرف المحثة :

$$v_L = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{d}{dt} \left(12 \sin \frac{\pi}{6} t \right) = 6\pi \cos \frac{\pi}{6} t$$

والطاقة المخزونة في المحث تكون :

$$w_L = \frac{1}{2}Li^2 = 216 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$$

ومن الواضح بأن هذه الطاقة تزداد من الصفر في $t = 0$ الى 216 J في $t = 3$ ثانية وخلال الثواني الثلاث التالية تغادر الطاقة الملف كلياً . دعنا نر الثمن الذي ندفعه في هذا الملف لانجاز خزن وازالة 216 J في عدة ثوانٍ . ويمكن ايجاد القدرة المبذولة في

$$p_R = i^2 R = 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t$$

المقاوم بسهولة :

الطاقة المتحوّلة الى حرارة في المقاوم خلال فترة الثواني الست هي

$$w_R = \int_0^6 p_R dt = \int_0^6 14.4 \sin^2 \frac{\pi}{6} t dt$$

$$w_R = \int_0^6 14.4(1/2) \left(1 - \cos \frac{\pi}{3} t\right) dt = 43.2 \text{ J}$$

أو

وهذا يمثل 20 بالمائة من اعظم طاقة خزنت وهي قيمة معقولة للكثير من الملفات ذات المحاثية الكبيرة كهذه. وللملفات التي محاثاتها بحدود $100 \mu\text{H}$ يجب ان نتوقع بان الرقم سيكون مقارباً الى ثلاثة بالمائة. في الفصل الرابع عشر سوف نضع الفكرة في قانون بتعريف عامل الجودة Q الذي يتناسب مع نسبة اعظم طاقة مخزونة الى الطاقة الضائعة في الفترة.

دعنا الآن نعد بعض خصائص المحث الناتجة من المعادلة التي سبق وأن عرفناها:

- 1- ليس هناك فولتية عبر المحث اذا كان التيار خلاله لا يتغير مع الزمن. لذلك تعمل المحاثية كدائرة قصر للتيار المستمر.
- 2- يمكن تخزين كمية محدودة من الطاقة في المحث حتى لو كانت الفولتية عبر المحاثية صفراً حيث ان ذلك يعني أن التيار خلالها ثابت (وليس صفراً).
- 3- من المستحيل تغيير التيار خلال المحث خلال فترة زمنية مقدارها صفر لأن ذلك يتطلب فولتية لانهاية عبر المحث. ومن المفيد بعدئذ الافتراض بأن مثل هذه الفولتية ربما تولد وتسقط على المحث ولكن في الوقت الحاضر سنتجنب دالة مرغمة أو استجابة كهذه. ويقاوم المحث التغيير الفجائي في التيار خلاله بطريقة تشبه مقاومة الكتلة للتغيير الفجائي في سرعتها.
- 4- المحث لا يبذل طاقة ولكنه يخزنها فقط ولو أن هذا صحيح للنموذج الرياضي ولكنه غير صحيح للمحث الحقيقي المادي.

تمرين

4.3 أوجد الفولتية v عبر المحث في الشكل 1-4 عندما $t=0$ اذا كان

$$L = 20 \text{ mH}$$

(أ) $i = 20e^{-300t} \cos 500t$ (ب) الطاقة المخزونة هي $J e^{-300t}$ و $i(0) > 0$. أوجد

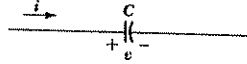
التيار i خلال المحث 20-mH عندما $t=0$ اذا: (ج) $i(-1) = 2 \text{ A}$ و $v = 2t^3 \text{ V}$ (د)

الطاقة المخزونة هي 4J عندما $t=0$ و $i(0) > 0$ و $v = 6 \sin 120t$.

الجواب 20 A ; -23 A ; -12 V ; -80 V

عنصر الدائرة غير الفعال التالي هو المتسعة وسوف نعرف السعة C بعلاقة الفولتية والتيار التالية

$$i = C \frac{dv}{dt} \quad (8)$$



شكل 7 - 4 مراجع التيار والفولتية مؤشرة على نموذج الدائرة للمتسعة ولذا $i = C \frac{dv}{dt}$

حيث v و i تحققان مصطلحات العناصر غير الفعالة كما مبينة في الشكل 7 - 4 . ومن (8) يمكننا ايجاد وحدة السعة بأنها أمبير - ثانية لكل فولت أو كولوم لكل فولت ولكننا سنعرف « الفراد » (F) farad بأنه كولوم لكل فولت .

ان المتسعة التي سعتها تعرف بـ (8) مرة اخرى هي النموذج الرياضي للأداة الحقيقية . أما تكوين الأداة المادية الحقيقية المقترحة برمز الدائرة المبينة في الشكل 7 - 4 يقرب كثيراً من الرمز الحلزوني المستعمل للمحث الذي يمثل السلك الملفوف في ذلك العنصر الحقيقي . المتسعة بالحقيقة تتكون من سطحين موصلين يمكن خزن الشحنة عليهما ومعزولين بطبقة عازلة رقيقة لها مقاومة عالية . سوف نفرض بأن هذه المقاومة كبيرة لحد يمكن أن تعتبر لانهاية ، لذا فالشحنات المتساوية بالكمية والمتعاكسة الموضوعة على صفائح المتسعة يمكنها أن تمتزج مع بعضها . على الأقل بأي طريق ضمن العنصر . دعنا نرى بعض الأدوات الخارجية لمصدر التيار مرتبطة بهذه المتسعة ومسببة تياراً موجياً يجرى الى إحدى صفيحتي المتسعة وخارجياً من الصفيحة الأخرى . تيارات متساوية تدخل وتغادر نهايتي العنصر ، وهذا ليس أكثر مما نتوقه لأي عنصر من الدائرة . والآن دعنا نختبر ما بداخل المتسعة . اذ يمثل التيار الموجب الداخل الى احد الصفيحتين الشحنة الموجبة باتجاه تلك الصفيحة خلال نهاية التوصيل وهذه الشحنة لا يمكنها العبور داخل المتسعة لذا تتجمع على الصفيحة . وبالحقيقة فان التيار والشحنة المتزايدين يتعلق الواحد منها بالآخر حسب المعادلة المعروفة .

$$i = \frac{dq}{dt}$$

والآن دعنا نتوقف قليلا ولنأخذ بنظر الاعتبار هذه الصفيحة كأنها عقدة كبيرة نامية ونطبق قانون التيار لكرشوف عليها . ومن الواضح أنه لا يمكن تطبيق ذلك . فالتيار

يقترب من الصفيحة من الدائرة الخارجية ولكنه لا يسري خارج الصفيحة في الدائرة الداخلية. لقد أزعجت هذه المشكلة العالم الاسكتلندي المشهور جيمس كلارك ماكسويل قبل حوالي القرن من السنين وهو الذي طور النظرية الكهرومغناطيسية الموحدة.

افترض ماكسويل أن هناك تيار أزاحة displacement current يوجد فيما يكون هناك مجال كهربائي أو أن الفولتية تتغير مع الزمن. وأن تيار الازاحة الجاري داخلياً بين صفائح المتسعة يساوي بالضبط تيار التوصيل الذي يجري في نهايات المتسعة. وعليه فإن قانون التيار لكرشوف يتحقق إذا أضفنا كلاً من تيار الازاحة وتيار التوصيل. على أي حال فإن تحليل الدائرة لا يتدخل بتيار الازاحة الداخلي. ولكن لحسن الحظ يساوي تيار التوصيل ويجب أن نعتبر فرضية ماكسويل كأنها تربط تيار التوصيل الى الفولتية المتغيرة عبر المتسعة. والعلاقة هذه خطية. ومن الواضح أن ثابت التناسب هو المتسعة C .

$$i_{\text{disp}} = i = C \frac{dv}{dt}$$

تتكون المتسعة من صفيحتين موصلين متوازيتين مساحة كل منهما A متباعدتين بمسافة d ولها سعة $C = \epsilon A/d$ حيث ϵ هي « السماحية » permittivity وهي ثابت المادة العازلة بين الصفيحتين والابعد الخطية للصفائح كلها أكبر بكثير من d وإن السماحية للهواء والفراغ هي

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \text{ pF/m} = (1/36\pi) \text{ nF/M}$$

إن فكرة المجال الكهربائي وتيار الازاحة. والشكل العام لقانون التيار لكرشوف هي أكثر المواضيع ملاءمة لدروس في الفيزياء ونظرية المجال الكهرومغناطيسي لآنها تمثل ايجاد النموذج الرياضي المناسب لتشبيه السعة الحقيقية المعينة.

هناك عدة خصائص مهمة لنموذجنا الرياضي الجديد يمكن استنتاجها من المعادلة (8). فالفولتية الثابتة عبر المتسعة تتطلب تياراً مقداره صفر يمر خلالها. لذا فالمتسعة دائرة مفتوحة للتيار المستمر وهذه الحقيقية يمكن تمثيلها بدقة برمز المتسعة. وكذلك من الواضح بأن القفزة الفجائية في الفولتية تتطلب تياراً لانهائي. كما كان الحال في التغير الفجائي في تيارات المحث والفولتيات اللانهائية المرافقة لذلك. ولكن بالنسبة للحقيقة الملموسة سوف لاندرج تغيرات فجائية في فولتية المتسعة فالتيار اللانهائي (والقدرة اللانهائية) الناتجة ليست أمورا واقعية. وسوف نزيل هذا التحفظ في الوقت الذي نفرض فيه ظهور نبضه تيار.

يمكن التعبير عن فولتية المتسعة بدلالة التيار بأخذ تكامل (8) فنحصل أولاً على :

$$dv = \frac{1}{C} i dt$$

ثم نكامل بين الزمنين t_0 و t وبين الفولتيات التابعة $v(t_0), v(t)$

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v(t_0) \quad (9)$$

المعادلة (9) يمكن كتابتها أيضاً كتكامل غير محدد زائدة ثابت التكامل

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i dt + k \quad (10)$$

وأخيراً في مسائل حقيقية كثيرة ربما يختار t_0 مساوياً $-\infty$ كما يختار $v(-\infty)$ على أنها صفر .

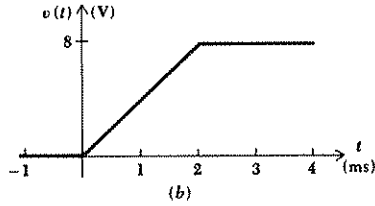
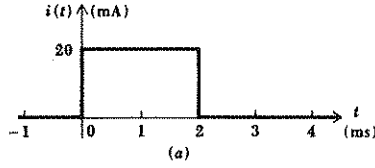
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt \quad (11)$$

وبما أن تكامل التيار خلال أي فترة زمنية هو الشحنة المتجمعة في تلك الفترة على صفيحة المتسعة التي فيها يمر التيار فمن الظاهر أن السعة ربما يمكن تعريفها بأنها :

$$q = Cv$$

إن التشابه بين عدة معادلات تكاملية قدمت في هذه الفقرة وكذلك التي ظهرت في مناقشتنا عن المحاثات تجلب الانتباه وتشير إلى أن التماثل الذي وجدناه بين معادلات العقدة والدائرة في الشبكات المقاومة ربما يمكن توسيعه لتضم كذلك المحاثات والسعة . أما أساس التماثل فسوف يقدم ويناقش بعدئذ في هذا الفصل .

وكتوضيح لاستعمال عدة معادلات تكامل معروضة أعلاه ، دعنا نجد فولتية المتسعة الموافقة مع التيار المبين بالرسم في الشكل 8 - 4 (أ) . سوف نفرض بأن النبضة المستطيلة المفردة ذات ارتفاع 20-mA وذات الفترة 2-ms سلطت على المتسعة $5-\mu F$. وبترجمة (9) بالرسم نعرف بأن الفرق بين قيم الفولتية في t_0 ، t يتناسب مع المساحة تحت منحنى التيار بين قيمتي الزمن هاتين . أما ثابت التناسب هو $1/C$. ويمكننا إيجاد المساحة من الشكل 8.4 أ بملاحظة القيم المطلوبة لـ t_0 و t .



شكل 8-4 (أ) موجة التيار المسلطة على المتسعة $5\text{-}\mu\text{F}$: (ب) موجة الفولتية الناتجة والتي وجدت بسهولة بالتكامل التخطيطي.

فإذا كانت $t_0 = -0.5$ و $t = 0.5$ بالملي ثانية .

$$v(0.5) = 2 + v(-0.5)$$

أو إذا كانت $t_0 = 0$ و $t = 3$

$$v(3) = 8 + v(0)$$

وربما نعبر عن نتائجنا بتعابير أكثر عموماً بتقسيم الفترات الزمنية المفيدة الى عدة أقسام . دعنا نختار نقطة البداية t_0 قبل الزمن صفر ثم الفترة الاولى لـ t تختار بين t_0 والصفر .

$$v(t) = 0 + v(t_0) \quad t_0 \leq t \leq 0$$

وبما أن شكل الموجه يبين بانه ليس هناك تيار مسلط سابقاً على المتسعة لآعن الخاصية

$$v(t_0) = 0$$

$$v(t) = 0 \quad t \leq 0$$

لذا

ولو اعتبرنا الآن الفترة الزمنية المثلثة بالنبضة المستطيلة التي حصلنا عليها .

$$v(t) = 4000t \quad 0 \leq t \leq 2 \text{ ms}$$

وللفترة شبه النهائية التالية تكون النبضة التي عندنا .

$$v(t) = 8 \quad t \geq 2 \text{ ms}$$

وعليه فإن نتائج هذه الفترات الثلاث تزودنا بتعابير التحليل لفولتية المتسعة لأي زمن بعد $t = t_0$.

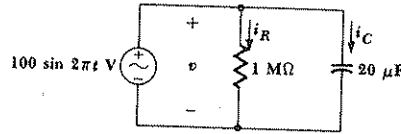
فالوقت t_0 على أي حال يمكن أن يختار مبكراً كما نرغب. والنتائج يمكن أن يعبر عنها ببساطة أكثر باستعمال مخططات عن استخدام المعادلات وذلك كما مبين في الشكل 8 - 4 (ب).

القدرة المخزنة في المتسعة هي

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt}$$

والطاقة المخزونة في المجال الكهربائي تكون

$$\int_{t_0}^t p dt = C \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} v dv = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \}$$



شكل 9 - 4 مصدر لفولتية جيبي مسلط على شبكة RC المتوازية.

ولذلك

$$w_c(t) - w_c(t_0) = \frac{1}{2} C \{ [v(t)]^2 - [v(t_0)]^2 \} \quad (12)$$

حيث أن الطاقة المخزونة هي $w_c(t_0)$ والفولتية في t_0 هي $v(t_0)$. إذا اخترنا مرجع الطاقة صفرًا في t_0 وبمعرفة أن فولتية المتسعة صفر أيضا في تلك اللحظة، لذا:

$$w_c(t) = \frac{1}{2} C v^2 \quad (13)$$

دعنا نأخذ مثلاً عددياً بسيطاً. وكما مخطط في الشكل 9 - 4 سوف نفرض مصدر فولتية جيبي على التوازي مع المقاوم $1\text{-M}\Omega$ والمتسعة $20\text{-}\mu\text{F}$. يفرض وجود مقاوم موازي أحياناً ليمثل مقاومة العازل الكهربائي بين صفيحتي المتسعة.

$$i_R = \frac{v}{R} = 10^{-4} \sin 2\pi t \quad \text{التيار خلال المقاوم يكون}$$

والتيار خلال المتسعة يكون

$$i_C = C \frac{dv}{dt} = 20 \times 10^{-6} \frac{d}{dt} (100 \sin 2\pi t) = 4\pi \times 10^{-3} \cos 2\pi t$$

بعدها نحصل على الطاقة المخزونة في المتسعة .

$$w_c = \frac{1}{2} C v^2 = 0.1 \sin^2 2\pi t$$

ونرى بأن الطاقة تزداد من الصفر في $t = 0$ الى أعظم قيمة 0.1 J في

$t = \frac{1}{4} \text{ s}$ ثم تتناقص الى الصفر برقع ثانية أخرى . وخلال فترة نصف

الثانية هذه تكون الطاقة المبددة في المقاوم .

$$w_R = \int_0^{0.5} p_R dt = \int_0^{0.5} 10^{-2} \sin^2 2\pi t dt = 2.5 \text{ mJ}$$

لذا فان 2.5 بالمائة من قيمة أعظم طاقة مخزونة كانت ضاعت في عملية خزن

وإزالة الطاقة في المتسعة المثالية .

ويمكن الحصول على قيم أقل في المتسعات ذات « الضياع القليل » ولكن

النسبة القليلة عادة تأتي في المتسعات الأكثر صغراً .

يمكن تلخيص الخصائص المهمة للمتسعة كما يأتي :

1 - التيار خلال المتسعة يكون صغراً اذا كانت الفولتية عبرها لا تتغير مع الزمن

فالمتسعة هي دائرة مفتوحة للتيار المستمر .

2 - يمكن خزن طاقة محدودة في المتسعة حتى ولو كان التيار خلال المتسعة صغراً

(اذا كانت الفولتية عبرها ثابتة) .

3 - من غير الممكن تغيير الفولتية عبر المتسعة بزمن محدود قيمته صفر ، لآعن ذلك

يتطلب تيار لانهائي خلال المتسعة . ومن المفيد بعدئذ افتراض بأن مثل هذا

التيار ربما يمكن أن يتولد ويسلط على المتسعة . ولكن في الوقت الحاضر سوف

تجنب مثل هذه الدالة أو الاستجابة . تقاوم المتسعة التغيير الفجائي في الفولتية

عبرها بالطريقة المشابهة لمقاومة النابض للتغيير الفجائي في ازاحته .

4 - لا تبدد المتسعة طاقة مطلقاً ولكن تخزنها فقط . وعلى الرغم من أن ذلك صحيح

للمنودج الرياضي ولكنه غير صحيح للمتسعة الواقعية .

ومن المفيد الاشارة في مناقشتنا للخاصيه الثنائية هنا باعادة قراءة النقاط الأربع

السابقة مع تبديل بعض الكلمات بكلمات أخرى . فاذا بدلت « المتسعة »

« بالمحث » ، « السعة » « بالمحثة » ، « الفولتية » « بالتيار » ، « عبر » « بخلال » ،

« دائرة مفتوحة » « بدورة قصيرة » ، « نابض » « بكتلة » ، « ازاحة » « بسرعة »

(باحد الاتجاهات) فإن النقاط الأربع المعطاة سابقاً للمتسعات تتحول الى نقاط

صحيحة للمحاثات .

تمرين :

4.4 في الشكل 7 - 4 أفرض أن $C = 0.02 \mu F$. أوجد $i(0.001)$ إذا : (أ)
 (ب) القدرة الممتصة من قبل المتسعة هي $v = 20e^{-1000t} \cos 250\pi t$ V
 و $v(0.001) = 50$ V و $0.1e^{-5000t}$ W . أوجد $v(0.001)$ إذا (ج) $v(0) = 50$ V و
 $w_C(0.001) = 2$ mJ (د) $i = 2 \cos 200\pi t$ mA
 الجواب $-185.8 \mu A; 1.213$ mA; 143.5 V; ± 447 V

5 - 4 المحاثة والسعة سوية : -

INDUCTANCE AND CAPACITANCE COMBINATIONS

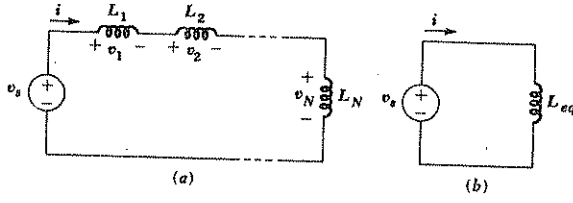
لقد اضفنا الآن المحث والمتسعة الى قائمة عناصر الدائرة الخاملة ونحتاج التأكد فيما اذا كانت الطرق التي طورناها في دراستنا لتحليل الدائرة المقاومة مازالت صالحة للاستخدام هنا . ومن المناسب أيضاً أن نتعلم الآن التعويض عن خليط التوالي والتوازي لأي من هذه العناصر بمكافئ كما فعلنا مع المقاومات في الفصل الثاني .

ننظر أولاً الى قانوني كرشوف اللذين يمكن أن نعتبرهما بديهية . على أي حال عندما درسنا هذين القانونين تم ادخالهما بدون تحفظ الى كل أنواع العناصر المكونة للشبكة . لذا فكلالهما صحيح الاستخدام على أي حال . والطرق التي اشتقت لتقليص دمج المقاومات المختلفة الى مقاوم مكافئ يمكن استعمالها بحالات مماثلة للمحثات والمتسعات . وفي البداية سنأخذ مصدر فولتية مثالياً مسلط على N من المحثات المتوالية كما مبين في الشكل 10 - 4 (أ) . ونحاول الحصول على محث مفرد مكافئ L_{eq} والذي يعوض عن المحثات المتوالية كلها . بحيث أن تيار المصدر $i(t)$ لا يتغير . يبين الشكل 4.10 (ب) مخططاً للدائرة الأصلية .

$$\begin{aligned} v_s &= v_1 + v_2 + \dots + v_N \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \dots + L_N) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

أو كتابتها بايجاز أكثر

$$v_s = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N L_n \frac{di}{dt} = \frac{di}{dt} \sum_{n=1}^N L_n$$



شكل 10 - 4 (أ) دائرة تحوي على N من المحاثات على التوالي (ب) الدائرة المكافئة والتي فيها

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

ولكن في الدائرة المكافئة لدينا .

$$v_s = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

لذا فان المحاثة المكافئة هي :

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$$

$$L_{eq} = \sum_{n=1}^N L_n$$

أو

المحاثة التي تكافئ عدة محاثات مربوطة على التوالي هي ببساطة مجموع المحاثات المتواليه . وهذه النتيجة تشبه النتيجة التي حصلنا عليها للمقاومات على التوالي . إن دمج عدد من المحاثات المتوازية يتحقق بكتابة معادلة العقدة المفردة للدائرة الاصيله المبينة في الشكل 4 - 11 (أ) .

$$i_s = \sum_{n=1}^N i_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{L_n} \int_{t_0}^t v dt + i_n(t_0) \right]$$

$$= \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{L_n} \right] \int_{t_0}^t v dt + \sum_{n=1}^N i_n(t_0)$$

وبمقارنتها مع النتيجة للدائرة المكافئة في الشكل 4 - 11 ب

$$i_s = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v dt + i_s(t_0)$$

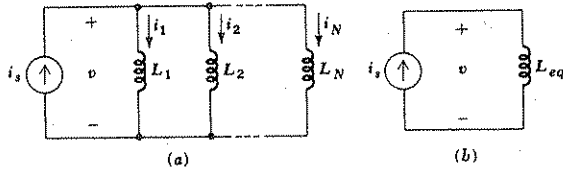
وبما أن قانون التيار لكروشوف يتطلب أن يكون $i_s(t_0)$ مساوياً لمجموع تيارات الفروع في t_0 فان الحدين التكامليين يجب أن يكونان متساويين أيضاً

$$L_{eq} = \frac{1}{1/L_1 + 1/L_2 + \dots + 1/L_N}$$

المحاصة

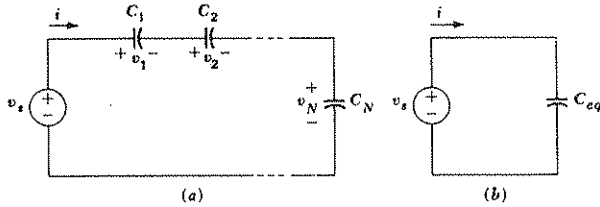
وللمحالة الخاصة لمحاثتين على التوازي

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$



شكل 11 - 4 (أ) مجموعة متوازية من N من المحاثات (ب) الدائرة المكافئة حيث

$$L_{eq} = 1/(1/L_1 + 1/L_2 + \dots + 1/L_N)$$



شكل 12 - 4 (أ) دائرة تحوي على N من المتسعات على التوالي (ب) المتسعة المكافئة حيث

$$C_{eq} = 1/(1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N)$$

ونلاحظ أن المحاثات المتوازية تندمج بالضبط مثل المقاومات المتوازية .
ولأجل إيجاد السعة التي تكافئ N من المتسعات على التوالي نستعمل الدائرة في
الشكل 12 - 4 (أ) ومكافئها الشكل 12 - 4 (ب) لكتابة

$$v_s = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{C_n} \int_{t_0}^t i dt + v_n(t_0) \right]$$

$$= \left[\sum_{n=1}^N \frac{1}{C_n} \right] \int_{t_0}^t i dt + \sum_{n=1}^N v_n(t_0) \quad \text{وان}$$

$$v_s = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i dt + v_s(t_0)$$

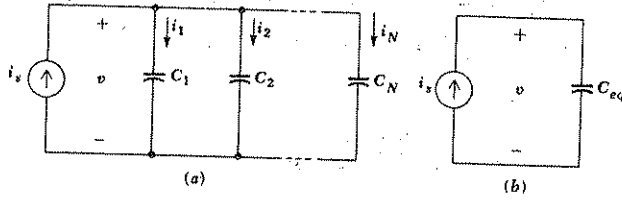
على أية حال فان قانون الفولتية لكرشوف يحقق مساواة $v_s(t_0)$ مع مجموع
فولتيات المتسعات في t_0 لذا

$$C_{eq} = \frac{1}{1/C_1 + 1/C_2 + \dots + 1/C_N}$$

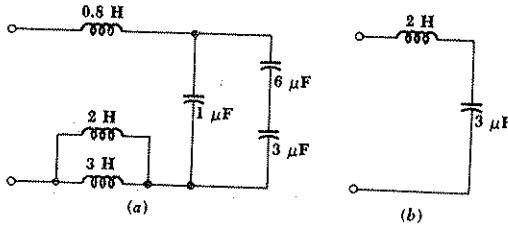
والمتسعات المتواليّة تندمج كما في حالة المقاومات المتوازية .

وأخيراً فالشكل 13 - 4 يساعدنا لإيجاد قيمة السعة التي تكافئ N من
المتسعات المتوازية كأنها :

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$



شكل 13 - 4 (أ) مجموعة من N من المتسعات على التوازي (ب) الدائرة المكافئة حيث
 $C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$.



شكل 14 - 4 (أ) شبكة لاعلى التعيين مكونة من عدة محاثات ومتسعات (ب) دائرة مكافئة لها بسيطة .

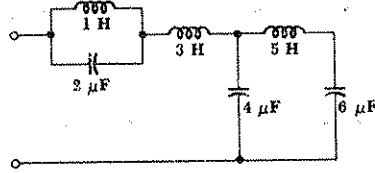
ولا داعي للعجب لملاحظة أن المتسعات المتوازية تدمج بنفس الطريقة التي تدمج فيها المقاومات على التوالي أي بكل بساطة بجمع المتسعات منفردة .

وكمثال على استخدام التبسيط عند العناصر المتشابهة لنأخذ الشبكة في الشكل 14 - 4 أ حيث المتسعات 6 و 3 دمجت أولاً إلى مكافئها الـ $2\text{-}\mu\text{F}$. وهذه المتسعة دمجت بعدئذ مع العنصر $1\text{-}\mu\text{F}$ المربوط على التوازي معها لتنتج السعة المكافئة $3\text{-}\mu\text{F}$. بالإضافة إلى ذلك فالمحاثات 3 و 2 استبدلت بمكافئها المحاثة 1.2-H والتي تضاف بعدئذ إلى العنصر 0.8-H لتعطي المحاثة المكافئة الكلية 2 H . يبين الشكل 14 - 4 (ب) الشبكة المكافئة الأبسط (وربما الأرخص ثمناً) .

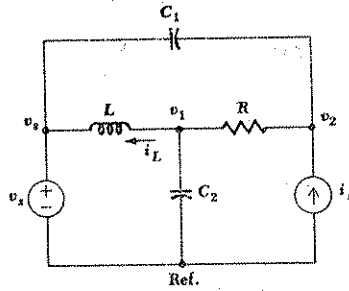
وتحوي الشبكة المبينة في الشكل 15 - 4 ثلاث محاثات وثلاث متسعات ولا يمكن تحقيق الدمج على التوالي أو التوازي للمحاثات ولا المتسعات في نفس الوقت .

دعنا بعد ذلك نعود إلى تحليل الدائرة والدارة والعقدة . وبما أننا نعلم مسبقاً بأنه يجب أن نفي بأمان بتطبيق قوانين كرشوف لذا فهناك صعوبة قليلة في كتابة

مجموعة المعادلات التي تكون كافية وغير معتمدة على بعضها البعض في آن واحد . وسيكون هناك معاملات ثابتة للمعادلات التكاملية التفاضلية الخطية .



شكل 15 - 4 شبكة متألفة من عدة محاثات وعدة متسعات وأي جمع على التوالي أو على التوازي غير ممكن فيها



شكل 46 - 4 دائرة ذات أربع عقد تحوي على متسعات، ومقاومات ومحاثات مع تأثير فولتيات العقد .

لنحاول كتابة معادلات العقدة للدائرة في الشكل 16 - 4 . ولقد اختيرت فولتيات العقدة كما هي موضحة في الشكل وكذلك مجموع التيارات المغادرة للعقدة المركزية .

$$\frac{1}{L} \int_{t_0}^t (v_1 - v_s) dt + i_L(t_0) + \frac{v_1 - v_2}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} = 0$$

حيث $i_L(t_0)$ هي قيمة تيار المحث في الزمن الذي يبدأ فيه التكامل او القيمة الابتدائية . ففي العقدة اليمنى .

$$C_1 \frac{d(v_2 - v_s)}{dt} + \frac{v_2 - v_1}{R} - i_s = 0$$

عند اعادة كتابة هاتين المعادلتين لدينا :

$$\frac{v_1}{R} + C_2 \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_1 dt - \frac{v_2}{R} = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v_s dt - i_L(t_0)$$

$$-\frac{v_1}{R} + \frac{v_2}{R} + C_1 \frac{dv_2}{dt} = C_1 \frac{dv_s}{dt} + i_s$$

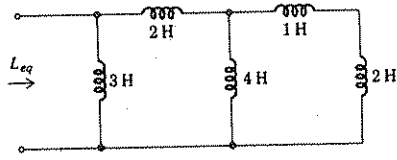
وهذه هي المعادلات التكاملية التفاضلية التي سبق وان اشرنا اليها وسنضع بعض الملاحظات حولها . اولاً مصدر الفولتية v_s حدث وان دخل المعادلات كمشتق او تكامل وليس بشكل v_s فقط . وبما ان كلاً من المصدرين محددان لكل الأزمنة لذا فبإمكاننا ايجاد التفاضل او التكامل . اما الملاحظة الثانية فهي ان القيمة الابتدائية لتيار المحث $i_L(t_0)$ تعمل كتيار مصدر (ثابت) في العقد المركزية وسوف لانحاول حل هذه المعادلات في هذا الوقت ومن المفيد الاشارة على اي حال بأنه حينما تكون الدالتان المرغمتان للفولتية دالتين جيبيتين للزمن يكون بالإمكان تعريف نسبة الفولتية للتيار تدعى الممانعة impedance او نسبة التيار للفولتية تدعى المسايمة (او التقبلية) admittance لكل من العناصر الثلاثة غير الفعالة . ان العوامل المؤثرة على فولتيتي العقدتين في المعادلات اعلاه لاتصبح سوى عوامل مضروبة وبذا تكون المعادلات معادلات جبرية خطية مرة اخرى . وهذه يمكن ان نحلها بالتحديد أو باختزال المتغيرات بالسابق .

تصميم :-

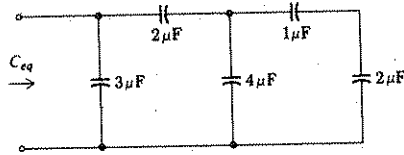
- 4.5 (أ) أوجد L_{eq} في الشكل 17 - 4 (ب) أوجد C_{eq} في الشكل 17 - 4
 4 (ج) أوجد v_s في الشكل 17 - 4 ج إذا $v_c = 30 \cos 600t$ V

الجواب

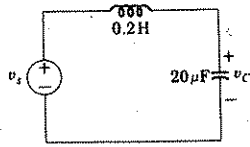
$$1.660 \text{ H}; 4.40 \text{ } \mu\text{F}; -13.2 \cos 600t \text{ V}$$



(a)



(b)



(c)

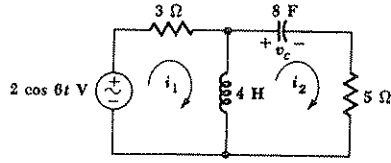
الشكل 17 - 4 انظر التمرين 4 - 5

6 - 4 الثنائية DUALITY

الثنائية أشير إليها سابقاً لعلاقتها مع الدوائر المقاومة ونوقشت بعد ذلك مع المحاثة والسعة وقد كانت تلك كمقدمة سريعة لهذا الموضوع وعلينا الآن تعريفها بالضبط ومن ثم استعمال التعريف لتميز أو انشاء الدوائر الثنائية حتى نتجنب تحليل كل من الدائرة وثنائيتها.

وسوف نعرف الثنائية بدلالة معادلات الشبيكة والمعادلات العقدية ، فان دائرتين تكون احدهما ثنائية للأخرى اذا كانت معادلات الشبيكة والتي تصف احدهما بالشكل الرياضي نفسه للمعادلات العقدية التي تعرف الأخرى . ويقال عنها ثنائية تماماً اذا كانت كل معادلة شبيكة لاحدى الدوائر ، مشابهة بارقامها لمعادلة العقدة المناظرة لها من الدائرة الأخرى . وطبيعياً فان متغيرات التيار والفولتية ذاتها لا يمكن ان تكون متشابهة . وتركز الثنائية على خصائص الدائرتين المناظرتين .

لنوضح التعريف ثم نستعمله لتكوين دائرة ثنائية مضبوطة بكتابة المعادلتين للشبيكة في الدائرة المبينة في الشكل 4 - 18 ، يبين الشكل تيارى الشبكتين i_1 و i_2 والمعادلات الشبيكية للدائرة هي :



شكل 18 - 4 دائرة يمكن تطبيق تعريف الثنائية لايجاد الدائرة الثنائية لها .

$$3i_1 + 4 \frac{di_1}{dt} - 4 \frac{di_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (14)$$

$$-4 \frac{di_1}{dt} + 4 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t i_2 dt + 5i_2 = -10 \quad (15)$$

ويجب ان نلاحظ بأن فولتية المتسعة v_C فرضت 10 V في $t = 0$ ويمكن الآن تكوين المعادلتين اللتين هما المعادلتان الثنائيتان تماماً للمعادلتين (14) و (15) ونرغب في أن تكونا معادلتى عقد . لذا فلنبدأ باستبدال تيارات الشبكة i_1 و i_2 بفولتيات العقد الى المرجع v_1 و v_2 فنحصل على :

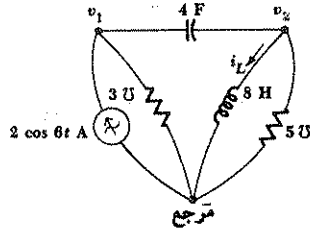
$$3v_1 + 4 \frac{dv_1}{dt} - 4 \frac{dv_2}{dt} = 2 \cos 6t \quad (16)$$

$$-4 \frac{dv_1}{dt} + 4 \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{8} \int_0^t v_2 dt + 5v_2 = -10 \quad (17)$$

والآن نفتش عن الدائرة المثثلة بمعادلتى العقد هذه .

لنرسم أولاً الخط الذي يمثل عقدة المرجع ثم بعد ذلك نثبت عقدتين يقع فيهما المرجع الموجب لكل من v_1 و v_2 . توضح المعادلة (16) ان تيار مصدر التيار $2 \cos 6t$ مربوط بين العقدة 1 وعقدة المرجع وبتجه لتجهيز تيار يدخل العقدة 1 هذه المعادلة كذلك تبين بأن التوصيلية $3 - 4s$ تظهر بين العقدة 1 وعقدة المرجع . بالرجوع الى (17) ثم نأخذ أولاً الحدود غير المتبادلة بين المعادلتين أو الحدود التي لم تظهر في (16) وترشدنا الى ان ربط المحث 8 هنري والتوصيلية $5 - 4s$ على التوازي بين العقدة 2 والمرجع والحدين المتشابهين في المعادلتين (16) و (17) وهما يمثلان متسعة سعتها 4 فاراد موجودة على التبادل في العقدة 1 والعقدة 2 وتكمل الدائرة بربط هذه المتسعة بين العقدتين . ان الحد الثابت الموجود في الجهة اليمنى من (17) هو قيمة تيار المحث في $t = 0$ لذا $i_L(0) = 10 \text{ A}$ والدائرة الثنائية ميمنة في الشكل 19 - 4 . وبما ان المجموعتين من المعادلات متشابهة رقمياً فالدائرتان احدهما ثنائية للأخرى تماماً .

يمكن الحصول على الدائرة الثنائية بطرق أسهل من الطريقة السابقة حيث انها لا تحتاج الى كتابة المعادلات . ولأجل بناء ثنائي الدائرة المعطاة نفكر في الدائرة بالنسبة الى معادلات الشبيكة .

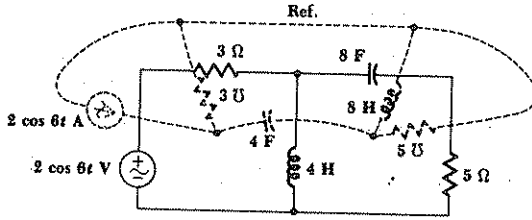


شكل 19 - 4 الثنائية المطابقة تماماً لدائرة الشكل 18 - 4

ويجب ان نراى شبيكة لعقدة غير مرجعية ، وبالإضافة لذلك يجب تجهيز عقدة المرجع للدائرة المعطاة. نضع على الشكل عقدة في وسط كل شبيكة ، ونزود عقدة المرجع كخط قرب الشكل أو دائرة تحيط بالشكل . وان كل عنصر يظهر مشتركاً بين شبيكتين هو عنصر تبادلي ويعطى حدوداً متشابهة في معادلتى الشبيكتين عدا ما يتعلق بأشاراتها . ويجب استبدال مثل هذا العنصر بعنصر يجهر معادلتى العقدة بحدود متناظرة . ويربط هذا العنصر التبادلي بين عقدتين غير مرجعيتين واللذان تقعان ضمن الشبيكات التي ظهر فيها العنصر التبادلي . وان طبيعة العنصر التبادلي نفسه ممكن التأكد منها بسهولة . حيث الشكل الرياضي للمعادلات سيكون نفسه مع استبدال المحاة بالسعة والسعة بالمحاة والتوصيلية بالمقاومة والمقاومة بالتوصيلية . لذا فالمحث 4 هنري والذي هو مشترك بين الشبيكتين 1 أو 2 في دائرة الشكل 4 - 18 يظهر كمتسعة 4 فاراد مربوطة مباشرة بين العقدتين 1 و 2 في الدائرة الثنائية .

ان العناصر التي تظهر فقط في شبيكة واحدة يجب ان يكون لها ثنائي يظهر بين العقد المتناظرة وعقدة المرجع . وبالرجوع مرة أخرى الى الشكل 8 - 4 يظهر مصدر الفولتية $2 \cos 6t V$ فقط في الشبيكة 1 وثنائي هذا المصدر مصدر هو التيار $2 \cos 6t A$ الذي يربط بين العقدة 1 وعقدة المرجع . وبما ان اتجاه مصدر الفولتية باتجاه عقرب الساعة فان مصدر التيار يجب أن يكون باتجاه يدخل

الى العقدة غير المرجعية . وأخيراً يجب أخذ الاحتياطات لثنائي الفولتية الابتدائية التي تظهر عبر المتسعة 8-F في الدائرة المعطاة . ولقد أوضحت المعادلات بأن ثنائي هذه الفولتية عبر المتسعة هو التيار الابتدائي في المحث في دائرة الثنائي كما ابقت على القيم العددية نفسها . ويمكن ايجاد اشارة التيار الابتدائي بشكل جاهز باعتبار كل من الفولتية الابتدائية في الدائرة المعطاة والتيار الابتدائي في دائرة الثنائي كمصادر . لذا فانه اذا كانت v_c في الدائرة المعطاة تعامل كمصدر لذلك فانها تظهر بشكل $-v_c$ الى جهة اليمين من معادلة الشبيكة في دائرة الثنائي وبمعاملة التيار i_L كمصدر فانه سيؤول الى $-i_L$ على جهة اليمين من معادلة الثنائي . وبما ان كلاً منها يحمل الاشارة نفسها عندما عوملت كمصدر . لذا فانه اذا كانت $v_c(0) = 10 \text{ V}$ فان $i_L(0)$ يجب ان تكون 10 A .

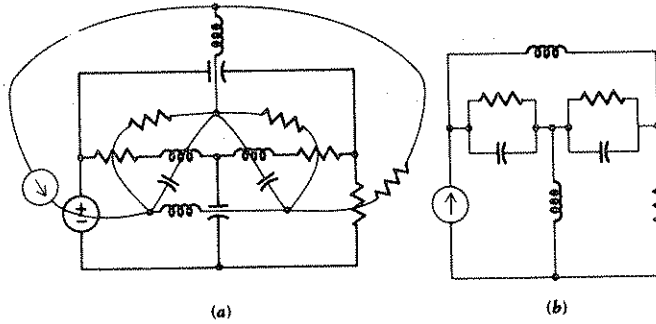


شكل 20 - 4 الدائرة الثنائية لدائرة الشكل 18 - 4 والمنشأة مباشرة من تخطيط الدائرة .

وان الدائرة المبينة في الشكل 18 - 4 معادة في الشكل 20 - 4 وثنائيتها منشأ على مخطط الدائرة نفسها برسم ثنائي كل عنصر معطى بين العقدتين اللتين وضعتا في مركزي الشبيكيتين المشتركتين في العنصر المعطى . وان عقدة المرجع الذي تحيط بالدائرة المعطاة تساعد نوعاً ما . وبعد اعادة رسم الدائرة بشكل قياسي أكثر مما سبق . يظهر كما هو مبين في الشكل 19 - 4 .

والمثال الاضافي لانشاء دائرة الثنائي مبينة في الشكل 21 - 4 (أ) و (ب) وبما انه لم تحدد قيم العناصر . فان هاتين الدائرتين ثنائيتان . ولكن ليس من الضروري ان تكونا ثنائيتين بالضبط . فالدائرة الاصلية يمكن استكشافها من الثنائي باستبدال عقدة في مركز كل من الشبيكات الخمسة للشكل 21 - 4 ب ونستمر كما سبق .

وان فكرة الثنائي يمكن تطبيقها باللغة التي شرحنا بها تحليل الدائرة او اشتغالها لهذا نقوش مثال واحد فيما سبق في الفقرة 4 - 4 كما اعطي توضيح مختصر هناك . وان معظم هذه الازواج من الدوائر كانت واضحة وحينما كان هناك اي سؤال في الكلمة او بتعبير آخر فانه يمكن رسم دائرة الثنائي توصف بلغة



شكل 21 - 4 أ الدائرة الثنائية (بالخطوط الخفيفة) لدائرة ممطاة (بالخطوط الغامقة) منشأة على الدائرة نفسها (ب) الدائرة الثنائية مرسومة بطريقة واضحة أكثر .

مشابهة . ومثال لذلك : اذا اعطينا مصدراً للفولتية مع متسعة على التوالي ونرغب في القول بأن « مصدر الفولتية يسبب سريان التيار خلال المتسعة » . فان النص الثنائي لهذا هو « مصدر التيار يسبب ظهور الفولتية عبر المحث » . والثنائي لجملة غير واضحة المفردات مثلاً « التيار يدور في دائرة التوالي » عادة يحتاج لبعض التمحيص³ . كما يمكن التمرن على استعمال لغة الثنائي بقراءة نظرية ثيفنن حسب الملاحظات السابقة حيث تنتج نظرية نورتن .

تكلّمنا على عناصر الثنائي ولغة الثنائي ودوائر الثنائي . ماذا عن شبكة الثنائي ؟ لناخذ المقاوم R والمحث L على التوالي فثنائي هذه الشبكة ذات النهايتين موجود ويمكن الحصول عليه بسهولة بربط مصدر مثالي الى الشبكة المعطاة ويمكن الحصول على الثنائية بعد ذلك وكأنها المصدر الثنائي على التوازي مع التوصيلية G حيث $G = R$ والسعة $C = L$. نعتبر ثنائي الشبكة ذات النهايتين المربوطة الى مصدر الثنائي ، لذا فهي عبارة عن زوج من النهايات بينها C و G مربوطة على التوازي .

3 اقترح البعض « الفولتية هي عبر دائرة التوازي بأجمعها »

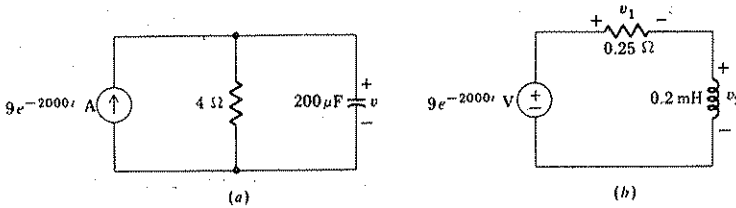
وقبل ترك تعريف الثنائي يجب الإشارة الى ان الثنائية تعرف على أسس معادلات الشبكة ومعادلات العقدة. وبما ان الدوائر الموصلة لا يمكن وضعها في منظومة معادلات الشبكة فان الدائرة التي يمكن اعادة رسمها بصورة سطحية لاتخضع للثنائية.

ونسعمل الثنائية أساساً لتقليص العمل الواجب عمله لتحليل الدوائر القياسية البسيطة. وبعد ان حللنا دائرة RL المتوالية فان دائرة RC المتوازية تتطلب اهتماماً أقل. لاسبب انها أقل أهمية ولكن لأن تحليل شبكة الثنائي قد تم تعريفها الآن وبما ان تحليل بعض الدوائر المعقدة لاداعي لمعرفته جيداً فان الثنائية عادة لاتهيء لنا حلاً أسرع.

تمرين :-

4.6 أكتب معادلة العقدة المنفردة في الشكل 22 - 4 وبرهن بالتعويض المباشر أن $v = -60e^{-2000t}$ هو الحل. بمعرفة ذلك ارجع الى الشكل 22 - 4 (ب) ثم جد v_1 (أ) v_2 (ب)

الجواب $V; 24e^{-2000t}$ $V; -15e^{-2000t}$



الشكل 22 - 4 انظر التمرين 6 - 4

4.7 الخطية وعواقبها مرة أخرى

LINEARITY AND ITS CONSEQUENCES AGAIN

في الفصل السابق تعلمنا بأن نظرية التراكب هي نتيجة ضرورية للطبيعة الخطية للدوائر المقاومة التي حللناها. ان الدوائر المقاومة هي خطية لأن علاقة الفولتية والتيار للمقاوم هي خطية وان قانوني كرشوف هما قانونان خطيان.

لنوضح الآن فوائد الخاصية المطبقة كذلك على دوائر RLC . وبموجب تعريفنا السابق للدائرة الخطية فان هذه الدوائر تعتبر خطية أيضاً لأن علاقات الفولتية والتيار للمحث والمتسعة هي علاقات خطية فللمحث يكون لدينا .

$$v = L \frac{di}{dt}$$

وبضرب التيار بثابت K فان ذلك يؤدي الى الفولتية التي هي أيضاً أكبر بعامل مقداره K . ففي القانون التكاملي

$$i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i_L(t_0)$$

ويمكن الاستنتاج بسهولة K ، ان كل حد اذا ازداد يزداد بالعامل K ، بعدها فالقيمة الابتدائية للتيار يجب ان تزداد بنفس العامل K . اي ان العامل K لا يطبق فقط على التيار والفولتية في الزمن t ولكن أيضاً على قيمتها السابقة . وان دراسة مشابهة للمتسعة تبيّن بأنها خطية أيضاً . لذا فالدائرة المكونة من مصادر غير معتمدة ومصادر معتمدة خطية ومعلومات خطية ومحثات ومتسعات هي دائرة خطية .

في هذه الدائرة الخطية تكون الاستجابة متناسبة مع الدالة المرغمة . وبرهان هذا النص يتحقق أولاً بكتابة منظومة عامة للمعادلات التفاضلية مثلاً بدلالة تيارات الدارات . دعنا نستبدل جميع الحدود التي لها الشكل Ri ، $L \frac{di}{dt}$ ، $(1/C) \int i dt$ الى يسار كل معادلة ونحتفظ بمصدر الفولتية غير المعتمد الى جهة اليمين . وكمثال بسيط للمعادلات ربما يكون لها الهيئة .

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + v_C(t_0) = v_s$$

واذا زيد كل مصدر غير معتمد بالعامل K فان الجهة اليمنى لكل معادلة هي أكبر بالعامل K . والآن كل حد الى جهة اليسار اما أن يكون حداً خطياً يحوي بعضاً من تيار الدارة أو فولتية ابتدائية لمتسعة . ولأجل أن تجعل كل الاستجابة (تيارات الدارات) تزداد بالعامل K فانه من الواضح بأننا يجب أن نزيد أيضاً فولتية المتسعة الابتدائية بالعامل K . أي أننا يجب ان نعامل فولتية المتسعة الابتدائية لمصدر فولتية غير معتمد ونزيدها أيضاً بالعامل K . وبصورة مشابهة فان تيارات المحث الابتدائية يجب ان تعامل كمصادر تيار غير معتمدة في التحليل العقدي .

ولهذا فان التناسب بين المصدر والاستجابة يمكن تحديده استعماله الى دائرة RLC العامة ويظهر أيضاً أن نظرية التراكب يمكن تطبيقها . ويجب التأكيد على معاملة تيارات المحث وفولتيات المتسعة الابتدائية كمصادر غير معتمدة عند

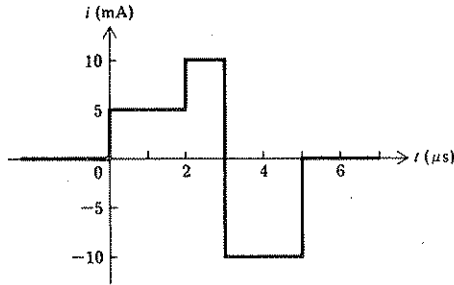
تطبيق نظرية التراكب . وكل قيمة ابتدائية يجب ان تاخذ دورها اذا اعتبرت غير فعالة .

وقبل أن نستطيع تطبيق نظرية التراكب على دوائر RLC على أية حال ، من الضروري أولاً تطوير طريقة حل المعادلات التي تصف هذه الدوائر عندما يظهر فقط مصدر غير معتمد واحد . وفي هذا الوقت يجب ان نشعر بالقناعة بأن الدائرة الخطية سيكون لها استجابة قيمتها العظمى تتناسب مع القيمة العظمى للمصدر . ويجب ان نكون متيقنين ان تطبيق نظرية التراكب بعدئذ باعتبار تيار المحث أو فولتية المتسعة في $t = t_0$ كأنها مصدر يجب القضاء عليه عندما تحين الفرصة .

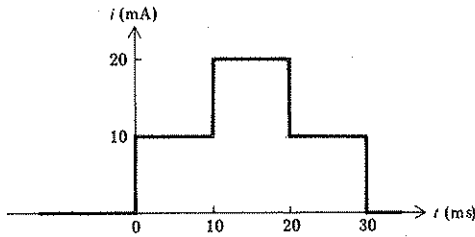
تعتمد نظريات ثيفنن ونورتن على الخطية للدائرة الاصلية وامكانية تطبيق قانوني كرشوف ونظرية التراكب . وان دائرة RLC العامة تؤكد تماماً هذه المتطلبات . عندئذ يتبع ذلك بأن الدوائر الخطية التي تحوي أي مزيج من الفولتية غير المعتمدة ومصادر التيار والفولتية المعتمدة الخطية ومصادر التيار والمقاومات الخطية والمحثات والمتسعات ربما يمكن تحليلها باستعمال نظريتين اذا رغنا . وليس من الضروري إعادة النظريات المذكورة سابقاً حيث ذكرت بطريقة يمكن تطبيقها بشكل مشابه على دائرة RLC العامة .

مسائل :-

- 1 نبضة تيار بشكل $i(t) = 1/(1 + 4t^2)$ A سلطت على محث ذي $3-H$. (أ)
 ارسم الفولتية عبر المحث على فرض استخدام مفهوم الاشارات غير الفعالة $passive$.
 (ب) في أي لحظة من الزمن تصل الفولتية قيمتها القصوى ؟
- 2 التيار في المحث المبين في الشكل 1 - 4 هو $i = 10(1 + \cos 100\pi t)$ mA للفترة $-0.01 \leq t \leq 0.01$. وتساوي صفرًا لكل القيم الأخرى لـ t . إذا كانت $L = 0.2 H$ ، ارسم i و v ثم أوجد v_{max}
- 3 التيار $i = 5 \sin 10t$ A يسري في المحث المبين في الشكل 1 - 4 . إذا كانت $L = 2 H$ ، ماهي أول لحظة زمنية بعد $t = 0$ حينما تكون القدرة الداخلة للمحث بالضبط (أ) $100 W$ ، (ب) $-100 W$
- 4 الفولتية عبر محث ذي $0.1-H$ تساوي التيار خلاله على امتداد الزمن . إذا كان $i = 1 A$ عندما $t = 0$ ، أوجد $i(t)$
- 5 الطاقة المخزونة في محث ذي $10-mH$ تساوي صفرًا حينما $t = 1 ms$ وتزداد خطياً بمعدل $0.02 J$ كل ثانية بعد ذلك . أوجد تيار وفولتية المحث حينما $t > 1 ms$ إذا لم يكن أي منهما سالبًا بتاتاً .
- 6 الفولتية عبر المتسعة المبينة في الشكل 7 - 4 يعبر عنها بالمعادلة $v = 100t^2(3 - t)V$ خلال الفترة $0 \leq t \leq 2 s$. إذا كانت $C = 10 \mu F$ (أ) أوجد وارسم هذا التيار كدالة للزمن $0 \leq t \leq 2 s$ (ب) أوجد i_{max} واللحظة التي تحدث فيها خلال الفترة $0 \leq t \leq 2 s$ (ج) أوجد قدرة الدخل الى المتسعة وارسمها كدالة للزمن $0 \leq t \leq 2 s$
- 7 التيار خلال المتسعة $50-pF$ يعبر عنه بشكل الموجة المبين في الشكل 23 - 4 ارسم منحنى القدرة الواصلة للمتسعة كدالة للزمن ثم أوجد قيمة P عندما $t = 2.5 \mu s$
- 8 متسعة قيمتها $25-\mu F$ لا يوجد أي فولتية عبرها عندما $t = 0$. سلطت عليها نبضة واحدة من التيار المبين في الشكل 4 - 24 . أوجد الفولتية عبرها وقدرة الدخل اليها والطاقة المخزونة فيها عندما t : (أ) $17 ms$ ، (ب) $40 ms$
- 9 التيار $i = 0.2 \sin 2000t$ A يسري خلال ربط متوالي من $2 \mu F$ و $\frac{1}{8} H$ إذا كانت فولتية المتسعة $-50 V$ عندما $t = 0$ ، أوجد الطاقة الكلية المخزونة في الشبكة المتوالية كدالة للزمن .

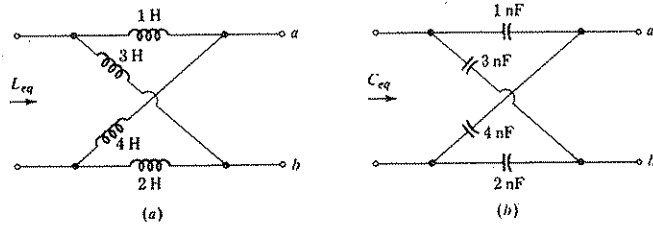


الشكل 23 - 4 انظر المسألة 7



الشكل 24 - 4 انظر المسألة 8

10 أوجد L_{eq} للشبكة المتشابكة lattice المبينة في الشكل 25 - 4 (أ) ، إذا كان الطرفان أ و ب (أ) مفتوحين الدائرة كما مبين (ب) مقصوري الدائرة .



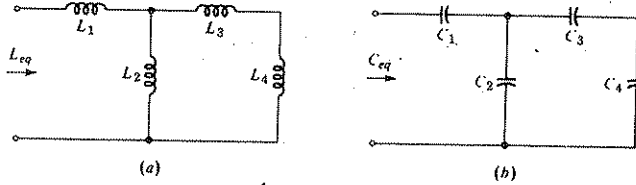
الشكل 25 - 4 انظر المسألتين 10 و 11

11 أوجد C_{eq} للشبكة المتشابكة lattice المبينة في الشكل 25 - 4 (ب) ، إذا كان الطرفان أ و ب : (أ) مفتوحين الدائرة : (ب) مقصوري الدائرة .

12 أوجد تعبيراً لـ L_{eq} (أ) في الشكل 26 - 4 (أ) (ب) C_{eq} في الشكل 26 - 4 (ب)

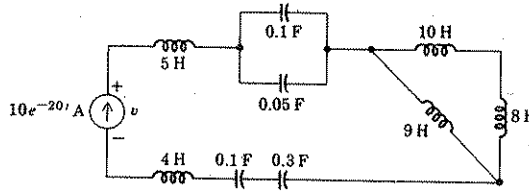
13 □ الربط المتوالي للمتسعتين $3-\mu F$ و $4-\mu F$ مربوط على التوازي مع ربط متوال لثلاث متسعات $2-\mu F$ و $1-\mu F$ و $C-\mu F$. (أ) مامقدار أقصى قيمة ممكنة

للمتسعة المكافئة للمتسعات الخمسة (ب) أعد للقيمة الصغرى (ج) أوجد C_{eq} إذا كانت $1.5 \mu F$.



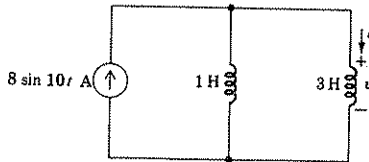
الشكل 26 - 4 انظر المسألة 12

14 أوجد $v(t)$ للفترة $t \geq 0$ في الدائرة المبينة في الشكل 27 - 4 إذا كانت الفولتية عبر كل متسعة $100 V$ ، عندما $t = 0$ ، حيث المرجع الموجب الى اليسار .



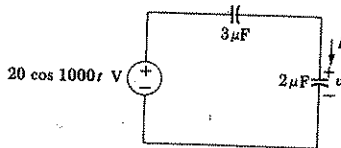
الشكل 27 - 4 انظر المسألة 14

□ 15 عندما $t = 0$ ، $i = 5 A$ في الدائرة المبينة في الشكل 28 - 4 (أ) أوجد $v(t)$ لكل t (ب) أوجد $i(t)$ لكل $t \geq 0$



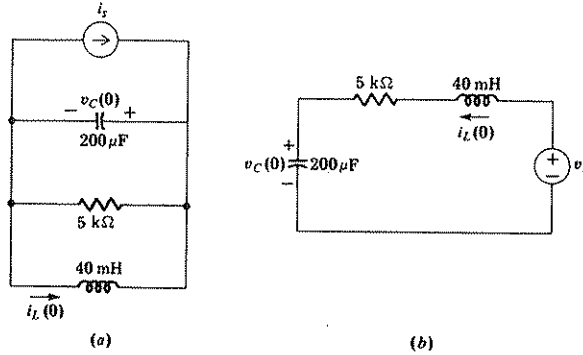
الشكل 28 - 4 انظر المسألة 15

16 الفولتية v في الشكل 29 - 4 تساوي $60 V$ عندما $t = 0$. (أ) أوجد $i(t)$ لكل t (ب) أوجد $v(t)$ لكل $t \geq 0$



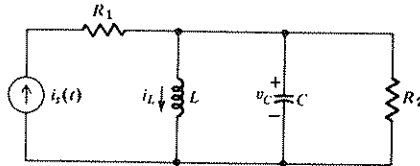
الشكل 29 - 4 انظر المسألة 16

17 على فرض توفر عدد كبير من المتسعات ذات 100-pF . كيف يمكنك تكوين متسعة مكافئة قيمتها (أ) 250 pF (ب) 25 pF (ج) 30 pF □
 18 (أ) أكتب معادلة عقدية منفردة للدائرة في الشكل 30 - 4 . القيمة الابتدائية مبينة (ب) أكتب معادلة شبيكية منفردة لدائرة الشكل 30 - 4 (ب) .



الشكل 30 - 4 انظر المسألة 18

19 (أ) أكتب المعادلات العقدية للدائرة المبينة في الشكل 31 - 4 . افرض ان $i_L(0) = I_0$ (ب) أكتب المعادلات الشبيكية للدائرة نفسها . اذا كانت $v_C(0) = V_0$

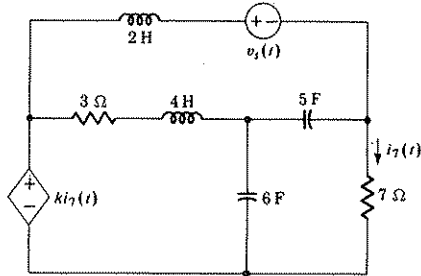


الشكل 31 - 4 انظر المسألين 19 و 22

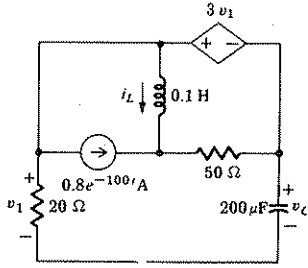
20 ارسم شجرة الدائرة المبينة في الشكل 32 - 4 بحيث توفي بالخاصية المشروحة في الفقرتين 7 - 3 و 8 - 3 اضافة الى انها تضع المتسعات في الشجرة والمحثات في الشجرة المصاحبة . (أ) ضع تيارات الرباطات واكتب مجموعة من معادلات الدارات . افرض انه ليس هناك طاقة مخزونة في اللحظة $t = 0$: (ب) ضع فولتيات فروع الشجرة واكتب مجموعة معادلات العقد مفترضاً عدم وجود طاقة عندما $t = 0$.

□ 21 باستخدام العقدة السفلى كمرجع . أشر الفولتيات بين العقد والمراجع في

الشكل ثم أكتب معادلات العقد . افرض أن $i_L(0) = 0.5 \text{ A}$ وان $v_C(0) = 12 \text{ V}$



الشكل 32 - 4 انظر المسألتين 20 و 23



الشكل 33 - 4 انظر المسألتين 21 و 24

22 أنشئ الثنائي المضبوط للدائرة المبينة في الشكل 31 - 4 . اذا كان $i_L(t) = 5 \cos 500t \text{ mA}$ و $R_1 = 120 \Omega$ و $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ و $L = 30 \text{ mH}$ و $C = 0.1 \mu\text{F}$ و $i_L(0) = 2 \text{ mA}$. اعط قيماً لكل فولتيات المتسعات والتيارات المحثات عندما $t = 0$

23 ارسم الثنائي المضبوط للدائرة المبينة في الشكل 32 - 4 . اذا علمت ان تياراً مقداره 2.4 mA يسري من اليسار الى اليمين في المقاوم $3\text{-}\Omega$. ماذا تعطي هذه المعلومات في الدائرة الثنائية؟

24 ارسم الثنائي للدائرة المبينة في الشكل 33 - 4 . مبيناً التيارات الشبكية ثم اكتب معادلات الشبكات للدائرة الثنائية . افرض أن $i_L(0) = 0.5 \text{ A}$ و $v_C(0) = 12 \text{ V}$

الفصل الخامس

دوائر RL و RC الخالية من المصدر

SOURCE FREE RL & RC CIRCUITS

5.1 مقدمة INTRODUCTION

في الفصل السابق كتبنا المعادلات التي تحكم استجابة عدة دوائر تحوي محاثة وسعة معاً ، ولكننا لم نقم بحل أي منها . وهكذا نحن الآن جاهزون لان نستمر في حل دوائر محاثة بسيطة . وسوف نركز إنتباهنا على دوائر معينة تحوي مقاومات ومحاثات فقط او على مقاومات ومتسعات فقط دون أن تحوي على أي حال ظهور الطاقة المخزونة في المحثات أو المتسعات لانه بدون هذه الطاقة ستساوي كل استجابة صفراً .

وعلى الرغم من أن الدوائر التي سنتعامل معها لها مظهر بسيط جداً ، الا انها ايضاً ذات اهمية عملية بالغة فيمكن أن تستعمل هذه الدوائر شبكات ازدواج للمضخمات الالكترونية وشبكات التعادل في منظومات السيطرة الذاتية وشبكات تعادل لقنوات المواصلات ولاغراض متعددة أخرى . إن التعرف على هذه الدوائر البسيطة سيمكننا من التنبؤ عن الدقة التي بها يتبع خرج المضخم الدخلى المتغير بسرعة بالنسبة للزمن او للتنبؤ عن سرعة تغير سرعة المحرك كنتيجة لتغير تيار المجال . إن معرفتنا لخصائص دوائر ال RL وال RC البسيطة سوف تمكننا من اقتراح التعديلات على المضخم او المحرك للحصول على الاستجابة التي نرغب بها أكثر من غيرها .

أن تحليل دوائر كهربائية مثل هذه يعتمد على صياغة المعادلات التفاضلية التكاملية التي تصف الدوائر وحلها . وسوف ندع المعادلات الخاصة التي نحصل عليها بالمعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة . وما هذه المعادلات سوى معادلات تفاضلية كل حد فيها يكون من الدرجة الاولى بالنسبة الى المتغير المعتمد أو أحد مشتقاته . ونقول بأننا حصلنا على الحل حينما نجد تعبيراً للمتغير المعتمد وهو دالة

للزمن . وهذا التعبير يحقق المعادلة التفاضلية وفي الوقت نفسه يوفي بمتطلبات توزيع الطاقة في المحث والمتسعة في لحظة محددة تؤخذ عادةً عندما $t = 0$.
 يمثل حل المعادلة التفاضلية إستجابة الدائرة ويعرف ذلك بتسميات متعددة ، نظراً لأن هذه الاستجابة تعتمد على الطبيعة العامة للدائرة (على أنواع العناصر وقيامها وارتباط العناصر مع بعضها) وتدعى غالباً بالاستجابة الطبيعية . كما أنه من البديهي ايضاً أن أي دائرة يمكن بناؤها بصورة واقعية لا يمكن ان تخزن طاقة الى أبد الأبدين . فالمقاومات التي لا بد وان تصاحب المحثات والمتسعات سوف تقوم بتحويل كل الطاقة المخزونة الى حرارة . لذا فان الاستجابة ستضمحل تدريجياً وتسمى بالاستجابة الزائلة او المضمحلة *transient* .

واخيراً علينا ان نعترف بجميل الصنيع لعلماء الرياضيات وذلك بمعرفة ما يطلقونه من مصطلحات على هاتين الاستجابتين . فهم يطلقون تسمية الدالة المكملة *complementary function* على حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة واذا اعتبرنا أن المصدر غير المعتمد الذي يعمل في الدائرة هو جزء من الاستجابة فأن جزءاً من هذه الاستجابة سيعتمد على طبيعة هذا المصدر وهذه الاستجابة سوف تستكمل بالاستجابة المكملة الناتجة من الدائرة الخالية من المصدر ويدعى مجموعها بالاستجابة الكاملة كما تدعى استجابة الدائرة الخالية من المصدر احياناً بالاستجابة الحرة او الدالة المكملة ولكن بسبب وصفها الطبيعي سوف ندعوها بالاستجابة الطبيعية .

سوف ندرس طرقاً مختلفة متعددة لحل هذه المعادلات التفاضلية . وبالطبع فان هذه الرياضيات هي ليست تحليلاً للدوائر الكهربائية . فجل اهتمامنا سوف يقع على الحلول نفسها ومعانيها وتفسير تلك المعاني وسنحاول ان نصبح معتادين على اشكال الاستجابات بحيث نستطيع كتابة الاجوبة مباشرة بمجرد التفكير البسيط . وعلى الرغم من الحاجة الى طرق تحليلية معقدة عند فشل الطرق البسيطة فان على المهندس أن يتذكر أن هذه الطرق المعقدة ماهي الا وسائل يمكن بواسطتها الوصول الى الاجوبة ذات المغزى وهذه الوسائل ليست الهندسة بحد ذاتها ويكون مجموعهما الاستجابة الكاملة . إن الاستجابة الخالية من المصدر يمكن أن تدعى بالاستجابة الطبيعية أو الاستجابة الزائلة او الاستجابة الحرة او الدالة التتامية . سوف ندرس طرقاً مختلفة لحل هذه المعادلات التفاضلية . وهذه الحلول الرياضية على اية حال ليست تحليلاً للدائرة . وان جل اهتمامنا سيكون في الحلول نفسها ومعانيها وماذا تفسر لذا سنحاول الامام ما فيه الكفاية بشكل الاستجابة لكي نتمكن من كتابة

أجوبتها لدوائر جديدة دونما جهد كبير . هذا بالرغم من أننا بحاجة الى تعلم طرق التحليل المعقدة لاستخدامها عند فشل الطرق البسيطة فالمهندس يجب أن يتذكر دائماً بأن هذه الاساليب المعقدة هي ليست سوى أدوات يمكن الحصول بواسطتها على اجوبة ذات معنى ودلائل وتلك هي فحوى الهندسة .

5.2 دائرة RL البسيطة : THE SIMPLE RL CIRCUIT

سنبدأ دراستنا للتحليل الزائل بأخذ دائرة RL المتوالية البسيطة المبينة في الشكل 1.5 دعنا نرسم للتيار المتغير مع الزمن بـ $i(t)$ لنفرض أن قيمة $i(t)$ في $t = 0$ تساوي I_0 لذا سيكون لدينا

$$v_R + v_L = Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{أو أن}$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (1)$$

ويجب أن نجد تعبيراً لـ $i(t)$ يحقق هذه المعادلة وله القيمة I_0 في $t = 0$ أيضاً . فالحل ربما يمكن الحصول عليه بطرق مختلفة متعددة . تتكون إحدى الطرق المباشرة جداً لحل المعادلات التفاضلية بكتابة المعادلة بطريقة بحيث تعزل المتغيرات ثم تكامل كل جهة من المعادلات فالمتغيرات في (1) هي i و t ويمكن ان تكتب كما يأتي :

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad (2)$$

وبما أن التيار هو I_0 في $t = 0$ و $i(t)$ في الزمن t لذا يمكننا مساواة التكاملات المحددة التي حصلنا عليها بأخذ تكامل كل جهة بين حدود التكامل العائد لها .

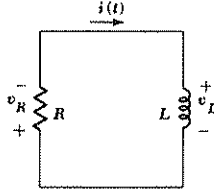
$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt$$

$$\ln i \Big|_{I_0}^i = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t$$

$$\ln i - \ln I_0 = -\frac{R}{L} t$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

أو
لذا
(3)



الشكل 1 - 5 دائرة RL متوالية لاجراء $i(t)$ عندما تكون الظروف $i(0) = I_0$

لنتأكد من الحل بتعويض (3) في (1) حيث أن ذلك يؤدي الى المتشابهة $0 \equiv 0$ وبتعويض $t=0$ في (3) ينتج $i(0) = I_0$. وكلتا الخطوتين ضروريتان والحل يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية التي تعطي خصائص الدائرة ويجب ان تحقق ايضاً الظروف الابتدائية او الاستجابة في الزمن صفر.

ويمكن الحصول على الحل ايضاً بطريقة تختلف قليلاً عن الطريقة الموصوفة أعلاه فبعد عزل المتغيرات ربما نحصل على تكامل غير محدود لكل جهة من (2) اذا اخذنا ثابت التكامل بنظر الاعتبار أيضاً، لذا

$$\int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L} dt + K$$

والتكامل يعطينا

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + K \quad (4)$$

فالثابت K لا يمكن ايجاد قيمته بتعويض (4) في المعادلة التفاضلية لأننا سنحصل على المتشابهة $0 \equiv 0$ لان (4) هي حل لـ (1) لأي قيمة لـ K وثابت أي تكامل يجب أن يتفق ليحقق الظروف الابتدائية $i(0) = I_0$. لذا ففي $t=0$ تصبح (4)

$$\ln I_0 = K$$

تستعمل هذه القيمة لـ K في (4) لنحصل على الاستجابة المرغوبة

$$\ln i = -\frac{R}{L} t + \ln I_0$$

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L}$$

أو

كالسابق

وأن اياً من الطرق أعلاه يمكن استعمالها عند عزل المتغيرات . ولكن ممكن فقط لبعض الحالات . وفي الحالات الأخرى سنعمد على طريقة جيدة ومتمينة يعتمد نجاحها على مبادراتنا أو خبرتنا . سوف نتوقع ببساطة أو نفترض شكلاً للحل ثم نتأكد من اقتراحاتنا أولاً بالتعويض في المعادلة التفاضلية ثم بتطبيق الظروف الابتدائية المعطاة . وبما أننا لانستطيع الافتراض في أننا نتوقع التعبير العددي المضبوط للحل، سنفترض حلاً يحوي عدة مجاهيل ثابتة ونختار قيم هذه الثوابت لأجل أن تحقق المعادلة التفاضلية المرتبطة بتحليل الدائرة التي ربما يمكن تمثيل حلها بالدالة الاسية أو بمجموع عدة دالات أسية . لنفرض حلاً لـ (1) بشكل أسى

$$i(t) = Ae^{s_1 t}$$

حيث أن A و s_1 هي ثوابت يجب معرفتها وبعد تعويض هذا الحل المفترض في (1) لدينا

$$As_1 e^{s_1 t} + \frac{R}{L} A e^{s_1 t} = 0$$

$$\left(s_1 + \frac{R}{L} \right) A e^{s_1 t} = 0 \quad \text{أو}$$

ولأجل تحقيق هذه المعادلة لجميع قيم الزمن من الضروري أن يكون $A = 0$ أو $s_1 = -\infty$ أو $s_1 = -R/L$ ولكنه إذا كانت $A = 0$ أو $s_1 = -\infty$ فإن كل استجابة هي صفر ولا يمكن اعتبار أي منها حلاً لمسألتنا ، لذا فيجب اختيار

$$s_1 = -\frac{R}{L}$$

وبذا يأخذ حلنا المفترض الشكل

$$i(t) = A e^{-R/L t}$$

والثابت المتبقي يجب ايجاد قيمته بتطبيق الظروف الابتدائي $i = I_0$ في $t = 0$ ، لذا

$$I_0 = A$$

والشكل النهائي للحل المفترض هو

$$i(t) = I_0 e^{-R/L t}$$

مرة أخرى .

ولنكتف بهذه الطريقة دون أن نأخذ أي طريقة أخرى لحل (1) على الرغم من أنه يمكن استخدام عدد من الاساليب الأخرى .
وقبل أن نلفت انتباهنا الى تفسير الاستجابة ، لنفحص علاقات القدرة والطاقة في هذه الدائرة ، فالقدرة المبددة في المقاوم هي

$$P_R = i^2 R = I_0^2 R e^{-2R/L t}$$

فالطاقة الكلية المحولة الى حرارة في المقاوم يمكن ايجادها بأخذ تكامل القدرة الآنية من الصفر الى زمن لانتهائى .

$$W_R = \int_0^{\infty} p_R dt = I_0^2 R \int_0^{\infty} e^{-2Rt/L} dt$$

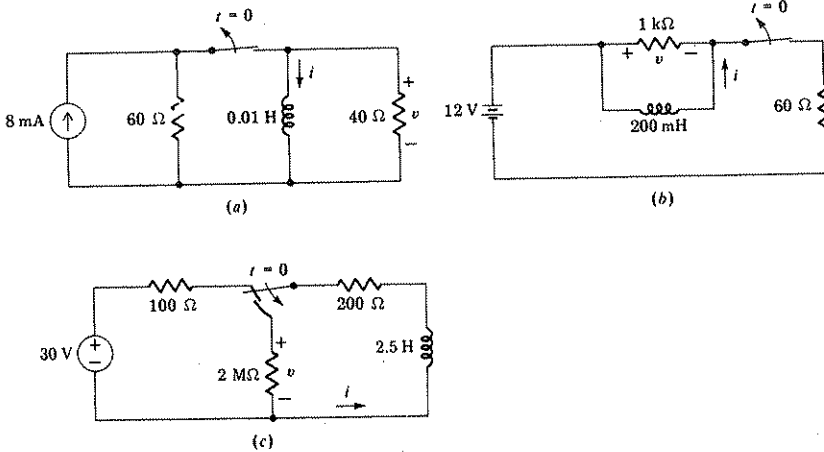
$$= I_0^2 R \left(-\frac{L}{2R} \right) e^{-2Rt/L} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} L I_0^2$$

وهذه هي النتيجة المتوقعة لان القدرة الكلية المخزونة في الملف في البداية هي $\frac{1}{2} L I_0^2$ وليس هناك طاقة تخزن في الملف عندما يصل قيمة لانتهائية . وإن كل الطاقة الابتدائية مشمولة بالتبدد من قبل المقاوم .

تمارين :-

1 - 5 في كل من الدوائر المبينة في الشكل 2 - 5 كانت الظروف كما هي مبينة لمدة طويلة جداً . عندما $t = 0$ أغلقت الأزرار أو فتحت كما مبين . والزر ذو القطب الواحد وذو التحويلتين المبين في الفرع ج رسم لبيين انه يغلق دائرة قبل ان يفتح الأخرى . يدعى مثل هذا الزر بأنه « يغلق قبل أن يفتح » *make before break* . وبعد دراسة خواص محث كما مبين في صفحة 147 . اوجد $i(0)$ في كل دائرة .

الجواب $100; 8; 200 \text{ mA}$



الشكل 2 - 5 أنظر المسائل 1 - 5 و 2 - 5 و 3 - 5 .

2 - 5 في اللحظة التي تلي تحويل الأزرار في الدائرة 5 - 2 مباشرة ، أوجد v .
الجواب $v = -0.32$; $V = -200$; $kV = -200$

3 - 5 افرض أن $R = 200 \Omega$ و $L = 0.25 H$ في الدائرة المبينة في الشكل 1 - 5 .
بعد كم ثانية من $t = 0$ (أ) يصل التيار $i(t)$ نصف قيمته الابتدائية ؟
(ب) تصل الطاقة المخزونة في L نصف قيمتها الابتدائية (ج) القدرة المبذولة في R تصبح نصف قيمتها الابتدائية ؟
الجواب

$433; 433; 866 \mu s$

5.3 خصائص الاستجابة الأسية PROPERTIES OF THE EXPONENTIAL RESPONSE

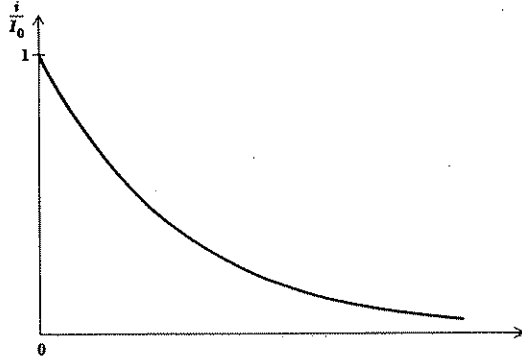
لندرس الآن طبيعة الاستجابة في دائرة RL المتوالية . وجدنا بأن التيار يمثل بواسطة

$$i(t) = I_0 e^{-Rt/L} \quad (6)$$

ففي الزمن صفر فرضنا أن قيمة التيار هي I_0 كلما ازداد الزمن فان التيار يقل حتى يصل الصفر .

وان شكل الأس المتناقص يرى بالرسم التخطيطي لـ $i(t)/I_0$ مع t كما هو مبين في الشكل 5.3 وبما أن الدالة التي ترسم تخطيطها هي $e^{-Rt/L}$. فالمنحني سوف لا يتغير اذا كانت R/L غير متغيرة . لذا فان نفس المنحني يجب أن نحصل عليه لكل دائرة متوالية لها نفس قيمة نسبة R/L او L/R . لنر كيف تؤثر هذه النسبة على شكل المنحني :

فاذا ضاعفنا نسبة L الى R فإن الأس سوف لا يتغير اذا ضاعفنا t أيضاً . وبكلمة أخرى فان الاستجابة الاصلية ستحدث في زمن لاحق والمنحني الجديد يمكن الحصول عليه بتحريك كل نقطة على المنحني الاصلي ببعد يعادل مرتين بقدر بعدها الاصيل . بزيادة L/R هذه يأخذ التيار في تناقصه زمناً أطول للوصول الى أي جزء معطى من قيمته الاصلية . وربما تكون لنا الرغبة بالقول بان « عرض » المنحني قد تضاعف أو أن « العرض » يتناسب مع L/R .



شكل 5.3 رسم $e^{-t/\tau}$ مع الزمن t .

على أية حال يجب أن نعرف المصطلح « العرض » . لأن كل منحنى يمتد من $t = 0$ إلى ∞ . بدلاً من ذلك نعتبر الزمن اللازم للتيار ليهبط الى الصفر اذا استمر على المهبوط بنفس المعدل الابتدائي .
ان المعدل الابتدائي للمهبوط يمكن حسابه بأخذ قيمة التفاضل في الزمن صفر

$$\left. \frac{d}{dt} \frac{i}{I_0} \right|_{t=0} = -\frac{R}{L} e^{-t/\tau} \Big|_{t=0} = -\frac{R}{L}$$

دعنا نحسب قيمة الزمن اللازمة لـ i/I_0 لتيهبط من الواحد الى الصفر
مفترضين معدلاً ثابتاً للمهبوط بالحرف الأخرى τ (تأو) لذا

$$\frac{R}{L} \tau = 1$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

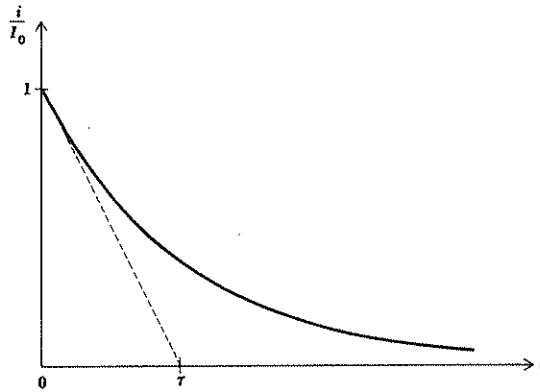
أو

(7)

إن للنسبة L/R وحدة الزمن . لأن الأس $-Rt/L$ يجب أن يكون بدون أبعاد . وتدعى هذه القيمة للزمن τ ثابت الزمن *time constant* وهي مبينة في الشكل (5.4) . ومن الظاهر بأن ثابت الزمن لدائرة RL المتوالية يمكن ايجاده بسهولة من منحنى الاستجابة . فمن الضروري فقط رسم مماس للمنحنى في $t = 0$ وأن نجد تقاطع خط المماس هذا من محور الزمن .

ان تفسيراً آخر لثابت الزمن τ لا يقل اهمية عن التفسير السابق . ويمكن الحصول عليه بحساب قيمة $i(t)/I_0$ في $t = \tau$ فلدينا :

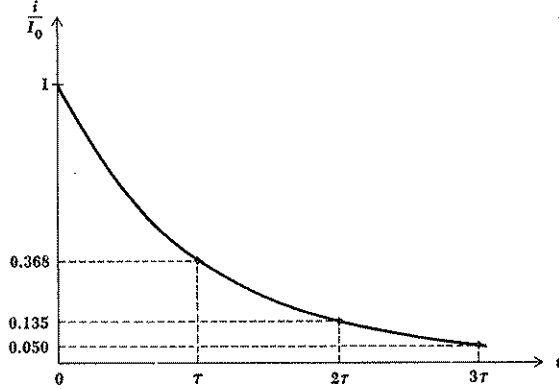
$$\frac{i(\tau)}{I_0} = e^{-1} = 0.368 \quad \text{or} \quad i(\tau) = 0.368I_0$$



177

الشكل 5.4 ثابت الزمن τ هو L/R للدائرة RL المتوالية . وهو الزمن اللازم لكي يهبط منحنى الاستجابة الى الصفر لوضحل بمعدل ثابت يساوي معدل الاضمحلال الابتدائي

لذا ففي ثابت زمن واحد هبطت الاستجابة 36.8 بالمائة من قيمتها الابتدائية . وان قيمة τ يمكن حسابها من الرسم أيضاً بالاعتماد على هذه الحقيقة كما هي موضحة في الشكل 5.5 . ومن المناسب لقياس هبوط التيار في فترات ثابت زمن واحد ، ثم باستخدام المسطرة الحاسبة أو جدول الأس السالب يتبين بأن $i(t)/I_0$ هو 0.368 في $t = \tau$ و 0.135 في $t = 2\tau$ و 0.0498 في $t = 3\tau$ و 0.0183 في $t = 4\tau$ و 0.0067 في $t = 5\tau$. ومن ذلك يتضح أنه بعد ثلاثة الى خمسة ثوابت الزمن بعد الزمن الابتدائي فان التيار يصبح مهملاً بالمقارنة مع قيمته الأولية .



الشكل 5.5 التيار في دائرة RL المتوالية يساوي 5,13,5,36,8 بالمائة من القيمة الابتدائية عند τ , و 2τ , و 3τ على التتابع .

لماذا تنتج القيمة الكبرى لثابت الزمن L/R منحنى استجابة يتناقص أكثر بطئاً؟ لنأخذ أولاً تأثير كل عنصر لوحده ، فان زيادة L تسمح بخزن طاقة اكبر لنفس التيار الابتدائي وهذه الطاقة الكبرى تحتاج الى زمن أطول لتتبدد في المقاوم . وربما تزيد L/R بتقليل R وفي هذه الحالة فان القدرة السارية الى المقاوم تكون أقل لنفس التيار الابتدائي . وبذلك نحتاج الى زمن أطول مرة أخرى لتبديد الطاقة المخزونة . وبدلالة ثابت الزمن τ فان استجابة دائرة RL المتوالية يمكن كتابتها ببساطة كما يأتي :

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

تمرين :

4 - 5 في دائرة RL المتوالية (أ) أوجد نسبة $i(1.5\tau)/i(0)$ (ب) أوجد نسبة t/τ اذا كانت $i(t) = \frac{1}{2}i(\tau)$ (ج) أوجد نسبة R_{new}/R_{old} إذا زيدت مقاومة مقدارها 10Ω فتسببت في تغير ثابت الزمن من 8 ms الى 7 ms .
الجواب 0.223; 1.143; 1.693

5.4 دائرة RL أكثر عموماً A MORE GENERAL RL CIRCUIT

ليس من الصعب تعميم النتائج التي حصلنا عليها لدائرة RL المتوالية الى دائرة تحوي أي عدد من المقاومات ومحث واحد . وسوف نركز انتباهنا على نهايتي الملف ثم نحسب المقاومة المكافئة عبر هاتين النهايتين ، فالدائرة تقلصت الى حالة التوالي . وكمثال على ذلك لناخذ الدائرة المبينة في الشكل 5.6 . فالمقاومة المكافئة التي تواجه الملف هي

$$R_{eq} = R_2 + R_4 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \quad \text{ويكون ثابت الزمن}$$

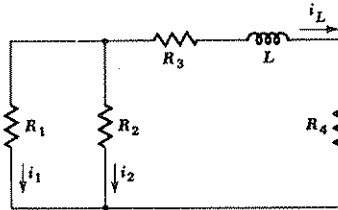
ان تيار المحث i_L هو

$$i_L = i_L(0)e^{-t/\tau} \quad (8)$$

وان (8) تمثل مانسميه الحل الأساس للمسألة . وفي بعض الأحيان يكون المطلوب هو تيار I أو فولتية سوى i_L فالتيار i_2 في R_2 يمكن تطبيق قانوني كرشوف وقانون أوم للجزء المقاومي للدائرة دونما صعوبة ولكن مقسم التيار يزودنا بالاجابة الأسرع لهذه الدائرة .

$$i_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} i_L(0)e^{-t/\tau}$$

وربما نعلم أحياناً القيمة الابتدائية لبعض التيارات غير تيار المحث . وبما أن التيار في المقاوم يتغير أنياً فسوف نشير للقيمة الابتدائية بعد أي تغير قد يحدث في $t = 0$ باستعمال الرمز 0^+ . بلغة أكثر رياضية فان $i_1(0^+)$ هي الحد من يمين $i_1(t)$ كلما تقترب t من الصفر ، لذا فانه اذا أعطينا القيمة الابتدائية لـ $i_1(0^+)$ فمن الظاهر أن القيمة الابتدائية لـ i_2 هي



الشكل 5-6 دائرة خالية من المصدر تحتوي على محث واحد وعدة مقاومات حلت بايجاد ثابت الزمن $\tau = L/R_{eq}$

$$i_2(0^+) = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2}$$

ومن هذه القيم نحصل على القيم الابتدائية الضرورية لـ $i_L(0)$ $[i_L(0^+) \ i_L(0^-)]$

$$i_L(0) = -[i_1(0^+) + i_2(0^+)] = -\frac{R_1 + R_2}{R_2} i_1(0^+)$$

وإن التعبير لـ i_2 يصبح

$$i_2 = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau}$$

لنتأكد فيما إذا كان بالإمكان الوصول إلى التعبير الأخير بطريقة مباشرة . بما أن تيار المحث يهبط أسياً $e^{-t/\tau}$. لذا فإن كل تيار خلال الدائرة يجب أن يتغير وفق نفس الدالة . ويمكن توضيح ذلك بشكل أفضل باعتبار تيار المحث كتيار مصدر ماسبقه وإن طبق على شبكة مقاومة . إن كل تيار أو فولتية في الشبكة المقاومة يجب أن يكون له نفس الاعتماد على الزمن . وباستخدام هذه الأفكار فإننا

$$i_2 = A e^{-t/\tau} \quad \text{نعبر عن } i_2$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} \quad \text{حيث أن}$$

وإن A يجب أن تحسب من معرفتنا للقيمة الابتدائية لـ i_2 لأن $i_1(0^+)$ هي معروفة ، فإن الفولتية عبر R_1 و R_2 معروفة وأن .

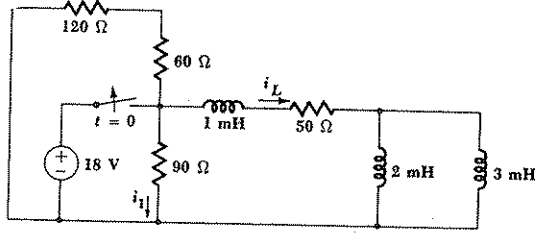
$$i_2(0^+) = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2}$$

لذا

$$i_2 = i_1(0^+) \frac{R_1}{R_2} e^{-t/\tau}$$

وبخطوات متتابعة مشابهة نصل إلى حل سريع لعدد كبير من المسائل . ولنميز أولاً الاعتماد الزمني للاستجابة كهبوط أسياً ثم نحسب ثابت الزمن المناسب بدمج المقاومات ثم نكتب الحل باعتبار الاتساع amplitude مجهولاً ثم نحسب الاتساع من الطرف الابتدائي المعطى .

يمكن تطبيق الأسلوب نفسه على دائرة تحوي مقاوماً واحداً وأي عدد من المحثات ، وكذلك على الدوائر الخاصة التي تحوي محثين أو أكثر ومقاومتين أو أكثر والممكن تبسيطها بدمج المقاومات أو المحثات إلى أن تكون الدائرة المبسطة تحوي محثاً واحدة ومقاومة واحدة لاغير . ولتأخذ الدائرة التي في الشكل (5.7) مثلاً لهذه الدائرة فبعد $t = 0$ عندما يُفصل مصدر الفولتية يمكن حساب المحثات المكافئة بسهولة .



الشكل 5 - 7 بعد $t = 0$ تبسط هذه الدائرة الى مقاومة مكافئة مقدارها 110Ω على التوالي مع $L_{eq} = 2.2 \text{ mH}$

$$L_{eq} = \frac{2 \times 3}{2 + 3} + 1 = 2.2 \text{ mH}$$

$$R_{eq} = \frac{90(60 + 120)}{90 + 180} + 50 = 110 \Omega \quad \text{والمقاومة المكافئة}$$

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R_{eq}} = \frac{2.2 \times 10^{-3}}{110} = 20 \mu\text{s} \quad \text{وثابت الزمن}$$

لذا فان شكل الاستجابة الطبيعية هو $Ae^{-50,000t}$ مع المصدر غير المعتمد المرتبط في $(t < 0)$ فان i_L هي $18/50$ أو 0.36 A ، بينما i_1 هي $18/90$ أو 0.2 A . ففي $t = 0^+$ فان i_L يجب أن تبقى 0.36 A ولكن i_1 ستقفز الى القيمة الجديدة التي تقررها $i_L(0^+)$ لذا

$$i_1(0^+) = -i_L(0^+)180/270 = -0.24 \text{ A}$$

وعليه

$$i_L = 0.36 \quad (t < 0)$$

$$= 0.36e^{-50,000t} \quad (t > 0)$$

$$i_1 = 0.2 \quad (t < 0)$$

$$= -0.24e^{-50,000t} \quad (t > 0)$$

وأن

وفي الدوائر المثالية التي تظهر فيها دائرة حث نقيه كتلك المارة بالملفات 3.2 ملي هنري في الشكل (5.7) ، فان تياراً ثابتاً يمكن أن يستمر بالدوران كلما $t \rightarrow \infty$ وليس من الضروري أن يكون التيار خلال أي من المحثات بشكل $Ae^{-t/\tau}$ لكنه يأخذ شكلاً أكثر عموماً ، أي $A_1 + A_2e^{-t/\tau}$. وهذه الحالة غير الهامة موضحة بالمسألة 10 في نهاية هذا الفصل .

ولقد أخذنا على عاتقنا فيما سبق مهمة إيجاد الاستجابة الطبيعية لأي دائرة يمكن تمثيلها بمحاثة مكافئة على التوالي مع مقاومة مكافئة. دائرة تحتوي عدة مقاومات وعدة محثات بصورة عامة لاتمتلك شكلاً يسمح بدمج المقاومات أو المحثات الى عناصر مكافئة منفردة. لا يوجد حد أسي سالب واحد أو ثابت زمن واحد يصاحب الدائرة ولكن هناك بصورة عامة عدة حدود ذات اسس سالبة وعدد من الحدود تساوي عدد المحثات الباقية بعد اجراء مايمكن دمجها من المحثات. ان الاستجابة الطبيعية لدوائر معقدة أكثر من ذلك يمكن الحصول عليها باستخدام أساليب سندرسها فيما بعد. ان إحدى الطرق التي ستظهر في نهاية الفصل 13 تستند على مفهوم التردد المركب. أما الطرق الفعالة جداً تعتمد على استخدام تحويلات فورير ولا بلاس وستظهر في الفصول 19 و 20.

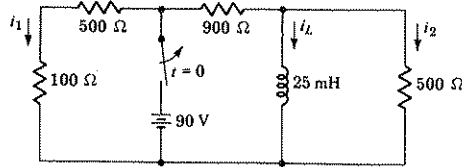
تمرينان

5 - 5 بعد $t = 0$ أصبحت الدوائر المبينة في الشكل 2 - 5 خالية من المصادر. أوجد تعبيرات لكل من v, i في كل حالة $t > 0$.

الجواب
 $(ma, V) 8e^{-4000t}, -0.32e^{-4000t}, -100e^{-800.000t},$
 $-200,000e^{-800.000t}, 200e^{-5000t}, -200e^{-5000t}$

6 - 5 للدائرة ذات RL المبينة في الشكل 8 - 5 أوجد: (أ) $i_L(0^+)$ (ب) $i_L(t)$ عندما $t = 60 \mu s$ (ج) $i_2(t)$ عندما $t = 90 \mu s$

الجواب
 $-19.44; -10.16; 100 \text{ mA}$

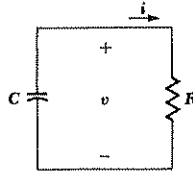


الشكل 8 - 5 أنظر المسألة 5 - 6

5.5 دائرة RC البسيطة : THE SIMPLE RC CIRCUIT

ان دمج المقاوم والمتسعة على التوالي ذو أهمية عملية أكبر من دمج المقاوم والمحث . واذا كان للمهندس الحرية في الخيار بين استعمال المتسعة واستعمال المحث لشبكة الازدواج لمضخم الكتروني مثلاً أو في شبكات المناول لمنظومة السيطرة الأوتوماتيكية أو في تركيب شبكة مساوية فإنه يختار شبكة RC عوضاً عن شبكة RL كلما كان ذلك ممكناً . وسبب هذا الاختيار هو قلة الضياعات التي تظهر على المتسعة العملية وقلة الكلفة وإمكانية تقريب العنصر العملي بالنموذج الرياضي بشكل دقيق إضافة للحجم الأصغر والوزن الأخف عنه في المتسعة عن المحث كما يتضح ذلك باستخدام الدوائر الهجينة hybrid والدوائر المتكاملة integrated circuits . لنر لأي مدى يكون تحليل دائرة RC المتوازية (أو هل هي متوالية ؟) قريباً من تحليل دائرة RC . سوف نفترض وجود طاقة ابتدائية مخزونة في المتسعة لدائرة RL المبينة في الشكل 5.9 باختيار :

$$v(0) = V_0$$



الشكل 9 - 5 دائرة RC متوازية يراد ايجاد $v(t)$ فيها عندما تكون الظروف الابتدائية $v(0) = V_0$

فالتيار الكلي الذي يغادر العقدة في أعلى مخطط الدائرة يجب أن يكون صفراً . ولذا

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad \text{فأن :}$$

والتقسيم على C يعطينا

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \quad (9)$$

للمعادلة (9) الشكل المعروف وبالمقارنة مع (1)

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad (1)$$

نجد ان استبدال i بـ v و L/R بـ RC تنتج معادلة مشابهة للتي اعتبرت سابقاً .

ويجب أن تكون الدائرة RC التي نقوم بتحليلها الآن هي ثنائي دائرة RL التي أخذناها أولاً. وإن هذا الثنائي يجبر $v(t)$ لدائرة RC و $i(t)$ لدائرة RL أن يكون لها تعابير متشابهة فيما إذا كانت مقاومة إحدى النواثر تساوي معكوس المقاومة للدائرة الأخرى وكانت L عددياً تساوي C . لذا فإن استجابة دائرة RL

$$i(t) = i(0)e^{-Rt/L} = I_0 e^{-Rt/L}$$

وستساعدنا فوراً لكتابة

$$v(t) = v(0)e^{-t/RC} = V_0 e^{-t/RC} \quad (10)$$

والآن دعنا نفترض بأننا اخترنا التيار i وكأنه المتغير في دائرة RC بدلاً من الفولتية v . وبتطبيق قانون الفولتية لكرشوف

$$\frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt - v(t_0) + Ri = 0$$

نحصل على معادلة التكامل وليس معادلة التفاضل. وعلى أية حال إذا أخذنا التفاضل الزمني لجهتي المعادلة هذه.

$$\frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} = 0 \quad (11)$$

وباستبدال i بـ v/R

$$\frac{v}{RC} + \frac{dv}{dt} = 0$$

نحصل على (9) مرة أخرى. والمعادلة (11) كان بالإمكان استعمالها نقطة البداية ولكن خاصية الثنائي لم تكن لتظهر عند ذلك بهذا الوضوح.

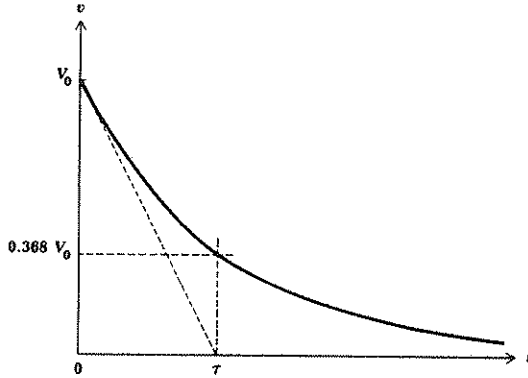
دعنا نشرح الطبيعة الفيزيائية لاستجابة الفولتية لدائرة RC كما هو معبر عنها في (10). ففي $t=0$ نحصل على الظروف الابتدائية الصحيحة. وكلما اقتربت t من اللانهاية فالفولتية تقترب من الصفر. وهذه النتيجة الأخيرة تتفق مع تفكيرنا على أنه إذا كانت هناك أي فولتية متبقية عبر المتسعة فإن الطاقة ستستمر بالسريان إلى المقاوم ثم تتبدد كحرارة. لذا فإن كون الفولتية النهائية صفراً هو أمر ضروري.

يمكن إيجاد ثابت الزمن لدائرة RC باستعمال العلاقات الثنائية على التعبير لثابت الزمن لدائرة RL . وربما يمكن إيجاده ببساطة بملاحظة الزمن الذي تهبط فيه الاستجابة إلى 36.8 بالمائة من قيمتها الابتدائية.

$$\frac{\tau}{RC} = 1$$

$$\tau = RC$$

(12)



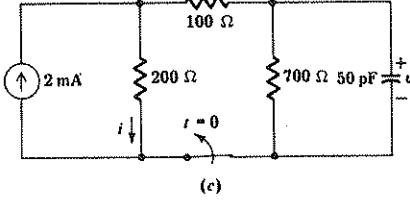
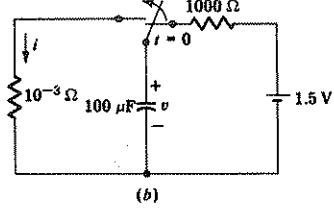
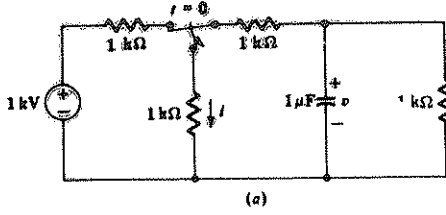
الشكل 10 - 5 فولتية متسعة $v(t)$ في دائرة RC متوازية رسمت كدالة للزمن . افترضت القيمة الابتدائية لـ $v(t)$ تساوي V_0

ان الممان بالاس السالب وخصائص ثابت الزمن τ يساعدنا على تخطيط منحنى الاستجابة بشكل جاهز كما هو مبين في الشكل 5.10 . وان القيم الأكبر لـ R أو C تجعل ثابت الزمن أكبر ويكون تبديد الطاقة المخزونة أبطأ . ان المقاومة الكبرى ستبدد قدرة أصغر مع الفولتية المعطاة عبرها . لذا فانها تحتاج الى زمن أكبر لتحويل الطاقة المخزونة الى حرارة . والمتسعة الكبرى تخزن طاقة أكبر كلما كبرت الفولتية المسلطة عبرها . ومرة أخرى فانها تحتاج الى زمن أطول لتخسر هذه الطاقة الابتدائية .

تمارين :-

7 - 5 أوجد $v(0^+)$ لكل من الدوائر المبينة في الشكل 11 - 5

الجواب $v = 333; 1.5; 0.28$



الشكل 5-11 أنظر التمارين 5-7 و 5-8 و 5-10 و 5-11

5-8 أوجد $i(0^+)$ لكل من دوائر الشكل 5-11

الجواب $2 \text{ mA}; 166.7 \text{ mA}; 1500 \text{ A}$

5-9 افرض أن $C = 20 \mu\text{F}$ في الدائرة المبينة في الشكل 5-9. اوجد R اذا كان

(أ) $v(0) = 6v(0.2)$ (ب) $w_C(0) = 10w_C(0.2)$

(ج) $v(0) = -50 \text{ V}$ و $dv/dt = 400 \text{ V/s}$ عندما $t = 0^+$

الجواب $5.58; 6.25; 8.69 \text{ k}\Omega$

5.6 دائرة RC الأكثر عموماً : A MORE GENERAL RC CIRCUIT

كثيراً من دوائر RC التي نرغب ايجاد الاستجابة الطبيعية لها تحوي أكثر من مقاوم ومتسعة منفردتين تماماً كما فعلنا لدوائر RL وسوف نعتبر أولاً حالات خاصة متعددة ونحتفظ بالحالة العامة للفقرة الأخيرة في هذا الفصل.

دعنا نفترض أولاً بأننا واجهنا دائرة تحوي متسعة واحدة فقط ولكنها تحوي أي عدد من المقاومات. فمن الممكن استبدال الشبكة ذات النهايتين المقاومة التي هي عبر نهايات المتسعة بمقاومة مكافئة ثم بعدها نكتب التعبير لفولتية المتسعة حالاً.

على سبيل المثال عند تبسيط الدائرة المبينة في الشكل 5.12 (أ) الى الشكل 5.12.

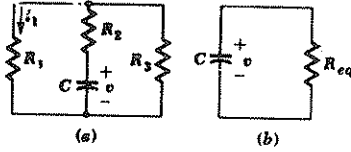
(ب) 5

$$v = V_0 e^{-t/R_0 C}$$

يمكننا كتابة

$$v(0) = V_0 \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{حيث}$$

ان كل تيار أو فولتية في الجزء المقاومي للشبكة يجب أن تكون له الهيئة $Ae^{-t/\tau}$ حيث أن A هي القيمة الابتدائية للتيار أو الفولتية . لذا فان التيار في R_1 على سبيل المثال يمكن أن يعبر عنه بـ $i_1 = i_1(0^+)e^{-t/\tau}$



الشكل 12 - 5 (أ) دائرة معطاة تحتوي على متسعة واحدة وعدة مقاومات (ب) المقاومات استبدلت بمقاوم مكافئة واحد أما ثابت الزمن فيبديهي

$$\tau = \left(R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \right) C \quad \text{حيث أن}$$

وأن $i_1(0^+)$ تبقى مطلوبة الحساب من الظروف الابتدائية . فاذا كانت قيمة $v(0)$ معروفة وبما أن v لا يمكن أن تتغير آنياً ويمكن أن نفكر بالمتسعة كأنها استبدلت بمصدر $v(0)$ غير معتمد لذا

$$i_1(0^+) = \frac{v(0)}{R_2 + R_1 R_3 / (R_1 + R_3)} \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

ويمكن الحصول على الحل بتجميع هذه النتائج .

وهناك حالة خاصة أخرى تشمل تلك الدوائر التي تحوي على مقاومة واحدة وعدد من المتسعات ان فولتية المقاوم يمكن الحصول عليها بسهولة بحساب قيمة السعة المكافئة وحساب ثابت الزمن . وهنا مرة أخرى فان عناصر الرياضية المثالية ربما تجرنا الى خاصية قد لاتظهر في الدائرة العملية فاذا كان هناك متسعتان على التوالي فان الفولتيتين عبرهما يمكن أن تساوي احدهما الأخرى بالمقدار وتعاكسها بالاتجاه وعندها ماتزال الفولتية عبر كليهما صفراً . لذا فان الشكل العام للفولتية عبر أي منهما هو $A_1 + A_2 e^{-t/\tau}$ بينما الفولتية عبر مزيج التوالي يبقى $Ae^{-t/\tau}$. وسنأتي على مثال لحالة كهذه في المسألة 20 في نهاية هذا الفصل .

تحتوي بعض الدوائر عددا من كل من المقاومات والمتسعات يمكن استبدالها بدائرة مكافئة تحوي مقاومة واحدة ومتسعة واحدة فقط ومن الضروري أن تكون الدائرة الاصلية من النوع الممكن تجزئته الى قسمين أحدهما يحوي كل المقاومات والاخر يحوي كل المتسعات كأنما الجزءان مربوطان بموصلين مثاليين وهذا غير ممكن عمليا بالطبع .

ستمر بنا دوائر أكثر تعقيد لا يمكن أن تختصر الى دائرة بسيطة محتوية RC متوالية في الفصول 13 و 19 و 20 فيما بعد

تمرين :-

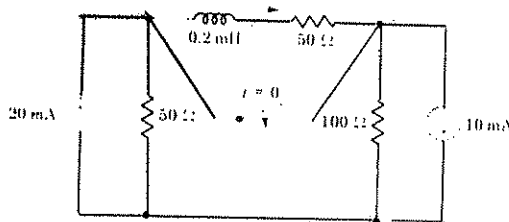
5.10 اوجد $i(t)$ و $v(t)$ لكل من الدوائر المبينة في الشكل 11 - 5

الجواب $V: 1500e^{-100t}$; $A: 0.28e^{-2500t}$; $V: 1.5e^{-100t}$; $mA: 33.3e^{-1500t}$; $V: 166.7e^{-1500t}$; $mA: 2$

مسائل :-

1. ا قيمة التيار في دائرة RL متوالية ينقص بمعدل $20000 A/s$ عندما $t = 0$ وبمعدل $100 A/s$ عندما $t = 0.2 s$. في أي لحظة تنقص الطاقة المخزونة في نحث الى $1/2$ من قيمتها الابتدائية

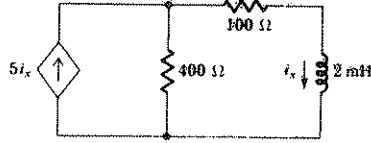
2 اوجد $i(t)$ لكل $t > 0$ في الدائرة المبينة في الشكل 13 - 5 .



شكل 13 - 5 أنظر نسخة 2

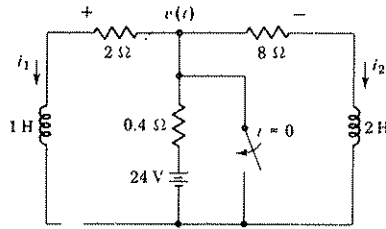
3 (أ) اكتب معادلة دارة واحدة بدلالة المتغير i_r للدائرة المبينة في الشكل 14 - 5

(ب) بعد مقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (1) في الفترة 5 - 2، أوجد $i_r(t)$ لكل $t > 0$ إذا كان $i_r(0) = 0.2 \text{ A}$.



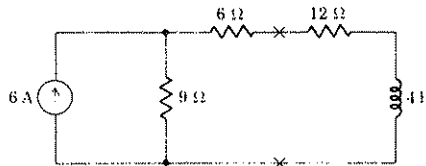
الشكل 14 - 5 أنظر المسألتين 3 و 21

4 للدائرة المبينة في الشكل 5 - 15 أوجد (أ) $i_1(0)$ (ب) $i_2(0)$ (ج) $i_1(t)$ للفترة $t > 0$ (د) $i_2(t)$ للفترة $t > 0$ (هـ) $v(t)$ للفترة $t > 0$.



الشكل 15 - 5 أنظر المسألة 4

5 اسقط مفك براغي screwdriver على الدائرة المبينة في الشكل 16 - 5 في الساعة 3 و 15 دقيقة بعد الظهر تماماً 3:15 pm فوصل دائرة قصر بين النقطتين x-x. بفرض أن مفك البراغي موصل تماماً. ارسم اتساع التيار في المقاوم ذي $6\text{-}\Omega$ وفي المحث وفي المفك كدوال للزمن بين الساعة 3 : 15 : 01 و 3 : 14 : 59

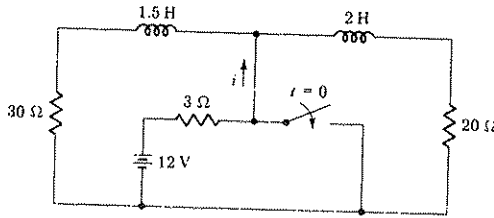


الشكل 16 - 5 أنظر المسألة 5

- 6 استجابة الدائرة المتواليـة RL الخالية من المصدر تتصف بأن لها ثابت زمن مقداره 5 ms (أ) كم تستغرق الاستجابة لتنقص بمقدار 100 مرة ؟
 (ب) وجد بأن المقاومة زادت بمقدار $10\text{-}\Omega$ فأنتجت نقصاناً في ثابت الزمن بمقدار 1-ms . كم تصبح τ إذا أضيفت $10\text{-}\Omega$ أخرى ؟
 7 مامقدار ثابت الزمن للدائرة المتواليـة RL إذا (أ) نقص التيار بمقدار 1000 مرة في 0.2 s ؟ (ب) الزمن اللازم للتيار لكي ينقص الى نصف قيمته الابتدائية يقل بمقدار 0.1 ثانية عن الزمن اللازم لكي يصل الى ربع قيمته الابتدائية ؟
 8 التيار في دائرة RL متواليـة خالية من المصدر يساوي 10 mA عندما $t = 1.2\text{ ms}$ ويساوي 6 mA عندما $t = 4.8\text{ ms}$. افرض أن الاستجابة صحيحة عندما $t \geq -5\text{ ms}$.

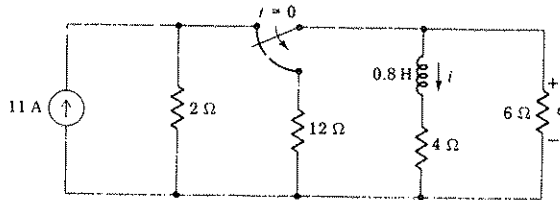
أوجد i عندما (أ) $t = -5\text{ ms}$ (ب) $t = 5\text{ ms}$

- 9 الزر في الدائرة المبينة في الشكل 17 - 5 كان مفتوحاً لزمن طويل أوجد i عندما $t = 0$ (أ) -0.08 s (ب) $+0.08\text{ s}$



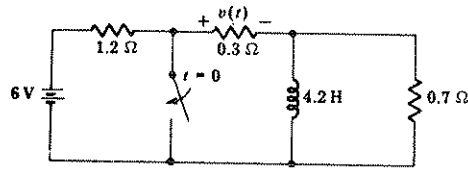
الشكل 17 - 5 أنظر المسألة 9

- 10 بعد أن كان الزر المبين في الشكل 5 - 18 في الوضع الموضح حوّل في اللحظة $t = 0$. أوجد i و v لكل قيم t



الشكل 18 - 5 أنظر المسألة 10

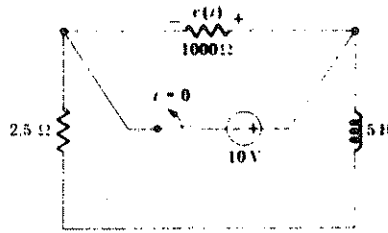
11 بعد أن كان الزر المبين في الشكل 19 - 5 مفتوحاً لمدة يومين . اغلق عندما $t = 0$. ارسم $v(t)$ مع الزمن ثم أوجد قيمة v عندما $t = 15$ s .



الشكل 19 - 5 أنظر المسألة 11

12 □ الفولتية عبر المقاوم في دائرة RL متوالية بسيطة خالية من المصدر هي $v_R(t) = 50e^{-1000t}$ V لقيم $t < 0$. إذا تغيرت قيمة المقاومة من 200Ω الى 40Ω عندما $t = 0$ وذلك بوضع مقاومة أخرى معها على التوازي . أوجد $v_R(t)$ لقيم $t > 0$.

13 الزر في الدائرة المبينة في الشكل 20 - 5 فتح عندما $t = 0$ (أ) ما قيمة اتساع الفولتية عبر كل عنصر في الدائرة في اللحظة $t = 0^+$ ؟
(ب) أوجد $i(t)$ لقيم $t > 0$ ثم ارسمها لقيم $-10 \leq t \leq 10$ ms



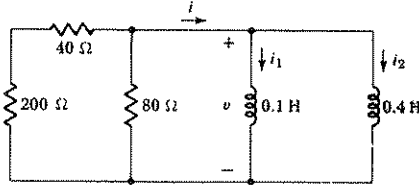
الشكل 20 - 5 أنظر المسألة 13

14 الدائرة المبينة في الشكل 5 - 21 تحتوي على محثين متوازيين ومن ثم يهينان فرصة لتفريغ التيار الدوار حول الدائرة الحثية . افرض أن $i_1(0^-) = 10$ A وأن $i_2(0^-) = 5$ A

(أ) أوجد ثابت الزمن τ لـ $i_1(0^+)$ ، $i_2(0^+)$ ، $i(0^+)$

(ب) أوجد ثابت الزمن τ لـ $i(t)$

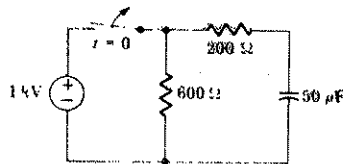
- (ج) أوجد $i(t)$ لقيم $t > 0$
 (د) أوجد $v(t)$ (هـ) أوجد $i_1(t)$ $i_2(t)$ من $v(t)$ ومن القيم الابتدائية .
 (و) برهن على أن الطاقة المخزونة عندما $t = 0$ تساوي مجموع الطاقة المبذولة في الشبكة المقاومة بين $t = 0$ و $t = \infty$ مضافاً إليها الطاقة المخزونة في المحث عندما



الشكل 5 - 21 أنظر المسألة 14

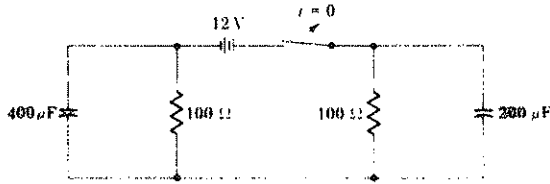
- 15 التيار في دائرة RC بسيطة خالية من المصدر تعطى بالمعادلة
 $i(t) = 20e^{-5000t}$ mA وفولتية المتسعة اتساعها 2 V في اللحظة $t = 0$. أوجد R و C

- 16 متسعة كانت مبدئياً مشحونة بـ 40 V . فرغت خلال دائرة بثابت زمن مقارنه 2 ms .
 (أ) أوجد معدل تغير فولتية المتسعة في لحظة بدء التفريغ (ب) مامقدار المعدل بعد 1 ms من ذلك ؟ (ج) ماالنسبة من الطاقة الابتدائية المخزونة يتبقى بعد 3 ms من بدء التفريغ ؟
 □ 17 (أ) أوجد الشحنة بالكولوم الموجودة على المتسعة في الشكل 5 - 22 في اللحظة $t = 0^-$. (ب) مامقدار الشحنة في اللحظة $t = 0.01$ s ؟



الشكل 5 - 22 أنظر المسألة 17

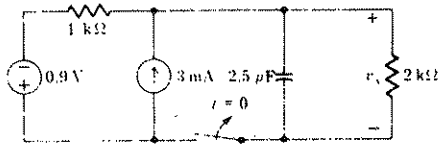
18 الزر المتوالي مع البطارية المبينة في الشكل 23 - 5 قد اغلق لمدة $495,752 \text{ s}$ ثم اغلق في $t = 0$. بعد أي فترة من الزمن يكون اتساع الفولتية عبر الزر أكبر من 1 V ؟



الشكل 23 - 5 انظر المسألة 18

19 □ افرض أن i و v هما فولتية وتيار متسعة مفترضا مفهوم الاشارات غير الفعال كانت المتسعة هي العنصر الوحيد الذي يخزن الشحنة الموجودة في الدائرة المقاومة الخالية من المصدر. اذا كانت $v(0^-) = 80 \text{ V}$ و $i(0^-) = 0.1 \text{ A}$ و $q(0^-)$ للمتسعة تساوي 20 mC أوجد $v(0.01)$.

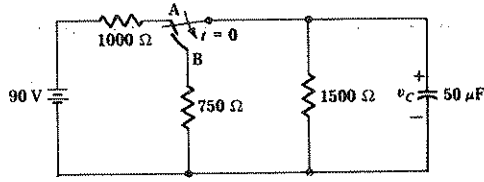
20 الزر في الدائرة المبينة في الشكل 25 - 5 فتح في $t = 0$ بعد ان كان مغلقا لفترة طويلة جدا. أوجد v_c للفترة $t > 0$.



الشكل 24 - 5 انظر المسألة 20

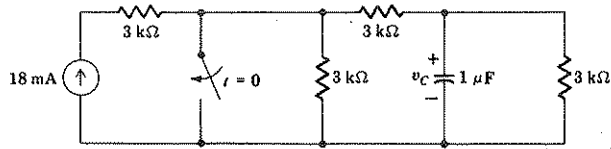
21 □ المحث ذو 2-mH المبين في الدائرة المبينة في الشكل 14 - 5 استيعض عنه بمتسعة ذات $2\text{-}\mu\text{F}$. اذا كان $i_L(0^-) = 3 \text{ mA}$. أوجد $i_L(t)$ للفترة $t > 0$.

22 الزر المبين في الشكل 25 - 5 كان في الوضع A لفترة طويلة جدا. حول الى الوضع B عندما $t = 0$. (أ) أرسم v_c كدالة للزمن $|t| < 50 \text{ ms}$ (ب) احسب الطاقة المخزونة في المتسعة عندما $t = 20 \text{ ms}$.



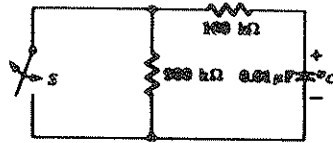
الشكل 25 - 5 انظر المسألة 22

23 اذا أغلق الزر في الشكل 26 - 5 عندما $t = 0$ بعد أن كان مفتوحاً لعدة دقائق. أوجد وارسم $v_c(t)$ مع الزمن.



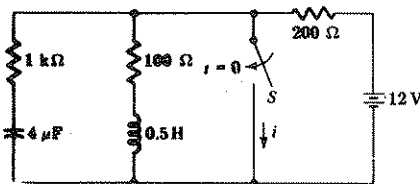
الشكل 26 - 5 انظر المسألة 23

24 الفولتية v_c في دائرة RC المبينة في الشكل 27 - 5 كانت 1000 V عندما $t = 0^-$. أغلق الزر S عندما $t = 0$ ثم فتح عندما $t = 1 \text{ ms}$ ثم أغلق ثانية عندما $t = 2 \text{ ms}$ ثم استمر الفتح والغلق بهذه الطريقة. ارسم v_c مع الزمن t ثم احسب v_c عندما $t = 3 \text{ ms}$.



الشكل 27 - 5 انظر المسألة 24

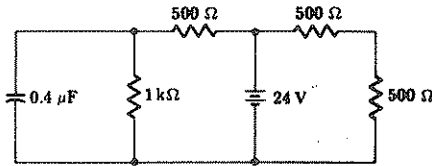
25 □ الزر في الشكل 28 - 5 كان مفتوحاً لفترة طويلة من الزمن. ثم أغلق عندما $t = 0$. أوجد $i(t)$. (ملاحظة إن استخدام نظرية التراكب مفيد جداً).



الشكل 28 - 5 انظر المسألة 25

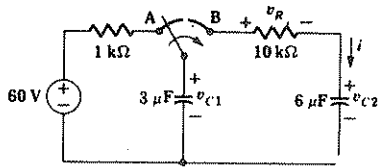
26 السلك الممتد من البطارية نحو الأعلى في الشكل 29 - 5 قطع فوق البطارية

تماماً عندما $t = 0$ احسب اتساع الفولتية عبر القطع عندما $t = 0^+$ (أ) $t = 0^-$: (ب)
 . ∞ (ج) $200 \mu s$



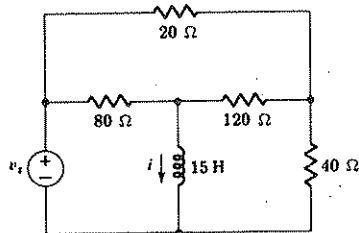
الشكل 29 - 5 أنظر المسألة 26

□ 27 الزر في الشكل 30 - 5 حرك من الوضع A الى الوضع B عندما $t = 0$ بعد أن كان في الوضع A لفترة طويلة جداً. وقد أنتج ذلك أن وضعت المتسمات على التوالي. ثم أمكن الحصول على فولتيتين مستمرتين متساويتين ومتماكستين لكي يتفرغا من المتسعة. (أ) أوجد $v_{c1}(0^-)$ و $v_{c1}(0^+)$ (ب) أوجد $v_{c2}(0^+)$ و $v_{c2}(0^-)$ (ج) أوجد ثابت زمن $v_R(t)$ (د) أوجد $v_R(t)$ عندما $t > 0$ (هـ) أوجد $i(t)$ (و) أوجد $v_{c1}(t)$ و $v_{c2}(t)$ من $i(t)$ والقيم الابتدائية. (ز) برهن على أن الطاقة المخزونة عندما $t = \infty$ مضافاً إليها الطاقة المبددة في المقاوم $10\text{-}k\Omega$ تساوي الطاقة المخزونة في المتسعة عند $t = 0$.



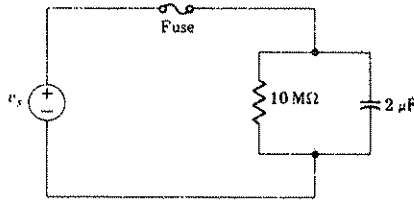
الشكل 30 - 5 انظر المسألة 27

28 اذا كانت v_s في الدائرة الميينة في الشكل 31 - 5 تساوي 120 V عندما $t < 0$ وتساوي 0 V عندما $t > 0$. أوجد وارسم $i(t)$ للفترة $-1 \leq t \leq 1\text{ s}$.



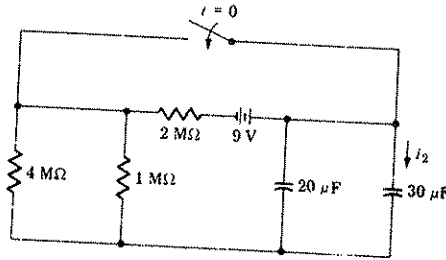
الشكل 31 - 5 أنظر المسألة 28

□ 29 المقاوم $10\text{-M}\Omega$ في الدائرة المبينة في الشكل 32 - 35 تمثل مقاومة تسرب موجودة في متسعة اعتيادية ذات $2\text{-}\mu\text{F}$ تعمل بفولتية مرتفعة. انفجر مصهر fuse اي فتح عند $t = 0$. افرض أن $v_s = 23,000 \cdot 120\pi t \text{ V}$. افرض أن فولتية مقدارها 50 V غير مؤذية للانسان بعد كم من الوقت يكون وضع يديك عبر المتسعة آمينا؟



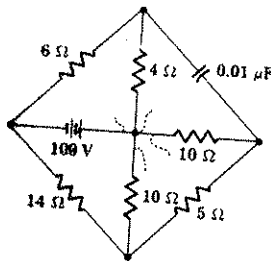
الشكل 32 - 5 أنظر المسألة 29

□ 30 الزر في الشكل 33 - 5 أغلق عند $t = 0$. أوجد $i_2(t)$ عندما $t > 0$.



الشكل 33 - 5 أنظر المسألة 30

31 الدائرة المبينة في الشكل 34 - 5 هي جزء من new Heatkid digital thermostat. mothrockle بعد ان ربطت it throckles لعدة دقائق ثم توقفت بسبب أن الربط الوسطي انفك. أوجد فولتية المتسعة كدالة للزمن وارسمها



الشكل 34 - 5 أنظر المسألة 31

الفصل السادس

تأثير الدالة المرغمة ذات وحدة الخطوة

THE APPLICATION OF THE UNIT - STEP FORCING FUNCTION

6.1 مقدمة INTRODUCTION

لقد درسنا في فصل سابق استجابة دوائر RL و RC عند عدم ظهور مصدر أو دالة مرغمة. وقد عبرنا عن هذه الاستجابة بالاستجابة الطبيعية لأن شكلها يعتمد على طبيعة الدائرة. وكان سبب الحصول على أي استجابة يعود الى احتمال خزن الطاقة الابتدائية ضمن العناصر الحثية أو السعوية في الدائرة. وفي بعض الأمثلة والمسائل واجهنا دوائر تحوي مصادر وأزراراً. كما علمنا بأن قسماً من عمليات التزيرير تمت في $t = 0$ لأجل ازالة جميع المصادر من الدائرة. بينما تركنا كميات معلومة من الطاقة المخزونة هنا وهناك. أي أننا كنا نحل المسائل التي فيها مصادر طاقة ثم أزيلت فجأة من الدائرة. والآن يجب أن نأخذ بنظر الاعتبار نوع الاستجابة التي تنتج عند تسليط مصادر الطاقة فجأة على الدائرة.

وسوف نكرس هذا الفصل لدراسة الاستجابة التي تحدث حينما تكون مصادر الطاقة المسلطة فجأة ذات تيار مستمر dc . وبعد أن درسنا المصادر الجيبية والأسية. ربما سنأخذ المسألة العامة وهي التسليط الفجائي لمصادر أكثر عمومية. وبما أن كل أداة كهربائية يطلب شحنها مرة على الأقل. وأن معظم الأدوات تشغل وتوقف عدة مرات خلال فترة حياتها. فمن الواضح ان دراستنا ستكون ممكنة التطبيق لعدة حالات عملية. وعلى الرغم من أننا قد تحدثنا بحالات التيار المستمر. الا أن هناك عدد لا يحصى من أمثلة أبسط تعود الى تشغيل الأدوات الحقيقية. فعلى سبيل المثال سنقوم بتحليل دائرة تمثل تزايد تيار المجال عند بدء تشغيل محرك يعمل بتيار مستمر. وأن توليد نبضات فولتية مستطيلة الشكل واستعمالها سهل وميسور باستخدام الدوائر الألكترونية أو دوائر الترانزستور ويعطي عدداً من الايعازات في الحاسبة الرقمية. أن دوائر مشابهة يمكن ايجادها في دوائر التزامن

ودوائر الاكتساح في مستقبلات أجهزة التلفزيون وفي منظومات الموصلات التي تستعمل التعديل النبضي ومنظومات الرادار كتطبيقات على ذلك . والأهم من ذلك فانه لتحليل معظم أجهزة الآليات المؤازرة servomechanisms نحتاج لايجاد أستجاباتها تسليط دالة ثابتة في ادخالها .

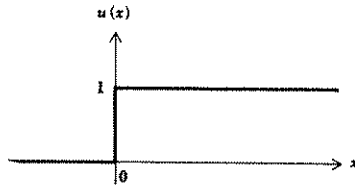
2 - 6 الدالة المرغمة ذات وحدة الخطوة THE UNIT-STEP FORCING FUNCTION

حينما تكلمنا على التسليط الفجائي لمصدر الطاقة كنا نعني به أن تسليطه يتم في زمن يساوي صفراً . وان تشغيل الزر المتوالي مع البطارية يكافئ دالة مرغمة حيث يساوي صفراً الى اللحظة التي يغلق فيها الزر ويساوي فولتية البطارية بعدئذ . إن الدالة المرغمة تحوي جزءاً غير مستمر في اللحظة التي يغلق بها الزر . وتدعى الدوال المرغمة المتقطعة وغير متصلة في بعض أجزائها أو في تفاضلها بأنها دوال انفرادية *singularity functions* . وهنا دالتان انفراديتان لهما أهمية خاصة هما دالة وحدة الخطوة ودالة وحدة النبضة . وان دالة وحدة الخطوة هي موضوع هذا الفصل اما وحدة النبضة فسوف تناقش في الفصلين الثامن عشر والتاسع عشر .

تعرف دالة وحدة الخطوة بأنها الدالة التي قيمتها صفر لجميع قيم الازاحة أقل من الصفر . فاذا فرضنا أن x هي الأراحة وتمثل دالة وحدة الخطوة بـ u فان $u(x)$ يجب أن تكون صفراً لجميع قيم x الأقل من الصفر . ويجب أن تكون وحدة واحدة لجميع قيم x الأكبر من الصفر . اما في $x = 0$ فان $u(x)$ تتغير فجأة من الصفر الى الواحد . وقيمتها في $x = 0$ غير معرفة ولكن قيمتها معلومة لجميع النقاط المختارة القريبة من $x = 0$. ونبين ذلك عادة بكتابة $u(0^-) = 0$ وان $u(0^+) = 1$. اما التعريف الرياضي لدالة وحدة الخطوة فهو :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

وهذه الدالة مبينة بالتخطيط البياني في الشكل 1 - 6 .



الشكل 1 - 6 دالة وحدة الخطوة $u(x)$ مبينة كدالة لـ x

ولأجل الحصول على وحدة الخطوة للدالة المرغمة يجب أن نعبر عن وحدة الخطوة بأنها دالة الزمن ويكون الحصول على تعبير أبسط باستبدال x بـ t .

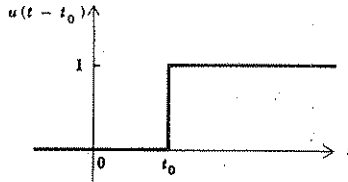
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

على أية حال لا يمكننا دائماً ترتيب تشغيل الدائرة بحيث تكون غير متواصلة دائماً في $t = 0$ ، فمثلاً إذا كان لدينا زران يراد تحريكهما على التعاقب فربما نختار تشغيل أحدهما في $t = 0$ ، لذا يكون من الضروري تحريك الثاني الى حالة التشغيل في زمن آخر يعقب $t = 0$ اي مثلاً $t = t_0$. وبما أن دالة وحدة الخطوة تجهزنا بعدم التواصل المناسب عندما تكون قيمة زاوية الأزاحة صفرأً، لذا فأن تشغيل الزر الثاني يمكن تمثيله باختيار وحدة الخطوة لدالة مرغمة لها ازاحة زاوية $(t - t_0)$ ، لذا:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

وهذه الدالة مبينة في الشكل 2 - 6

وان وحدة الخطوة للدالة المرغمة ليس لها وحدات واذا رغبتنا تمثيلها لفولتية مثلاً فمن الضروري ضرب $u(t - t_0)$ بفولتية ثانية ما كـ V ، لذا فان $v(t) = Vu(t - t_0)$ هي مصدر مثالي والتي هي صفر قبل $t = t_0$ وذات قيمة ثابتة V بعد $t = t_0$. هذه الدالة المرغمة مبينة في حالة الربط الى شبكة عامة في الشكل 3 - 6 (أ) وسوف نسأل انفسنا الآن.



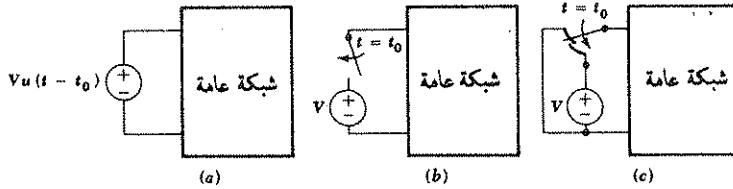
الشكل 2 - 6 الدالة المرغمة لوحدة الخطوة

سؤالاً منطقياً، أي مصدر حقيقي مادي مكافئ لدالة مرغمة غير متواصلة؟ وبالمكافئ نعني ببساطة بأن خصائص الفولتية والتيار للشبكتين متشابهة. لمصدر وحدة الفولتية المبينة في الشكل 3 - 6 (أ) فان خصائص الفولتية والتيار خصائص بسيطة، فالفولتية هي صفر قبيل $t = t_0$ وتساوي V بعد $t = t_0$. أما التيار فيمكن أن يكون أي قيمة (محددة) لأي من الفترات الزمنية. وتفكيرنا الأول يمكن أن ينتج محاولة للمكافئ المبين في الشكل 3 - 6 (ب) حيث أن مصدر الفولتية V مربوط

على التوالي مع الزر الذي يغلق في $t = t_0$. هذه الشبكة على أي حال لا تكافئ الفترة $t < t_0$ لأن الفولتية عبر البطارية غير معرفة في هذه الفترة الزمنية بتاتا. والمصدر المكافئ هو دائرة مفتوحة والفولتية عبره يمكن أن تكون أية دالة. أما بعد $t = t_0$ فتتكاافأ الشبكات وإذا كانت هذه هي الفترة الزمنية الوحيدة التي نرغب فيها وإذا كانت التيارات الابتدائية التي تسري من الشبكتين متشابهة في $t = t_0$ فإن الشكل 3-6 (ب) يصبح المكافئ المفيد للشكل 3-6 (أ).

ولأجل الحصول على المكافئ المضبوط لخطوة الفولتية للدالة المرغمة ربما يجب أن نجهز زرًا ذا قطب واحد مزدوج الحركة double-throw. فقبل $t = t_0$ يخدم الزر لضمان الفولتية عبر نهايتي الدخل للشبكة العامة أن تكون صفرًا. وبعد $t = t_0$ فإن الزر يتحرك لتجهيز فولتية دخل ثابتة قيمتها v . في $t = t_0$ الفولتية غير معروفة (كما يجب أن تكون عليه دالة الخطوة) تقصر البطارية دورتها مؤقتًا. ولحسن الحظ فإننا نتعامل مع نماذج رياضية. أما المكافئ المضبوط للشكل 3-6 (أ) فيبين في الشكل 3-6 (ج).

قبل تلخيص مناقشتنا عن المكافئ لنستشير بأخذ المكافئ المضبوط لبطارية وزر بنظر الاعتبار. ماهي خطوة الفولتية لدالة مرغمة تكافئ ما في الشكل 3-6 (ب) ؟



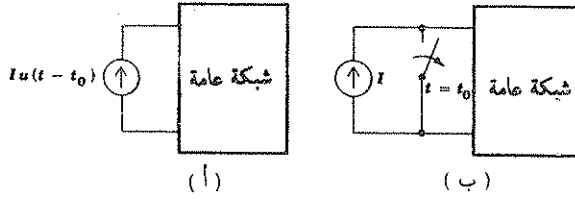
الشكل 6-3 (أ) دالة فولتية الخطوة المرغمة مبينة كمصدر لشبكة عامة.

(ب) دائرة بسيطة على الرغم من أنها ليست مكافئة دقيقة لـ (أ). لكن يمكن استخدامها كمكافئ في حالات متعددة.

(ج) دائرة مكافئة دقيقة لـ (أ).

نفتش الان عن بعض الترتيبات التي تتغير فجأة من دائرة الفتح الى الفولتية الثابتة بحيث يشمل التغيير في المقاومة، وهذا هو أساس الصعوبة. وان دالة الخطوة تمكنا لتغيير الفولتية غير المتواصلة (أو التيار) ولكن هنا نحتاج الى مقاومة متغيرة

كذلك . لذلك يجب أن يحوي المكافئ دالة خطوة لمقاومة أو لمواصلة عنصر حامل متغير مع الزمن ، ولو أننا ربما بنينا هكذا عنصر بدلالة وحدة الخطوة ، إلا أنه يجب أن يكون من الواضح بأن الناتج النهائي هو الزر . الزر هو عبارة عن مقاومة



الشكل 6.4 (أ) دالة تيار الخطوة المرغمة مسلطة على شبكة عامة .
 (ب) دائرة بسيطة على الرغم من أنها ليست المكافئ الدقيق لـ (أ) لكن يمكن استخدامها كمكافئ في حالات متعددة .

تتغير أنياً من الصفر الى ما لا نهاية له من الأومات أو بالعكس . فان المكافئ المضبوط للبطارية والزر المربوطين على التوالي يجب أن يكون بطارية على التوالي مع تمثيل لمقاومة متغيرة مع الزمن . ولا يزدونا أي ترتيب للفولتية وخطوة التيار للدالات المرغمة بأي مكافئ مضبوط¹.

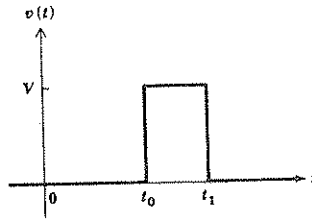
يبين الشكل 6.4 (أ) خطوة التيار لدالة مرغمة تشغل شبكة عامة . وإذا حاولنا تبديل هذه الدائرة بمصدر dc على التوازي مع الزر (الذي يفتح في $t = t_0$) يجب أن نعرف بأن الدوائر متكافئة بعد $t = t_0$ ولكن الدالات متشابهه بعد $t = t_0$ فقط إذا كانت الظروف الابتدائية نفسها . وكحكم يمكننا استعمال الدوائر في الشكل 6.4 أ و ب كبديل أحدهما عن الآخر . المكافئ المضبوط للشكل 6.4 (أ) هو ثنائي الدائرة في الشكل 6.3 (ج) والمكافئ المضبوط للشكل 6.4 (ب) لا يمكن تكوينه مع التيار والفولتية للدالات المرغمة وحدها².

- 1 - المكافئ يمكن ايجاده اذا أعطيت بعض المعلومات عن الشبكة العامة (الفولتية عبر الزر للزمن $t < t_0$) . وهنا نفرض عدم وجود معلومات مسبقه عن الشبكة العامة .
- 2 - المكافئ يمكن رسمه اذا علم التيار خلال الزر قبل $t = t_0$.

يمكن الحصول على بعض الدالات المرغمة المفيدة جداً بتطبيق وحدة الخطوة للدالة المرغمة . دعنا نعرف نبضة فولتية المستطيلة بالشروط الآتية :

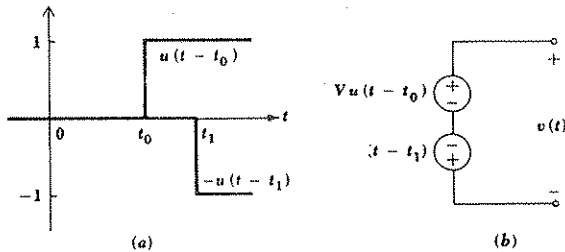
$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ V & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t_1 < t \end{cases}$$

النبضة مرسومة في الشكل (6.5) فهل يمكن تمثيل النبضة هذه بدلالة وحدة الخطوة للدالة المرغمة ؟



الشكل 6.5 دالة مرغمة مفيدة - نبضة فولتية مستطيلة

دعنا نأخذ الفرق بين وحدتي الخطوة $u(t - t_0) - u(t - t_1)$ ودالتي الخطوة هاتين وهما مبينتان في الشكل 6.6 (أ) . ومن الواضح ان الفرق بينهما يكون نبضة مستطيلة . والمصدر $Vu(t - t_0) - Vu(t - t_1)$ الذي سيزودنا بالفولتية المطلوبة موضح في الشكل 6.6 (ب)

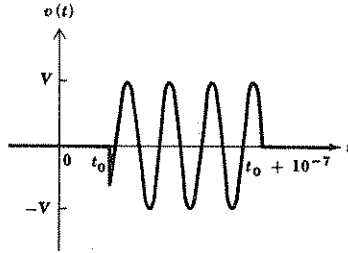


الشكل 6.6 (أ) وحدتي الخطوة $u(t - t_0)$ و $-u(t - t_1)$ (ب) المصدر الذي ينتج نبضة الفولتية المستطيلة المبينة في الشكل 6.5 .

إذا كان لدينا مصدر فولتية جيبية $V \sin \omega t$ ، يراد ربطه الى الشبكة فجأة في الزمن $t = t_0$ ، لذا فان الدالة المرغمة لفولتية مناسبة ستكون $v(t) = V u(t - t_0) \sin \omega t$. إذا رغبتنا تمثل اندفاع من الطاقة من مرسل رادار ربما نرجع الى المصدر الجيبية بعد $1/10 \mu s$ لوحدة الخطوة للدالة المرغمة الثانية . فتكون نبضة الفولتية .

$$v(t) = V[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-7})] \sin \omega t$$

وهذه الدالة المرغمة مرسومة بشكل تخطيطي في الشكل (6.7) . وكإشارة أخيرة للمقدمة يجب أن نلاحظ ان وحدة الخطوة للدالة المرغمة يجب أن تعتبر فقط نموذجاً رياضياً لعملية تزيير حقيقية . وحيث لا توجد مقاومة حقيقية أو محث أو



الشكل 6.7 نبضة تردد راديوي توصف بـ $v(t) = V[u(t - t_0) - u(t - t_0 - 10^{-7})] \sin \omega t$

التردد الجيبية ضمن النبضة المبينة حوالي 36 ميكاهرتز والتي هي واطئة جداً للرادار لكنها مناسبة لتوضيح الرسم .

متسعة تتصرف كلياً كعنصر دائرة مثالي . وكذلك لا يمكننا أداء عملية تزيير في فترة زمنية مقدارها صفر من الزمن . على أية حال فان زمن التزيير الأقل من $1 ns$ شائع في كثير من الدوائر . وهذه الفترة الزمنية من القصر ماكفي لاهمالها بالمقارنة مع ثوابت الزمن في بقية الدائرة .

تمارين

٦ - ١ احسب في اللحظة $t = 0$ كلا من : (أ) $u(t - 1)$ (ب) $u(1 - t)$

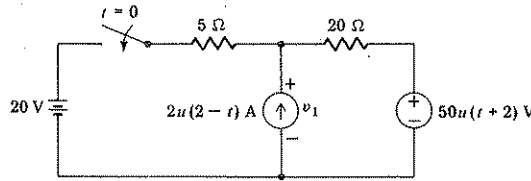
$$u[-\cos(2\pi t + \pi)] \quad u(\cos 4\pi t) \quad \text{(ج)}$$

الجواب 1; 1; 1; 0;

٦ - 2 للدائرة المبينة في الشكل 8 - 6 . أوجد v_1 عندما $t = 5s$ (أ) $-5s$ (ب) $-1s$

(ج) 1 (د) 3s

الجواب 26; 34; 40; 90 V

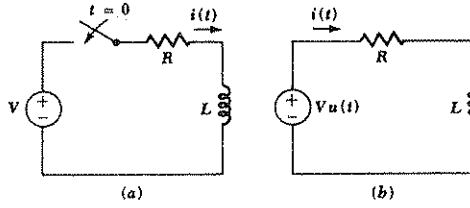


الشكل 8 - 6 أنظر المسألة 2 - 6

6.3 نظرة أولية على دائرة RL المساقية

A FIRST LOOK AT THE DRIVEN RL CIRCUIT

نحن الآن على استعداد لنعالج شبكة بسيطة بتسليط فجائي لمصدر تيار مستمر. تتكون الدائرة من البطارية V على التوالي مع الزر والمقاومة L والمحث R . يفلق الزر في الزمن $t = 0$ كما هو مبين على مخطط الدائرة للشكل 6.9 (أ) ومن الواضح بأن التيار $i(t)$ صفر قبل $t = 0$. يمكن استبدال البطارية والزر بفولتية خطوة للدالة المرغمة $Vu(t)$ والتي هي أيضاً لا تنتج استجابة قبيل $t = 0$. وبعد $t = 0$ ومن الواضح أن الدائرتين متشابهتان. لذا فإننا نفتش عن التيار $i(t)$ اما في الدائرة المعطاة في الشكل 6.9 (أ) أو في الدائرة المكافئة 6.9 (ب). سوف نجد في هذا الوقت $i(t)$ بكتابة معادلة الدائرة المناسبة ثم نحلها بعزل المتغيرات والتكامل. بعد أن نحصل على الجواب ونتحقق من الجزئين المكونين له وسوف نقضي بعض الوقت بعدها (الفقرة التي تلي) بفهم المفرد العام لهذين الحدين وسوف نتوصل الى حل هذه المسألة ببساطة. هذا بالإضافة الى أننا سوف نتمكن من تطبيق الأسس.



الشكل 6.9 (أ) الدائرة المعطاة (ب) الدائرة المكافئة التي لها الاستجابة نفسها $i(t)$ لكل الاوقات .

العامة وراء الطريقة الأبسط لتكوين حلول أكثر سرعة وأكثر معنى لأي مسألة فيها تطبيق فجائي لأي مصدر . دعنا الآن نستمر بطريقة اصولية في الحل .
وتطبيق قانون الفولتية لكروشوف على الدائرة في الشكل 6.9 (ب) لدينا .

$$Ri + L \frac{di}{dt} = Vu(t)$$

وبما أن وحدة الخطوة للدالة غير متواصلة في $t = 0$ لذا سوف نأخذ الحل للزمن $t < 0$ أولاً ثم $t > 0$. ومن الواضح أن تطبيق فولتية مقدارها صفرًا منذ $t = -\infty$ لم ينتج أي استجابة ، لذا ،

$$i(t) = 0 \quad t < 0$$

للزمن الموجب على أية حال $u(t)$ وحدة واحدة ويجب أن نحل المعادلة ،

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V \quad t > 0$$

يمكن عزل المتغيرات في خطوات جبرية عدة تؤول الى ،

$$\frac{L di}{V - Ri} = dt$$

وكل جهة يمكن أخذ تكاملها مباشرة .

$$-\frac{L}{R} \ln(V - Ri) = t + k$$

ولأجل ايجاد قيمة k علينا معرفة الظروف الابتدائية . قبيل $t = 0$ كان التيار $i(t)$ صفرًا ، لذا $i(0^-) = 0$. وبما أن التيار في المحث لا يتغير بقيمة معينة خلال فترة زمنية مقدارها صفر من الزمن بدون ارتباط ذلك بفولتية لانتهائية ، لذا لدينا $i(0^+) = 0$. فعند جعل $i = 0$ في $t = 0$ نحصل على ،

$$-\frac{L}{R} \ln V = k$$

وعليه

$$-\frac{L}{R} [\ln(V - Ri) - \ln V] = t$$

بإعادة الترتيب نحصل على :
أو أن

$$\frac{V - Ri}{V} = e^{-mt}$$

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-mt} \quad t > 0$$

لذا فإن التعبير عن الاستجابة لجميع الأزمنة t سيكون .

$$i = \left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-mt} \right) u(t) \quad (1)$$

وهذا هو الحل المطلوب ، ولكن لم نحصل عليه بأبسط طريقة ولأجل وضع طريقة أسهل ، دعنا نحلل الحدين الظاهرين في المعادلة (1) . فالحد الأسى له الشكل الدالي للاستجابة الطبيعية لدائرة RL وله أس سالب . وتقرب قيمته من الصفر كلما زاد الزمن . وتعتمد خصائصه على ثابت الزمن L/R . وان الشكل الدالي لهذا الجزء من الاستجابة متشابه مع ما حصلنا عليه في الدائرة الخالية من المصدر . وعلى أية حال يعتمد اتساع هذا الحد الاسي على V . وربما نستطيع التعميم بأن الاستجابة هي عبارة عن جمع حدين . حيث أن أول حد له الشكل الدالي والذي يشبه الاستجابة لدائرة خالية من المصدر ، ولكن لها اتساع يعتمد على الدالة المرغمة . والآن دعنا نعتبر طبيعة الجزء الثاني من الاستجابة .

المعادلة (1) تحوي الحد الثابت V/R . لماذا ظهرت ؟ الجواب بسيط حيث أن الاستجابة الطبيعية تصل صفرًا تدريجياً كلما تبددت الطاقة ، ولكن الاستجابة الكلية لاتصل صفر . من الظاهر أن الدائرة تتصرف كمقاوم ومحث على التوالي مع بطارية مع سريان تيار مستمر قيمته V/R . هذا التيار هو جزء من الاستجابة التي تنسب الى الاستجابة المرغمة . فهي الاستجابة التي تظهر بعد فترة طويلة من غلق الزر .

تتكون الاستجابة الكاملة من جزئين : الاستجابة الطبيعية والاستجابة المرغمة . والاستجابة الطبيعية هي خاصية الدائرة وليس لها علاقة بالمصادر . ويمكن ايجاد شكلها باعتبار دائرة خالية من المصدر ولها اتساع يعتمد على الاتساع الابتدائي للمصدر والطاقة الابتدائية المخزونة . للاستجابة المرغمة خصائص الدالة المرغمة نفسها ، ويمكن ايجادها باعتبار أن كل الأزرار كانت مغلقة لمدة طويلة . وبما أننا الآن نهتم فقط بالأزرار ومصادر الـ dc فإن الاستجابة المرغمة هي فقط حل لمسألة دائرة تيار مستمر بسيطة .

ويمكن رؤية الغرض من الاستجابتين المرغمة والطبيعية من الابعاد الفيزيائية .
ونعلم بأن دائرتنا سوف تكون استجابتها مرغمة مهما كانت الظروف ، لذا
فان اللحظة التي تغلق بها الأزرار يكون للتيارات الابتدائية في الملفات (أو
الفولتيات عبر المتسعات في دوائر أخرى) قيماً تعتمد فقط على الطاقة المخزونة في
هذه العناصر . هذه التيارات أو الفولتيات لا يتوقع أن تكون نفس التيارات
والفولتيات المطلوبة من قبل الاستجابة المرغمة . لذا يجب أن تكون هناك فترة زائلة
تتغير فيها التيارات والفولتيات من قيمتها الابتدائية المعطاة الى القيم النهائية
المطلوبة . إن جزء الاستجابة الذي يؤدي الى الانتقال من القيم الابتدائية الى النهائية
هو الاستجابة الطبيعية (غالباً تدعى الاستجابة الزائلة transient كما وجدنا
سابقاً) واذا وصفنا استجابة دائرة RL بسيطة خالية من المصدر بهذه الحدود ، فاننا
يجب أن نقول بأن الاستجابة المرغمة هي صفر والاستجابة الطبيعية تخدم لربط
الاستجابة الابتدائية المتكونة بالطاقة المخزونة مع قيمة صفر للاستجابة المرغمة . إن
هذا الوصف ملائم فقط لتلك الدوائر التي تتلاشى فيها الاستجابة الطبيعية . ويحدث
ذلك دائماً في الدوائر الحقيقية التي يكون فيها مقاومة لكل عنصر . ولكن هناك
عدداً من الدوائر الشاذة التي فيها الاستجابة الطبيعية لاتزول بمرور الزمن وكأمثلة
على ذلك الدوائر التي فيها التيارات مقيدة وتدور حول دارة حثية أو أن الفولتيات
مقيدة في حلقة متوالية من المتسعات .

والآن دعنا نفتش عن القواعد الرياضية لتقسيم الاستجابة الى استجابة طبيعية
واستجابة مرغمة .

تمارين

3 - 6 محث ذو 50-mH ومقاوم 2-k Ω ومصدر تيار $20 + 20u(t)$ مرتبطة
على التوازي . باستخدام نظرية التراكب اوجد اتساع تيار المحث (أ) عند $t = 0^-$
(ب) $t = 0^+$ (ج) $as t \rightarrow \infty$ (د) عندما $t = 20 \mu s$

الجواب 20; 20; 31.0; 40 mA

6.4 الاستجابة الطبيعية والمرغمة THE NATURAL AND THE FORCED RESPONSE

هناك سبب رياضي وجيه لاعتبار الاستجابة الكاملة متكونة من جزئين ، الاستجابة المرغمة والاستجابة الطبيعية . يعتمد السبب على الحقيقة أن حل أي معادلة تفاضلية خطية يمكن أن يعبر عنه كمجموع جزئين ؛ الحل التتامي (الاستجابة الطبيعية) والحل الخاص (الاستجابة المرغمة) . ودون الخوض في النظرية العامة للمعادلات التفاضلية ، دعنا نعتبر المعادلة العامة للنوع الذي شاهدناه في الفقرة السابقة .

$$\frac{di}{dt} + Pi = Q \quad (2)$$

ربما نعرف Q بأنها الدالة المرغمة ونعبر عنها بـ $Q(t)$ للتأكيد على اعتمادها العام على الزمن . ففي جميع الدوائر P هي ثابت موجب ولكن الملاحظات التي تتبع في حل (2) لها الأهمية نفسها في الحالات التي فيها P دالة عامة للزمن . دعنا نيسط المناقشة بفرض أن P هي ثابت موجب ثم نفرض فيما بعد أن Q هي ثابت . لذا حددنا انفسنا بالدالات المرغمة للتيار المستمر .

وفي أي كتاب منهجي قياسي عن المعادلات التفاضلية الاولية يكون الحل بضرب جهتي المعادلة بما يسمى بعامل التكامل لكي تصبح كل جهة تفاضلاً تاماً يمكن تكامله مباشرة لايجاد الحل . وبهذه الطريقة لانزل المتغيرات ولكن نرتبها فقط بطريقة بحيث ان التكامل يكون ممكناً . ولهذه المعادلة يكون عامل التكامل هو e^{Pt} او $e^{\int P dt}$ لأن P هي ثابت . لتضرب كل جهة من المعادلة بعامل التكامل هذا فنحصل على :-

$$e^{Pt} \frac{di}{dt} + iPe^{Pt} = Qe^{Pt}$$

ان شكل الجهة اليسرى يمكن تحسينه الآن عند التمييز بأنها التفاضل التام ie^{Pt}

$$\frac{d}{dt} (ie^{Pt}) = e^{Pt} \frac{di}{dt} + iPe^{Pt}$$

لذا فان

$$\frac{d}{dt} (ie^{Pt}) = Qe^{Pt}$$

وربما تكامل كل جهة بالنسبة للزمن ونجد ان ،

$$ie^{Pt} = \int Qe^{Pt} dt + A$$

حيث ان A هو ثابت التكامل . وبما ان هذا الثابت مبين بوضوح ، لذا يجب ان نتذكر أنه ليس هناك حاجة لاضافة ثابت تكامل فيما بعد عند ايجاد القيمة .
بالضرب في e^{-pt} ينتج الحل لـ $i(t)$

$$i = e^{-pt} \int Qe^{pt} dt + Ae^{-pt} \quad (3)$$

وإذا كانت الدالة المرغمة $Q(t)$ معلومة ، يبقى فقط ايجاد قيمة التكامل للحصول على شكل الدالة التام لـ $i(t)$. وسوف لانجد قيمة تكامل كهذا لكل مسألة . على أية حال نحن نرغب في استعمال (3) كحل توضيحي منه نستنتج عدة استنتاجات عامة .
سلاحظ أولاً أنه لدائرة خالية من المصدر أن Q يجب أن تكون صفراً والحل هو الاستجابة الطبيعية .

$$i_n = Ae^{-pt} \quad (4)$$

سنجد بأن الثابت P لايمكن أن يكون سالب القيمة وقيمه تعتمد فقط على عناصر الدائرة الخاملة (3) وارتباطاتها في الدائرة ، وعليه فان الاستجابة الطبيعية تصل الصفر كلما زاد الوقت بدون حدود . ويجب أن نفعل ذلك طبعاً في دائرة RL المتوالية ، لأن الطاقة الابتدائية تتبدد تدريجياً في المقاوم . وهناك دوائر مثالية غير حقيقية والتي فيها قيمة P صفر . ففي هذه الدوائر لا تتلاشى الاستجابة الطبيعية ولكن تحصل القيمة الممثلة بالتيارات او الفولتيات المقيدة . لذا نجد أن أحد الحدين يكون الاستجابة الكاملة له بشكل الاستجابة الطبيعية . وله اتساع يعتمد على القيمة الابتدائية للاستجابة الكاملة ثم على القيمة الابتدائية للدالة المرغمة ايضاً .
نلاحظ بعدئذ بأن الحد الاول في (3) يعتمد على الشكل الدالي لـ $Q(t)$ للدالة المرغمة في كل دائرة ذات استجابة طبيعية متلاشية ، كلما أصبح t لانهاية يجب أن يصف الحد الاول شكل الاستجابة كلياً بعد زوال الاستجابة الطبيعية . هذا الحد سنطلق عليه الاستجابة المرغمة او استجابة الحالة المستقرة steady state والحل الخاص particular solution او التكامل الخاص particular integral

(3) إذا احتوت الدائرة على مصدر معتمد او مقاومة سالبة فمن المحتمل أن P تكون سالبة .

وسوف نأخذ الآن تلك المسائل التي تشمل التسليط الفجائي لمصادر التيار المستمر. وسنعتبر ان $Q(t)$ ثابتة لكل قيم الزمن بعد غلق الزر. ويمكن ايجاد قيمة التكامل في (3) والحصول على الاستجابة المرغمة

$$i_f = \frac{Q}{P}$$

أو ان الاستجابة الكاملة

$$i(t) = \frac{Q}{P} + Ae^{-Pt}$$

في دائرة RL المتواليّة Q/P هي التيار الثابت V/R و $1/P$ هو ثابت الزمن τ . وسنرى أن الاستجابة المرغمة ربما يتم الحصول عليها بدون ايجاد قيمة التكامل، لأنها تساوي الاستجابة الكاملة حينما تكون قيمة الزمن لانهاية وتساوي فولتية المصدر مقسمة بالمقاومة المتواليّة. وعليه يمكن الحصول على الاستجابة المرغمة بالتحسس. في الفقرة التالية سوف نحاول ايجاد الاستجابة الكاملة لعدة دوائر RL بواسطة الاستجابات الطبيعية والمرغمة ثم نجمعهما.

تمرين

4 - 6 مصدر فولتية $v_s = 20e^{-300t}u(t)$ V ومقاوم $40\text{-}\Omega$ ومحث 100-mH مربوطة على التوالي. استخدم المعادلة (3) لايجاد اتساع التيار عندما t (أ) 0^+ (ب) 5 ms (ج) ∞

الجواب A 0.368 ; 0 ; 0

RL CIRCUITS

6.5 دوائر 1

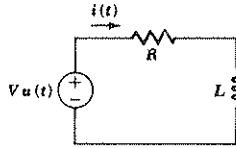
دعنا نستعمل دائرة RL المتواليّة لتوضيح كيفية ايجاد الاستجابة الكاملة بجمع الاستجابة الطبيعية والمرغمة. اديبسة ص ٢٠٧ الدوائر الكهربائية

لقد تم تحليل هذه الدائرة المبينة في الشكل 6.10 بطريقة طويلة نسبياً. وان الاستجابة المرغوبة هي التيار $i(t)$ ويعبر عن هذا التيار بمجموع التيار الطبيعي والمرغم.

$$i = i_n + i_f$$

ان شكل دالة الاستجابة الطبيعية يجب أن تكون نفسها التي سبق ان حصلنا عليها بدون المصادر. لذا نستبدل مصدر فولتية الخطوة بدائرة قصر ونميز دائرة RL القديمة ، لذا

$$i_n = Ae^{-Rt/L}$$



الشكل 6.10 دائرة RL متوالية تستخدم لتوضيح طريقة ايجاد الاستجابة الكاملة كمجموع الاستجابة الطبيعية والاستجابة المرغمة .

حيث أن الاتساع يجب أن تحسب قيمته .

بعد ذلك لناخذ الاستجابة المرغمة وهي ذلك الجزء من الاستجابة الذي يعتمد على طبيعة الدالة المرغمة نفسها . وفي هذه المسألة الخاصة يجب أن تكون الاستجابة المرغمة ثابتة بسبب أن المصدر هو ثابت V لجميع قيم الزمن . بعد تلاشي الاستجابة الطبيعية سوف لا تظهر أي فولتية عبر المحث ، لذا فالفولتية تظهر عبر R والاستجابة المرغمة تكون ببساطة

$$i_f = \frac{V}{R}$$

لاحظ بأن الاستجابة المرغمة حسبت بصورة كاملة وليس هناك اتساع مجهول . وبعد ذلك ندمج الاستجابتين

$$i = Ae^{-Rt/L} + \frac{V}{R}$$

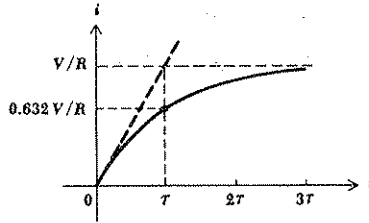
ونطبق الظروف الابتدائية لايجاد A . كان التيار صفراً قبيل $t = 0$. وحيث أنه لا يمكن أن تتغير قيمته أنياً لأن التيار يمر خلال محث ، لذا فالتيار صفر بعد $t = 0$ مباشرة أيضاً ، وأن

$$0 = A + \frac{V}{R}$$

$$i = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

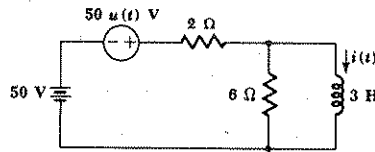
ثم
(5)

وهذه الاستجابة مخططة بشكل 6.11 ويمكننا ملاحظة الطريقة التي يزداد بها التيار من القيمة الابتدائية الى القيمة النهائية V/R . لقد حدث هذا التغير في فترة زمنية فعلية مقدارها 3τ ، واذا كانت دائرتنا تمثل ملف المجال لمحرك كبير



الشكل 6.11 التيار المعطى بالمعادلة (5) مبين برسم بياني. يتقاطع الخط الذي يمس المنحنى في نقطة الأصل مع الاستجابة المرغمة الثابتة عند $L = t$.

يعمل بالتيار المستمر ربما كانت القيم $L = 10 \text{ H}$ و $R = 20 \Omega$ فنحصل على $\tau = 0.5 \text{ s}$. ومن ثم يتكون تيار المجال في زمن قدره 1.5 s تقريباً. ففي ثابت زمن واحد يبلغ التيار الذي حصلنا عليه 63.2 بالمائة من قيمته النهائية.



الشكل 6.12 دائرة مستخدمة كمثال

والآن دعنا نطبق هذه الطريقة على دائرة أكثر تعقيداً. ففي الشكل 6.12 تظهر دائرة تحوي مصدر فولتية مستمرة إضافة الى مصدر فولتية الخطوة. دعنا نجد $i(t)$ لجميع قيم الزمن. يمكننا استبدال كل شيء الى يسار المحث بمكافئ ثيفنن ولكن عوضاً عن ذلك، دعنا فقط نميز شكل المكافئ اي مقاوم على التوالي مع مصدر الفولتية. وتحوي الدائرة عنصراً واحداً فقط لخزن الطاقة وهو المحث فتكون الاستجابة الطبيعية دالة أسية سالبة كالسابق

$$i = i_f + i_n$$

حيث ان

$$i_n = Ae^{-t/\tau} \quad t > 0$$

وبما ان

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{3}{1.5} = 2$$

فلاستجابة المرغمة يجب ان تكون تلك الناتجة عن الفولتية الثابتة $V=100$.
وتكون الاستجابة المرغمة مقداراً ثابتاً ولا تظهر فولتية عبر المحث الذي يتصرف
كدائرة قصر وان :

$$i_f = \frac{100}{2} = 50$$

لذا

$$i = 50 + Ae^{-0.5t} \quad t > 0$$

ولأجل ايجاد قيمة A يجب التأكد من القيمة الابتدائية لتيار المحث . قبيّل
 $t = 0$ كان هذا التيار 25 A ولا يمكن ان يتغير آنياً ، لذا

$$25 = 50 + A \quad \text{or} \quad A = -25$$

لذا

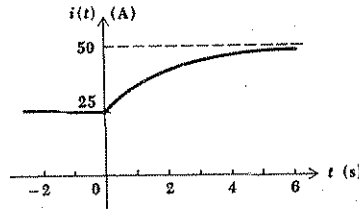
$$i = 50 - 25e^{-0.5t} \quad t > 0$$

ونكمل الحل بالقول بأن

$$i = 25 \quad t < 0$$

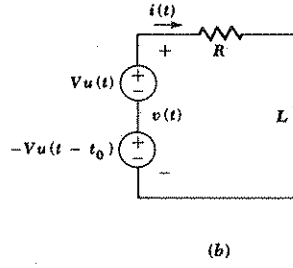
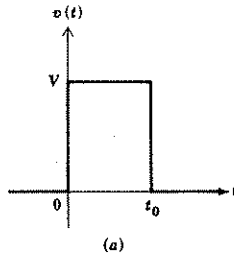
او بكتابة تعبير منفرد صحيح لكل قيم t

$$i = 25 + 25(1 - e^{-0.5t})u(t) \quad A$$



الشكل 6.13 الاستجابة $t = \tau$ للدائرة المبينة في الشكل 6.12 . مرسومة لقيم الزمن التي تقل والتي تزيد عن
الصفري .

ان الاستجابة الكاملة مبينة في الشكل 6.13 . لاحظ كيف ان الاستجابة
الطبيعية تخدم لربط الاستجابة للزمن $t < 0$ مع الاستجابة المرغمة الثابتة .
وأخيراً فان لهذه الطريقة التي بها يمكن بمجرد النظر كتابة الاستجابة الكاملة
لأي دائرة معرضة للزوال ، دعنا نطبق نبضة فولتية مستطيلة اتساعها V وفترةها t_0
على دائرة توالي RL بسيطة . نمثل الدالة المرغمة كمجموع مصدري فولتية خطوة



الشكل 6.14 (أ) نبضة فولتية مستطيلة تستخدم كدالة مرغمة في دوائر RL المتوالية البسيطة .
 (ب) دائرة RL المتوالية تبين تمثيل الدالة المرغمة بواسطة دمج مصدري فولتية غير معتمدين متوالين . التيار $i(t)$ هو المطلوب .

الشكل 6.14 (أ) . وسنحاول الحصول على الاستجابة الكاملة باستعمال قاعدة التراكب . فلو أننا لم نشر إلى جزء $i(t)$ الذي هو بسبب المصدر العلوي $Vu(t)$ عندما يعمل لوحده بالعلامة $i_1(t)$ ثم فرضنا أن $i_2(t)$ تمثل ذلك الجزء بسبب أن $-Vu(t - t_0)$ يعمل لوحده فإنه

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t).$$

ان هدفنا الآن كتابة كل من الاستجابات الجزئية i_1 ، i_2 كمجموع الاستجابة الطبيعية والمرغمة الاستجابة $i_1(t)$ مألوفة وهذه المسألة قد حلت قبل صفحتين أو ثلاث

$$i_1(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad t > 0$$

لاحظ بأن مدى الزمن $t > 0$ يجب ان يبين بوضوح (لأن المعادلة غير صالحة حينما t سالبة) . الآن نركز اهتمامنا الى المصدر السفلي واستجابته $i_2(t)$. فان قطبية المصدر وزمن تسليطها مختلفان فقط . وليس هناك حاجة لايجاد شكل الاستجابة الطبيعية والاستجابة المرغمة . ويمكن كتابة $i_1(t)$ بالشكل

$$i_2(t) = -\frac{V}{R} (1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \quad t > t_0$$

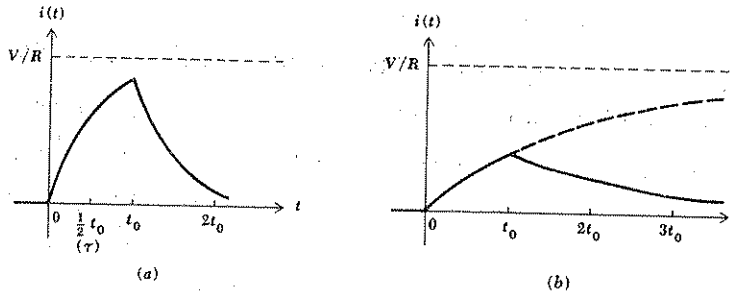
حيث ان مدى الزمن الذي ينطبق فيه هو $t > t_0$. ويجب أن يبين . والآن نجتمع الحلين بعناية لأن كل واحد منهما نافذ لفترة زمنية مختلفة لذا .

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad 0 < t < t_0$$

$$i(t) = \frac{V}{R} (1 - e^{-Rt/L}) - \frac{V}{R} (1 - e^{-R(t-t_0)/L}) \quad t > t_0$$

$$i(t) = \frac{V}{R} e^{-Rt/L} (e^{Rt_0/L} - 1) \quad t > t_0$$

والحل يكمل بالاقرار بأن $i(t)$ هو صفر للزمن t السالب وتخطيط الاستجابة كدالة للزمن. وان نوع المنحنى الناتج يعتمد على القيم النسبية لـ t_0 وثابت الزمن τ .



الشكل 6.15 منحني استجابتين ممكنتين مبيان لدالة الشكل 6.14 ب (أ) اختيرت $t_0/2$ و (ب) اختيرت $2t_0$

والمنحنيان الممكنان مبيان في الشكل (6.15). يبين المنحنى اليسر رسم لحالة ثابت الزمن نصف طول النبضة المسلطة. لذا فالجزء الصاعد للدالة الأسية يصل V/R تقريباً قبل ابتداء الدالة الأسية بالنزول. ويبين الشكل الى اليمين حالة معاكسة حيث الزمن يعادل مرتين بقدر t_0 وليس للاستجابة مجال للوصول الى اتساع أعلى.

ان الطريقة التي استخدمناها لايجاد استجابة دائرة RL بعد أن أدخلت مصادر التيار المستمر فيها أخرجت منها في لحظة من الزمن ولتكن عند $t = 0$ يمكن تلخيصها فيما يأتي: نفرض ان الدائرة يمكن تبسيطها الى دائرة مكافئة تحتوي على مقاومة واحدة R_{eq} ومحاثة واحدة مكافئة L_{eq} وذلك عندما يستعاض عن كل المصادر غير المعتمدة بصفر. تمثل الاستجابة التي نطلبها بـ $f(t)$

1 بعد قتل كافة المصادر غير المعتمدة ، بسط الدائرة لإيجاد R_{eq}, L_{eq} وثابت الزمن $\tau = L_{eq}R_{eq}$

2 بالنظر الى L_{eq} كدائرة قصر ، استخدم طرق تحليل التيار المستمر لإيجاد $i_L(0^-)$ و تيار المحث قبل التقطع تماماً .

3 بالنظر الى L_{eq} كدائرة قصر ، استخدم طرق تحليل التيار المستمر لإيجاد الاستجابة القسرية . وهذه القيمة التي تقترب منها $f(t)$ عندما $t \rightarrow \infty$. وتمثل بـ $f(\infty)$.

4 أكتب الاستجابة الكلية كمجموع للاستجابتين الطبيعية والقسرية ،
 $f(t) = Ae^{-t/\tau} + f(\infty)$

5 أوجد $f(0^+)$ باستخدام الظروف $i_L(0^+) = i_L(0^-)$ وإذا أردنا إيجاد L_{eq} ، يمكن الاستعاضة عن مصدر التيار $i_L(0^+)$ (دائرة مفتوحة إذا كانت $i_L(0^+) = 0$) لهذه الحسابات . باستثناء تيارات المحث (وفولتيات المسعات) يمكن تغيير بقية التيارات والفولتيات في الدائرة فجائياً .

6 ومن ثم $f(0^+) = A + f(\infty)$

$$f(t) = [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau} + f(\infty)$$

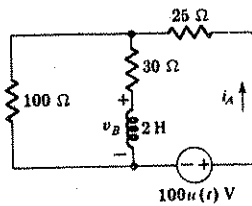
تمارين

5 - 6 للدائرة المبينة في الشكل 16 - 6 أ ، أوجد (أ) $i_A(0^-)$ و $v_B(0^-)$ (ب) و

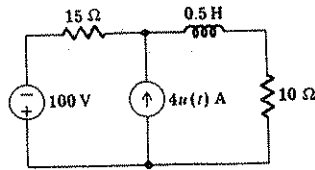
$i_A(\infty)$ و $v_B(\infty)$ (ج) $i_A(0.05)$ و $v_B(0.05)$ (د)

الجواب

0, 0; 2.08 A, 0 V; 0.8 A, 80 V; 1.713 A, 22.9 V



(a)



(b)

الشكل 16 - 6 أنظر التمرينين 5 - 6 و 6 - 6
 6 - 6 أوجد الطاقة المخزنة في المحث المبين في الشكل 16 - 6 ب عندما $t = 10\text{ms}$ -

(ب) 20 ms (ج) 5 s

الجواب J 0.64; 1.541; 4

وهذه الاستجابة مخططة في الشكل 6.18 (ب) . لاحظ بأننا نحتاج الى أربعة ارقام فقط لكتابة الشكل الدالي للاستجابة لهذه الدائرة المنفردة لعنصر خزن الطاقة و للتحضير للتخطيط . وأن القيمة الثابتة قبيل التزيرير (0.192 A) والقيمة الآنية بعد التزيرير تماماً (0.5 A) والاستجابة المرغمة الثابتة (0.1 A) وثابت الزمن (1.2 s) . ويمكن بعد ذلك رسم الدالة الأسية السالبة المناسبة بسهولة بعدئذ .

سنهني مناقشتنا باعطاء قائمة المناظرات الثنائية للجمل المعطاة في نهاية الفقرة 5 - 6 . ان أسلوب العمل الذي استخدمناه لايجاد استجابة دائرة RC بعد أن أدخل مصدر التيار المستمر فيها أو-أخرج منها في لحظة ما ولتكن $t = 0$. يلخص كما يلي :

نفترض أن الدائرة يمكن اختصارها الى دائرة محتوية على مقاومة مكافئة واحدة R_{eq} وعلى التوازي مع متسعة مكافئة واحدة C_{eq} ، وذلك حينما وضعت كل لصادر غير المعتمدة مساوية للصدر . وهي تمثل الاستجابة المطلوبة بـ $f(t)$.

بقتل كل المصادر غير المعتمدة ، بسط الدائرة لايجاد R_{eq}, C_{eq} وثابت الزمن $\tau = R_{eq}C_{eq}$

2 بالنظر الى C_{eq} كدائرة مفتوحة ، استخدم طرق تحليل التيار المستمر لايجاد $v_C(0^-)$ والتي هي فولتية المتسعة قبل الانقطاع مباشرة .

3 بالنظر الى C_{eq} كدائرة مفتوحة ، مرة اخرى استخدم طرق تحليل التيار المستمر لايجاد الاستجابة القسرية . وهذه هي القيمة النهائية التي تقترب منها $f(t)$ حينما $t \rightarrow \infty$ وتمثل بـ $f(\infty)$.

4 اكتب الاستجابة الكلية كمجموع للاستجابتين الطبيعية والقسرية $f(t) = Ae^{-t/\tau} + f(\infty)$

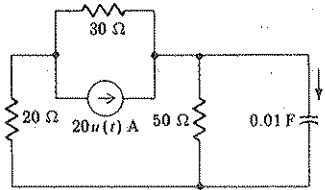
5 اوجد $f(0^+)$ باستخدام الظروف $v_C(0^+) = v_C(0^-)$ ويمكن الاستماضة عند الحاجة عن C_{eq} بمصدر فولتية $v_C(0^+)$ (دائرة قصر اذا كانت $v_C(0^+) = 0$) لهذه الحسابات . باستثناء فولتية المتسعة (و تيار المحث) فان كل فولتيات وتيارات الدائرة يمكن أن تتغير فجأة .

6 ومن ثم $f(0^+) = A + f(\infty)$ وكذلك $f(t) = [f(0^+) - f(\infty)]e^{-t/\tau} + f(\infty)$

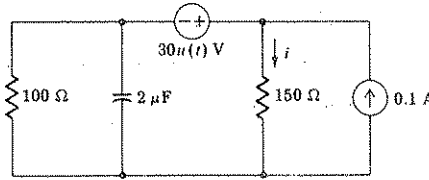
تمارين

6-7 للدائرة المبينة في الشكل 19-6 أ. أوجد (أ) $i(0^-)$ (ب) $i(0^+)$
(ج) $i(\infty)$ (د) $i(t)$ حينما $t > 0$

الجواب $0; 0; 12; 12e^{-t}$ A



(a)



(b)

الشكل 19-6 انظر التمرينين 6-7 و 6-8

6-8 للدائرة المبينة في الشكل 9-6 ب. أوجد i حينما t (أ) 0^- (ب) 0^+
(ج) ∞ (د) t حيث $t > 0$

الجواب $0.04; 0.16; 0.24; 0.16 + 0.08e^{-8333t}$ A

RC CIRCUITS

6.6 دوائر RC

يمكن الحصول على الاستجابة الكاملة لأي دائرة RC كمجموع للاستجابة الطبيعية والمرغمة. وسوف ندرس عدة استجابات في الدائرة المبينة في الشكل 6.17. ونفرض ان الزر كان على الوضعية 'a' لزمن طويلة. وبكلمة أخرى أن الاستجابة الطبيعية الناتجة من الحث الأصيل للدائرة قد تلاشى الى اتساع مهمل تاركة فقط الاستجابة المرغمة المسببة بواسطة مصدر الـ 120-V. وحيث أن المطلوب هو $v_c(t)$ لذا يجب ان نبدأ بايجاد هذه الاستجابة المرغمة عندما يكون الزر في

الوضعية a . وان الفولتيات خلال الدائرة كلها ثابتة ، لذا فليس هناك تيار خلال المتسعة . وبتقسيم الفولتية البسيط نجد الاستجابة المرغمة قبيل $t = 0$

$$v_{cr} = \frac{50}{50 + 10} 120 = 100 \quad t < 0$$

لذا فلدينا الظروف الابتدائية $v_c(0) = 100$ وبما ان فولتية المتسعة لا يمكن ان تتغير آنياً فان هذه الفولتية نافذة كذلك في $t = 0^+$ ، $t = 0^-$ الزر الآن انتقل الى الجهة b والاستجابة الكاملة هي

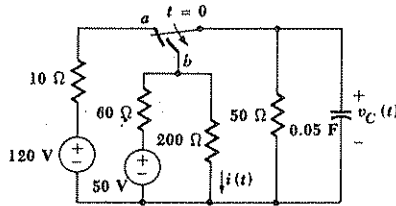
$$v_c = v_{cr} + v_{cn}$$

ان شكل الاستجابة الطبيعية يمكن الحصول عليه باستبدال مصدر الـ 50-V بدورة قصر وايجاد قيمة المقاومة المكافئة .

$$v_{cn} = Ae^{-t/R_{eq}C}$$

$$R_{eq} = \frac{1}{1/50 + 1/200 + 1/60} = 24$$

$$v_{cn} = Ae^{-t/1.2}$$



الشكل 6.17 دائرة RC التي يمكن ايجاد الاستجابتين الكاملتين v_c و i باضافة الاستجابة المرغمة والاستجابة الطبيعية .

ولأجل ايجاد قيمة الاستجابة المرغمة وموضع الزر في b ننتظر الى ان يتوقف تغيير الفولتيات والتيارات وبذلك نعامل المتسعة لدائرة مفتوحة وباستعمال مقسم الفولتية مرة أخرى

$$v_{cr} = \frac{(50)(200)/(50 + 200)}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} 50 = 20$$

لذا

$$v_c = 20 + Ae^{-t/1.2}$$

ومن الظروف الابتدائية التي حصلنا عليها سابقاً .

$$100 = 20 + A$$

$$v_c = 20 + 80e^{-t/1.2} \quad t > 0$$

او ان

وهذه الاستجابة مبينة في الشكل 6.18 (أ) والاستجابة الطبيعية يمكن تصورها مرة أخرى كمرحلة انتقال من الاستجابة الابتدائية الى النهائية .

وأخيراً لنحسب استجابة لاتبقي ثابتة خلال لحظة التزيرير مثل $i(t)$ في الشكل 6-17 . فعندما تكون التماسات على a ، من الواضح ان $i = 50/200 = 0.192 \text{ A}$. وعندما يكون الزر على الوضع b فالاستجابة المرغمة لهذا التيار تصبح .

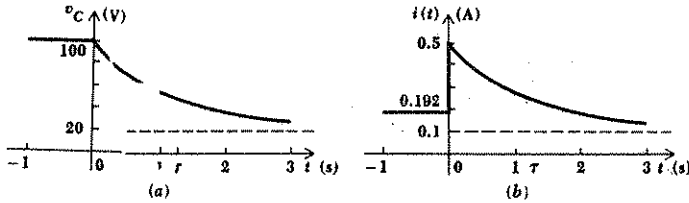
$$i_f = \frac{50}{60 + (50)(200)/(50 + 200)} \frac{50}{50 + 200} = 0.1$$

ان شكل الاستجابة الطبيعية هي نفسها التي وجدناها لفولتية المتسعة

$$i_n = Ae^{-t/\tau}$$

وبدمج الاستجابات المرغمة الطبيعية نحصل على :

$$i = 0.1 + Ae^{-t/\tau}$$



الشكل 6.18 الاستجابتين (أ) v_C (ب) i الموسومتين كدالتين للزمن لدائرة الشكل 6.17

ولايجاد قيمة A نحتاج الى ان نعرف $i(0^+)$. ويمكن ايجاد ذلك بتركيز انتباهنا الى عنصر خزن الطاقة هنا وهو المتسعة . نظراً لأن v_C يجب ان تبقى ثابتة على القيمة 100 V خلال فترة التزيرير فهي الظروف المسيطر لتكوين التيارات الأخرى والفولتيات في $t = 0^+$. وبما ان $v_C(0^+) = 100 \text{ V}$ وان المتسعة على التوازي مع المقاوم $200\text{-}\Omega$ نجد ان $i(0^+) = 0.5 \text{ A}$ وان $A = 0.4$ ولذا

$$i(t) = 0.192 \quad t < 0$$

$$i(t) = 0.1 + 0.4e^{-t/\tau} \quad t > 0$$

$$i(t) = 0.192 + (-0.092 + 0.4e^{-t/\tau})u(t) \quad \text{A}$$

أو

حيث ان التعبير الأخير صحيح لجميع قيم t

الاستجابة الكاملة لجميع قيم t يمكن أيضاً كتابتها بإيجاز باستعمال $u(-t)$ والتي هي وحدة واحدة في $t < 0$ وصفر في $t > 0$. لذا

$$i(t) = 0.192u(-t) + (0.1 + 0.4e^{-11.2})u(t) \quad A$$

مسائل

7 ارسم كلاً من أشكال الموجات التالية كدالة للزمن ثم احسب قيمها عندما

$$t = 2 \text{ s}$$

$$u(4-t) + u(4+t) \quad (\text{ب}) \quad u(t-4) + u(t+4) \quad (\text{أ})$$

$$u(t^2 - 4t + 3) \quad (\text{د}) \quad t^2u(-t) + (t-1)u(t+2) \quad (\text{ج})$$

□ 2 مصدر تيار ذو 5 A ومقاوم ذو 4Ω وزر مغلق مربوطة على التوازي. يفتح الزر عندما $t = 0$ ويغلق عندما $t = 0.2 \text{ s}$ ثم يفتح عندما $t = 0.4 \text{ s}$ ويستمر على هذا المنوال دورياً. مثل الفولتية عبر الزر كمجموع لانهائي لدوال الخطوة.

3 افرض أن الشبكة في كل صندوق في الشكل 3 - 6 تحتوي على مقاوم ذي 10Ω على التوازي مع مصدر تيار ذي 5-A سهمه متجه نحو الاعلى. افرض أن $V = 20 \text{ V}$ و $t_0 = 0.4 \text{ s}$ ثم ارسم التيار الداخل الى الشبكة في الموصل العلوي في كل حالة.

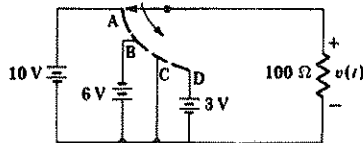
4 الفولتية $v = 50u(t+1) - 30u(t-2) \text{ V}$ سلطت على محث ذي

0.2-H. ارسم تيار المحث كدالة للزمن ثم احسب $i(-2)$ و $i(0)$ و $i(4)$

5 كان الزر المبين بالشكل 20 - 6 في الوضع A للفترة $t < 0$. عند $t = 0$ حرك

الى B ثم الى C عند $t = 5 \text{ s}$ ثم الى D عند $t = 7 \text{ s}$ ثم بقي على هذا الوضع. ارسم

$v(t)$ كدالة للزمن ثم مثلها كمجموع لدوال الخطوة.

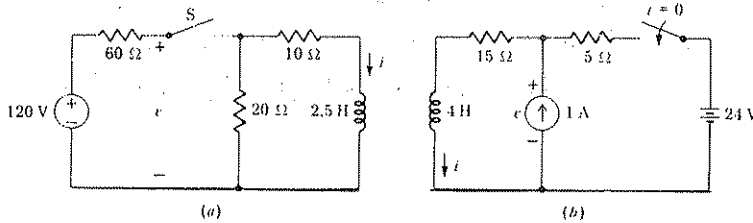


الشكل 20 - 6 انظر المسألة 5

6 الاثارة التي سلطت على دائرة RL الميئة في الشكل 9 - 6 ب يمكن تقسيمها الى جزئين كالآتي: $Vu(t) = V - Vu(-t)$. المركبة الاولى كانت كمصدر للتيار المستمر ذو فولتية V بينما الثانية انتجت استجابة خالية من المصدر بعد $t = 0$ بالأسلوب الذي وصف في الفصل الخامس. برهن على أن تراكم هاتين الاستجابتين يؤدي الى تيار كلي مشابه لـ (1) في الفقرة 3 - 6.

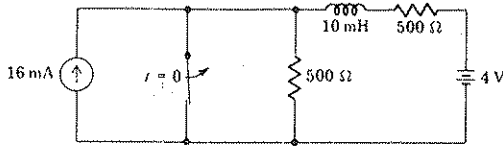
7 [3] مقوم ذو $250\text{-}\Omega$ ومصدر $12u(t) - 12u(t - 10^{-3})\text{ V}$ مربوطة على التوالي مع محث ذي 0.2-H . أوجد اتساع تيار المحث عندما t تساوي 2 ms و 0.5 8 مقوم ذو $250\text{-}\Omega$ ومصدر $12u(-t) + 12u(t - 10^{-3})\text{ V}$ على التوالي مع محث مقداره 0.2-H . أوجد اتساع تيار المحث عندما t تساوي 2 ms و 0.5 9 الحل الكامل لدائرة RL متوالية مسافة هي كالمعادلة 3 في الفقرة 4 - 6. استخدم هذه المعادلة لإيجاد $i(t)$ للفترة $t > 0$ إذا كانت $R = 250\ \Omega$ و $L = 0.2\text{ H}$ ومصدر الفولتية (أ) $100u(t)\text{ V}$ (ب) $100e^{-1000t}\text{ V}$ (ج) $100u(t) \cos 1250t\text{ V}$

10 الزر S في الشكل 21 - 6 (أ) يكون في العادة مفتوحاً ثم يغلق عند $t = 0$. أوجد الفولتية $v(t)$ للفترة $t > 0$ (ب) فتح الزر بعد ذلك عند $t = 0.1\text{ s}$. أوجد تيار المحث $i(t)$ ثم ارسمه للفترة $0 < t < 0.3\text{ s}$ 11 الزر الميئ في الشكل 21 - 6 ب كان مفتوحاً لفترة طويلة قبل أن يغلق عند $t = 0$. للفترة $-0.5 < t < 0.5\text{ s}$. أوجد وارسم (أ) $i(t)$ (ب) $v(t)$



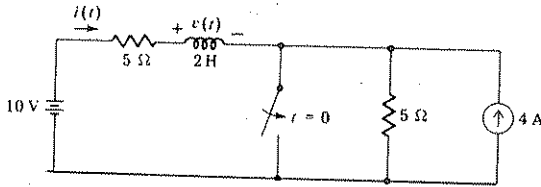
الشكل 21 - 6 (أ) انظر نسخة 10 (ب) انظر نسخة 11

12 حصل على تعبير عن شحنة مسحوبة من بطارية ذات 4 V في دائرة مبيئة في الشكل 22 - 6. ارسم شكل الموجة لفترة $-10 < t < 50\ \mu\text{s}$



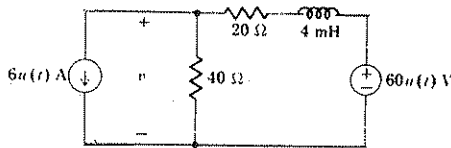
الشكل 22 - 6 انظر المسألة 12

13 الدائرة المبينة في الشكل 23 - 6 كانت في الوضع المين لفترة طويلة . حصل على تعبير عن $i(t)$ و $v(t)$ لكل الأزمنة ثم ارسم كلا منها للفترة الزمنية حول $t = 0$



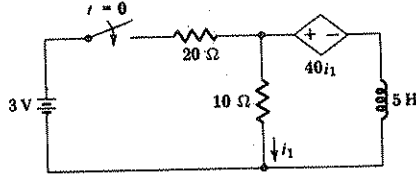
الشكل 23 - 6 انظر المسألة 13

14 أوجد v كدالة للزمن للدائرة المبينة في الشكل 24 - 6



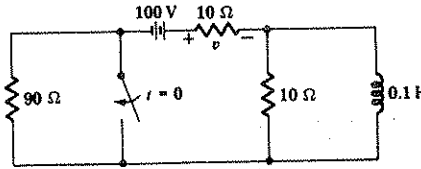
الشكل 24 - 6 انظر المسألة 14

15 عزّل المحث المين في الشكل 25 - 6 يتحمل 5000 V . كم من الزمن بعد غلق النزر يحدث التبيير الفوتونية ؟



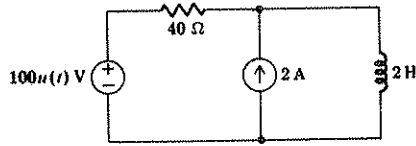
الشكل 25 - 6 انظر المسألة 15

16 الزر المبين في الشكل 26 - 6 كان مفتوحاً لعدة دقائق أغلق عند $t = 0$ ارسم $v(t)$ للفترة $0 < t < 3\tau$.



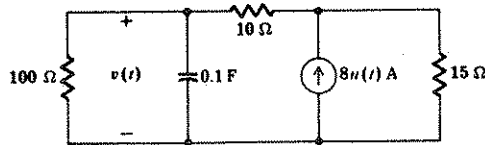
الشكل 26 - 6 انظر المسألة 16

17 □ أوجد القدرة الممتصة من المحث في الشكل 27 - 6 عندما $i = 0^-$ (أ) 0^+ (ب) 0.05 s (ج) ∞ (د)



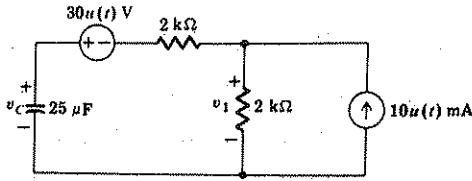
الشكل 27 - 6 انظر المسألة 17

18 ارسم $v(t)$ مع الزمن للدائرة المبينة في الشكل 28 - 6.



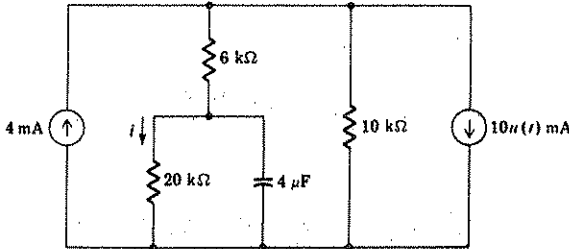
الشكل 28 - 6 انظر المسألة 18

19 □ أوجد $v_c(t)$ و $v_i(t)$ للدائرة المبينة في الشكل 29 - 6.



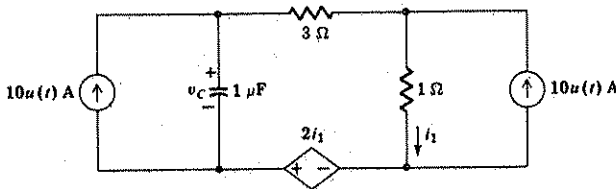
الشكل 29 - 6 انظر المسألة 19

20 احصل على تعبير $i(t)$ المشار اليه في الشبكة المبينة في الشكل 30 - 6 بحيث يصلح لكل قيم t .



الشكل 30 - 6 انظر المسألة 20

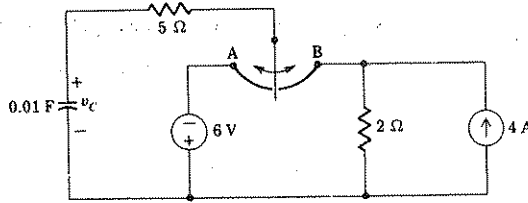
21 أوجد مكافئ ثفنن للشبكة المتوازية مع المتسعة في الشكل 31 - 6 . ثم أوجد $v_C(t)$ لقيم $t > 0$



الشكل 31 - 6 انظر المسائلين 21 و 22

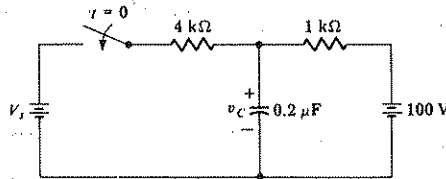
22 □ استعض عن مصدر التيار الى يمين الشكل 31 - 6 بمصدر فولتية $V 10u(t)$ بحيث تكون الإشارة الموجبة للأعلى . أوجد $v_C(t)$

- 23 الزر المبين في الشكل 32 - 6 كان في الوضع A لفترة طويلة من الزمن . عند $t = 0$ حرك الى B . أوجد $v_C(t)$ وارسمها مع الزمن .
- 24 الزر المبين في الشكل 32 - 6 كان في الوضع B لفترة طويلة من الزمن . عند $t = 0$ حرك الى A . أوجد $v_C(t)$ وارسمها مع الزمن .



الشكل 32 - 6 انظر المسألتين 23 و 24

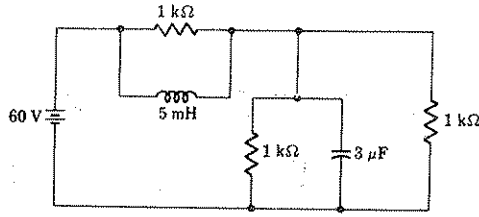
- 25 \square بعد أن كان الزر المبين في الشكل 33 - 6 مفتوحاً لعدة دقائق ، أغلق عند $t = 0$. أوجد $v_C(t)$ لكل قيم t اذا كانت $V_s =$ (أ) -200 V (ب) $+100\text{ V}$



الشكل 33 - 6 انظر المسألتين 25 و 26

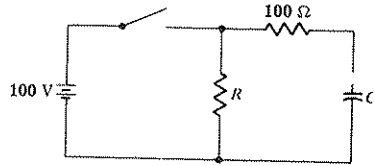
- 26 استعن من البطارية V_s والزر في الشكل 33 - 6 بمصدر فولتية الخطوة $V_s u(t)$ مع ابقاء مصدر القطبية نفسه . أوجد $v_C(t)$ لكل قيم t . اذا كان $V_s = -200\text{ V}$

- 27 بعد أن عمل المحث المبين في الشكل 34 - 6 لعدة ساعات بصورة مرضية . أصبح فجأة دائرة مفتوحة عند $t = 0$. ارسم منحنيًا يبين القدرة المجهزة من البطارية خلال الفترة $-\frac{1}{2} \leq t \leq 2\text{ ms}$



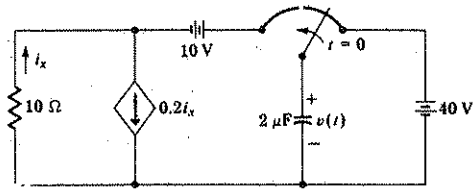
الشكل 34 - 6 انظر المسألة 27

□ 28 حدد قيم R و C في الدائرة المبينة في الشكل 35 - 6 بحيث تصل فولتية المتسعة 80 V بعد 10 ms من غلق الزر ولكنه لا ينخفض تحت 90 V حتى 0.5 s بعد فتح الزر، على فرض أنه مغلقاً لفترة طويلة جداً من الزمن.



الشكل 35 - 6 انظر المسألتي 28 و 29

29 افرض أن $R = 400\ \Omega$ و $C = 2.5\ \mu\text{F}$ في دائرة الشكل 35 - 6 . كان الزر مغلقاً لعدة دقائق ثم فتح عند $t = 0$. ارسم منحنى القدرة المبدا في المقاوم $400\text{-}\Omega$ في الفترة الزمنية حول $t = 0$.
 □ 30 أوجد $v(t)$ للفترة $t > 0$ في دائرة الشكل 36 - 6 .



الشكل 36 - 6 انظر المسألة 30

الفصل السابع

دائرة الـ RLC

THE RLC CIRCUIT

1 - 7 مقدمة INTRODUCTION

ربما يخيل للبعض أن الدراسة التفصيلية التي أكملناها توأ لدوائر RL و RC سوف تجعل تحليل دائرة الـ RLC أمراً بسيطاً ، ولكن لسوء الحظ مازال التحليل صعباً وإن ظهور المحاثـة والسعة في نفس الدائرة ينتج منظومة من الدرجة الثانية على الأقل أي أنها التي تميز بمعادلة تفاضلية خطية تضم تفاضلاً من الدرجة الثانية أو بمعادلتين تفاضليتين أنيتين خطيتين من الدرجة الأولى وعلى الرغم من أننا تعرفنا إلى دراسة واحدة من الدرجة الثانية في الفقرة الاخيرة من الفصل 6 ولكن جل اهتمامنا كان موجهاً نحو منظومة الدرجة الأولى والتي وصفت بواسطة المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الأولى . ومن الحالة المفردة التي اخذناها سوف نتوقع بأن زيادة مركبة المعادلة بدرجة واحدة سوف تجعل من الضروري إيجاد قيمتين ثابتتين اعتباطيتين . وعلاوة على ذلك سيكون من الضروري احتساب الظروف الابتدائية للمشتقات أيضاً . وأخيراً سوف نرى بأن ظهور المحاثـة والسعة في نفس الدائرة سيجرنا إلى استجابة تأخذ أشكال دوال مختلفة للدوائر التي لها نفس الهيئة إذا كانت قيم عناصرها مختلفة . وبهذه المعلومات المشجعة دعنا نراجع بسرعة الطرق والنتائج التي وجدناها مفيدة لمنظومات الدرجة الأولى لأجل توسيع هذه المعلومات بمهارة إلى منظومة الدرجة الثانية .

نبدأ أولاً بمنظومة الدرجة الأولى الخالية من المصدر . سُميت الاستجابة بالاستجابة الطبيعية لأنها تتجدد كلياً من قبل انواع العناصر غير الفعالة في الشبكة وبالأسلوب الذي ترابطت مع بعضها وبالظروف الابتدائية التي تنتج عن الطاقة

المخزونة. وإن الاستجابة الطبيعية كانت دالة أسية تنازلية بالنسبة للزمن وهذه الاستجابة تصل قيمة ثابتة حينما يصل الزمن قيمة مالانهاية. وتكون قيمة الثابت عادة صفرأ ماعدا تلك الدوائر التي يسمح فيها للمحثات المتوازية أو المتسعات المتوالية اظهار تيارات أو فولتيات محجوزة.

وان اضافة المصادر الى منظومة الدرجة الاولى ينتج استجابة من جزئين، الاستجابة الطبيعية المعروفة وحداً اضافياً أسميناه الاستجابة المرغمة. وهذا الحد الأخير نسب بوقتها للدالة المرغمة لأن شكلها كان يشير الى دلالتها على الدالة المرغمة نفسها مضافة الى التكامل والمشتقة الاولى للدالة المرغمة (1) وبما أننا عاملنا دالة مرغمة ثابتة فقط لذا لم نحتاج الى تكريس انتباهنا الى الشكل المناسب للاستجابة المرغمة. وهذه المسألة سوف لن تثار الى حين دراسة الدالات المرغمة الجيبية في الفصل القادم. ولقد اضعنا للاستجابة المرغمة المعروفة التعبير الصحيح للاستجابة الطبيعية كاملاً عدا الثابت المضروب. تحسب قيمة هذا الثابت لجعل الاستجابة الكلية تلائم الظروف الابتدائية الموصوفة.

نرجع الآن الى الدوائر التي توصف بواسطة المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية. وواجبنا الأول هو حساب الاستجابة الطبيعية ويتم ذلك بشكل ملائم بدراسة الدائرة خالية من المصدر أولاً. ثم بعد ذلك ندخل مصادر التيار المستمر والأزرار أو مصادر الخطوة في الدائرة ثم تمثيل الاستجابة الكلية مرة أخرى على أنها مجموع الاستجابة الطبيعية والاستجابة المرغمة (تكون ثابتة عادة). والمنظومة من الدرجة الثانية التي نحن بصدد تحليلها هي أساساً تشبه أي منظومة من الدرجة الثانية ذات ثابت مجمع وستكون نتائجهما ذات استعمال مباشر للمهندس الميكانيكي الذي يهتم بازاحة الكتلة التي تلاقي تضاؤلاً لزجاً والمسودة بناض أو الذي يهتم بتصرف البندول البسيط او البندول الالتوائي. ولا زالت هذه النتائج ممكنة التطبيق ولو بصورة غير مباشرة الى اي كمية متغيرة القيمة موزعة لمنظومة الدرجة الثانية كما في خط النقل المقصور الدائرة واللوحة الغاطسة والمزمار في دراسة بيئة القوارض

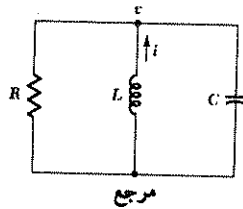
(1) ان المشتقات من الدرجات الاعلى سوف تظهر في منظومات من الدرجات الأعلى وعلى وجه التحديد يجب أن نقول بأن جميع المشتقات تظهر بالرغم من أنها قد تكون باتساع مقداره صفر. والدالات المرغمة التي لاتملك عدداً محدوداً من المشتقات هي شواذ وسوف لانغيرها أهمية. وحالة الدالة المفردة هي شذوذ من الشذوذ.

2 - 7 الدائرة المتوازية الخالية من المصدر THE SOURCE-FREE PARALLEL CIRCUIT

إن هدفنا الأساس هو حساب الاستجابة الطبيعية لدائرة بسيطة تتكون من ربط R و L و C على التوازي وسيتم الوصول الى هذا الهدف بعد اكمال هذه الفقرة والفقرات الثلاث التي تلي . إن هذا الدمج الخاص للعناصر المثالية هو نموذج ملائم لأجزاء من شبكات الاتصالات . وهي تمثل على سبيل المثال جزءاً هاماً لبعض المضخمات الألكترونية الموجودة في كل جهاز استقبال راديوي وتساعد المضخمات لاتنتاج تضخيم فولتية عالٍ ضمن حزمة ضيقة لترددات إشارة مع تضخيم معدوم تقريباً خارج هذه الحزمة وإن اختيار تردد من هذا النوع يساعدنا للاصغاء الى إرسال محطة بينما يرفض ارسال أي محطة أخرى . والتطبيقات الأخرى تستعمل دوائر RLC المتوازية في تطبيقات أخرى منها المرشحات المتعددة الامرار $\text{multiplexing filters}$ ومرشحات كابت التوافقيات $\text{harmonic suppression filters}$ وغيرها .

ولكن حتى الشرح البسيط لهذه الاسس يتطلب منا تفهم مصطلحات متعددة كالرنين resonance والاستجابة الترددية $\text{frequency response}$ والممانعة impedance والتي لم نشرحها بعد . ومن الوافي القول بأن تفهم التصرف الطبيعي لدائرة RLC المتوازية اساساً مهمة لدراسة شبكات الاتصالات وتصميم المرشحات مستقبلاً .

وعند ربط محث حقيقي مع متسعة على التوازي مع احتواء المحث على مقاومة داخلية فإن الشبكة الناتجة يمكن ان تبين على ان لها دائرة مكافئة كما هو مبين في الشكل 7.1 . وان ضياعات الطاقة في المحث أدخلت في الخسار بظهور المقاوم المثالي الذي مقاومته R ويعتمد على (ولكن لا يساوي) المقاومة الأومية للمحث .



شكل 1 - 7 الدائرة المتوازية الخالية من المصدر

وفي التحليل الآتي سوف نفترض بأن الطاقة ربما تخزن مبدئياً في كل من المحث والمتسعة لذا تظهر قيم محددة لمتساوي صفرأ لكل من تيار المحث وفولتية المتسعة . وبالرجوع الى الدائرة التي في الشكل 1 - 7 ، ربما نكتب معادلة العقدة المفردة .

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt - i(t_0) + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1)$$

لاحظ بأن الاشارة السالبة هي نتيجة للاتجاه المفترض لـ i . ويجب أن نحل (1) نسبة الى الظروف الابتدائية

$$i(0^+) = I_0 \quad (2)$$

$$v(0^+) = V_0 \quad (3)$$

وحيثما نفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة للزمن فالنتيجة هي المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الدرجة الثانية .

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L} v = 0 \quad (4)$$

ويكون الحل هو الاستجابة الطبيعية المطلوبة $v(t)$

وهناك طرق مفيدة لحل (4) . وسوف نترك هذه الطرق لدرس المعادلات التفاضلية ولدى اختيار الطريقة الأسرع والأبسط للاستعمال الآن ، سوف نفترض الحل معتمدين على البداهة والخبرة المناسبة لاختيار واحد من عدد من الاشكال الممكنة والتي تناسبنا . وان خبرتنا مع معادلات الدرجة الأولى تؤدي بنا الى اقتراح الشكل الاساس مرة أخرى . والأكثر من ذلك ان هيئة (4) توضح بأن ربما ذلك سيشتغل لاننا يجب أن نجعل ثلاثة حدود وهي المشتقة الثانية والأولى والدالة نفسها . وكل واحد مضروبة بعامل ثابت . وتحقق مجموعاً يساوي صفرأ وهي دالة لتفاضلاتها نفس شكل الدالة ، لذا فمن الواضح أن هذا هو الاختيار المقبول . مع كل الأمل للنجاح نفترض عندها أن

$$v = Ae^{at} \quad (5)$$

ولغرض ان نضمن الحالة العامة ما يمكن نسمح لـ A و s أن تكونا أعداداً مركبة لذا كان ذلك ضرورياً (2). وبتعويض (5) في (4) نحصل على .

$$CA s^2 e^{st} + \frac{1}{R} A s e^{st} + \frac{1}{L} A e^{st} = 0$$

$$A e^{st} \left(C s^2 + \frac{1}{R} s + \frac{1}{L} \right) = 0$$

أو أن

ولأجل أن نتحقق هذه المعادلة لكل الأوقات ، فإن أحد العوامل الثلاثة يجب أن يكون صفراً . وإذا وضع أحد العاملين الأولين صفراً ، فإن $v(t) = 0$ وهذا حل بديهي لمعادلة التفاضل والذي لا يحقق الظروف الابتدائية المعطاة . لذا فإننا نساوي العامل الباقي الى الصفر .

$$C s^2 + \frac{s}{R} + \frac{1}{L} = 0 \quad (6)$$

تدعى هذه المعادلة عادةً بالمعادلة المساعدة *auxiliary equation* أو المعادلة المميزة *characteristic equation* . وإذا كان بالإمكان تحقيقها فإن حلنا المقترض هو صحيح . وبما أن (6) هي معادلة تربيعية فهناك حلان يعرفان بـ s_1 و s_2

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (7)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (8)$$

وكذلك

وإذا كانت أي من القيمتين تستعملان لـ s في الحل المقترض ، فإن ذلك الحل يحقق المعادلة التفاضلية المعطاة . لذا يصبح هذا الحل نافذاً للمعادلة التفاضلية . دعنا نفترض بأننا استبدلنا s بـ s_1 في (5) - حاصلين على

$$v_1 = A_1 e^{s_1 t}$$

$$v_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

وبصورة مشابهة

فالأول يحقق المعادلة التفاضلية

$$C \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{L} v_1 = 0$$

(2) لاداعي للارتباك . فإن الأعداد المركبة ستظهر في هذا الفصل فقط بحالة مقدمة في الاشتقاقات واستعمالها كأداة سيكون ضرورياً في الفصل التاسع .

والثاني يحقق

$$C \frac{d^2 v_2}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{L} v_2 = 0$$

بجمع هاتين المعادلتين التفاضليتين ودمج الحدود المتشابهة .

$$C \frac{d^2(v_1 + v_2)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d(v_1 + v_2)}{dt} + \frac{1}{L} (v_1 + v_2) = 0$$

فالخاصية الخطية نجحت بان مجموع الحلين هو حل ايضاً . لذا سوف يكون شكل الاستجابة الطبيعية كما يأتي :

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

حيث أن s_1 و s_2 معطاة بواسطة (7) و (8) و A_1 و A_2 هما ثابتان يختاران لكي يحققا الظروف الابتدائية المعينة .

إن شكل الاستجابة الطبيعية كما مرّ أعلاه يصعب توقعه لأن الاستجابة بشكلها الحالي لاتلقي ضوءاً على طبيعة المنحنى الذي ربما نحصل عليه اذا رسم منحنى بدلالة $v(t)$ الزمن . كما ان اتساع كل من A_1 و A_2 يكون حسابه مهماً لحساب طبيعة منحنى الاستجابة والأكثر من ذلك فالثابتين s_1 و s_2 يمكن إن يكونا عدنان حقيقيان أو اعداداً مركبة مرافقة وذلك يعتمد على قيم R و L و C في الشبكة المعطاة . وهاتان الحالتان ستنتجان أساساً شكلين مختلفين للاستجابة . لذا سيكون من المفيد إجراء بعض التبسيط عند التعويض في (أ) لأجل توضيح الفكرة .

بما أن الأسين $s_1 t$ و $s_2 t$ يجب ان يكونا بدون أبعاد لذا فان s_1 و s_2 يجب أن تكون وحدتهما كمية بدون أبعاد لكل ثانية . ومن (7) و (8) من الواضح بأن وحدات $1/2RC$ و $1/\sqrt{LC}$ يجب أن تكون s^{-1} . وإن وحدات من هذا النوع تدعى بالترددات *frequencies* وعلى الرغم من أننا سنوسع هذه الفكرة بتفصيل أكثر في الفصل 13 فاننا سوف نقدم عدة مصطلحات الان . دعنا نمثل $1/\sqrt{LC}$ بـ ω_0 (أوميكا)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

ونحتفظ بالمصطلح تردد رنيني *resonant frequency* له ومن جانب آخر سوف نسمي $1/2RC$ التردد النبري *neper frequency* أو معامل التلاشي الاسي *exponential damping coefficient* ونمثلها بالرمز α (الفا)

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (11)$$

(3) وبدقة أكثر من ذلك ، التردد النصف قطري للرنين. *resonant radian frequency*.

وهذا التعبير للوصف الاخير يستعمل لأن α هي مقياس للسرعة التي تتضاءل بها الاستجابة الطبيعية أو تخمد الى القيمة النهائية المستقرة (عادة صفر) . وأخيراً فان s و s_1 و s_2 التي هي كميات تشكل أساساً لجزء من دراستنا الآتية سوف تدعى بالترددات المركبة *complex frequencies* .
 دعنا نجمع هذه النتائج ، فان الاستجابة الطبيعية لدائرة *RLC* المتوازية هي .

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (9)$$

حيث

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (12)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (11)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (10)$$

وان A_1 و A_2 يجب أن يحسبان بتطبيق الظروف الابتدائية المعطاة .
 والآن من الواضح بأن طبيعة الاستجابة تعتمد على القيم النسبية لـ α و ω_0 والمظهر المتطرف لتعايير s_1 و s_2 ستكون حقيقية عندما تكون α أكبر من ω_0 وخيالية عندما تكون α أقل من ω_0 وتساوي صفرأ عندما تكون α و ω_0 متساويتين . وسوف تؤخذ كل من هذه الحالات بنظر الاعتبار بشكل انفرادي في الفترات الثلاث الآتية

تمرين

1 - 7 دائرة تحتوي على *RLC* على التوازي ، متصفة بما يأتي ، $s_1 = -1000 \text{ s}^{-1}$ ، $s_2 = -1500 \text{ s}^{-1}$ ، $R = 2000 \Omega$ ، أوجد (أ) α (ب) C (ج) L الجواب 1250 s^{-1} ; $0.2 \mu\text{F}$; 3.33 H

3 - 7 دائرة المتوازية لفوق المضاعلة

THE OVERDAMPED PARALLEL RLC CIRCUIT

إذا كانت $LC > 4R^2C^2$ فمن الواضح أن α سوف تكون أكبر من ω_0 وكذلك ω_0 سوف تكون أكبر من ω_0 وفي هذه الحالة يكون الجذر التربيعي الذي يهنا حقيقياً وأن يكون كل من s_1 و s_2 حقيقيين أيضاً وأكثر من ذلك فإن المتباينات الآتية .

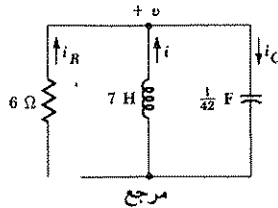
$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$$

$$(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}) < 0$$

وربما يمكن تطبيقها على (12) و (13) لكي يصبح كل من s_1 و s_2 أعداداً حقيقية سالبة . لذا فإن الاستجابة $v(t)$ يمكن التعبير عنها بالمجموع (الجبري) لحددين أسيين تناقصيين كل منهما يقترب من الصفر كلما ازدادت قيمة الزمن زيادة كبيرة . وبالحقيقة بما أن القيمة المطلقة لـ s_2 أكبر من قيمة s_1 كما يحوي الحد الحاوي على s_2 الدالة الأكثر تناقصاً . ولكميات كبيرة للزمن ربما نكتب التعبير المحدد

$$v(t) \rightarrow A_1 e^{s_1 t} \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

ولأجل توضيح طريقة اختيار الثوابت الاعتباطية A_1 و A_2 تجدر الإشارة الى أن ذلك يتم وفق الظروف الابتدائية . ولأجل تزويد مثال نموذجي لمنحنى الاستجابة دعنا نعد الى مثال عددي . سوف نختار دائرة RLC المتوازية والتي فيها $L = 7 \text{ H}$ و $R = 6 \Omega$.



شكل 2 - 7 دائرة متوازية لـ RLC . استعملت كمثال عددي لدائرة فوق المضاعلة .

لسهولة الحساب فقد اختيرت قيمة كبيرة جداً وغير عملية لـ $C = 1/42 \text{ F}$. تحدد الطاقة الابتدائية المخزونة باختيار الفولتية الابتدائية عبر الدائرة $v(0) = 0$ و تيار المحث الابتدائي $i(0) = 10 \text{ A}$ كما مبين في الشكل (2 - 7) . وبسهولة يمكننا حساب العديد من المتغيرات

$$\alpha = 3.5 \quad \omega_0 = \sqrt{6}$$

$$s_1 = -1 \quad s_2 = -6 \quad (\text{كلها ذات وحدة } s^{-1})$$

يمكننا كتابة الشكل العام للاستجابة الطبيعية فوراً ،

$$v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} \quad (14)$$

بقي علينا اعطاء قيمتين للثابتين A_1 و A_2 . فاذا علمنا الاستجابة لقيمتين مختلفتين من الزمن فان هذين الزوجين من القيم يمكن تعويضها في (14) لايجاد A_1 و A_2 بسهولة . على أي حال نحن نعلم فقط القيمة الابتدائية لـ $v(t)$.

$$v(0) = 0$$

لذا فإن

$$0 = A_1 + A_2 \quad (15)$$

والمعادلة الثانية التي تربط A_1 و A_2 يجب الحصول عليها بأخذ تفاضل $v(t)$ بالنسبة الى الزمن في (14) وحساب القيمة الابتدائية لهذا التفاضل خلال استعمال الظرف الابتدائي المتبقي $i(0) = 10$ من ثم مساواة النتائج بأخذ تفاضل جهتي

$$\frac{dv}{dt} = -A_1 e^{-t} - 6A_2 e^{-6t} \quad (14)$$

وباعطاء قيمة التفاضل في $t = 0$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -A_1 - 6A_2$$

نأخذ بعدها بنظر الاعتبار كيف ان القيمة الابتدائية للتفاضل يمكن ايجادها عددياً . وهذه الخطوة الآتية دائماً تقترح من قبل التفاضل نفسه حيث أن dv/dt تقترح تيار المتسعة لان

$$i_c = C \frac{dv}{dt} \quad \text{لذا}$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_c(0)}{C} = \frac{i(0) + i_R(0)}{C} = \frac{i(0)}{C}$$

$$= 420 \text{ V/s}$$

وبما أن الفولتية عبر المقاوم والتي تساوي صفرأ تتطلب أن يكون التيار خلالها صفرأ أيضاً ، فإن لدينا المعادلة الآتية

$$420 = -A_1 - 6A_2 \quad (16)$$

والحل الآتي لـ (15) و (16) تزودنا بالاتساعين $A_1 = 84$ و $A_2 = -84$ لذا فإن الحل العددي الاخير للاستجابة الطبيعية هو .

$$v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t}) \quad (17)$$

ان تقييم A_1 و A_2 لظروف اخرى من الطاقة الابتدائية المخزونة بضمنها الخزن الاولي في المتسعة معتبرة في التمرين الاول الذي يلي هذه الفقرة .

دعنا نر أي المعلومات يمكننا استنتاجها من (17) دونما حسابات معقدة . نلاحظ بأن $v(t)$ هي صفر في $t = 0$ والذي يؤكد فرضيتنا الاصلية . لنفرض أن أس الحد الاول له ثابت زمن ثانية واحدة والاس الاخر له ثابت زمن $1/6$ من الثانية . وكل منهما يبدأ باتساع يساوي واحد ، ولكن الثاني يتناقص اسرع من ذلك وتكون $v(t)$ دائماً موجبة . واذا ماازداد الزمن زيادة كبيرة مقترباً من اللانهاية فان كل حد يصل الصفر وتضمحل الاستجابة والاستجابة نفسها كما يفترض أن تكون .

لذا فان منحنى الاستجابة يمر بالصفر في $t = 0$ وبالصفر في $t = \infty$ ويكون موجباً دائماً وبما أنه لايساوي صفرأ في كل نقطة من نقاطه لذا فانه يجب ان يكون له قيمة قصوى واحدة على الاقل . ويمكن حساب هذه النقطة بأخذ تفاضل الاستجابة

$$\frac{dv}{dt} = 84(-e^{-t} + 6e^{-6t})$$

ويجعل التفاضل مساوياً للصفر لغرض حساب الزمن t_m الذي تصبح فيه الفولتية في قيمتها القصوى

$$0 = -e^{-t_m} + 6e^{-6t_m}$$

وبتيسيرها نحصل على

$$e^{5t_m} = 6$$

ومن ثم

$$t_m = 0.358 \text{ s}$$

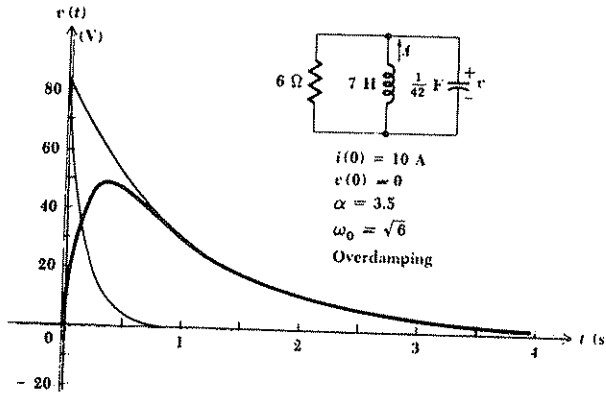
$$v(t_m) = 48.9 \text{ V}$$

وأن

ويمكن رسم مخطط بسيط للاستجابة برسم مخطط الحدين الأسيين $84e^{-t}$ و $84e^{-6t}$ ثم بعدها نأخذ الفرق . وان الفائدة المتوخاة من هذا الأسلوب موضحة بمنحنيات الشكل 7.3 . فالأسيان مبيانان بشكل خفيف والفرق بينهما هو

الاستجابة الكلية مرسومة بخط سميك . وهذه المنحنيات تحقق أيضاً تنبؤنا السابق على أن التصرف الدالي لـ $v(t)$ عند قيم كبيرة جداً لـ t هو $84e^{-t}$ حيث يحوي الحد الأسّي على الكمية الأصغر لـ s_1 و s_2 .

والسؤال الآخر الذي يتبادر للذهن غالباً لدى دراسة استجابة الشبكة يتعلق بطول الزمن الذي يستغرق الجزء الزائل من الاستجابة لكي يختفي (التضاؤل) . فغالباً ما يكون من المرغوب فيه أن تقترب هذه الاستجابة الزائلة من الصفر بأسرع ما يمكن ، أي تقليل زمن الاستقرار t_s . وبالطبع فإن t_s نظرياً هي لانهاية لان $v(t)$ لا تستقر الى الصفر أبداً في زمن محدد . على أية حال فإن الاستجابة يمكن اهمالها وتظهر بعد وصول $v(t)$ قيمة أقل من واحد بالمائة من قيمتها القصوى . وأن الوقت الذي يلزم لكي يحدث هذا نعرفه بزمن الاستقرار . وبما ان $|v_m|$ هي $v_m = 48.9 \text{ V}$ لمثالنا فان زمن الاستقرار هو الزمن اللازم لكي تهبط الاستجابة للقيمة 0.489 V . وبتعويض هذه القيمة لـ $v(t)$ في (17) واهمال الحد الأسّي الثاني (والمعروف بأنه مهمل هنا) فان زمن الاستقرار وجد على انه 5.15 s .



شكل 3 - 7 الاستجابة $v(t) = 84(e^{-t} - e^{-6t})$ للشبكة المبينة في الشكل 7 - 2 .

وبالمقارنة مع الاستجابات التي ستحصل عليها في الفقرتين الاليتين فان هذا الزمن بالمقارنة هو زمن كبير ويأخذ التضاؤل بالزيادة فتدعى الاستجابة بفوق المضائة (التلاشي) *overdamped* . وسوف نسمي هذه الحالة التي فيها α أكبر من ω_0 كحالة فوق المضائة . والان دعنا نر ماذا يحدث اذا تناقصت α .

تمرينان

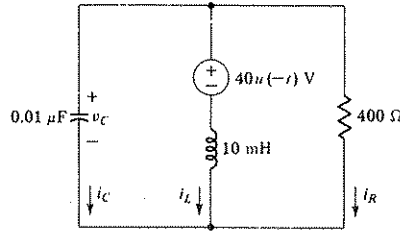
7-2 إذا كانت الفولتية الابتدائية عبر دائرة RLC متوازية لاتساوي صفرًا فإن القيمة المحصلة لتيار المقاومة الابتدائي يجب أن تؤخذ في حساب القيمة الابتدائية dv/dt . للمثال الرقمي المفترض في الفقرة السابقة، افرض أن $v(0) = 15\text{ V}$ وأن $i(0) = -6\text{ A}$. أوجد (أ) A_1 ؛ (ب) A_2 ؛ (ج) v_{min} .

الجواب 68.4 V ; -29.6 ; -53.4

3-7 مصدر فولتية الخطوة المبين في الشكل 4-7، أغلق عند $t = 0$. أوجد (أ)

$v_C(0^+)$ (ب) $i_R(0^+)$ (ج) $i_L(0^+)$ (د) $i_C(0^+)$ (هـ) $v_C(10\ \mu\text{s})$

الجواب 0.1 A ; 0 A ; -0.1 A ; 40 V ; 30.5 V



الشكل 4-7 أنظر التمرين 3-7

4-7 المضاعلة الحرجة (التلاشي الحرج) CRITICAL DAMPING

تختص حالة فوق المضاعلة بما يأتي:

$$\alpha > \omega_0$$

$$LC > 4R^2C^2$$

أو

والتي تؤدي إلى قيم حقيقية سالبة لـ s_1 و s_2 والاستجابة يعبر عنها بالمجموع الجبري لكميتين ذواتي أسين سالبين. وقد مررنا بنموذج لشكل الاستجابة $v(t)$ في المثال العددي في الفقرة الأخيرة والتمارين التي أعقبتها.

والآن دعنا نعتبر قيم العناصر إلى أن تتساوى α و ω_0 . وأن هذه هي حالة خاصة جداً تدعى بالمضاعلة الحرجة. لذا فإن المضاعلة الحرجة يمكن تحقيقها عندما

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dots \\ LC = 4R^2C^2 \\ L = 4R^2C \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{أو} \\ \text{أو} \end{array}$$

ومن الواضح أننا ربما نحصل على المضاءلة بتغيير قيم أي من العناصر الثلاثة في المثال العددي المشروح أعلاه . نختار R ونزيد قيمتها الى أن نحصل على المضاءلة الحرجة ولذا نترك ω_0 غير متغيرة . وان قيمة R اللازمة هي $7\sqrt{6}/2 \Omega$ أو فاذا بقيت

$$7H=L \text{ وبقيت } C = F/42 \text{ ، نجد ان : } \alpha = \omega_0 = \sqrt{6}$$

$$s_1 = s_2 = -\sqrt{6}$$

وبسرعة نكتب الاستجابة كمجموع كمييتين أسيتين

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_1 e^{-\sqrt{6}t} + A_2 t e^{-\sqrt{6}t}$$

والذي يمكن كتابته كالآتي

$$v(t) \stackrel{?}{=} A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

ربما قد ارتكبنا خطأ ما ، حيث لدينا الاستجابة تحوي ثابتاً واحداً فقط بينما هناك طرفان ابتدائيان هما ، $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ واللذان يجب أن يتحققا بهذا الثابت المنفرد وذلك بصورة عامة غير ممكن فمثلا في حالتنا على سبيل المثال يتطلب الطرف الابتدائي الاول أن تكون قيمة $s_1 = 0 = A_2$ ولذا فمن غير الممكن انها تحقق الطرف الابتدائي الثاني بنفس الوقت .

مما سبق يتبين وجود تباين في الاسس الرياضية والاسس الكهربائية التي اعتمدها لذا فان لم نكن قد أخطأنا أثناء الحل نكن قد بدأنا بفرضية غير صحيحة علماً بأننا قد اعتمدنا على فرضية واحدة فقط ، فقد ظننا اصلاً بان المعادلة التفاضلية يمكن حلها بفرضية الحل الأسّي وقد عاد هذا بالخطأ لهذه الحالة الخاصة المفردة للمضاءلة الحرجة .

حينما $\alpha = \omega_0$ تصبح المعادلة التفاضلية (4) كالآتي :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv}{dt} + \alpha^2 v = 0$$

وان حل هذه المعادلة ليس عملية صعبة ، الا اننا سنتجنب شرح طريقة حلها هنا نظراً لأن هذه المعادلة هي معادلة قياسية يمكن الرجوع اليها في كتب المعادلات التفاضلية . ويكون حلها كالآتي :

$$v = e^{-\alpha(A_1 t + A_2)} \quad (18)$$

ويجب ملاحظة بان الحل يمكن أن نعبر عنه بمجموع حدين حيث أن أحد الحدود هو الكمية ذات الاس السالب المعروف ولكن الثاني هو الاس السالب مضروباً

بـ t وسوف نلاحظ بأن الحل يحوى الثابتين الاعبائيين المتوقعين .
دعنا نكمل مثالنا العددي . فبعد تعويض القيم المعروفة لـ α في (18)

$$v = A_1 t e^{-\sqrt{6}t} + A_2 e^{-\sqrt{6}t}$$

ونجد قيم A_1 و A_2 بتطبيق الظروف الابتدائية أولاً على $v(t)$ نفسها $v(0) = 0$ لذا فإن $A_2 = 0$. هذه النتيجة البسيطة حدثت بسبب اختيار القيمة الابتدائية للاستجابة على انها صفراً . والحالة الاكثر شمولاً والتي تؤدي الى معادلة لحساب A_2 ربما تناقش في احد التمارين . والظرف الابتدائي الثاني يجب أن يطبق على تفاضل dv/dt بالضبط كما في حالة فوق المضاءة . بأخذ التفاضل نتذكر بأن $A_2 = 0$.

$$\frac{dv}{dt} = A_1 t (-\sqrt{6}) e^{-\sqrt{6}t} + A_1 e^{-\sqrt{6}t}$$

وبإيجاد القيمة حينما $t = 0$:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = A_1$$

وبالتعبير عن التفاضل بدلالة تيار المتسعة الابتدائي .

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{i_R(0)}{C} + \frac{i(0)}{C}$$

لذا فان

$$A_1 = 420$$

والاستجابة تكون

$$v(t) = 420 t e^{-2.45t} \quad (19)$$

وقبل رسم مخطط الاستجابة بالتفصيل ، دعنا نحاول مرة اخرى توقع شكلها بالناقشة المنطقية فالقيمة الابتدائية المخصصة هي صفر و (19) تؤكد ذلك . غير أن شكل الاستجابة عندما t تصبح كبيرة جداً بشكل لانهاضي غير واضح بسهولة من المعادلة لان $t e^{-2.45t}$ غير معينة الشكل . وعلى اية حال فهذه المشكلة الصغيرة يمكن التغلب عليها باستعمال قاعدة ليوبتال 'L'Hôpital' لذا

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2.45t}} = 420 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2.45 e^{2.45t}} = 0$$

ومرة أخرى فان لدينا استجابة تبدأ وتنتهي بالصفـر ولها قيم موجبة في كل الأزمنة . وتحدث القيمة القصوى v_m مرة أخرى في الزمن t_m . ومثالنا .

$$t_m = 0.408 \text{ s} \quad \text{and} \quad v_m = 63.1 \text{ V}$$

وهذه القيمة القصوى هي أكبر من التي حصلنا عليها في حالة فوق المضاءة وهي نتيجة الضياعات الاقل التي تحدث في المقاومات الاكبر . وأن زمن الاستجابة القصوى متأخر أقل مما كان عليه عند فوق المضاءة . وزمن الاستقرار يمكن ايجاده

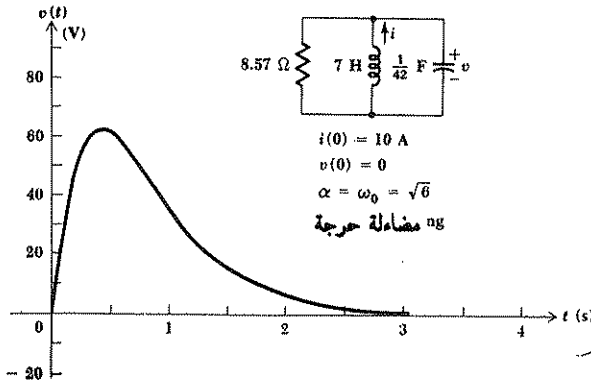
أيضاً يحل .

$$\frac{v_m}{100} = 420t_s e^{-2.45t_s}$$

ولايجاد t_s (استعمل طرق المحاولة والخطأ)

$$t_s = 3.12 \text{ s}$$

والتي هي نسبياً أصغر قيمة من حالة المضاءة (5.15 s) . وكحقيقة واقعة يمكن تبين بأنه لقيم معينة لـ L و C ، فإن اختيار R التي تعطي المضاءة الحرجة سوف يعطي دائماً زمن استقرار أقصر من أي اختيار لـ R الذي يعطي استجابة فوق المضاءة . وعلى أية حال فإن التحسن الطفيف (التقليل) في زمن الاستقرار ربما يمكن الحصول عليه بالتقليل من الزيادة في المقاومة والذي يؤدي الى حالة استجابة تحت المضاءة والتي تنخفض عن المحور السيني قبل اضمحلالها كما أنها سيكون لها أقصر زمن استقرار .



شكل 5 - 7 استجابة الدائرة المبينة في الشكل 7 - 2 مع تغيير R حتى نحصل على المضاءة الحرجة

$$v(t) = 420t e^{-2.45t}$$

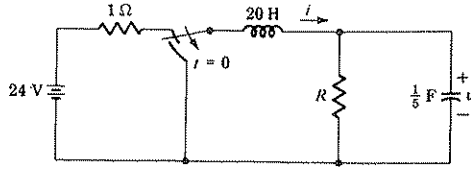
ان منحنى الاستجابة للمضاءة الحرجة مرسوم في الشكل 7-5 ويمكن مقارنته مع حالة فوق المضاءة (وتحت المضاءة) بالرجوع للشكل 7-8 .

تمرين

4 - 7 الزر في الشكل 6 - 7 تحول الى الاسفل عندما $t = 0$. اذا تضاءلت

الدائرة تضاءلاً حرجاً ، أوجد (أ) R (ب) $i(0^+)$ (ج) $v(0^+)$ (د) $v(2)$

الجواب 5Ω ; 4 A ; 20 V ; 14.72 V



الشكل 6 - 7 أنظر التمرين 4 - 7

7.5 دائرة RLC المتوازية تحت المضاءلة THE UNDERDAMPED PARALLEL RLC CIRCUIT

دعنا نستمر بالعملية التي بدأت في الفقرة الاخيرة بزيادة R مرة أخرى . لذا فان عامل المضاءلة α يتناقص ، بينما تبقى ω_0 ثابتة وتصبح α^2 أصغر من ω_0^2 ويصبح الجذر التربيعي الذي يظهر في تعابير s_1 و s_2 سالباً . وهذا يسبب أن تأخذ الاستجابة خاصية أخرى . ولكن لحسن الحظ من غير الضروري العودة الى معادلة التفاضل الاساسية مرة أخرى . وباستعمال الاعداد المركبة فان الاستجابة الاسية تتحول الى استجابة جيبيية ، وهذه الاستجابة تتكون كلياً من كميات حقيقية والكميات المركبة تصبح ضرورية فقط للاشتقاق . (4)
وعليه سنبدأ بالشكل الآسي

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

حيث

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1} \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = j \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad \text{ثم افرض}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

حيث

والان نأخذ جذراً حقيقياً لحالة تحت المضاءلة ونسميها ω_{II} تردد الزمني الطبيعي

$$\omega_{II} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

وبالتجميع يمكننا كتابة الاستجابة كالآتي .

$$v(t) = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\omega_{II} t} + A_2 e^{-j\omega_{II} t})$$

(4) مقدمة استعمال الاعداد المركبة ستظهر في الفصل التاسع والملحق الثالث . وعندما سوف نؤكد الطبيعة الاكثر شمولاً للكميات المركبة بتمريرها بحروف كبيرة ولا داعي لرمز خاص لهذه الصفحات القليلة .

او بشكل مكافيء لكنه أكثر تفصيلاً

$$v(t) = e^{-\alpha t} \left\{ (A_1 + A_2) \left[\frac{e^{j\omega_d t} + e^{-j\omega_d t}}{2} \right] + j(A_1 - A_2) \left[\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{j2} \right] \right\}$$

وان أهم المتطابقات في مجال الاعداد المركبة هما المتطابقتان المبرهنتان بعدئذ في الملحق ويمكن تطبيقهما جاهزين الان. وان أول قوس في المعادلة أعلاه هو بالتطابق مساو لـ $\cos \omega_d t$ والقوس الثاني يطابق $\sin \omega_d t$ لذا .

$$v(t) = e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t]$$

وعامل الضرب يمكن أن يؤشر برموز جديدة .

$$v(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \quad (20)$$

وإذا كنا نتعامل مع حالة تحت التضاؤل فاننا قد تركنا الاعداد المركبة وراءنا . وهذا صحيح لان α و ω_d و t هي كميات حقيقية $v(t)$ نفسها يجب ان تكون كمية حقيقية (والتي يمكن عرضها على مرسمة الترددات والفولتميتر أو ورقة الخط البياني) لذا فان B_1 و B_2 هي كميات حقيقية . والمعادلة (20) هي الشكل الدالي المطلوب لاستجابة تحت المضاءة وتقييمها يمكن تحقيقها بالتعويض المباشر في معادلة التفاضل الاصلية وهذا التمرين متروك للذي يشك في صحة ذلك . وان الثابتين الحقيقيين B_1 و B_2 اختيرا ليلائما الظروف الابتدائية المعطاة كالعادة .

دعنا نزد من قيمة المقاومة في مثالنا من $7\sqrt{6}/2$ أو 8.57Ω الى $10.5\sqrt{2}$ دون تغيير L و C . لذا

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = 2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{6}$$

وأن

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{2} \text{ (rad/s)}$$

اصبحت الاستجابة الان معلومة عدا قيم الثوابت الاعتبارية .

$$v(t) = e^{-2t} (B_1 \cos \sqrt{2}t + B_2 \sin \sqrt{2}t)$$

ويحسب الثابتان كالسابق . وإذا فرضنا مرة أخرى أن $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ ثم B_1 يجب أن تكون صفراً ، لذا

$$v(t) = B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$

$$\frac{dv}{dt} = \sqrt{2} B_2 e^{-2t} \cos \sqrt{2}t - 2 B_2 e^{-2t} \sin \sqrt{2}t \quad \text{والتفاضل هو}$$

$$\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = \sqrt{2} B_2 = \frac{i_C(0)}{C} = 420 \text{ وعندما } t = 0 \text{ تصبح}$$

وعليه

$$v(t) = 210\sqrt{2}e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$$

لاحظ بأن دالة الاستجابة هذه لها قيمة ابتدائية مقدارها صفر كالسابق بسبب أن ظرف الفولتية الابتدائية التي فرضناها يساوى صفرًا وكذلك القيمة النهائية بسبب أن الحد الاسي يتلاشى لقيم t الكبيرة وكلما زادت t من الصفر خلال قيم موجبة صغيرة فإن $v(t)$ تزداد الى $210 \sin \sqrt{2}t$ لان الحد الاسي يبقى مساوياً للواحد بالضرورة. ولكن في الزمن t_m فان الدالة الاسية تبدأ بالتناقص بسرعة أكثر من تزايد $\sin \sqrt{2}t$. لذا فان $v(t)$ تصل قيمتها القصوى v_m وتبدأ بالتناقص. يجب أن ننوه بأن t_m هي ليست قيمة لـ t والتي تكون $\sin \sqrt{2}t$ في قيمتها القصوى ولكن يجب أن تحدث قبل أن تصل $\sin \sqrt{2}t$ قيمتها العظمى. وعندما $t = \pi/\sqrt{2}$ فان $v(t)$ تكون صفرًا وللفترة $\pi/\sqrt{2} < t < \sqrt{2}\pi$ فالاستجابة سالبة وتصبح صفرًا مرة أخرى في $t = \sqrt{2}\pi$ لذا فان $v(t)$ هي دالة متذبذبة زمنياً وتقطع محور الزمن عدداً معيناً من المرات في $t = n\pi/\sqrt{2}$ حيث n هي أي عدد صحيح موجب وعلى أي حال فالاستجابة في مثلنا هي تحت التضائل قليلاً ويسبب الحد الأسّي دالة تتلاشى بسرعة بحيث أن معظم التقاطعات الصفرية لا تكون واضحة في الرسم التخطيطي.

وان الطبيعة التذبذبية للاستجابة تصبح ملاحظة أكثر كلما تناقصت α فاذا كانت صفرًا والتي تعود الى مقاومة قيمتها كبيرة جداً لحد غير متناهٍ فان $v(t)$ تكون في حالة تحت التضائل بشكل جيبي وتتذبذب بارتفاع ثابت. وهذه الحركة ليست دائمية. فقد فرضنا وجود طاقة ابتدائية في الدائرة ولم نزود أي وسيلة لابتزار هذه الطاقة. فهي تتحول من موقعها الابتدائي في المحث الى المتسعة ثم تعود الى المحث وهكذا دواليك الى الابد. وان دوائر RLC المتوازية الحقيقية يمكن ربطها بحيث تكون قيم R الفعالة لها كبيرة جداً لديمومة الاستجابة الجيبية لتحت المضائلة وربما لسنوات بدون تجهيزها بطاقة اضافية. ويمكننا بناء شبكات فعالة active تزود كمية كافية من الطاقة خلال كل تذبذب لـ $v(t)$ لكي يمكن استدامة الاستجابة الجيبية بشكل يقرب من المثالي لمدة طويلة حسب رغبتنا. وهذه الدائرة تستخدم في المذبذب الجيبي (أو مولد الإشارة) والذي هو احد **الأجهزة المختبر الهامة.**

وبالعودة الى المسألة الرقمية السابقة. فان اول تفاضل يعين اول قيمة قصوى لـ

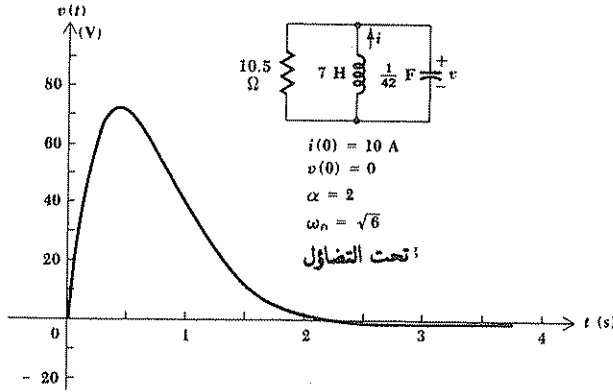
$$v(t)$$

$$t_{m1} = 0.435 \text{ s في } v_{m1} = 71.8 \text{ V}$$

والقيمة الصغرى التي تعقب هي

$$t_{m2} = 2.657 \text{ s في } v_{m2} = -0.845 \text{ V}$$

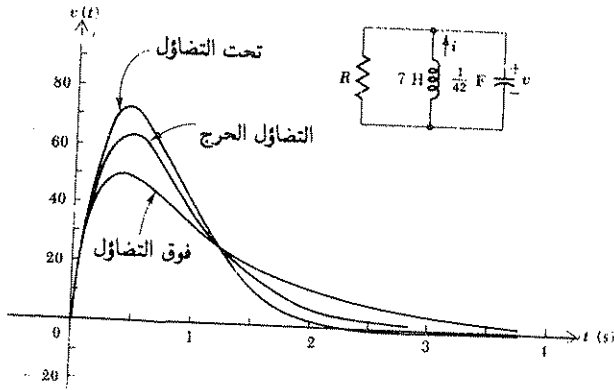
يبين الشكل (7 - 7) منحنى الاستجابة .



شكل 7 - 7 الاستجابة $v(t) = 210 \sqrt{2} e^{-2t} \sin \sqrt{2}t$ للشبكة المبينة في الشكل 2 - 7 مع زيادة R حتى نحصل على استجابة لتحت المضاءلة .

ان زمن الاستقرار يمكن الحصول عليه بالحل بطريقة المحاولة والخطأ وستؤول الى أن تكون 2.92 s وهي أكبر قليلاً من المضاءلة الحرجة (التلاشي الحرج) . لاحظ ان t_s هي أكبر من t_{m2} لان قيمة v_{m2} أكبر من 1 بالمائة من قيمة v_{m1} . وهذا يبين بان نقصاناً قليلاً في قيمة R يقلل اتساع هبوط المنحني تحت محور الزمن ويجعل t_s أقل من t_{m2} . المسألة 34 في نهاية هذا الفصل تستعرض اقصر زمن استقرار لهذه الشبكة لحالة اقل بقليل من الحالة الحرجة (تحت التضاؤل أو تحت التلاشي) .

وإن استجابات فوق التضاؤل فوق التلاشي والمضاءلة الحرجة (التلاشي الحرج) وتحت التضاؤل (تحت التلاشي) لهذه الشبكة مبينة على نفس الرسم البياني في الشكل 8 - 7 ولدى مقارنة هذه المنحنيات الثلاث تصبح الخلاصات التالية ممكنة .



شكل 8 - 7 ثلاث منحنيات لاستجابات دائرة الـ RLC المتوازية والتي فيها $\omega_0 = \sqrt{6}$ ، $i(0) = 10$ A، و $v(0) = 0$ و تساوي 3.5 (فوق التضاؤل) و 2.45 (للمضائة الحرجة) و 2 (تحت التضاؤل).

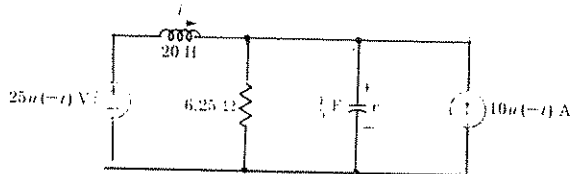
- 1 عندما تتغير المضاءلة بتغيير حجم المقاومة المتوازية فان القيمة العظمى للاستجابة هي أكبر مع مضاءلة أقل.
- 2 يحدث أقل زمن استقرار قريباً عند المضاءلة الحرجة وبالْحَقِيقَة يجب أن تكون الاستجابة تحت التضاؤل بقليل.

تمرين

7 - 5 أعلق كل من المصدرين المبينين في الشكل 7 - 7 عندما $t = 0$ كما

مبين. أوجد (أ) $v(0^-)$ (ب) $i(0^-)$ (ج) $v(2)$

الجواب $A: -6$ $V: 25$ $V: -24.6$



الشكل 9 - 7 أنظر التمرين 5 - 7

THE SOURCE-FREE SERIES RLC CIRCUIT

ونود الان حساب الاستجابة الطبيعية لنموذج دائرة متكونة من مقاوم مثالي ومحث مثالي ومتسعة مربوطة على التوالي . إن المقاومة المثالية يمكن أن تمثل مقاومة اعتيادية مربوطة مع دائرة LC أو RLC المتوالية . ويمكن أن تمثل الضياعات المقاومة او ضياعات اللب الحديدي للمحث أو أنه يمكن استعمالها لتمثل كل هذه وأدوات اخرى مبددة للطاقة . فمثلاً في حالة مقاومة المقاوم المثالي يمكن أن تساوى بالضبط المقاومة المقاسة للسلك المكون للمحث الحقيقي .

وإن دائرة RLC المتوالية هي ثنائي دائرة RLC المتوازية وأن هذه الحقيقة المنفردة كافية لتجعل تحليلها كشأن البديهة . فالشكل 10 - 7 (أ) يبين دائرة توالي والمعادلة التكاملية التفاضلية الأساسية هي .

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt - v_c(t_0) = v$$

ويجب مقارنتها مع المعادلة المماثلة لدائرة RLC المتوازية المرسومة في الشكل 10 - 7

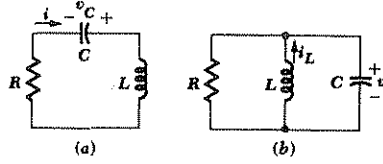
$$C \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R} v + \frac{1}{L} \int v dt - i_L(t_0) = 0 \quad (ب)$$

فالمعادلات من الدرجة الثانية يمكن الحصول عليها بأخذ تفاضل كل من المعادلات بالنسبة للزمن وهي أيضاً ثنائية .

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0 \quad (21)$$

$$C \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} = 0 \quad (22)$$

ومن الظاهر ان شرحنا الكامل لدائرة RLC المتوازية تطبق مباشرة على دائرة RLC المتوالية والظروف الابتدائية على فولتية المتسعة وتيار المحث مكافئة الى الظروف الابتدائية لتيار المحث وفولتية المتسعة . فاستجابة الفولتية تصبح استجابة التيار . ومن الممكن تماماً إعادة قراءة الفقرات الأربع السابقة (وبضمنها التمارين) مستعملين لغة الثنائي . لكي نحصل على وسط كامل لدائرة RLC المتوالية . وهذه الطريقة على اية حال ربما تكون مزعجة بعد قراءة الفقرات القليلة الاولى ثم يتضح بأنها ليست بتلك الضرورة .



شكل 10 - 7 (أ) دائرة الـ RLC المتوالية والتي هي الثنائية لـ (ب) دائرة الـ RLC المتوازية. القيم طبعاً ليست متطابقة في (أ) و (ب).

ويمكن الرجوع الى مجمل الاستجابة للدائرة المتوالية بدلالة الدائرة الميمنة في

الشكل 10 - 7 فاستجابة فوق التضاؤل هي : $i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ حيث

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$= -\alpha \pm j\omega_d$$

حيث

ولذا

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

شكل استجابة المضألة الحرجة هو

$$i(t) = e^{-\alpha t}(A_1 t + A_2)$$

وحالة تحت المضألة يمكن كتابتها

$$i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

من الواضح بأن العمل بدلالة المتغيرات α و ω_0 و ω_d يؤدي الى ان الشكل الرياضي للاستجابات لحالات الثنائي متشابهة. ان زيادة قيمة α في دائرة التوالي او التوازي مع ابقاء ω_0 ثابتة يؤدي الى الاتجاه نحو استجابة فوق التضاؤل. وان التحذير الوحيد الذي نحتاج ايضاحه لحساب α والتي هي $1/2RC$ لدائرة التوازي

6 في الحقيقة خلال كتابة هذا الكتاب المقرر فان المؤلفين اعادا كتابة هذه الفقرات الاولى لوصف دائرة RLC المتوالية ولكن بعد ان تقرر من انه من الممكن اظهار التحليل لدائرة RLC المتوازية العملية أولاً. فمن السهل العودة الى الكتابة الاصلية واستبدالها بثنائياها وقد اختيرت القيم العددية لعناصر عدة ايضاً كما وضعت الطريقة بعدد في الفصل 14.

و $R/2L$ لدائرة التوالي . لذا فان α تزداد بازدياد مقاومة التوالي وتناقص مقاومة التوازي .

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad \alpha = \frac{R}{2L}$$

(توازي) (توالي)

لنأخذ مثالا عددياً نفرض اعتبار دائرة RLC المتوالية والتي فيها $L = 1$ H و $R = 2$ k Ω و $C = 1/401$ μ F و $i(0) = 2$ mA و $v_C(0) = 2$ V. نجد ان α هي 1000 و ω_0 هي 20,025 ولذا فالاستجابة بوضوح هي تحت التضاؤل ، لذا نحسب قيم ω_d ونحصل على

وتكون الاستجابة معلومة كما يأتي عدا حساب الثوابت الاعتبارية

$$i(t) = e^{-1000t}(B_1 \cos 20,000t + B_2 \sin 20,000t)$$

بتطبيق القيمة الابتدائية للتيار نجد ان

$$B_1 = 2 \times 10^{-3}$$

$$i(t) = e^{-1000t}(2 \times 10^{-3} \cos 20,000t + B_2 \sin 20,000t) \quad \text{ولذا}$$

الطرف الأبتدائي الباقي يجب أن يطبق على التفاضل . لذا

$$\frac{di}{dt} = e^{-1000t}(-40 \sin 20,000t + 20,000B_2 \cos 20,000t$$

$$- 2 \cos 20,000t - 1000B_2 \sin 20,000t)$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 20,000B_2 - 2 = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0) - Ri(0)}{L} \quad \text{أو}$$

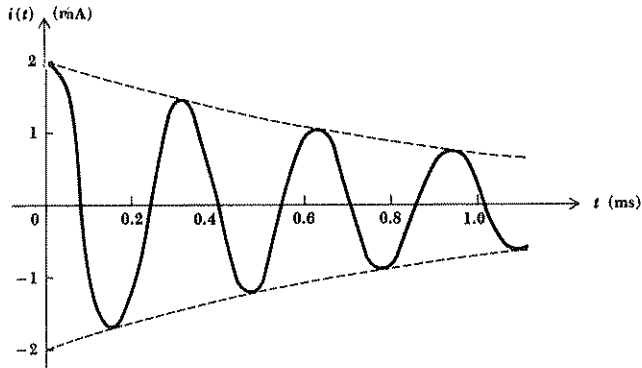
$$= \frac{2 - 2000(2 \times 10^{-3})}{1} = -2$$

$$B_2 = 0$$

الاستجابة المطلوبة هي :

$$i(t) = 2 \times 10^{-3} e^{-1000t} \cos 20,000t \quad \text{A}$$

هذه الاستجابة هي اكثر تذبذباً أو أنها أقل تضاؤلاً مما وضعنا لحد الآن كما أن الحساب المباشر لنقاط كافية لرسم المنحنى البياني الأملس هو عملية شاقة . لذا يمكن رسم منحنى بياني برسم الأغلفة الأسية أولاً $-2 \times 10^{-3} e^{-1000t}$ و $2 \times 10^{-3} e^{-1000t}$ كما مبين بالخطوط المقطعة في الشكل 11 - 7 . وان موقع نقاط ربع الدورة للموجة الجيبية تُوْشر في $0 = 20,000t = \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi, \dots$ الخ أو ربع الدورة للموجة الجيبية تُوْشر في $t = 0.07854k$ ms, $k = 0, 1, 2, \dots$ بعلامات خفيفة على محور الزمن ثم نرسم منحنى التذبذب بسرعة .



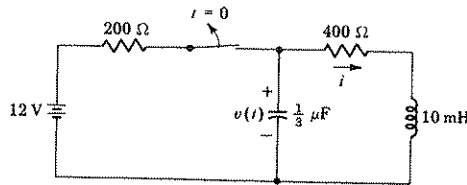
شكل 11 - 7 استجابة التيار في دائرة الـ RLC المتوازية لتحت التضاؤل والتي فيها $\alpha = 1000 \text{ s}^{-1}$ لكل ثانية ، $\omega_d = 20,000 \text{ s}^{-1}$ لكل ثانية ، $i(0) = 2 \text{ mA}$ ، $v_C(0) = 2 \text{ V}$ ، المنشأ التخطيطي قد بسط برسم الغلاف المتكون من الخطين المقطعين .

تمرينان

6 - 7 للدائرة المبينة في الشكل 12 - 7 ، أوجد (أ) $v(0^+)$ (ب) $i(0^+)$ (ج)

$v(0.1 \text{ ms})$

الجواب 8 V ; 3.26 mA ; 20 mA



الشكل 12 - 7 أنظر التمرين 6 - 7 و 7 - 7

7 - 7 استبدل المقاوم $400\text{-}\Omega$ في الشكل 12 - 7 بـ $200\text{-}\Omega$ ثم أعد التمرين 6 - 7

الجواب 6 V ; -0.427 V ; 30 mA

7.7 الاستجابة الكاملة لدائرة RLC

THE COMPLETE RESPONSE OF THE RLC CIRCUIT

لنأخذ دوائر RLC التي فيها مصادر تيار مستمر تدخل في الشبكة وتنتج استجابات مرغمة والتي لاتزول اذا أصبح الزمن مالانهاية . وان الحل العام يمكن الحصول عليه بنفس الطريقة التي اتبعت في دوائر RL و RC . فالاستجابة المرغمة تحسب كاملة والاستجابة الطبيعية يمكن الحصول عليها كشكل دالة مناسبة تحوي العدد الملائم من الثوابت الاعباطية والاستجابة الكاملة تكتب كمجموع الاستجابات المرغمة والطبيعية والظروف الابتدائية تحسب وتطبق على الاستجابة الكاملة لايجاد قيم الثوابت والخطوة الأخيرة هي عادة أكثر ما يقلق الطالب . وبالنتيجة فانه على الرغم من أن حساب الظروف الابتدائية اساساً لاختلاف للدائرة الحاوية على مصادر تيار مستمر منها للدوائر الخالية من المصادر والتي تناولناها بشيء من التفصيل فان هذا الموضوع سوف ينال تأكيداً خاصاً في الامثلة التي تلي .

وان أغلب الأرتباك في حساب وتطبيق الظروف الابتدائية يتولد بسبب بسيط وهو أننا لم نضع لأنفسنا قواعد ثابتة نتبعها . ففي كل تحليل تظهر حالات تكون هناك طريقة للحل أكثر ملاءمة من الطرق الأخرى لمسألة معينة . وهذه الاصلة والمرونة في التفكير هي مصدر الصعوبة بالرغم من أنها مفيدة لغرض التحقيق بعد التدريب على بضعة مسائل .

وان الاستجابة الكاملة (ولنفرض انها استجابة فولتية) لمنظومة من الدرجة الثانية تحوي استجابة مرغمة ثابتة عند تسليط تيار مستمر

$$v_r(t) = V_r$$

الاستجابة الطبيعية

$$v_n(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

لذا

$$v(t) = V_r + Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t}$$

وسوف نفرض الآن بأن s_1 و s_2 و V_r سبق وان حسبت من الدائرة والدالات المرغمة المعطاة ويبقى ايجاد A و B . وان المعادلة الأخيرة تبين الدالة المعتمدة على

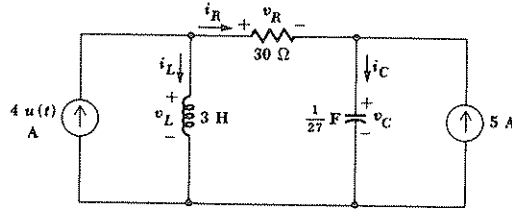
A و B و v و t . وبتعويض القيمة المعلومة لـ v في $t = 0^+$ ، نحصل على معادلة منفردة تربط A و B . وبالطبع هناك حاجة لعلاقة أخرى بين A و B والتي يمكن الحصول عليها بأخذ تفاضل الاستجابة .

$$\frac{dv}{dt} = 0 + s_1 A e^{s_1 t} + s_2 B e^{s_2 t}$$

وإدخال القيم المعلومة فيها لـ dv/dt في $t = 0^+$ ، لذا فليس هناك سبب يدعو لعدم المضي بهذه الطريقة . وبأخذ تفاضل ثان فان علاقة ثالثة بين A و B تنتج اذا استعملت قيمة d^2v/dt^2 في $t = 0^+$. وهذه القيمة عادة غير معلومة على اية حال في منظومة من الدرجة الثانية ، وبالحقيقة هناك احتمال كبير لاستعمال هذه الطريقة لايجاد القيمة الابتدائية للتفاضل الثاني اذا احتجناها . لذا فان لدينا معادلتين تربطان A و B وهاتان المعادلتان يمكن حلها بصورة آنية لايجاد قيمة الثابتين .

والمسألة الوحيدة الباقية هي حساب قيم v و dv/dt في $t = 0^+$ دعنا نفرض ان v هي فولتية المتسعة $v = v_c$ وبما ان $i_c = C dv_c/dt$ سوف تميز العلاقة بين القيمة الابتدائية لـ dv/dt والقيمة الابتدائية لبعض تيار المتسعة . واذا قررنا قيمة لتيار المتسعة الابتدائي هذا عندها سوف نعرف قيمة dv/dt بصورة تلقائية والطلاب باستطاعتهم الحصول على $v(0^+)$ بكل سهولة ولكن سوف يتلأكون قليلاً عند ايجاد القيمة الابتدائية لـ dv/dt . ولو اخترنا التيار على أنه الاستجابة فان القيمة الابتدائية لـ di/dt يجب أن تنسب لتوافق القيمة الابتدائية لبعض فولتية المحث . إن المتغيرات عدا فولتيات المتسعة وتيارات المحث تحسب بكتابة قيمها الابتدائية والقيم الابتدائية لمشتقاتها بدلالة القيم المناظرة لها من v_c و i_c

دعنا نوضح الطريقة بتحليل الدائرة المبينة في الشكل 13 - 7 باعتناء في التحليل نستعمل متسعة كبيرة غير حقيقية مرة أخرى . وهدفنا هو ايجاد قيمة كل تيار وفولتية في كل من $t = 0^-$ و $t = 0^+$ ومع أن هذه الكميات معلومة فان التفاضل المطلوب يمكن حسابه بسهولة ، وسوف نطبق الخطوة تلو الخطوة المنطقية في البداية أيضاً .



شكل 13 - 7 دائرة لـ RLC استعملت لبيان حساب الظروف الابتدائية بمدة أسليب . الاستجابة المعنية اخذت بالمادة لتكون $v_C(t)$.

ففي $t = 0^-$ يكون المصدر الأيمن فعالاً فقط ، هذا بالإضافة الى أن الدائرة يفترض بانها بهذه الوضعية الى الأبد وأن جميع التيارات والفولتيات ثابتة أيضاً . وبكلمة أخرى فان حالة وضع الاستقرار قد حصلت وان الاستجابة المرغمة الناجمة ، لها شكل الدالة المرغمة وكذلك تكاملها وتفاضلها وأن تكامل الدالة المرغمة هي دالة تزداد خطياً مع الزمن ولم تظهر في هذه الدائرة لأنها تحدث فقط عندما يرغم التيار الثابت بالمرور خلال المتسعة أو الفولتية الثابتة تبقى عبر المحث . هذه الحالة يجب أن لا تظهر عادة لأن فولتية المتسعة أو تيار المحث سوف تفرض قيمة لانهاية غير واقعية في $t = 0^-$. ولو استمرينا فان التيار الثابت خلال المحث يتطلب أن تكون الفولتية عبره صفراً .

$$v_L(0^-) = 0$$

كما أن الفولتية الثابتة عبر المتسعة تتطلب أن يكون التيار خلالها .

$$i_C(0^-) = 0$$

ثم نطبق قانون التيار لكروشوف على العقدة اليمنى لنحصل على

$$i_R(0^-) = -5 \text{ A}$$

والذي أيضاً يجعل

$$v_R(0^-) = -150 \text{ V}$$

ويمكننا استعمال قانون الفولتية لكروشوف حول الدارة الوسطية ونجد أن :

$$v_C(0^-) = 150 \text{ V}$$

بينما يمكننا قانون التيار لكروشوف من ايجاد تيار المحث

$$i_L(0^-) = 5 \text{ A}$$

وعلى الرغم من أن التفاضلات في $t = 0^-$ لها فائدة قليلة لنا فمن الواضح بأن القيم جميعها صفر .

والآن افرض أن الزمن ازداد جزئياً ففي خلال الفترة من $t = 0^-$ الى $t = 0^+$ يصبح تيار المصدر الأيسر فعال بينما تتغير معظم قيم الفولتية والتيار في $t = 0^-$ فجأة وعلى أية حال فسنبداً بتركيز انتباهنا على تلك الكميات التي لا تتمكن من التغير فجأة كتيار المحث وفولتية المتسعة حيث أن كلاً من هاتين الكميتين تبقى ثابتة خلال فترة التزيرير ، لذا

$$i_L(0^+) = 5 \text{ A} \quad \text{and} \quad v_L(0^+) = 150 \text{ V}$$

نظراً لأنه عُلم تياران على العقدة اليسرى فاننا بعدئذ نحصل على (7)

$$i_R(0^+) = -1 \text{ A} \quad \text{and} \quad v_R(0^+) = -30 \text{ V}$$

لذا

$$i_C(0^+) = 4 \text{ A} \quad \text{and} \quad v_C(0^+) = 120 \text{ V}$$

وهنا بقي ستة تفاضلات يجب ايجاد قيمتها على الرغم من أننا لانحتاج اليها جميعها لايجاد قيمة الثوابت الاعباطية وتبدأ الطريقة بالعناصر الخازنة للطاقة ثم التطبيق المباشر للمعادلات التي تعرفها . فللمحث .

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

بصورة خاصة

$$v_L(0^+) = L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+}$$

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{v_L(0^+)}{L} = 40 \text{ A/s} \quad \text{فإن}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = 108 \text{ V/s} \quad \text{وبصورة مشابهة}$$

ويمكن حساب التفاضلات الأربعة الأخرى بمعرفة أن كلاً من قانوني التيار والفولتية لكرشوف يحققان التفاضلات أيضاً ، فعلى سبيل المثال في العقدة اليسرى .

$$4 - i_L - i_R = 0 \quad t > 0$$

$$0 - \frac{di_L}{dt} - \frac{di_R}{dt} = 0 \quad t > 0 \quad \text{ولذا فإن}$$

(7) هذا التيار فقط واحد من الكميات الاربع المتبقية والممكن الحصول عليها بخطوة واحدة . وفي دوائر أكثر تعقيداً فإنه يمكن ايجاد أية قيمة ابتدائية بخطوة منفردة واحدة ، فاما أن تحل معادلات الدائرة أو ترسم دائرة مقاومة مكافئة أبسط يمكن تحليلها بكتابة المعادلات الآتية ، والطريقة الأخيرة سوف توصف فيما بعد .

وعليه

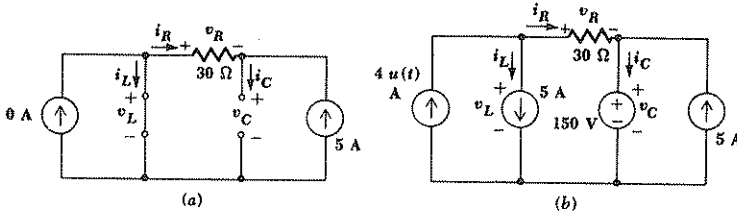
$$\left. \frac{di_R}{dt} \right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

القيم الابتدائية الثلاثة الباقية للمشتقات وجد انها تساوي

$$\left. \frac{dv_R}{dt} \right|_{t=0^+} = -1200 \text{ V/s} \quad \left. \frac{dv_L}{dt} \right|_{t=0^+} = -1092 \text{ V/s} \quad \left. \frac{di_C}{dt} \right|_{t=0^+} = -40 \text{ A/s}$$

دعنا الآن نعد الى طريقة تختلف قليلاً وتعرف بها هذه التيارات والفولتيات في $t = 0^-$ و $t = 0^+$. سوف نكون دائرتين مكافئتين إحداهما ذات قيمة كحالة وضع الاستقرار التي تصل $t = 0^-$ ، والثانية ذات قيمة خلال فترة التزيرير. والمناقشة التالية تعتمد على بعض المناقشات المستعملة سابقاً ولهذا السبب ستعرض باختصار.

فقبيل عملية التزيرير تظهر التيارات والفولتيات المستمرة فقط في الدائرة ويمكن استبدال المحث بدائرة قصر ومكافئها للتيار المستمر، بينما تستبدل المتسعة بدائرة مفتوحة. وعند اعادة الرسم بهذا الأسلوب تظهر الدائرة في الشكل 7.13 كما هو مبين في الشكل 14 - 7 (أ). فالفولتيات الثلاثة والتيارات الثلاثة في $t = 0^-$ يمكن ايجادها الآن بسهولة بطرق تحليل الدائرة المقاومة



شكل 14 - 7 (أ) دائرة بسيطة هي الدائرة المكافئة لدائرة الشكل 13 - 7 لـ $t = 0^-$: (ب) دائرة مكافئة أخرى لدائرة الشكل 13 - 7 صحيحة لفترة التزيرير. $t = 0^+$ to $t = 0^-$

وهذه القيم هي نفس القيم التي وجدت سابقاً.

والآن نعود الى مشكلة رسم الدائرة المكافئة التي ستساعدنا لحساب عدة فولتيات والتيارات في $t = 0^+$ ، فكل فولتية متسعة وكل تيار محث يبقى ثابت خلال فترة التزيرير. ويمكن تأمين هذه الظروف باستبدال المحث بمصدر تيار والمتسعة بمصدر فولتية. وإن كل مصدر يعمل على الاحتفاظ بالاستجابة اللازمة ثابتة خلال

التقطع . والدائرة المكافئة الناتجة هي في الشكل 14 - 7 (ب) . ويجب ملاحظة ان هذه الدائرة هي المكافئ الحقيقي في $t = 0^-$ لأن لها نفس التيارات والفولتيات كما في المكافئ البسيط المبين في الشكل 14 - 7 (أ) ، وكذلك هي مكافئ حقيقي في $t = 0^+$ لأن مصدر تيار الخطوة يظهر كدالة للزمن وليس فقط لـ $0 A$ أو $4 A$.

يمكن الحصول على الفولتيات والتيارات في $t = 0^+$ بفرض ان $4u(t) = 4 A$ وحل دائرة التيار المستمر الناتجة . وهذا الحل غير صعب ولكن عدداً كبيراً من المصادر سيظهر على الشبكة مما ينتج منظراً غريباً . وعلى اية حال فان مسائل من هذا النوع قد مرت بنا في الفصل 3 وليس هناك من جديد . والاستجابات الست في $t = 0^+$ يجب أن تتفق مع التي وجدت بالطريقة السابقة .

وقبل أن نترك هذه المسألة لايجاد القيم الابتدائية الضرورية يجب الإشارة على الأقل لطريقة فعالة أخرى لحساب هذه القيم قد حذفت ، كان بإمكاننا كتابة معادلات العقدة والدارة العامة للدائرة الأصلية ثم بتعويض قيم الصفر المعلومة لفولتية المحث والتيار المتسعة في $t = 0^-$ سوف تكشف قيم عدة استجابات أخرى في $t = 0^-$ وتمكننا من ايجاد البقية بسهولة . لذا يجب اجراء تحليل مشابه في $t = 0^+$. وهذه الطريقة مهمة وتصيح ضرورية في الدوائر الأكثر تعقيداً والتي لا يمكن تحليلها بطرق الخطوة تلو الخطوة البسيطة التي اتبعناها . وعلى أي حال يجب أن نترك قليلاً من المواضيع ليتم توضيحها عند توضيح الطرق العملية لتحليل الدائرة فيما بعد .

والآن دعنا نوجز اكمال حساب استجابة $v_C(t)$ للدائرة الاصلية للشكل 13 - 7 عند اهمال المصدرين ، تظهر الدائرة كدائرة RLC متوالية . ويمكننا ايجاد s_1 و s_2 بسهولة على أنهما -1 و -9 على التعاقب . والاستجابة المرغمة يمكن ايجادها بالمراقبة أو اذا كان ضرورياً برسم المكافئ للتيار المستمر والذي يشبه الشكل 14 - 7 (أ) ، وبإضافة مصدر تيار $4-A$. فالاستجابة المرغمة هي $150 V$ لذا

$$v_C(t) = 150 + Ae^{-t} + Be^{-9t}$$

$$v_C(0^+) = 150 = 150 + A + B \quad \text{وأن}$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -Ae^{-t} - 9Be^{-9t} \quad \text{ثم}$$

$$\left. \frac{dv_C}{dt} \right|_{t=0^+} = 108 = -A - 9B \quad \text{وأن}$$

واخيراً
وان

$$A = 13.5 \quad B = -13.5$$

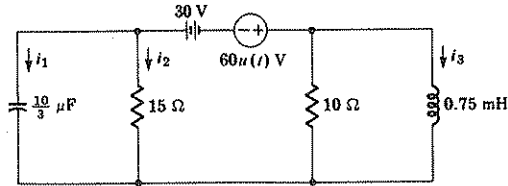
$$v_c(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t})$$

تمارين

8 - 7 للدائرة المبينة في الشكل 15 - 7 ، أوجد القيم عند $t = 0^-$ و $t = 0^+$ لكل

من (أ) i_1 (ب) i_2 (ج) i_3
الجواب : $2, 2; -2, -2; 0, -6$ A

9 - 7 ، أوجد القيم عند $t = 0^-$ وعند $t = 0^+$ للدائرة المبينة في الشكل 15 - 7 لكل من (أ) di_1/dt و (ب) di_2/dt (ج) di_3/dt
الجواب $0, -120; 0, 80; 0, 220$ A/ms



الشكل 15 - 7 أنظر التمارين 8 - 7 و 9 - 7 و 10 - 7

10 - 7 أوجد :

(أ) $i_1(t)$ (ب) $i_2(t)$ (ج) $i_3(t)$ ، للدائرة المبينة في الشكل 15 - 7 لكل قيم $t > 0$

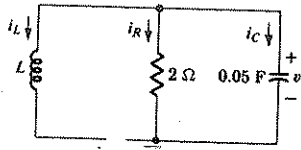
الجواب $-2 + 4/3e^{-10,000t} + 8/3e^{-40,000t}, -2/3e^{-10,000t} - 16/3e^{-40,000t}, 2 - 8/3e^{-10,000t} - 4/3e^{-40,000t}$ A

مسائل

1 للدائرة المتوازية RLC المبينة في الشكل 16 - 7 ، افرض أن $L = 20/9$ H

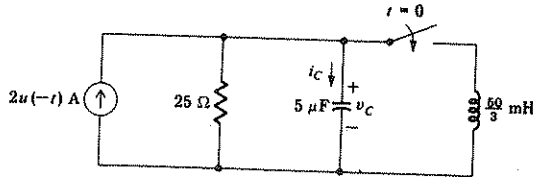
(أ) أكتب المعادلة التفاضلية بدلالة v وبرهن ان المعادلة الآتية تحققها : $v = 4e^{-t} - 10e^{-9t}$

ثم احسب (ب) $v(0^+)$ (ج) $i_R(0^+)$ (د) $i_C(0^+)$ (هـ) $i_L(0^+)$ (و) $i_L(0^+)$ (ز) $i_R(0^+)$ (ح) $i_C(0^+)$



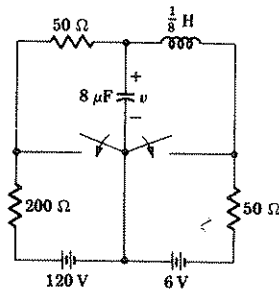
الشكل 16 - 7 أنظر المسائل 1 و 2 و 3 و 7

- 2 □ افرض أن $L = 1.25 \text{ H}$ في الشكل 16 - 7 . أوجد $v(t)$ إذا كانت $v(0^+) = 100 \text{ V}$ وكانت $i_C(0^+)$ تساوي 20 A (ب) $i_L(0^+)$ تساوي 20 A
- 3 (أ) ما قيمة L في الدائرة المبينة في الشكل 16 - 7 التي تتسبب في استجابة بالصيغة $i_C(0^+) = 15 \text{ A}$ و $i_R(0^+) = 10 \text{ A}$ إذا كانت $v = Ae^{-4t} + Be^{-6t}$ (ب) أوجد A و B
- 4 بالرجوع الى الدائرة المبينة في الشكل 17 - 7 ، افرض أن الزر كان مفتوحاً لفترة طويلة جداً . أوجد (أ) $v_C(0^+)$ (ب) $i_C(0^+)$ (ج) $v_C(t)$ (د) ارسم $v_C(t)$ (هـ) أوجد t حينما $v_C(t) = 0$ (و) أوجد زمن الاستقرار



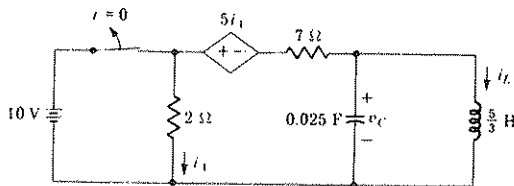
الشكل 17 - 7 أنظر المسألة 4

- 5 □ أغلق الزرآن المبينان في الشكل 18 - 7 في اللحظة $t = 0$. بعد أن كانا مفتوحين لمدة طويلة جداً . (أ) أوجد $v(t)$ (ب) أوجد القيمتين القصوى والدنيا لـ $v(t)$



الشكل 18 - 7 أنظر المسألة 5

6 الزر المبين في الشكل 19 - 7 كان مغلقاً لفترة طويلة جداً . (أ) أوجد $i_L(0^-)$ (ب) أوجد $i_L(0^+)$ (ج) أوجد $v_C(0^-)$ (د) أوجد المقاومة المكافئة المتوازية مع L و C للزمن $t > 0$ (هـ) أوجد $i_L(t)$.



الشكل 19 - 7 أنظر المسألة 6

7 افرض أن الدائرة المبينة في الشكل 16 - 7 كانت حرجة التضاؤل ومنها

$i_L(0^-) = 20 \text{ A}$ (ب) $i_C(0^-) = 20 \text{ A}$ (أ) إذا كان $v(t)$ أوجد $v(0^+) = 100 \text{ V}$

□ 8 فولتية المتسعة في دائرة RLC متوازية حرجة التضاؤل تعطى بالمعادلة

$$v_C(t) = 1000e^{-3000(t - 0.01)} \text{ V}$$

إذا كانت الطاقة المخزونة في المتسعة هي 2 mJ عند $t = 0$. أوجد (أ) R (ب) الطاقة المخزونة في المحث .

9 تستخدم متسعة ذات $4\text{-}\mu\text{F}$ ومحث ذو 10-mH في دائرة RLC متوازية

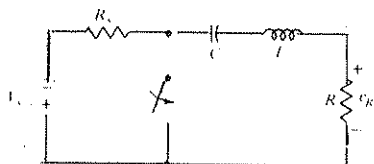
حرجة التضاؤل . (أ) أوجد R (ب) عند $t = 0$ كانت فولتية المتسعة 100 V وتستهلك 50 W . ارسم فولتية المتسعة مع الزمن .

10 الزر المبين في الشكل 20 - 7 كان في الوضع المبين لفترة طويلة . عند $t = 0$

حرك الى الأسفل . أوجد وارسم v_C إذا كانت $R = 2 \Omega$ (أ) 4Ω (ب)

11 الزر في الشكل 20 - 7 كان في الوضع المبين لفترة طويلة . عندما $t = 0$

حرك نحو الاسفل أوجد $v_C(t)$ وأرسمها إذا كانت $R = 1624 \Omega$ (أ) (ب) \times



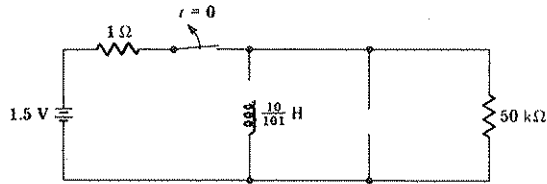
الشكل 20 - 7 أنظر المسألتين 10 و 11

□ 12 المقاومة في الدائرة المبينة في الشكل 1 - 7 تساوي 5Ω والفولتية تعطى بالعلاقة

$v = e^{-7t}(20 \cos 24t + 5 \sin 24t) \text{ V}$ لقيم $t \geq 0$. أوجد (أ) L و (ب) الطاقة الابتدائية المخزونة في الدائرة .

□ 13 مقاوم ذو $250\text{-}\Omega$ ومحث ذو 4-mH مربوطين على التوازي . في $t = 0$ ربطت متسعة ذات $0.025\text{-}\mu\text{F}$ كانت قد شحنت الى 40 V عبر المقاوم . ماهي أول نقطة بعد $t = 0$ تكون فيها الفولتية صفراً .

□ 14 ماهو اقصى اتساع فولتية يظهر عبر طرفي الزر المبين في الشكل 21 - 7 بعد $t = 0$ ؟ (لاحظ أنه من الأسلم حل هذه المسألة تحليلياً بدل حلها عملياً) .

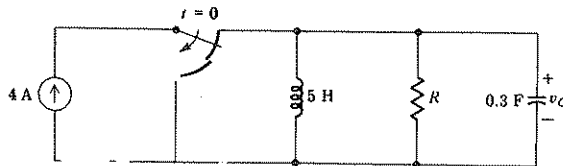


الشكل 21 - 7 أنظر المسألة 14

□ 15 قيم العناصر في الشكل 1 - 7 هي 0.6 H و 3Ω و $1/30 \text{ F}$. إذا كانت $i(0^+) = 4 \text{ A}$ بينما $i'(0^+) = 60 \text{ A/s}$. أوجد $i(t)$ لقيم $t > 0$.

□ 16 الدائرة المبينة في الشكل 10 - 7 ذات استجابة بشكل $i = 20e^{-50t} - 8e^{-150t} \text{ A}$ لقيم $t > 0$. إذا كانت القيمة الابتدائية لفولتية المقاوم هي 60 V . أوجد L و R .

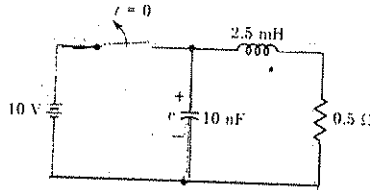
□ 17 قيم العناصر في الدائرة المبينة في الشكل 22 - 7 هي $R_s = 10 \Omega$ و $R = 40 \Omega$ ، $L = 2 \text{ mH}$ ، و $C = 20/3 \mu\text{F}$ ، $V_s = 100 \text{ V}$. يغلق الزر عند $t = 0$. أوجد $v_R(t)$.



الشكل 22 - 7 أنظر المسائل 17 الى 19

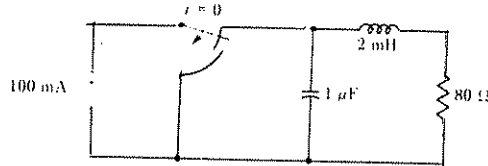
18 عندما يغلِق الزر في الشكل 22 - 7 يعطي شكل نبضة الفولتية v_R اتساعاً أقصى بعد 1 ms من غلق الزر. اذا كانت الدائرة حرجة التضاؤل. (أ) أوجد α (ب) اتساع الومضة الأقصى يساوي 50 V. حدد مجموعة معقولة من قيم R و L و C .

19 العناصر المبينة في الشكل 22 - 7 هي $L = 2 \text{ mH}$ و $R = 40 \Omega$ و $V_s = 100 \text{ V}$, $R_s = 10 \Omega$ و $C = 4 \mu\text{F}$ اوجد $v_R(t)$ اذا أغلق الزر عند $t = 0$.
الزر المبين في الشكل 23 - 7 كان مغلقاً لعدة ساعات. فتح عند $t = 0$.
برهن على أن بطارية ذات 10-V يمكن أن تكون سلاحاً مدمراً بايجاد v عندما $t = 2.5\pi \mu\text{s}$.



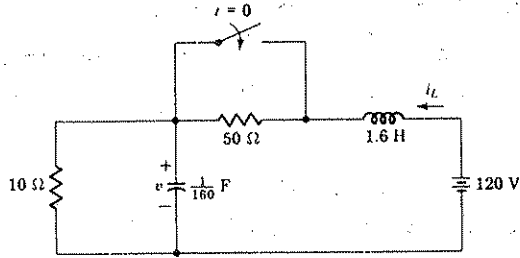
الشكل 23 - 7 أنظر المسألة 20

21 الزر المبين في الشكل 24 - 7 كان في الوضع المبين لفترة طويلة. (أ) مامقدار الطاقة المخزونة في C و L عندما $t = 0$ ؟ مامقدار الطاقة الكلية المخزونة عند $t = 1/\alpha$.



الشكل 24 - 7 أنظر المسألة 21

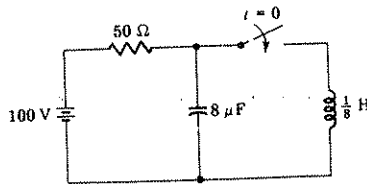
22 بعد تجميع الدائرة المبينة في الشكل 25 - 7. اغلق الزر عندما $t = 0$.
أوجد (أ) $v(0^-)$ (ب) $v(0^+)$ (ج) $v(\infty)$ (د) $i_L(0^-)$ (هـ) $i_L(0^+)$ (و) $v(0^-)$ (ز) $v(0^+)$ حيث $t > 0$.



الشكل 25 - 7 أنظر المسألة 22

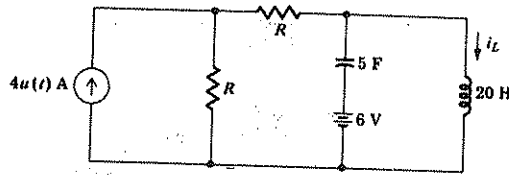
□ 23 محث ذو 2.5-H ومقاومة ذات 4-Ω ومتسعة ذات 0.025-F ربطت على التوازي . ثم وضعت بطارية ذات 80-V على التوالي مع المحث . (أ) بعد مرور زمن طويل . أوجد الطاقة المخزونة في المحث وفي المتسعة : (ب) انخفضت فولتية البطارية فجأة الى 40 V عند $t = 0$. أوجد الطاقة المخزونة في المحث والمتسعة بعد 0.25 s .

24 بعد أن كان الزر في الدائرة المبينة في الشكل 26 - 7 مفتوحاً لمدة 38 دقيقة اغلق عند $t = 0$. أوجد القدرة الممتصة من كل عنصر من العناصر الأربعة بعد 1 ms .



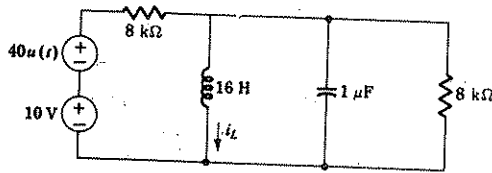
الشكل 26 - 7 أنظر المسألة 24

25 للشبكة المبينة في الشكل 27 - 7 أوجد $i_L(t)$ وارسمه مع الزمن . إذا كانت $R = (9 \frac{1}{2} \Omega) \parallel 5 \Omega$.



الشكل 27 - 7 أنظر المسألة 26

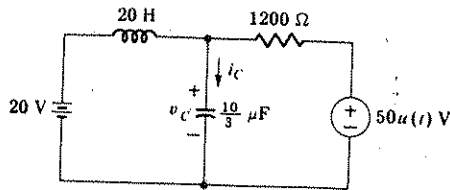
26 للدائرة المبينة في الشكل 28 - 7 أوجد i_L وارسمه كدالة للزمن .



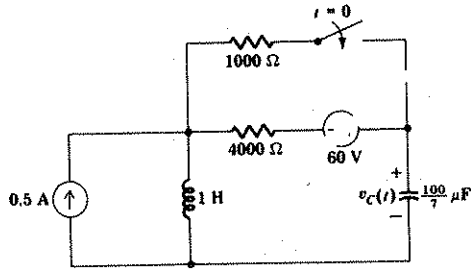
الشكل 28 - 7 أنظر المسألة 26

□ 27 للدائرة المبينة في الشكل 24 - 7 ، أوجد $v_C(t)$ و $i_C(t)$.
 28 كان الزر المبين في الشكل 30 - 7 مفتوحاً لمدة طويلة . أوجد $v_C(t)$ حينما $t > 0$ ثم أرسم رسماً تقريبياً لـ v_C كدالة للزمن .

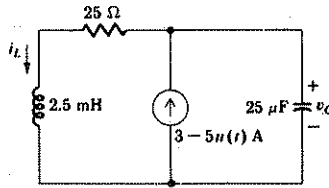
□ 29 للدائرة المبينة في الشكل 31 - 7 أوجد (أ) $v_C(t)$ (ب) $i_C(t)$



الشكل 29 - 7 أنظر المسألة 27

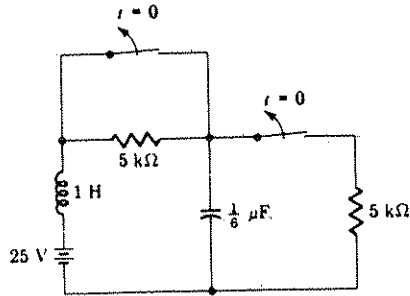


الشكل 30 - 7 انظر المسألة 28



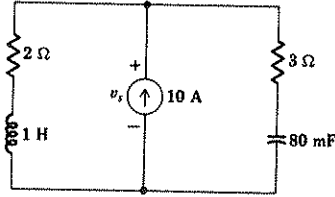
الشكل 31 - 7 انظر المسألة 29

30 بعد ان كان الزران المبينان في الشكل 32 - 7 مغلوقين لعدة ساعات فتحا في آن واحد عند $t = 0$. ارسم منحنى القدرة المجهزة من البطارية كدالة للزمن



الشكل 32 - 7 انظر المسألة 30

31 شدة مصدر التيار في الشكل 33 - 7 ازدادت فجأة الى 20 A عند $t = 0$. أوجد $v_s(t)$ عندما $t = 0^-$ (أ) 0^- (ب) 0^+ (ج) ∞ (د) أوجد $v_s(t)$

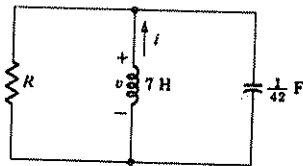


الشكل 33 - 7 انظر المسألة 31

□ 32 محث ذو 5-mH ومتسعة ذات 50- μ F ومقاوم ذو 25- Ω مربوطة على التوالي مع مصدر فولتية $v_s(t)$. كانت فولتية المصدر صفرأ قبل $t = 0$. عند $t = 0$ قفزت الى 75 V وعند $t = 1$ ms انخفضت الى الصفر وعند $t = 2$ ms قفزت ثانية الى 75 V واستمرت بهذا التغير الدوري بعد ذلك . أوجد تيار المصدر عندما $t = 0$ (أ) 0 (ب) 1 ms (ج) 2 ms

33 افرض أن $i(0) = 10$ A و $v(0) = -5$ V في دائرة الشكل 34 . أوجد قيمة R التي تقلل زمن الوصول الى وضع الاستقرار t_s لأقل حد ممكن ثم أوجد أقل قيمة لـ t_s

34 أوجد قيمة R لدائرة تحت التضاؤل المشروحة في الفقرة 5 - 7 $v(0) = 0$ و $i(0) = 10$ A, $L = 7$ H, $C = 1/42$ F, t_s مامقدار t_s



الشكل 34 - 7 انظر المسألة 33

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that this is crucial for ensuring transparency and accountability in the organization's operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and tools used to collect and analyze data. It highlights the need for a systematic approach to data collection and the importance of using reliable sources of information.

3. The third part of the document discusses the challenges and limitations of data collection and analysis. It notes that while data is essential for decision-making, it is not always perfect and can be subject to errors and biases.

4. The fourth part of the document provides a detailed overview of the data collection process, from identifying the data needs to the actual collection and storage of the data. It includes a list of key steps and considerations.

5. The fifth part of the document discusses the importance of data security and privacy. It emphasizes that organizations must take appropriate measures to protect their data from unauthorized access and disclosure.

6. The sixth part of the document discusses the importance of data quality and accuracy. It notes that poor quality data can lead to incorrect conclusions and decisions, and therefore, organizations must invest in data quality management.

7. The seventh part of the document discusses the importance of data integration and interoperability. It notes that organizations must ensure that their data can be shared and used across different systems and departments.

8. The eighth part of the document discusses the importance of data governance and compliance. It notes that organizations must have clear policies and procedures in place to ensure that their data is managed in a responsible and ethical manner.

9. The ninth part of the document discusses the importance of data literacy and skills. It notes that organizations must invest in training and development to ensure that their employees have the necessary skills to work with data effectively.

10. The tenth part of the document discusses the importance of data-driven decision-making. It notes that organizations must use data to inform their strategic decisions and to identify opportunities for improvement and growth.

الجزء الثالث

التحليل الجيبي

SINUSOIDAL ANALYSIS

الفصل الثامن

الدالة المرغمة الجيبية

THE SINUSOIDAL FORCING FUNCTION

1 - 8 مقدمة : INTRODUCTION

إن الأستجابة الكاملة لدائرة كهربائية خطية تتكون من جزءين . هما الاستجابة الطبيعية والاستجابة المرغمة . ولقد كرس الجزء الأول من دراستنا على الدوائر التي تحوي مقاومة فقط حيث تظهر فيها الاستجابة المرغمة . وللسهولة تتحدد الاستجابات المرغمة بمصادر التيار المستمر . لذا أصبحنا ملمين المأمأ واسعاً بالأساليب المختلفة والمفيدة لايجاد الاستجابة المرغمة للتيار المستمر . بعد ذلك مررنا على الجزء الثاني ودرسنا الاستجابة الطبيعية لعدد من الدوائر المختلفة الحاوية على عنصر أو عنصرين لخزن الطاقة . ودون الحاجة الى جهد كبير استطعنا ايجاد الاستجابة الكاملة لتلك الدوائر باضافة الأستجابة الطبيعية (والتي هي خاصية الدائرة وكانت تلك هي خاصية الدالة المرغمة) الى الدالة المرغمة المتولدة من الدالات المرغمة للتيار المستمر . وكانت تلك هي الاستجابة المرغمة الوحيدة التي أصبحنا ملمين بها . والآن نستطيع ان نعرف كنه الاستجابة الطبيعية أكثر من معرفتنا للاستجابة المرغمة .

وفي الجزء الثالث هذا لدراستنا سوف نوسع معرفتنا عن الاستجابة المرغمة بأخذ الدالة المرغمة الجيبية . ولماذا نختار الدالة المرغمة كشكل ثانٍ فعال للدراسة ؟ ولماذا لانختار الدالة الخطية أو الدالة الأسية أو دالة بيسل Bessel المعدلة من النوع الثاني ؟

هناك عدة أسباب لاختيار الدالة الجيبية وكل سبب منها ربما يكفي ليقودنا لهذا الاتجاه .

أول هذه الأسباب يظهر من نتائج الفصل السابق . فالاستجابة الطبيعية لمنظومة المرتبة الثانية لحالة تحت التضاؤل (التلاشي) underdamped هي

مضادة جيبيّة . وإذا لم يكن هناك مفاقد فهي جيبيّة نقيّة . فالتصرف الجيبي يظهر طبيعياً (كما تظهر الكمية الآسيّة ذات الأس السالب) . في الحقيقة الطبيعيّة بصورة عامّة . ويظهر أنها تقر الخاصيّة الجيبيّة . فحركة البندول وارتداد الكرة بعد رميها على الأرض واهتزاز أوتار الكيتار . والظروف السياسيّة في أي بلد والتعرجات على سطح الدوندرمة المفرغة في القمع كلها أمثلة واضحة للخاصيّة الجيبيّة . وربما كانت الملاحظات للخصائص الطبيعيّة الدافع للعالم الرياضي الفرنسي فورير لاكتشافه للطريقة التحليليّة الهامة المسمّاة بنظرية فورير . وفي الفصل السابع عشر سوف نرى بأن تلك النظرية تمكّننا من تمثيل معظم الدالات الرياضيّة للزمن والتي تعيد نفسها f_0 من المرات بالثانيّة بمجموع عدد غير محدود من دالات الزمن الجيبيّة وبترددات هي مضاعفات التكامل لـ f_0 . والدالة المتكرّزة المعطاة $f(t)$ ويمكن أيضاً أن تقرب للحد الذي نرغب فيه بجمع عدد محدود من هذه الجذود . هذا على الرغم من أن منحنى $f(t)$ يظهر بوضوح أنه غير جيبي .

وإن هذا التحليل للدالة المرغمة المتكرّزة إلى عدد من الدالات المرغمة الجيبيّة المناسبة الاختبار هو طريقة كفوءة للتحليل . لأنه يساعدنا لتراكم الاستجابة الجزئية المتكوّنة في دائرة خطية لكل مكون جيبي على انفراد لأجل الحصول على الاستجابة المطلوبة المسيبة عن دالة مرغمة مكرّرة معروفة . لذا فالسبب الآخر لدراسة استجابة الدالة المرغمة الجيبيّة يظهر في اعتماد الدالات المرغمة الأخرى على التحليل الجيبي .

والسبب الثالث يظهر في الخصائص الرياضيّة الهامة للدالة الجيبيّة . حيث أن تفاضلها وتكاملها هو أيضاً جيبي ¹ . وبما أن الدالة الجيبيّة تأخذ شكل الدالة المرغمة فإن تكامل وتفاضل الدالة المرغمة الجيبيّة ينتج استجابة مرغمة جيبيّة لكل الدوائر الخطية . فتحليل الدالة المرغمة الجيبيّة باستخدام التحليل الرياضي أسهل بكثير من معظم الدالات المرغمة الأخرى .

¹ نستعمل التعبير جيبي بحيث يشمل كل الدالات الجيبيّة للزمن أيضاً . وعلى هذا فإن الدالة الجيبتاميّة (cosine) يمكن أن تكتب كدالة جيبيّة إذا زيدت الزاوية بـ 90 .

واخيراً فالدالة المرغمة الجيبية لها تطبيقات عملية هامة حيث أنها دالة سهلة التوليد وأن شكل الموجة السائدة الاستعمال في صناعة القدرة الكهربائية هو جيبى وكل مختبر كهربائي يحوي عدداً من المولدات الجيبية التي تشتغل بأكثر من مدد واحد ولترددات نافعة .

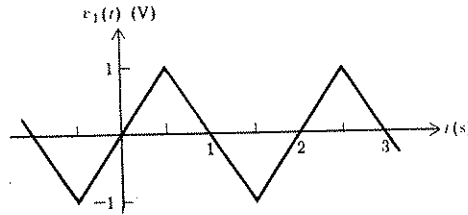
تمرين

8-1 تحويلة فوريير التي سندرسها في الفصل الثامن عشر 18 تبين أن الموجة الدورية المثلثية $v_1(t)$ المبينة في الشكل 1.8 أ تساوي مجموع الحدود الجيبية .

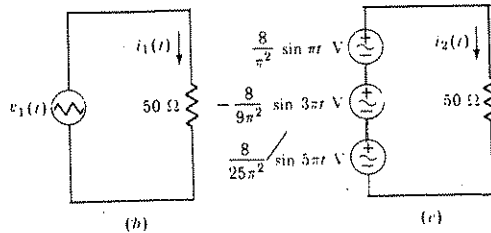
$$v_1(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \pi t - \frac{1}{3^2} \sin 3\pi t + \frac{1}{5^2} \sin 5\pi t - \frac{1}{7^2} \sin 7\pi t + \dots \right)$$

لنفرض أن مجموع الحدود الثلاثة الأولى من المتسلسلة يساوي $v_2(t)$ ويستخدم كتقريب لـ $v_1(t)$. الشكلان 1.8 ب و ج يبينان $v_1(t)$ و $v_2(t)$ كمصدرين في دائرتين مقاوميتين متطابقتين . احسب $i_1(t)$ و $i_2(t)$ عندما $t = 0.25$ (أ)
(ب) 0.5 s .

الجواب $10, 9.73; 20, 18.66$ mA



(a)



(b)

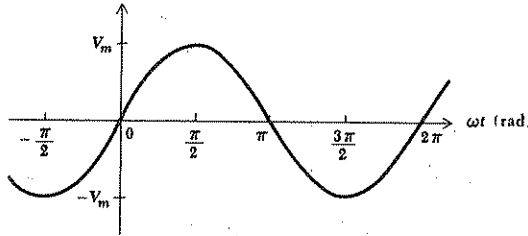
(c)

الشكل 8-1 أنظر التمرين 8-1

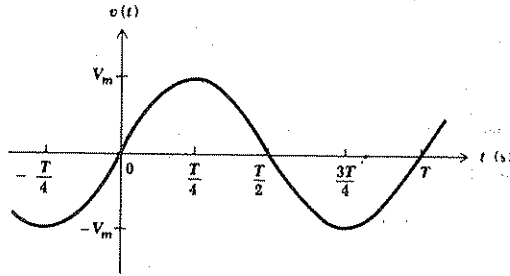
2 - 8 خصائص الجيبيات : - CHARACTERISTICS OF SINUSOIDS

في هذه الفقرة سوف نعرف الدوال المثلثية المستعملة لشرح الدالة الجيبية (أو الجيبتمامية). فالتعريف معروف لمعظنا فاذا كنا نزال نتذكر قليلاً من المثلثات يمكن أن نقرأ الفقرة بصورة عابرة وبسرعة. دعنا نأخذ الفولتية الجيبية المتغيرة.

$$v(t) = V_m \sin \omega t$$



(a)



(b)

الشكل 2 - 8 الدالة الجيبية $v(t) = V_m \sin \omega t$ مرسومة بدلالة ωt في (أ) وبدلالة t في (ب)

المبينة بشكل تخطيطي في الشكل 2 - 8 (أ) و (ب). ان ارتفاع الموجة الجيبية هو V_m وأزاحتها الزاوية ωt . التردد نصف القطري أو التردد الزاوي هو ω . في الشكل 8.2 (أ)، $\sin \omega t$ مرسوم كدالة للازاحة الزاوية كما تتضح طبيعة تكرار الموجة الجيبية. فالدالة تعيد نفسها كل 2π من الزوايا نصف القطرية لذا تكون فترتها 2π من الزوايا نصف القطرية. في الشكل 2.8 ب رسمت $\sin \omega t$ كدالة لـ t والفترة الآن هي T . يمكن التعبير عن الفترة بالدرجات أو ربما بوحدات أخرى كالسنتمترات أو الانجات. فالموجة الجيبية التي لها فترة T يجب أن تنجز $1/T$

(2)

من الفترات كل ثانية وترددها f هو $1/T$ هرتز Hz . لذا فان هرتز واحد يماثل دورة لكل ثانية . والتعبير الأخير بدأ استخدامه بالانحصار لأن معظم الناس يخطئون ويستعملون دورة بدلاً من « دورة بالثانية » لذا فان :

$$f = \frac{1}{T}$$

$$\omega T = 2\pi$$

وبما أن

فاننا نحصل على العلاقة المشتركة بين التردد والتردد نصف القطري

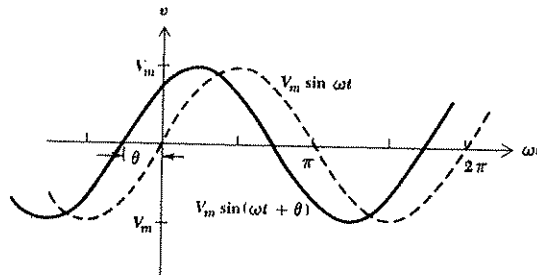
$$\omega = 2\pi f$$

والشكل الأعم للجيبى

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (1)$$

يضم الزاوية الطورية θ في انحرافها الزاوي $(\omega t + \theta)$. المعادلة (1) مرسومة في الشكل 3 - 8 كدالة لـ ωt . بينما تظهر زاوية الطور كعدد الزوايا نصف القطرية التي تروح بها الموجة الجيبية الاصلية (الميمنة بالخطوط المقطعة في الرسم) الى اليسار أو تتقدم بالزمن . ربما ان النقاط المناظرة على الجيبى $V_m \sin(\omega t + \theta)$ تحدث θ من الزوايا نصف القطرية أو θ/ω ثانية بصورة مبكرة سنقول بأن $V_m \sin(\omega t + \theta)$ تسبق $V_m \sin \omega t$ بـ θ من الزوايا نصف القطرية . وبالعكس فمن الصحيح وصف $\sin \omega t$ بأنها تتخلف عن $\sin(\omega t + \theta)$ بـ θ من الزوايا نصف القطرية أو أنها تسبق $\sin(\omega t - \theta)$ بـ θ من الزوايا نصف القطرية .

وفي كلا حالتي السبق والتخلف يقال عن الموجتين الجيبيتين أنهما غير متفقين بالطور . أما ان كانت زاويتا طوريهما متساوية قبل عنهما انهما بالطور نفسه .



شكل 3 - 8 الموجة الجيبية $V_m \sin(\omega t + \theta)$ تسبق $V_m \sin \omega t$ بـ θ نصف قطرية .

تستعمل زاوية الطور في الهندسة الكهربائية بصورة عامة بالدرجات بدلاً من الزوايا نصف القطرية ولا يحدث أي التباس اذا كان رمز الدرجة مستعمل دائماً .

$$v = 100 \sin \left(2\pi 1000t - \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{لذا فبدلاً من كتابة .}$$

$$v = 100 \sin (2\pi 1000t - 30^\circ) \quad \text{نستعمل عادة}$$

وعند مقارنة موجتين جيبيتين بالطور يجب أن يكتبنا بشكل موجتين جيبيتين أو بشكل موجتين جيبتاميتين وأن كلا الموجتين يكتبان باتساع موجب وكل منهما يجب أن يكون لهما التردد نفسه . ومن الواضح أيضاً أن مضاعفات الـ 360° يمكن ان تجمع الى الازاحة الزاوية او تطرح منها لأي دالة جيبية بدون تغيير قيمة الدالة .

$$v_1 = V_{m1} \sin (5t - 30^\circ) \quad \text{لذا يمكننا القول بأن}$$

يتخلف عن

$$\begin{aligned} v_2 &= V_{m2} \cos (5t + 10^\circ) \\ &= V_{m2} \sin (5t + 90^\circ + 10^\circ) \\ &= V_{m2} \sin (5t + 100^\circ) \end{aligned}$$

بـ 130° . كما يصح القول بأن v_1 تسبق v_2 بـ 230° لأنه يمكن كتابة v_2 كالآتي :

$$v_2 = V_{m2} \sin (5t - 260^\circ)$$

وان كلاً من V_{m1} و V_{m2} افترضت قيمتهما موجبتين . كما يعبر عن الفرق في الطور بين مقدارين جيبيين اعتيادياً بتلك الزاوية الأقل قيمة أو المساوية لـ 180° .

وان مفهوم علاقة السبق والتخلف هذه بين قيمتين جيبيتين سيستعمل بكثرة كما يجب أن يكون بالامكان تميز هذه العلاقة رياضياً أو بالرسم .

تمرين

2 - 8 أوجد الزاوية التي يتخلف بها i_2 عن i_1 ، إذا كان
(أ) $i_2 = 120 \cos (100\pi t - 30^\circ)$ و $i_1 = 8 \cos (100\pi t + 20^\circ) - 5 \sin (100\pi t + 50^\circ)$ و
(ج) $-6 \sin (100\pi t - 30^\circ)$

الجواب 130° ; 10° ; -90° .

8 - 3 أوجد A و B و C و ϕ إذا كان

$$60 \cos (120\pi t - 30^\circ) + 40 \sin (120\pi t + 45^\circ) = A \cos 120\pi t + B \sin 120\pi t = C \cos$$

$$(120\pi t + \phi) \quad \text{الجواب } 58.3; 80.2; 99.2; -36.0^\circ$$

3 - 8 الاستجابة المرغمة للدالات المرغمة الجيبية :

FORCED RESPONSE TO SINUSOIDAL FORCING FUNCTIONS

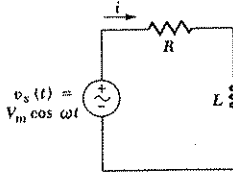
لقد اطلعنا على الخصائص الرياضية للمقادير الجيبية ، ويمكننا وصفها ومقارنتها بمهارة . لذا فاننا مستعدون لتطبيق الدالة المرغمة الجيبية على الدائرة البسيطة والحصول على الاستجابة المرغمة . وسوف نكتب أولاً معادلة التفاضل التي تطبق على الدائرة المعطاة . ويكون الحل الكامل لهذه المعادلة من جزئين : الحل المتمم (والذي يدعى بالاستجابة الطبيعية ، والتكامل الخاص (أو الاستجابة المرغمة) . لا تعتمد الاستجابة الطبيعية على الهيئة الرياضية للدالة المرغمة لكنها تعتمد فقط على نوع الدائرة وقيم العناصر والظروف الابتدائية . ويمكن ايجادها بجعل جميع الدالات المرغمة تساوي صفراً ، لذا نقلص المعادلة الى معادلة تفاضلية متجانسة خطية بسيطة . وقد وجدنا فعلاً الاستجابة الطبيعية لعدد من دوائر الـ RL و RC و RLC

أن الاستجابة المرغمة لها الشكل الرياضي نفسه للدالة المرغمة مضافاً اليه كل مشتقاتها التفاضلية وأول تكامل . ومن هذه المعلومات يظهر بأن طريقة واحدة يمكن بواسطتها ايجاد الاستجابة المرغمة بفرض أن الحل متكون من مجموع الدالات هذه حيث أن كل دالة فيها أتساع مجهول يجب أن يحسب بالتعويض المباشر في المعادلة التفاضلية . وهذه الطريقة طويلة ولكنها إحدى الطرق التي سنستعملها في هذا الفصل لتقديم التحليل الجيبي لأنها لا تشمل على كثير من الأفكار الجديدة . ولو لم تكن الطرق الأخرى التي ستشرح في الفصول القادمة موجودة لأصبح تحليل الدوائر غير عملي وفن غير مفيد .

يرد التعبير استجابة الحالة المستقرة ملازماً للاستجابة المرغمة والدوائر التي سنتطرق إليها للتحليل تدعى بصورة عامة بأنها في حالة الاستقرار الجيبي . ولسوء الحظ يظن البعض أن الحالة المستقرة تعني « عدم التغير مع الزمن » . وهذا صحيح للدالات المرغمة للتيار المستمر ولكن استجابة الحالة المستقرة الجيبية تتغير مع الزمن حتماً . تُنسب الحالة المستقرة الى الطرف الذي نصل اليه بعد أن تكون الاستجابة العابرة transient أو الاستجابة الطبيعية قد تلاشت .

والآن دعنا نأخذ دائرة RL المتوالية المبينة في الشكل 4 - 8 . فولتية المصدر الجيبية $v_s = V_m \cos \omega t$ قد سبق وأدخلت في الدائرة منذ وقت بعيد ، بينما تلاشت الاستجابة الطبيعية كلياً . ونحاول ايجاد الاستجابة المرغمة او إستجابة الحالة المستقرة والتي يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$$



شكل 4 - 8 دائرة RL المتوالية والتي مطلوب ايجاد الاستجابة المرغمة لها .

ثم نحصل على شكل دالة الاستجابة المرغمة بعدئذ بالتكامل وتكرار تفاضل الدالة المرغمة فنحصل على شكلين مختلفين فقط $\sin \omega t$ و $\cos \omega t$. ويجب أن تكون الاستجابة المرغمة عندئذ بالشكل العام التالي .

$$i(t) = I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t$$

حيث أن I_1 و I_2 هما ثابتان حقيقيان قيمتهما تعتمدان على V_m و R و L و ω . ولا يجوز أن يظهر ثابت أو دالة أسية . وبتعويض الشكل المفترض للحل في المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$L(-I_1 \omega \sin \omega t + I_2 \omega \cos \omega t) + R(I_1 \cos \omega t + I_2 \sin \omega t) = V_m \cos \omega t$$

وإذا جمعنا الحدود جيب التمامية والجيبيية . نحصل على :

$$(-LI_1\omega + RI_2) \sin \omega t + (LI_2\omega + RI_1 - V_m) \cos \omega t = 0$$

وهذه المعادلة يجب أن تكون صحيحة لجميع قيم t . ويمكن أن نتوصل الى ذلك فقط اذا كانت كل من معاملات الضرب لـ $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ صفراً . لذا

$$-\omega LI_1 + RI_2 = 0 \quad \omega LI_2 + RI_1 - V_m = 0$$

والحل الآتي لـ I_1 و I_2 سيكون

$$I_1 = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad I_2 = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

لذا فقد حصلنا على الدالة المرغمة

$$i(t) = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t \quad (2)$$

وهذا التعبير معقد نوعاً ما على أي حال. والصورة الأوضح لهذه الدالة يمكن الحصول عليها بالتعبير عن الاستجابة بدلالة الجيب أو جيب التمام مع زاوية الطور. دعنا نختار جيب التمام كتوقع للطريقة المبينة في الفصل القادم.

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta) \quad (3)$$

وهناك طريقتان على الأقل لايجاد قيم A و θ تفرضان نفسيهما. بتعويض (3) مباشرة في المعادلة التفاضلية الاصلية أو ببساطة بمساواة الحلين (2) و (3)

دعنا نختار الطريقة الأخيرة. لأن الأولى ستكون مسألة ممتازة في نهاية الفصل. وعند مساواة (2) و (3) بعد فتح الدالة $\cos(\omega t - \theta)$ يكون

$$A \cos \theta \cos \omega t + A \sin \theta \sin \omega t = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

ومرة أخرى بضم معاملات $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ وجعلها تساوي صفراً نجد:

$$A \cos \theta = \frac{RV_m}{R^2 + \omega^2 L^2} \quad \text{and} \quad A \sin \theta = \frac{\omega LV_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

لغرض ايجاد A و θ نقسم إحدى المعادلتين على الأخرى

$$\frac{A \sin \theta}{A \cos \theta} = \tan \theta = \frac{\omega L}{R}$$

وكذلك بتربيع كلا المعادلتين وجمع النتائج

$$A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta = A^2 = \frac{R^2 V_m^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} + \frac{\omega^2 L^2 V_m^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} = \frac{V_m^2}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad \text{لذلك}$$

$$A = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{وكذلك}$$

أما الشكل الآخر للاستجابة المرغمة فهو

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right) \quad (4)$$

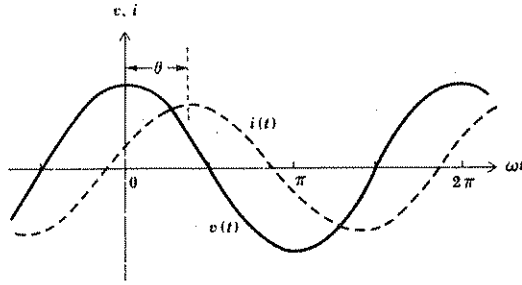
والخصائص الكهربائية للاستجابة $i(t)$ يجب أن تؤخذ بنظر الاعتبار فاتساع الاستجابة يتناسب مع اتساع الدالة المرغمة وإن لم يكن ذلك صحيحاً يعني ذلك أن لوجود للخطية . ويتناقص اتساع الاستجابة أيضاً بازدياد R أو L أو ω ولكن ليس بتناسب طردي . وهذا يتأكد لنا من المعادلة التفاضلية لأن الزيادة في R أو L أو ω تتطلب نقصاناً في اتساع التيار إذا لم يتغير اتساع فولتية المصدر ويظهر بأن التيار يتخلف عن الفولتية المسلطة بـ $\tan^{-1}(\omega L/R)$ وهي زاوية محصورة بين الصفر و 90° . عندما $\omega = 0$ أو $L = 0$ ويجب أن يكون التيار بطور الفولتية نفسه لأن الحالة الأولى هي للتيار المستمر والثانية تكون دائرة مقاومة . وهذه النتيجة متوقعة . إذا كانت $R = 0$ فالتيار يتخلف عن الفولتية بـ 90° عندما $v_s = L(di/dt)$ والعلاقة التفاضلية التكاملية بين الجيب وجيب تمام تبين القيمة 90° لفرق الطور .

لذا فالمحث يتخلف التيار فيه عن الفولتية بزاوية مقدارها 90° بالضبط ، إذا استخدمنا مفهوم الاشارات غير الفعالة . وبطريقة مشابهة يمكن ان نبين أن التيار خلال متسعة يسبق الفولتية عبر طرفيها بـ 90° .

والفولتية المسلطة والتيار الناتج مرسومان على محور الـ ωt نفسه في الشكل 8.6 ولكن أفترض إتساعاً للتيار والفولتية كيفما اتفق . لقد اتضحت الآن الحقيقة القائلة أن التيار يتخلف عن الفولتية في دائرة RL البسيطة . وسوف يكون بعدئذ بمقدورنا أن نبين بسهولة بأن هذه النتيجة نموذجية لجميع الدوائر الحثية ، أي الدوائر المتكونة من محثات ومقاومات . وإن فرق زاوية الطور بين التيار والفولتية يعتمد على نسبة الكمية ωL الى R . وتسمى ωL المفاعلة الحثية للمحثة . وتقاس بالأوم وهي مقياس للمعارضة التي تسلطها المحثة ضد مرور التيار الجيبي . وستكلم على المفاعلة في الفصل القادم بتفصيل أكثر .

ولم تكن الطريقة التي وجدنا بواسطتها إستجابة الحالة المستقرة الجيبية لدائرة RL المتوالية البسيطة مسألة بديهية . ويمكننا أن نتصور أن التعقيد في التحليل جاء بسبب ظهور المحثة ولو كان كل من العنصرين غير الفعالين مقاومين لكان التحليل سهلاً جداً . وذلك لأن سهولة التحليل هذه ماهي الا نتيجة قانون أوم الذي يربط الفولتية والتيار . وإن العلاقة بين فولتية المحثة والتيارها ليسا من السهولة نفسها على أي حال . فبدلاً من حل معادلة جبرية نواجه معادلة تفاضلية غير متجانسة وسيكون من غير الممكن عملياً تحليل كل دائرة بالطريقة المشروحة سابقاً .

وسوف يكرس الفصل القادم للخطوات المتخذة لتبسيط التحليل وستكون نتائجننا علاقات جبرية بين التيار الجيبي والفولتية الجيبية للمحاثات والمتسعات وكذلك للمقاومات . وسيكون بمقدورنا إنتاج مجموعة من المعادلات الجبرية للدائرة مهما كانت معقدة . وستكون الثوابت والمتغيرات في المعادلات الجبرية ارقاماً مركبة بدلاً من أن تكون أرقاماً حقيقية ثم يصبح التحليل الجيبي لأي دائرة بحالة الأستقرار ببساطة مقارباً لتحليل الدائرة المقاربة المشابهة .



الشكل 5 - 8 الدالة الجيبية المرغمة (المتصلة) واستجابة التيار الجيبية الناتجة (المتقطعة) لدائرة RL المتواليه المبينة بالشكل 4 - 8 .

تمرينان : -

4 - 8 قيمتا العنصرين في الشكل 4 - 8 هما $R = 15 \Omega$ و $L = 50 \text{ mH}$. افرض أن

$$v_s = 50 \cos 100\pi t \text{ V}$$

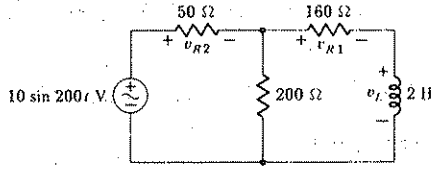
ثم أوجد عندما $t = 6 \text{ ms}$ كلاً من : (أ) i ; (ب) القدرة الممتصة من قبل المقاوم (ج) القدرة الممتصة من المحث .

الجواب $1.092 \text{ A}; 17.9 \text{ W}; -34.8 \text{ W}$

5 - 8 باستخدام نظرية ثفنن بسط الدائرة المبينة في الشكل 6.6 ثم أوجد القيم

التالية عند $t = 0$: (أ) v_{R1} (ب) v_L (ج) v_{R2}

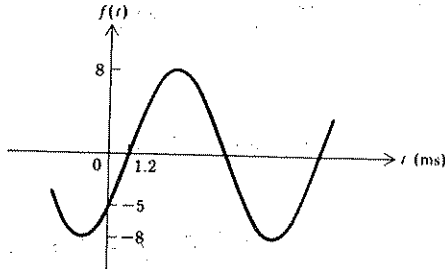
الجواب $2.30 \text{ V}; -0.64 \text{ V}; -2.56 \text{ V}$



الشكل 6 - 8 أنظر التمرين 5 - 8

مسائل :

- 1 □ فولتية جيبيية تساوي الصفر عندما $t = -1.6 \text{ ms}$ ثم تزداد بعد ذلك وتعبير الصفر عندما $t = 4.65 \text{ ms}$ (أ) احسب T و f و ω (ب) اذا كانت $v(0) = 20 \text{ V}$ أوجد $v(t)$ (ج) مامقدار زاوية سبق الفولتية $v(t)$ للتيار $i = 5 \cos(\omega t - 110^\circ) \text{ A}$ ؟
- 2 شكل موجة جيبيية مبين في الشكل 2 - 8 ب. تعبر الموجة الصفر كل $5 \mu\text{s}$ ولها قيمة أية مقدارها 7 وحدات عند $t = 0.5 \mu\text{s}$. أوجد (أ) T (ب) f (ج) ω (د) الاتساع (هـ) $v(12.18 \mu\text{s})$.
- 3 □ للموجة الجيبيية المبينة في الشكل 8 - 7 أوجد (أ) T (ب) f (ج) ω (د) A و ϕ اذا كانت $f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ (هـ) θ و A اذا كانت $f(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ و $f(0.0014)$.



الشكل 7 - 8 أنظر المسألة 3

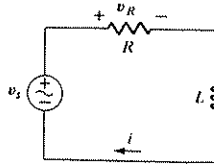
4 حل السؤال المشار اليه في الشرح بتعويض التيار المفترض المذكور في المعادلة

$$i(t) = A \cos(\omega t - \theta) \quad (3)$$

مباشرة في المعادلة التفاضلية $L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos \omega t$

لغرض تبيان أن قيمتي A و θ يمكن الحصول عليهما ويحققان المعادلة (4).

5 افرض أن $v_R = 100 \cos(200t - 45^\circ) \text{ V}$ وأن $v_s = V_m \cos(200t - 15^\circ) \text{ V}$ في الشكل 8-8 . اذا كانت $R = 10 \Omega$, أوجد L و V_m

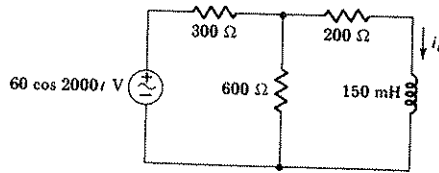


الشكل 8-8 أنظر المسألتين 5 و 6 .

□ 6 بالرجوع الى الدائرة المبينة في الشكل 8-8 افرض أن $i = 2 \sin(500t - 40^\circ)$

وأن $R = 200 \Omega$ و $L = 0.1 \text{ H}$. أوجد فولتية المصدر $v_s(t)$

7 محث محاثته 0.25-H ومقاومة سلكه $10\text{-}\Omega$. ربط الى مصدر 60-Hz . اذا كان اتساع فولتية المصدر عند فتح دائرته هو $120\sqrt{2} \text{ V}$ ومقاومته الداخلية 10Ω . أوجد اتساع الفولتية الجيبية عبر المحث (مزيج المحث 0.25-H والمقاومة 10Ω) .

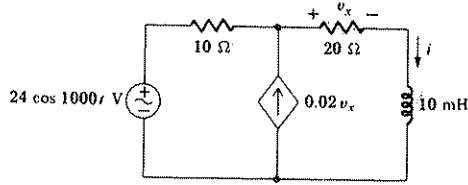


الشكل 8-9 أنظر المسألة 8 .

□ 8 أوجد $i_L(t)$ للدائرة المبينة في الشكل 8-9 .

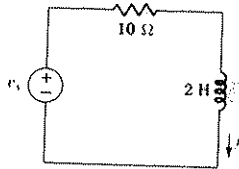
9 للدائرة المبينة في الشكل 10 - 8 ، برهن على أن التيار يعرف بالمعادلة

$$26i + 0.01 \frac{di}{dt} = 24 \cos 1000t$$



الشكل 10 - 8 أنظر المسألة 9

10 (أ) أوجد $i(t)$ للدائرة المبينة في الشكل 11 - 8 إذا كانت $v_s = 40 \cos 5t \text{ V}$ (ب) إذا كانت $v_s = 40(\cos 5t)u(t) \text{ V}$. أوجد المركبة القسرية للتيار $i(t)$ (ج) أوجد الاستجابة الكاملة لـ $i(t)$ إذا كانت $v_s = 40(\cos 5t)u(t) \text{ V}$.



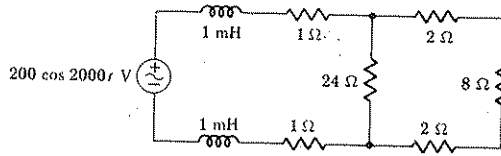
الشكل 11 - 8 أنظر المسألتين 10 و 11.

11 افترض أن $v_s = 20 \cos 5t + 30 \cos 10t \text{ V}$ □

في الشكل 11 - 8. أوجد $i(t)$.

12. مامقدار القيمة القصوى للفولتية الموجودة عبر المقاوم $8\text{-}\Omega$ في الشكل 12 -

8؟ ماهي أول لحظة من الزمن بعد $t = 0$ تحدث فيها؟



الشكل 12 - 8 أنظر المسألة 12 .

13 مصدر فولتية $V_m \cos \omega t$ ومقاوم R وامتسعة C كلها مربوطة على التوالي
 (أ) اكتب معادلة تفاضلية تكاملية بدلالة تيار الدارة i ثم فاضلها للحصول على
 المعادلة التفاضلية لهذه الدائرة: (ب) افرض أن حلاً عاماً مناسباً يشكل الاستجابة
 القسرية $i(t)$ ، عوض ذلك في المعادلة التفاضلية ثم أوجد الشكل الدقيق للاستجابة
 القسرية.

الفصل التاسع

فكرة الطوري

THE PHASOR CONCEPT

1 - 2 مقدمة : INTRODUCTION

كرسنا جل اهتمامنا في الأجزاء السابقة من دراستنا لتحليل الدائرة على دراسة الدائرة المقاومة . وعلى أي حال ، يجب ان نتذكر أننا كنا غالباً مانعد بأن تلك الطرق التي طبقت على الدوائر المقاومة سوف تبرهن فيما بعد بأنها ممكنة التطبيق على دوائر تحوي محثات و متسعات كذلك . وفي هذا الفصل سنحاول وصف أسس الحل التي ستؤدي الى أن يصبح ذلك التنبؤ حقيقة . وسوف نطور طريقة تمثيل الدالة المرغمة الجيبية او الاستجابة الجيبية برمز العدد المركب المسمى بالتحويل الطوري أو بالتبسيط الطوري . وما الأخير إلا كمية مؤلفة من اتساع زاوية طور الجيبي . وبهذه الطريقة يمثل الجيبي كاملاً تماماً كما لو عبر عنه بدالة تحليلية للزمن . وباستخدام الطوريات بدل أخذ تفاضلات وتكاملات الكميات الجيبية كما فعلنا في الفصل السابق سوف نقوم بالحقيقة بتبسيط كبير في التحليل الجيبي في حالة الاستقرار لدوائر RLC العامة . وسيصبح هذا التبسيط واضحاً في نهاية هذا الفصل .

وإن استعمال التحويل الرياضي لتبسيط المسألة يجب أن لا يكون غريباً عنا . فعلى سبيل المثال استعملنا جميعاً اللوغاريتمات لتبسيط حسابات عمليات الضرب والقسمة . لأجل ضرب عدة أرقام مع بعضها نحسب أولاً لوغاريتيمات كل رقم من الأرقام أو « نحول » الأرقام الى بدائل للوصف الرياضي .

ويمكننا الآن وصف هذه العملية بأنها التحويل اللوغاريتمي « ثم تجمع جميع اللوغاريتمات للحصول على لورغاريتم حاصل الضرب . وأخيراً نجد العدد المقابل

للولوغاريتم . وهذه العملية يمكن الاصطلاح عليها « بالتحويل العكسي » فالعدد المقابل للوغاريتم هو نتيجتنا النهائية المطلوبة . وهذا الحل نقلنا من مجال الأعداد الأعتيادية الى مجال اللوغاريتمات ثم بالعكس .

ومن الأمثلة الأخرى المتعارف عليها لعمليات التحويل التمثيلات الممكنة لدائرة *circle* . حيث يمكن تحديدها كمعادلة رياضية أو كشكل هندسي على مستوى الاحداثيات المتعامدة أو بثلاثة أعداد فقط : أولها هو قيمة الاحداثي السيني للمركز والثاني هو قيمة الاحداثي الصادي والثالث هو قيمة نصف القطر . وان كلاً من التمثيلات تحوي بالضبط المعلومات نفسها . واذا وضعت قواعد التحويل أولاً في الهندسة التحليلية لانجد صعوبة للتحويل من المجال الجبري الى المجال الهندسي أو الى المجال الثلاثي المطلوب .

وهناك تحويلات متعددة أخرى يمكن أن يتم تبسيطها باستخدام فكرة الطوري .

9

2 - 9 الدالة المرغمة المركبة THE COMPLEX FORCING FUNCTION

نحن على استعداد لنفكر بتطبيق الدالة المرغمة المركبة (أي التي تمتلك كلاً من الجزئين الحقيقي والخيالي) على الشبكة الكهربائية¹ . وربما يظهر ذلك غريباً ولكننا سنجد بأن استعمال الكميات المركبة في تحليل الحالة المستقرة الجيبية يؤدي الى طرق أكثر بساطة من تلك التي تتضمن كميات حقيقية نقية . ويمكننا أن نتوقع أن الدالة المرغمة يجب أن تكون مركبة لنتنتج استجابة مركبة وربما نشك وشكنا صحيح بأن الجزء الحقيقي للدالة المرغمة سينتج الجزء الحقيقي من الاستجابة ، بينما الجزء الخيالي للدالة المرغمة سينتج الجزء الخيالي للاستجابة . وهدفنا في هذه الفقرة هو البرهنة أو على الاقل القول أن هذه التوقعات صحيحة .

دعنا نناقش المسألة بمصطلحات عامة نوعاً ما أولاً لغرض توضيح الطريقة التي بها يمكننا البرهنة على ادعائنا بشكل ايجابي علينا أن نكوّن شبكة عامة ونحلها بواسطة منظومة المعادلات الآتية . ففي الشكل 1 - 9 المصدر الجيبي

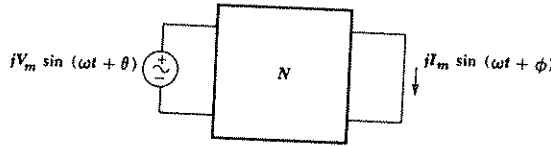
$$V_1 \cos(\omega t + \theta) \quad (1)$$

1 الملحق 3 يعرف المدد المركب والمصطلحات المنبثقة عنه كما يشرح العمليات الحسابية على الأعداد المركبة ويشرح متطابقة اويلر والصيغتين الاسمية والتطبيقية .

ربط الى شبكة عامة سوف نفترض اعتبارياً أنها غير فعالة لأجل تجنب التعقيد في استعمالنا لقاعدة التراكب بعدئذ . ويطلب حساب استجابة التيار في فرع آخر في الشبكة . على فرض أن المتغيرات الظاهرة في (1) كلها كميات حقيقية . المناقشة في الفصل الثامن للنظرية التي تحسب بواسطتها الدالة المرغمة الجيبية من خلال فرضية الشكل الجيبي بأتساع اعتباطي وزاوية طور كيفما اتفق تبين بأن الاستجابة يمكن تمثيلها بـ

$$I_m \cos (\omega t + \phi) \quad (2)$$

الدالة المرغمة الجيبية دائماً تنتج استجابة مرغمة جيبية .
والآن دعنا نغير مرجع الزمن بزحزحة الطور للدالة المرغمة بـ 90° (أو استبدالنا t بـ $t - \pi/2\omega$) .



الشكل 1 - 9 الدالة الجيبية القسرية $V_m \cos(\omega t + \theta)$ أنتجت استجابة جيبية للحالة المستقرة $I_m \cos(\omega t + \phi)$

لذا فالدالة المرغمة

$$V_m \cos(\omega t + \theta - 90^\circ) = V_m \sin(\omega t + \theta) \quad (3)$$

عندما تطبق على الشبكة نفسها ستنتج استجابة مناظرة .

$$I_m \cos(\omega t + \phi - 90^\circ) = I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (4)$$

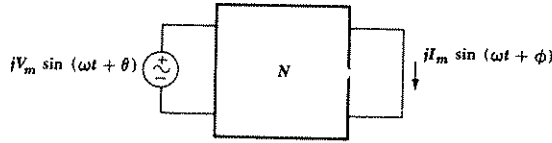
وبعدها يجب الابتعاد عن الحقيقة الفيزيائية بتسليط دالة مرغمة خيالية والتي لا يمكن تسليطها في المختبر ولكن يمكن تطبيقها رياضياً .
سَنكوِّن مصيدراً خيالياً ببساطة . فمن الضروري فقط ضرب المصدر المعبر عنه بـ (3) بعامل الضرب الخيالي j ، لذا نطبق .

$$jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (5)$$

ماهي الاستجابة؟ اذا ضاعفنا المصدر فإن قاعدة الخطية ستتطلب مضاعفة الاستجابة. وبضرب الدالة المرغمة بثابت k ينتج ضرب الاستجابة بالثابت k نفسه. وحقيقة أن هذا الثابت هو عامل الضرب الخيالي j ، سوف لا تنقص هذه العلاقة على الرغم من أن تعريفنا الأولي ومناقشتنا للخطية لا تشمل بصورة خاصة الثوابت المركبة. والآن من المعقول الاستنتاج بان ذلك لا يستثني هذه الثوابت، نظراً لأن المناقشة بأكملها صحيحة اذا كانت جميع الثوابت في المعادلات مركبة. وان الاستجابة "در الخيالي المذكور في المعادلة (5) سيكون

$$jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (6)$$

ان المصدر الخيالي والاستجابة موضحان في الشكل 9.2



الشكل 2-9 الدالة القسرية الجيبية الخيالية $jV_m \sin(\omega t + \theta)$ تنتج استجابة جيبية خيالية $jI_m \sin(\omega t + \phi)$

لقد سلطنا مصدراً حقيقياً ولكننا حصلنا على استجابة حقيقية وكذلك سلطنا مصدراً خيالياً وحصلنا على استجابة خيالية. والآن يمكن أن نستعمل نظرية التراكم لايجاد الاستجابة للدالة المرغمة المركبة التي هي مجموع الدالات المرغمة الحقيقية والخيالية. وان إمكانية تطبيق التراكم طبعاً يمكن ضمانه بخطية الدائرة ولا يعتمد على شكل الدالات المرغمة. لذا فان مجموع الدالات المرغمة لـ (1) و (5)

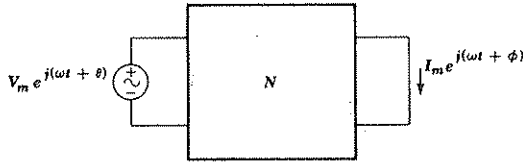
$$V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (7)$$

يجب أن تنتج الاستجابة التي هي مجموع (2) و (6)

$$I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (8)$$

وان المصدر المركب والاستجابة يمكن تمثيلها ببساطة أكثر باستخدام متطابقة اويلر. فالمصدر (7) يصبح

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} \quad (9)$$



شكل 3 - 9 الدالة القسرية المركبة $V_m e^{j(\omega t + \theta)}$ أنتجت استجابة مركبة $I_m e^{j(\omega t + \phi)}$ في الشبكة المبينة في الشكل 1 - 9

واستجابة (8) هي

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} \quad (10)$$

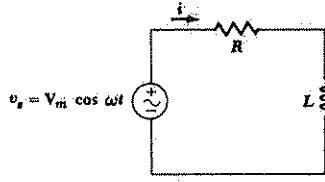
والمصدر المركب والاستجابة موضحان في الشكل 9.3 .

وهناك عدة استنتاجات يمكن الوصول إليها من هذا المثال العام . فالدالة المرغمة الحقيقية أو الخيالية أو المركبة تنتج استجابة حقيقية أو خيالية أو مركبة على التعاقب . هذا بالإضافة الى أن الدالة المرغمة المركبة يمكن اعتبارها باستعمال نظرية التراكب كمجموع الدالة المرغمة الحقيقية والخيالية . لذا فالجزء الحقيقي للاستجابة المركبة ينتج من الجزء الحقيقي للدالة المرغمة المركبة ، بينما الجزء الخيالي للاستجابة سببه الجزء الخيالي للدالة المرغمة المركبة .

فبدلاً من تطبيق الدالة المرغمة الحقيقية للحصول على الاستجابة الحقيقية المطلوبة نطبق دالة مرغمة مركبة جزءها الحقيقي هو الدالة المرغمة الحقيقية المعطاة فنحصل على الاستجابة المركبة التي جزءها الحقيقي هو الاستجابة الحقيقية المطلوبة من خلال هذه الطريقة فان المعادلات التكاملية التفاضلية التي تصف استجابة حالة الاستقرار للدائرة ستصبح معادلات جبرية بسيطة .

دعنا نحاول تطبيق هذه الفكرة على دائرة RL المتوالية البسيطة المبينة في الشكل 9.4 . فالمصدر الحقيقي المسلط هو $V_m \cos \omega t$ والاستجابة الحقيقية المطلوبة هي $i(t)$

نكون أولاً الدالة المرغمة المركبة التي باستعمال متطابقة أويلر عليها تنتج الدالة المرغمة الحقيقية لان



الشكل 9.4 دائرة بسيطة في حالة استقرار جيبي تحلل بتسليط دالة قسرية مركبة

$$\cos \omega t = \text{Re } e^{j\omega t}$$

ثم أن المصدر المركب اللازم هو

$$V_m e^{j\omega t}$$

والاستجابة المركبة الناتجة يعبر عنها بدلالة الاتساع المجهول I_m وزاوية الطور المجهولة ϕ

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

وعند كتابة المعادلة التفاضلية لهذه الدالة بصورة خاصة .

$$Ri + L \frac{di}{dt} = v_s$$

وتدخل تعابيرنا المركبة لـ v_s و i

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + L \frac{d}{dt}(I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = V_m e^{j\omega t}$$

وبأخذ التفاضل الميئين .

$$RI_m e^{j(\omega t + \phi)} + j\omega LI_m e^{j(\omega t + \phi)} = V_m e^{j\omega t}$$

نحصل على المعادلة الجبرية المركبة . ولأجل حساب قيم I_m و ϕ نقسم جهتي المعادلة على $e^{j\omega t}$

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega LI_m e^{j\phi} = V_m \quad (11)$$

وباستخراج الكميات المشتركة في الجهة اليسرى خارج القوس

$$I_m e^{j\phi} (R + j\omega L) = V_m$$

ولدى إعادة ترتيب المعادلة

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{R + j\omega L}$$

يشار الى I_m و ϕ بالتعبير عن الجهة اليمنى من المعادلة بشكل أسّي أو قطبي

$$I_m e^{j\phi} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j[-\tan^{-1}(\omega L/R)]} \quad (12)$$

لذا

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\phi = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

وأن

فالاستجابة المركبة معطاة بالمعادلة (12) ويمكن الحصول على هذه الاستجابة الحقيقية لـ $i(t)$ بإعادة العامل $e^{j\omega t}$ الى جهتي المعادلة (12) وأخذ الجزء الحقيقي كما يمكن الحصول عليها بسهولة بقانون أويلر الشامل . لذا

$$\begin{aligned} i(t) &= I_m \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned}$$

والتي تتفق مع الاستجابة التي حصلنا عليها للدائرة نفسها في الفصل السابق أي المعادلة (8.4) . على الرغم من أننا عملنا بنجاح على مسألة جسيمة في حالة الاستقرار بتطبيق الدالة المرغمة المركبة وحصلنا على الاستجابة المركبة لكننا لم نستفد من كامل قوة التمثيل المركب . ولأجل عمل ذلك يجب أن نستمر بفكرة المصدر المركب أو الاستجابة بخطوة اضافية أخرى والكمية المسماة بالطوري نفسها .

تمرينان : -

9.1 (اذا واجهتك صعوبة في حل هذا التمرين ، ادرس ملحق 3

9 احسب بدلالة الاحداثيات المتعامدة (أ) $4/50^\circ + 10e^{-j70^\circ}$ (ب) $1/j4 + 1/(1-j1)$

احسب ومثل النتيجة بالصيغة القطبية (ج) $1 + (2/60^\circ)(1-j1)$ (د) $j + 2e^{j1}$

الجواب $5.99 - j6.33$; $0.5 + j0.25$; $2.89/68.1^\circ$; $3.80/11.10^\circ$

9.2 باستخدام اصطلاح الاشارات غير الفعالة ، اوجد الفولتية المركبة الناتجة

عندما يكون التيار المركب (أ) $10e^{j(500t+50^\circ)}$ A مسلطاً على محث بمقداره 5-mH

(ب) $(6 + j8)e^{j(500t-3.13^\circ)}$ A يسقط على مقاوم $2-\Omega$ (ج)

$j10e^{j(500t+50^\circ)}$ A يسقط على متسعة ذات $1250-\mu F$

الجواب : $16e^{j(500t+50^\circ)}$; $20e^{j(500t+50^\circ)}$; $25e^{j(500t+140^\circ)}$ V

9.3 الطوري THE PHASOR

ان التيار أو الفولتية الجيبية لتردد معين يمكن تحديده بمتغيرين هما الاتساع وزاوية الطور. وان التمثيل المركب للفولتية أو التيار يحدد أيضاً بالمتغيرين نفسيهما. فعلى سبيل المثال الشكل الجيبي المفترض لاستجابة التيار في المثال أعلاه كان

$$I_m \cos(\omega t + \phi)$$

والتمثيل المناظر لهذا التيار في الشكل المركب هو

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

فعند تشخيص I_m و ϕ يمكننا تعريف التيار بالضبط. لأي دائرة خطية تعمل في حالة الاستقرار الجيبي عند تردد منفرد ω فان كل تيار وفولتية يمكن وصفها كاملاً بمعرفة اتساعها وزاوية طورها. هذا بالإضافة الى أن التمثيل المركب لكل فولتية و تيار تحوي العامل $e^{j\omega t}$ نفسه. فالعامل غير ضروري لأنه موجود لكل كمية ولا يحوي معلومات مفيدة. وأن قيمة التردد بالطبع يمكن تمييزها بمراقبة أحد هذه العوامل. ولكن من الأسهل كتابة قيمة التردد قرب مخطط الدائرة مرة واحدة وللكل ولذا نتجنب حمل المعلومات الزائدة عن الحاجة على امتداد الحل. لذا يمكننا تبسيط مصدر الفولتية واستجابة التيار للمثال بتمثيلها بالضبط كـ

$$V_m \quad \text{or} \quad V_m e^{j0^\circ} \quad \text{and} \quad I_m e^{j\phi}$$

وهذه الكميات المركبة تكتب عادة بشكل قطبي بدلاً من الشكل الأسّي لأجل توفير بعض الوقت والجهد لذا فان فولتية المصدر

$$v(t) = V_m \cos \omega t$$

والآن نعبر عن الشكل المركب بـ

$$V_m / 0^\circ$$

واستجابة التيار

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

تصبح

$$I_m / \phi$$

ان هذا المختصر لتمثيل المركب يدعى بالطوري (2). دعنا نراجع الخطوات التي تحول بها الفولتية الجيبية الحقيقية أو التيار الى طوري وسنتمكن من تعريف الطوري بمعنى أدق ونعطيه الرمز الذي يمثله التيار الجيبي الحقيقي

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

يمكن أن نعبّر عنه كجزء حقيقي من الكمية المركبة بمتطابقه اويلر

$$i(t) = \text{Re}(I_m e^{j(\omega t + \phi)})$$

ثم نمثل التيار ككمية مركبة باسقاط رمز الجزء الحقيقي Re. لذا نجمع المركبة الخيالية الى التيار دون أن تؤثر على المركبة الحقيقية. وبحجب العامل $e^{j\omega t}$ يمكن ان تبسط الكمية أكثر من ذلك الى:

$$I = I_m e^{j\phi}$$

وبكتابة النتيجة بشكل قطبي

$$I = I_m / \phi$$

ان هذا المختصر للتمثيل المركب هو التمثيل الطوري. والطوريات هي كميات مركبة. لذا تكتب بالخط السميك. وتستعمل الحروف الكبيرة لتمثيل الطوري للكمية الكهربائية لأنها لم تبق دالة أنية للزمن. فالطوري يحوي معلومات عن الاتساع والطور فقط. ونميز هذا الفرق في وجهات النظر بالرجوع الى $i(t)$ كتمثيل في حيز الزمن وتعريف الطوري I كتمثيل في حيز التردد. ويجب أن يلاحظ بأن تعبير حيز التردد للتيار أو الفولتية لا يشمل بشكل صريح التردد. الا اننا ربما نفكر بالتردد وكأنه أساس في حيز التردد ويكون التأكيد عليه بحذفه (3).

وان الطريقة التي تغير بها $i(t)$ الى I تسمى التحويل من حيز الزمن الى حيز التردد والخطوات في التحويل من حيز الزمن الى حيز التردد هي كالآتي

1. اذا علمت الدالة الجيبية $i(t)$ في حيز الزمن أكتب $i(t)$ كموجة جيبتامية مع زاوية طور. فمثلاً $\sin \omega t$ يجب أن نكتب كـ $\cos(\omega t - 90^\circ)$
2. عبر عن الموجة جيب التمامية كجزء حقيقي لكمية مركبة باستعمال متطابقة اويلر.
3. اسقط Re

(2) بخلاف الفكرة الشائعة لم يكتشف الطوري من قبل الكابتن كيرك

(3) يشبه ذلك من يرسل رسالة محلية داخل العراق فان قليلاً من الناس يكتبون في العنوان العراق (الترجمون بتصرف)

4 . احجب $e^{j\omega t}$

من الناحية العملية نجد أنه من السهل القفز من الخطوة الأولى الى الجواب بأخذ الاتساع وزاوية الطور للموجة جيب التمامية من تعبير حيز الزمن .
وكمثال ، دعنا نحول الفولتية الآتية من حيز الزمن

$$v(t) = 100 \cos (400t - 30^\circ)$$

الى حيز التردد . وان التعبير في حيز الزمن هو بشكل موجة جيب تمامية ذات زاوية طور . ويمكن الحصول على التحويل من حيز الزمن الى حيز التردد بأخذ الجزء الحقيقي من التعبير المركب :

$$v(t) = \text{Re} (100e^{j(400t - 30^\circ)})$$

وباهمال Re وحجب $e^{j\omega t}$

$$V = 100 / -30^\circ$$

الا أنه من الأسهل التأكيد على الـ 100 و 30° - في التمثيل جيب التمامي في حيز الزمن وكتابة $V = 100 / -30^\circ$ مباشرة .

وبصورة مشابهة فان التيار في حيز الزمن

$$i(t) = 5 \sin (377t + 150^\circ)$$

يتحول الى الطوري :

$$I = 5 / 60^\circ$$

وقبل دراسة تحليل الدوائر في حالة الاستقرار الجيبي من خلال استعمال الطوريات ، ومن الضروري معرفة كيف نجري التحويل بسهولة بالعكس للعودة الى حيز الزمن من حيز التردد . وان الطريقة بالضغط هي عكس الترتيب المعطى أعلاه . لذا فالخطوات في التحويل من حيز التردد الى حيز الزمن هي التالي :

1 . اذا علمت التيار الطوري I في حيز التردد ، اكتب التعبير المركب بالشكل

الأسى

2 . أعد إدخال (اضرب بـ) العامل $e^{j\omega t}$

3 . أرجع عامل الجزء الحقيقي Re

4 . احصل على تمثيل حيز الزمن بتطبيق متطابقة يولر . فالتعبير الموجي جيب

التمامي الناتج يمكن تبديله الى موجة جيبيية ان رغبتنا باضافة الأراحة الزاوية

. 90

مرة أخرى يمكننا اختصار الرياضيات وكتابة التعبير في حيز الزمن باستخدام

الاتساع وزاوية الطور في التمثيل القطبي . لذا فالفولتية الطورية المعطاة :

$$V = 115 / -45^\circ$$

وبكتابة المكافئ في حيز التردد مباشرة

$$v(t) = 115 \cos(\omega t - 45^\circ)$$

ويمكن كتابة المعادلة بدلالة جيب الزلوية

$$v(t) = 115 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

لفرض تلمس طريقة تسليط الطوري في التحليل الجيبي للحالة المستقرة يمكننا القاء نظرة سريعة على مثال لدائرة RL المتوالية. فبعد عدد من الخطوات من كتابة المعادلة التفاضلية اللازمة، نصل الى المعادلة 11 والتي أعيدت كتابتها كما يأتي

$$RI_m e^{j\phi} + j\omega LI_m e^{j\phi} = V_m$$

وإذا عوضنا الطوريات للتيار

$$I = I_m / \phi$$

والفولتية

$$V = V_m / 0^\circ$$

نحصل على

$$RI + j\omega LI = V$$

أو

$$(R + j\omega L)I = V$$

(13)

والتي هي معادلة جبرية مركبة، فيها-التيار والفولتية معبر عنها بشكل طوري. هذه المعادلة هي اعقد قليلاً من قانون أوم لمقاوم واحد منفرد. وفي فرصة أخرى عند تحليل هذه الدائرة سنبدأ من (13).

تمرين

9.3 حول التيارات الآتية الى طوريات (أ) $800 \cos(\omega t + 130^\circ)$ (ب)

$$550 \sin(\omega t + 40^\circ) + 423 \sin(\omega t + 110^\circ) \text{ mA} \quad (\text{ج}) \quad 480 \cos \omega t - 640 \sin \omega t$$

$$\text{الجواب } 800/53.1^\circ; 800/-20.2^\circ; -514 + j613 \text{ mA}$$

4_9 حول الفولتيات الآتية الى كميات في حيز الزمن (أ) $-3 + j8$

$$(\text{ب}) \quad j(4 - j7) \quad \text{إذا كانت } 0 = V - 3 + 50/V$$

$$\text{الجواب } V \quad 7.07 \cos(\omega t \pm 77.8^\circ); 8.06 \cos(\omega t + 29.7^\circ); 8.54 \cos(\omega t + 110.6^\circ)$$

4 - 9 العلاقات الطورية لـ R و L و C :-

PHASOR RELATIONSHIPS FOR R, L, AND C

الآن بإمكاننا التحويل من حيز التردد واليه ونستطيع الاستمرار بتبسيطنا لتحليل حالة الاستقرار الجيبية بتكوين العلاقة بين الفولتية الطورية والتيار الطوري لكل من العناصر الثلاثة غير الفعالة سنبداً بالمعادلة التي تعرف كلا من العناصر وعلاقة حيز الزمن ونترك كل من التيار والفولتية تصبح كميات مركبة. فبعد حجب $e^{j\omega t}$ في كل المعادلة فإن العلاقة المرغوبة بين الفولتية الطورية والتيار الطوري ستصبح ظاهرة. ويكون المقاوم أبسط حالة. ففي حيز الزمن كما موضح بالشكل 9.4 (أ) المعادلة المعروفة هي:

$$v(t) = Ri(t) \quad (14)$$

والآن نسلط الفولتية المركبة

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = V_m \cos(\omega t + \theta) + jV_m \sin(\omega t + \theta) \quad (15)$$

ونفرض التيار المركب

$$I_m e^{j(\omega t + \phi)} = I_m \cos(\omega t + \phi) + jI_m \sin(\omega t + \phi) \quad (16)$$

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = RI_m e^{j(\omega t + \phi)} \quad \text{ونحصل على}$$

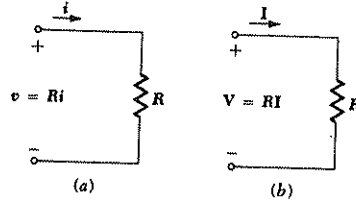
وبقسمة طرفي المعادلة على $e^{j\omega t}$ (أو إحجب $e^{j\omega t}$) نجد
أو بالشكل القطبي

$$V_m \underline{\theta} = RI_m \underline{\phi}$$

ولكن $V_m \underline{\theta}$ و $I_m \underline{\phi}$ تمثل طوريات الفولتية والتيار العامة V و I فقط. لذا

$$V = RI \quad (17)$$

ان علاقة الفولتية والتيار بالشكل الطوري للمقاومة لها شكل العلاقة بين فولتية والتيار الحيز الزمني نفسه. والمعادلة المعروفة بالشكل الطوري موضحة في الشكل 9.5 (ب). ويتضح تساوي الزاويتين θ و ϕ لذا فان التيار والفولتية لهما الطور نفسه.



الشكل 5 - 9 مقاومة مبدئية الفولتية والتيار (أ) في حيز الزمن في $v = Ri$ (ب) في حيز التردد $V = RI$.

وكمثال لاستعمال علاقات حيزي الزمن والتردد دعنا نفرض الفولتية $8 \cos(100t - 50^\circ)$ V عبر المقاوم $4\text{-}\Omega$. وعند الاشتغال في حيز الزمن نجد بأن التيار

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = 2 \cos(100t - 50^\circ) \quad \text{يجب أن يكون}$$

الشكل الطوري للفولتية نفسها هو $8 \angle -50^\circ$ V ، لذا فإن

$$I = \frac{V}{R} = 2 \angle -50^\circ \text{ A}$$

وإذا أرجعنا تحويل هذا الجواب الى حيز الزمن يتوضح حصولنا على تعبير التيار نفسه .

ومن الظاهر بأنه لا يوجد توفير في الوقت أو الجهد عند تحليل دائرة مقاومة في حيز التردد .

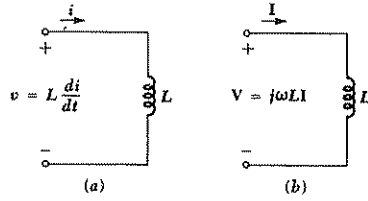
وبالحقيقة إذا كان ضرورياً تحويل مصدر معين في حيز الزمن الى حيز التردد ثم ترجمة الاستجابة المطلوبة الى حيز الزمن يكون من الأفضل العمل كلياً في حيز الزمن . وهذا قطعاً يطبق على أي دائرة تحوي مقاومة مع محاثاة أو مع متسعة .

دعنا ننظر الى المحث . فإن شبكة الحيز الزمني مبينة في الشكل 9.6 أ والمعادلة المعرفة في حيز الزمن هي

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (18)$$

وبعد تعويض معادلة الفولتية المركبة (15) ومعادلة التيار المركب (16) في

(18) لدينا



الشكل 9.6 محاثة L يوجد عليها فولتية ويمر فيها تيار (أ) في حيز الزمن $v = L di/dt$ (ب) في حيز التردد $V = j\omega LI$

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)})$$

وبأخذ التفاضل المبين

$$V_m e^{j(\omega t + \theta)} = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

وبحجب $e^{j\omega t}$

$$V_m e^{j\theta} = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

نحصل على العلاقة الطورية المطلوبة

$$V = j\omega LI \quad (19)$$

المعادلة التفاضلية في حيز الزمن أصبحت معادلة جبرية في حيز التردد. والعلاقة الطورية مبينة في الشكل 9.6 ب.

وكتوضيح للعلاقة الطورية افرض تسليط الفولتية $8\angle -50^\circ$ V عند التردد $\omega = 100$ rad/s على المحث 4-H من (14) يكون التيار الطوري

$$I = \frac{V}{j\omega L} = \frac{8\angle -50^\circ}{j100(4)} = -j0.02\angle -50^\circ$$

أو

$$I = 0.02\angle -140^\circ \text{ A}$$

وإذا عبرنا عن هذا التيار في حيز الزمن يصبح

$$i(t) = 0.02 \cos(100t - 140^\circ) \text{ A}$$

وهذه الاستجابة يمكن الحصول عليها بسهولة أيضاً بالاشتغال كلياً في حيز الزمن وسوف لا تكون بالسهولة نفسها إذا دمجت مقاومة أو متسعة مع محاثة.

العنصر الأخير الذي يجب أخذه بنظر الاعتبار هو المتسعة . فتعريف المتسعة في

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

حيز الزمن

(20)

التعبير المكافئ في حيز التردد يمكن الحصول عليه مرة أخرى بفرض $v(t)$ و $i(t)$ كميات مركبة لـ (15) و (16) وباخذ التفاضل المبين وحجب $e^{j\omega t}$ وتمييز

الطوريين I و V فهي

$$I = j\omega CV \quad (21)$$

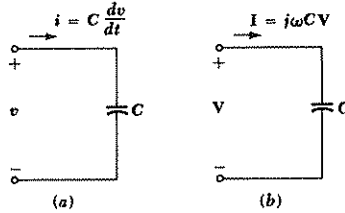
لذا فان I يسبق V بزاوية مقدارها 91° في المتسعة .

وإذا كانت الفولتية الطورية $8/\underline{-50^\circ}$ V مسلطة على المتسعة 4-F عند

$\omega = 100$ rad/s فان التيار الطوري هو

$$I = j100(4)(8/\underline{-50^\circ}) = 3200/\underline{40^\circ} \text{ A}$$

وان كمية التيار كبيرة جداً ولكن الحجم المفترض للمتسعة كان غير حقيقي أيضاً ، فاذا صنعت المتسعة 4-F من صحيفتين مسطحتين معزولتين بالهواء مسافة 1 mm فان كل صحيفة ستكون مساحتها تقريباً 85000 مرة بقدر ساحة كرة القدم (3) . يمثل الشكلان 9.7 أ و ب الحيزين الزمني والتردد للمقارنة .



الشكل 9-7 [أ] علاقة حيز الزمن (ب) علاقة حيز التردد [بين تيار وفولتية متسعة

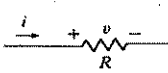
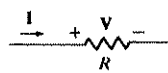
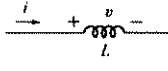
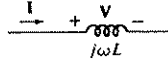
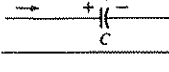
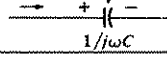
الآن حصلنا على علاقات $V-I$ للعناصر غير الفعالة الثلاثة وهذه النتائج ملخصة

في الجدول 9-1

(3) بضمنها المنطقة خلف الأهداف

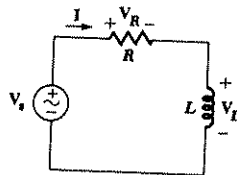
حيث تتضح التعابير عن $v-i$ في حيز الزمن و $V-I$ في حيز التردد في عمودين متجاورين للعناصر الثلاثة . وإن كل المعادلات جبرية وكلها خطية وتحوي معادلات المحاثة والمتسعة تشابهاً كبيراً مع قانون أوم . وسنستخدمها كما استخدمنا قانون أوم سابقاً

الجدول 1 - 9 مقارنة و خلاصة للعلاقات بين v و i في حيز الزمن و V و I في حيز التردد لـ R و L و C

حيز الزمن		حيز التردد	
	$v = Ri$	$V = RI$	
	$v = L \frac{di}{dt}$	$V = j\omega LI$	
	$v = \frac{1}{C} \int i dt$	$V = \frac{1}{j\omega C} I$	

وقبل أن نجري ذلك يجب أن نبين بأن الطوريات تحقق قانوني كرشوف وأن قانون الفولتية لكرشوف في حيز الزمن هو $v_1(t) + v_2(t) + \dots + v_N(t) = 0$ والآن نستعمل متطابقة اويلر لاستبدال كل فولتية حقيقية بالفولتية المركبة التي لها الجزء الحقيقي نفسه مع حجب $e^{j\omega t}$ من كل المعادلة . فنحصل على $V_1 + V_2 + \dots + V_N = 0$

كذلك كما يتضح أن قانون التيار لكرشوف يمكن التطبيق للتيارات الطورية للسبب نفسه .



الشكل 9.8 دائرة RZ المتوالية مع الفولتية الطورية المسلطة

والآن دعنا ننظر بايجاز الى دائرة RL المتواليه التي استعملناها عدة مرات سابقاً. فالدائرة المبينة في الشكل 9.8 يتضح فيها التيار الطوري وعدة فولتيات طورية. ويمكن أن نحصل على الاستجابة المطلوبة للتيار في حيز الزمن بايجاد التيار الطوري أولاً. والطريقة المشابهة التي استعملت لتحليل دائرتنا المقاومية الأولى ذات الدارة الواحدة. فمن قانون الفولتية لكروشوف.

$$V_R + V_L = V_s$$

والعلاقات التي حصلنا عليها مؤخراً بين $V-I$ للعناصر

$$RI + j\omega LI = V_s$$

يكون التيار الطوري بدلالة فولتية المصدر V_s

$$I = \frac{V_s}{R + j\omega L}$$

دعنا نختار قيمة فولتية المصدر V_m وزاوية الطور 0° والاختيار الأخير هو ايسر اختيار ممكن للمرجع.

$$I = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$$

لذا

ويمكن تحويل التيار الى حيز الزمن بكتابته بالشكل القطبي أولاً.

$$I = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

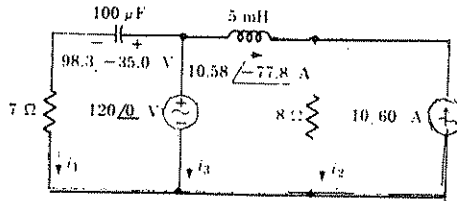
ثم نستمر بالخطوات الأخرى المعروفة بالترتيب نفسه.

تمرينان

5 - 9 باستخدام الطوريات في الشكل 9 - 9 عند تردد مقداره 1000 rad/s

اوجد التيارات الآتية في حيز الزمن: (أ) $i_1(t)$ (ب) $i_2(t)$ (ج) $i_3(t)$

الجواب: $7.43 \cos(1000t - 13.1^\circ)$; $9.83 \cos(1000t + 55.0^\circ)$; $8.20 \cos(1000t + 163.8^\circ) \text{ A}$



الشكل 9.9 أنظر المسألة 9.5

في الشكل 9 - 5 $V_s = 100\angle 30^\circ$ V و $R = 300 \Omega$ و $L = 2$ mH إذا كانت $\omega = 10^3$ rad/s أوجد (أ) I (ب) V_R (ج) V_L
 الجواب V $83.2\angle -3.7^\circ$; A $55.5\angle 86.3^\circ$; V $0.277\angle -3.7^\circ$

9.5 الممانعة IMPEDANCE

إن علاقات التيار والفولتية للعناصر غير الفعالة الثلاثة في حيز التردد هي

$$V = RI \quad V = j\omega LI \quad V = \frac{I}{j\omega C}$$

وإذا كتبت هذه المعادلات نسباً بين الفولتية الطورية والتيار الطوري تصبح

$$\frac{V}{I} = R \quad \frac{V}{I} = j\omega L \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$$

ثم نجد أن هذه النسب هي دالة بسيطة لقيم العناصر ولتردد أيضاً في حالة المحثة والسعة. وعلينا أن نعامل هذه النسب بالأسلوب نفسه الذي عاملنا به المقاومات عدا أنها كميات مركبة. وأن جميع العمليات الجبرية يجب أن تكون للأعداد المركبة.

دعنا نعرف نسبة الفولتية الطورية إلى التيار الطوري بالممانعة والتي يرمز لها بالحرف Z .

الممانعة هي كمية مركبة لها وحدة الأوم. والممانعة ليست كمية طورية ولا يمكن تحويلها إلى حيز الزمن بالضرب بـ $e^{j\omega t}$ وأخذ الجزء الحقيقي. ولكن بدلاً من ذلك يمكن أن نتصور المحث كأنه ممثل في حيز الزمن بمحثة L وفي حيز التردد بممانعته $j\omega L$ والمتسعة في حيز الزمن هي السعة C وممانعة مقدارها $1/j\omega C$ في حيز التردد. والممانعة هي جزء من حيز التردد وهي جزء من حيز الزمن.

وإن إمكانية تطبيق قانوني كرشوف في حيز التردد يمكن أيضاً بسهولة حيث أن الممانعات يمكن دمجها على التوالي أو التوازي بالقوانين التي استعملناها للمقاومات نفسها. فعلى سبيل المثال في $\omega = 10^4$ rad/s المحث 5 -mH على التوالي مع المتسعة 100 - μF يمكن استبدالهما بممانعة واحدة هي مجموع الممانعتين المنفردتين. فممانعة المحث هي

$$Z_L = j\omega L = j50 \Omega$$

وممانعة المتسعة هي

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j1 \Omega$$

والممانعة للدمج المتوالي ستكون

$$Z_{eq} = j50 - j1 = j49 \Omega$$

ان ممانعة المحثات والمتسعات هي دالة للتردد . وهذه الممانعة المكافئة ممكنة التطبيق للتردد المنفرد التي حسبت بها ، أي $\omega = 10,000$. فعندما $\omega = 5000$ فان $Z_{eq} = j23 \Omega$. وإن دمج التوازي لهذه العناصر نفسها عند $\omega = 10^4$ يجعل الممانعة التي هي حاصل الضرب مقسوماً على المجموع

$$Z_{eq} = \frac{(j50)(-j1)}{j50 - j1} = \frac{50}{j49} = -j1.02 \Omega$$

فعند $\omega = 5000$ مكافئ التوازي هو $-j2.17 \Omega$

إن العدد أو الكمية المركبة التي تمثل الممانعة ربما يعبر عنها بشكل قطبي أو بشكل متعامد . ففي الشكل القطبي توصف الممانعة كما في $100 \angle -60^\circ$ وكان لها ممانعة قيمتها 100Ω وزاوية طور -60° والممانعة نفسها بدلالة الاحداثيات المتعامدة $50 - j86.6$ ويقال إن لها مركبة مقاومية أو مقاومة 50Ω ومركبة متفاعلة أو مفاعلة -86.6Ω . فالمركبة المقاومية هي الجزء الحقيقي للممانعة والمركبة المتفاعلة هي المركبة الخيالية للممانعة بضمنها الاشارة ولكن طبعاً بدون العامل الخيالي . ومن المهم ملاحظة أن المركبة المقاومية للممانعة ليس من الضروري أن تكون مساوية الى مقاومة المقاوم الذي يظهر في الشبكة . فعلى سبيل المثال المقاومة 20Ω على التوالي مع الملف $5-H$ في $\omega = 4$ تنتج ممانعة مكافئة $Z = 20 + j20 \Omega$ وبالشكل القطبي $28.3 \angle 45^\circ \Omega$ ففي هذه الحالة المركبة المقاومية للممانعة تساوي مقاومته المقاومة المتوالية لأن الشبكة هي شبكة متوالية بسيطة . أما اذا كان العنصران موضوعان على التوازي فالممانعة المكافئة هي $20(j20)/(20 + j20)$ أو $10 + j10 \Omega$ المركبة المقاومية للممانعة حينئذ هي 10Ω .

ولا يوضع رمز خاص لقيمة الممانعة أو زاوية الطور . والشكل العام للممانعة بالشكل القطبي يجب ان يكون

$$Z = |Z| \angle \theta$$

وبدلالة الاحداثيات المتعامدة تمثل المركبة المقاومية بـ R والمركبة المتفاعلة بـ X .

$$Z = R + jX$$

لذا

دعنا الآن نستعمل مفهوم الممانعة لتحليل دائرة RLC المبينة في الشكل 10.9 أ .
 الدائرة مبينة في حيز الزمن والمطلوب هو الاستجابة في حيز الزمن . على أية حال
 فان التحليل يجب أن ينجز في حيز التردد ولذا نبدأ برسم دائرة حيز التردد ثم
 يحول المصدر الى حيز التردد فيصبح $V = 40 \angle -90^\circ$ كما تحول الاستجابة الى حيز
 التردد وتمثل بـ I . ونسحب كلاً من ممانعتي المحث والمتسعة في $\omega = 3000$ وهي
 $j1$ و $-j2 \text{ k}\Omega$ على التعاقب . يبين الشكل 9.9 (ب) دائرة حيز التردد . الممانعة
 المكافئة المؤثرة على المصدر تحسب الآن كالاتي

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= 1.5 + \frac{(j1)(1-j2)}{j1+1-j2} = 1.5 + \frac{2+j1}{1-j1} \\ &= 1.5 + \frac{2+j1}{1-j1} \frac{1+j1}{1+j1} = 1.5 + \frac{1+j3}{2} \\ &= 2 + j1.5 = 2.5 \angle 36.9^\circ \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

لذا يكون التيار الطوري

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

ولدى تحويل التيار الى حيز الزمن يمكن الحصول على الاستجابة المطلوبة .

$$i(t) = 16 \cos (3000t - 126.9^\circ) \text{ mA}$$

وإذا كان المطلوب ايجاد تيار المتسعة فيطبق تقسيم التيار في حيز التردد .

قبل أن نبدأ بكتابة عدد من المعادلات في حيز الزمن او حيز التردد من المهم أن
 نحول بنية المعادلات التي يكون جزء منها في حيز الزمن والجزء الآخر في حيز
 التردد وهي مخطوطة كلياً . وإن أحد الامور التي تشير الى وجود مثل هذه
 الأخطاء وجود كميات مركبة ووجود الزمن t في معادلة واحدة . هذا فيما عدا
 اذا كان هناك العامل $e^{j\omega t}$ موجود أيضاً . وحيث أن $e^{j\omega t}$ يكبر عند أخذ
 مشتقاته عما هو الحال عند تسليطه . لذا من السلامة القول أن الطالب عندما يجد
 نفسه قد لوجد معادلة تحتوي على t و $e^{j\omega t}$ أو t و $e^{-j\omega t}$ قد ارتكب أمراً خطيراً وعليه
 التخلص منه .

$$I = \frac{V_s}{Z_{eq}} = \frac{40 \angle -90^\circ}{2.5 \angle 36.9^\circ} = 16 \angle -126.9^\circ \text{ mA}$$

فمثلاً قبل معادلتين وجدنا

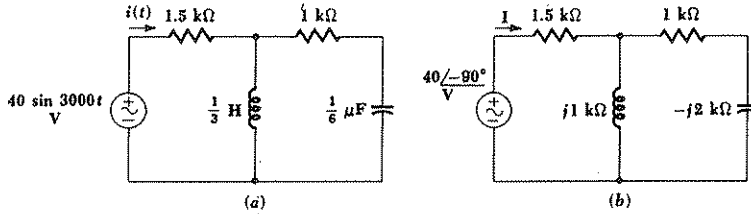
$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2.5 \angle 36.9^\circ}$$

لذا عليك عدم كتابة الآتي :

(كلا ثم كلا ثم كلا)

$$i(t) = \frac{40 \sin 3000t}{2 + j1.5}$$

أو
(كلا أيضاً)



الشكل 10 - 9 (أ) دائرة RLC يراد إيجاد الاستجابة القسرية الجيبية $i(t)$ (ب) مكافئ حيز التردد
للدائرة المعطاة عند $\omega = 3000 \text{ rad/s}$

تمرينات :

9.7 عند التردد 60 هيرتز ، أوجد الممانعة لـ (أ) مقاوم $50\text{-}\Omega$ أوم على التوالي مع
متسعة $200\text{-}\mu\text{F}$ ، (ب) مقاوم $50\text{-}\Omega$ على التوازي مع متسعة $200\text{-}\mu\text{F}$ (ج)
مقاوم $50\text{-}\Omega$ ومتسعة $200\text{-}\mu\text{F}$ ومحث 30-mH على التوازي .

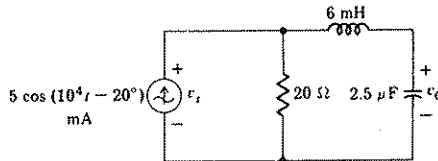
الجواب $51.7\angle-14.9^\circ$; $41.9\angle33.1^\circ$; $12.82\angle-75.1^\circ \Omega$

9.8 إرسم مكافئ الدائرة 9.11 في حيز التردد ثم استخدمه لإيجاد (أ) الممانعة

كما تبدو للمصدر (ب) طورى الفولتية V_s (ج) طورى الفولتية V_c

الجواب

$10 + j10 \Omega$; $70.7\angle25^\circ \text{ mV}$; $141.4\angle-155^\circ \text{ mV}$



شكل 11 - 9 انظر التمرين 9.8

كما أن التوصيلية التي هي مقلوب المقاومة تماماً برهنت بأنها كمية مفيدة في تحليل الدوائر المقاومة كذلك يحقق مقلوب الممانعة الفوائد في تحليل الحالة المستقرة الجيبية لدائرة RLC العامة تعرف المسايرة Y على أنها نسبة التيار الطوري الى الفولتية الطورية .

$$Y = \frac{I}{V}$$

$$Y = \frac{1}{Z}$$

ولذا فإن

والجزء الحقيقي للمسايرة هو التوصيلية G والجزء الخيالي للمسايرة هو التقبيلية B لذا susceptance

$$Y = G + jB = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} \quad (22)$$

يجب امان النظر بالمعادلة 22 بعناية حيث أنها لاتنص على أن الجزء الحقيقي للمسايرة يساوي مقلوب الجزء الحقيقي للممانعة أو أن الجزء الخيالي للمسايرة يساوي مقلوب الجزء الخيالي للممانعة . وتقاس التوصيلية والتقبيلية والمسايرة كلها بالموه *mhos

$$Z = 1 - j2 \quad \Omega \text{ الممانعة}$$

والتي يمكن تمثيلها مثلاً بمقاومة قيمتها 1 أوم على التوالي مع سعة مناسبة مثل $0.1 \mu F$ إذا كانت $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$ تكون مسايرتها :

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{1 - j2} = \frac{1}{1 - j2} \frac{1 + j2}{1 + j2} \\ = 0.2 + j0.4 \quad \Omega$$

(المترجمون)

التسمية الجديدة للموه هي السيمنس

وبدون انتظار تفاصيل البرهان الأصولي يجب أن يكون ظاهراً بأن المسائرة المكافئة لشبكة تحوي عدداً من الفروع المتوازية هو مجموع مسائرات الفروع منفردة . لذا فان القيمة العددية للمسائرة أعلاه يمكن الحصول عليها من التوصيلية 0.2 U على التوازي مع التقبيلية الموجبة 0.4 U . فالأولى يمكن تمثيلها بمقاوم $5\text{-}\Omega$ والأخرى بمتسعة $0.08\text{-}\mu\text{F}$ عند $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$ لأن من الواضح مسائرة المتسعة هي $j\omega C$

وتحقيقاً لتحليلنا نفرض أننا نريد حساب الممانعة للشبكة الأخيرة هذه المتكونة من المقاوم $5\text{-}\Omega$ على التوازي مع المتسعة $0.08\text{-}\mu\text{F}$ عند $\omega = 5 \text{ Mrad/s}$. فالممانعة المكافئة هي :

$$Z = \frac{5(1/j\omega C)}{5 + 1/j\omega C} = \frac{5(-j2.5)}{5 - j2.5} = 1 - j2 \quad \Omega$$

كالسابق . فهاتان الشبكتان تمثلان فقط اثنتين من عدد غير متناه من الشبكات التي لها الممانعة والمسائرة نفسيهما لهذا التردد . وهي على أية حال شبكتين ذواتي عنصرين . يجب أن تعتبر على أنهما أبسط شبكتين ممانعتهما $1 - j2 \Omega$ ومسائرتهما $0.2 + j0.4 \text{ U}$ في $\omega = 5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ وأن التعبير الممايرة "immittance" والتي هي عبارة عن دمج لكلمتي الممانعة "impedance" والمسائرة "admittance" يستعمل غالباً كتعبير عام لكل من الممانعة والمسائرة . وعلى سبيل المثال من الواضح بأن معرفة الفولتية الطورية عبر ممايرة⁴ معلومة تمكن من حساب التيار خلال الممايرة .

تمرينات

9 - افرض أن $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ ثم اوجد مسائرة كل من (أ) مقاوم مقداره $20\text{-}\Omega$ على التوالي مع محث 5-mH (ب) متسعة متوازية مع شبكة الفرع (أ) (ج) ربط محث مقداره 10-mH على التوالي مع شبكة الفرع (ب)

الجواب $31.2 \text{ mU} \angle -51.3^\circ$; $31.7 \text{ mU} \angle -53.3^\circ$; $32.2 \text{ mU} \angle 52.7^\circ$

10 - 9 مقاوم R على التوالي مع مجموعة متوازية مع محث مقداره 15-mH ومتسعة $20\text{-}\mu\text{F}$ (أ) إذا كانت $R = 60 \Omega$ و $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ، اوجد مسائرة الشبكة (ب) إذا كانت $Y = 0.02 + jB \text{ U}$ و $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ اوجد R

الجواب $14.78 - j5.28 \text{ mU}$; $12.1 \text{ or } 37.9 \Omega$

مسائل : -

- 1 - اعط الكميات الآتية بالشكل القطبي (أ) $20 \angle 110^\circ - 8 \angle 40^\circ$ (ب) $(6.1 - j3.82)/(1.17 + j0.541)$ ثم اعط بدلالة الاحداثيات المتعامدة .
 (ج) $j/(6.3 - j9.71)$
 و (د) $e^{j2.1 \angle 22^\circ}$

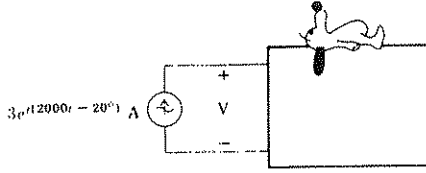
- 2 - (أ) التيار المركب $8e^{j(200t - 60^\circ)}$ A سلط على مزيج متوالي من مقاوم $12\text{-}\Omega$ ومحث 20-mH باستخدام مصطلح الاشارات غير الفعالة ، أوجد الفولتية المركبة عبر المزيج (ب) الفولتية المركبة $60e^{j(10,000t + 150^\circ)}$ V سلطت على مزيج متوازي من مقاوم $200\text{-}\Omega$ ومتسعة $1\text{-}\mu\text{F}$. بفرض مصطلح الاشارات غير الفعالة ، أوجد التيار المركب الداخلى الى المزيج المتوازي

- 3 - صندوق مبهم يحتوي على عناصر خطية غير فعالة فقط . أثير عند دخله بمصدر تيار i_s فانتهج استجابة i_o عند خرجه . اذا كان $i_s = 20e^{j(10t - 50^\circ)}$ A (أ) $12e^{j(10t - 50^\circ)}$ A (ب) فان $i_o = 5e^{j(10t + 20^\circ)}$ A اوجد i_o اذا كان $i_s = 8 \cos 10t$ A (ج) $12e^{j(10t + 50^\circ)}$ A (د) $10 \sin(10t - 20^\circ)$ A (هـ) $(10 + j20)e^{j10t}$ A

- 4 - صندوق مبهم يحتوي على مصدر فولتية v_{s1} ومصدر تيار i_{s1} . الفولتية بين طرفيه المعطيين كتب عليها v_{AB} . اذا كانت $v_{s1} = 5 \cos(1000t + 40^\circ)$ V و $i_{s1} = 0.1 \cos(500t - 20^\circ)$ A ومن ثم كانت $v_{AB} = 2 \cos(1000t - 10^\circ) + 3 \cos(500t - 30^\circ)$ V كانت $v_{s1} = 5 \cos(500t + 40^\circ)$ V ، $i_{s2} = 0.1 \cos(1000t - 20^\circ)$ A ، $v_{AB} = 3 \cos(1000t - 20^\circ) + 2 \cos(500t - 10^\circ)$ V

وجد v_{AB} و كانت $v_{s1} = 20 \cos 1000t + 10 \cos 500t$ V
 $i_{s2} = 0.3 \sin 1000t - 0.2 \sin 500t$ A

- 5 - أوجد الفولتية المركبة v في الشكل 9.12 اذا كان الصندوق يحتوي فقط على (أ) مقاوم مقداره $20\text{-}\Omega$ (ب) محث 20-mH (ج) متسعة $20\text{-}\mu\text{F}$



الشكل 9.12 انظر المسألة 5

6 - مثل الطوري المنفرد بالشكل القطبي المكافئ الى

$$6 \cos 200t - 5 \sin (200t + 120^\circ) \quad (\text{ب}) \quad 6 \cos 200t - 5 \sin 200t \quad (\text{أ})$$

$$6 \cos (\omega t - 40^\circ) + 5 \cos (\omega t + 70^\circ) \quad (\text{ج})$$

7 - افرض أن ثلاثة تيارات هي i_1, i_2, i_3 تدخل عقدة معينة (أ) أوجد $i_1(t)$ إذا كان $i_2 = 65 \angle -110^\circ \text{ mA}$ $i_3 = 45 \angle -30^\circ \text{ mA}$ (ب) أوجد i_2 إذا كانت

$$i_1(t) = 55 \cos (400t + 40^\circ) \text{ mA}$$

و

$$i_2(t) = 35 \sin (400t - 70^\circ) \text{ mA}$$

8 - افرض أن المرجع الموجب للفولتية هو الرمز السفلي الأول وافرض أن فولتيات موجات الفا الملتقطة من قبل جهاز إلكتروني كراف تعطي ما يأتي :

$$v_{12} = 48 \cos (60t - 20^\circ) \mu\text{V}$$

و

$$v_{32} = 26 \cos (60t + 35^\circ) \mu\text{V}$$

و

$$v_{11} = 37 \sin 60t \mu\text{V}$$

أوجد (أ) V_{23} ، (ب) V_{31}

9 - المعادلات الشبكية التالية قد تم الحصول عليها لدائرة معينة ،

$$(8 - j1)I_1 - 4I_2 + jI_3 = 100$$

$$-4I_1 + (6 + j3)I_2 + (20 - j3)I_3 = 0$$

و

$$jI_1 - (2 + j3)I_2 + (5 + j2)I_3 = 0$$

و

أوجد (أ) $i_2(t)$ إذا كانت $f = 60 \text{ Hz}$ (ب) I_2/I_1

10 - عند مدخل الشبكة RLC وجد أن $V = 41 - j18 \text{ V}$ و $I = 3.5 + j7.5 \text{ A}$

افرض أن v و i يفان بمصطلح الأشارات غير الفعالة . أوجد القدرة الداخلة الى شبكة عندما (أ) $t = 0$ (ب) $\omega t = \pi/2$

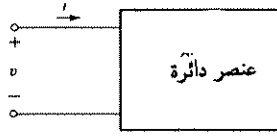
11 - اعط المكافئ في حيز الزمن لكل من طوريات الفولتية الآتية

(أ) $(6/\sqrt{65})/(3+j2)$ (ب) $1/(1+j2.5) + 1 + j2.5$

12 - افرض أن التيار والفولتية في الشكل 9 - 13 تمثلان $i =$

$0.6 \cos(40,000t + 30^\circ)$ A وأن $v = V_m \cos(\omega t + \theta)$ V . أوجد V_m و ω و θ في

العنصر (أ) مقاوم $R = 100 \Omega$ (ب) متسعة $C = 5 \mu F$ (ج) محث $L = 2 \text{ mH}$



الشكل 13 - 9 أنظر المسألتين 12 و 13 .

13 □ في الشكل 9 - 13 تعطى الفولتية v كطواري $v = 60 - j25$ V إذا كانت

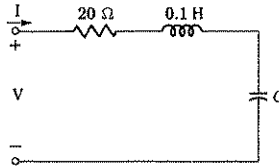
$\omega = 2000 \text{ rad/s}$ أوجد القدرة المجهزة الى العنصر عندما $t = 0.1\pi \text{ ms}$ إذا كان العنصر

هو (أ) مقاوم $100\text{-}\Omega$ (ب) محث 50-mH (ج) متسعة $5\text{-}\mu F$

14 افرض أن $I = 4\angle 0^\circ$ A في دائرة RLC المتوالية المبينة في الشكل 9 - 14

(أ) أوجد C إذا كانت $V = 80 + j200$ V و $\omega = 1 \text{ krad/s}$ (ب) أوجد C إذا

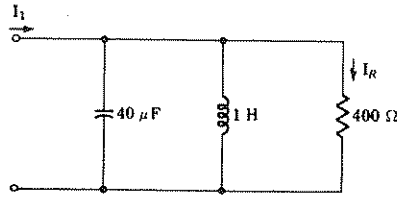
كانت $\omega = 100 \text{ rad/s}$ و $|V| = 100$ V .



الشكل 14 - 9 أنظر المسألة 14

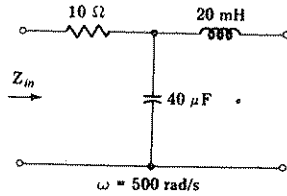
15 □ الشبكة المبينة في الشكل 15 - 9 تعمل عندما $\omega = 100 \text{ rad/s}$ (أ) إذا كانت

$I_R = 0.01\angle 20^\circ$ A ، أوجد I_1 (ب) إذا كانت $I_1 = 2\angle -30^\circ$ A أوجد I_R



الشكل 15 - 9 أنظر المسألة 15

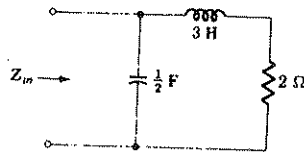
16 أوجد Z_{in} للشبكة المبينة في الشكل 16 - 9 إذا ربطت عند نهايتها (أ) دائرة مفتوحة (ب) دائرة قصر (ج) مقاوم $10\text{-}\Omega$



الشكل 16 - 9 أنظر المسألة 16

□ 17 باستخدام محث 1-H ومتسعة $1\text{-}\mu\text{F}$ ، عند أي تردد (بالهيرتز) يمكن الحصول على ممانعة مقدارها $2000\ \Omega$ إذا كان العنصران مربوطين (أ) على التوالي (ب) على التوازي

18 أوجد $R_{in}(\omega)$ و $X_{in}(\omega)$ للشبكة المبينة في الشكل 17 - 9 حيث $Z_{in}(\omega) = R_{in}(\omega) + jX_{in}(\omega)$



الشكل 17 - 9 أنظر المسألة 18

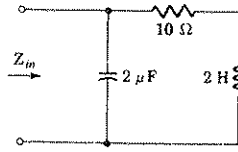
19 محاثة 5-H ومتسعة $200\text{-}\mu\text{F}$ ومقاومة R مربوطة على التوازي . عند تردد $25\ \text{rad/s}$ أوجد الجزءين الحقيقي والخيالي للممانعة المكافئة للربط المتوازي دالة لـ R

□ 20 متسعة $10\text{-}\mu\text{F}$ ومقاوم $25\text{-}\Omega$ على التوازي . ما حجم الموصل الذي يجب وضعه على التوالي مع هذا الربط المتوازي لكي تكون ممانعة الشبكة المتوالية النهائية ذات مفاعلة مقدارها صفر عند $8\ \text{krad/s}$.

21 متسعة C ومقاوم $10\text{-}\Omega$ على التوازي عند $\omega = 1 \text{ krad/s}$. أوجد قيمة C لكي (أ) يكون الجزء المقاومي من ممانعة المزيج المتوازي تساوي أوماً واحداً (ب) الجزء المفاعلي من الربط المتوازي مقداره $4\ \Omega$ (ج) مقدار الممانعة للربط المتوازي $5\ \Omega$.

22 أوجد ممانعة دخل للشبكة المبينة في الشكل 9 - 18 عندما ω (أ) 500 rad/s (ب) 5000 rad/s

23 ما حجم المتسعة التي يجب وضعها على التوالي مع مزيج متوال من $800\ \Omega$ و 20 mH لكي تكون مقدار المسائرة $1 \text{ m}\Omega$ عند $\omega = 10 \text{ krad/s}$.

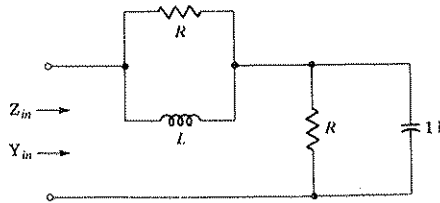


الشكل 9 - 18 انظر المسألة 22

24 ما مقدار الفولتية الطورية الموجودة عبر الربط المتوازي لثلاثة مسائرات هي $200 - j150\ \mu\text{V}$ و $1050 + j550\ \mu\text{V}$ و $250 + j100\ \mu\text{V}$ إذا كان تيار مقداره $3.2 \cos \omega t \text{ mA}$ يدخل الشبكة

25 مسائرة مقدارها $20 \text{ m}\Omega$ على التوازي مع تقبلية مقدارها $-50 \text{ m}\Omega$ على التوازي مع تقبلية ثائية $Y_2 = 5 + j10 \text{ m}\Omega$. ما مقدار مزيج RL المتوالي الذي له التقبلية نفسها عندما $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$

26 إذا كان مسائرة وممانعة الدخل للشبكة المبينة في الشكل 9 - 19 متساو عند كل الترددات أوجد L R



الشكل 9.19 انظر المسألة 26

27 اختر قيماً L و R المتوازيتين بحيث تكون مسائرتها مساوية لمزيج مكون من مقاوم مقداره $1\text{-k}\Omega$ ومحث مقداره 100-mH عند (أ) $\omega = 1 \text{ krad/s}$ (ب) $\omega = 5 \text{ krad/s}$.

الفصل العاشر

الاستجابة للحالة المستقرة الجيبية

THE SINUSOIDAL STEADY - STATE RESPONSE

1 - 10 مقدمة : INTRODUCTION

في الفصل الثاني والفصل الثالث خاصة تعلمنا عدداً من الطرق المستعملة لتحليل الدوائر المقاومة. ومهما يكن التعقيد في الدائرة المقاومة فنستطيع إيجاد أي استجابة باستعمال تحليل العقدة أو الشبكة أو الدارة أو التراكب أو تحويلات المصادر أو نظريات ثيفنن أو نورتن. في بعض الأحيان تكفي طريقة واحدة ولكن غالباً ما نجد انه من المناسب دمج عدة طرق للحصول على الاستجابة بأسلوب أسرع. والآن ستشمل هذه الأساليب في تحليل دوائر الحالة المستقرة الجيبية. ولقد شاهدنا فعلاً بأن الممانعات تدمج بالطريقة المتبعة مع المقاومات نفسها ولقد وعدنا لتوسيع الأساليب لتحليل الدائرة المقاومة في عدة مناسبات ويجب علينا الآن معرفة المبرر لهذا التوسيع ثم نطبق استعماله

2 - 10 تحليل العقدة والشبيكة والدارة NODAL, MESH, AND LOOP ANALYSIS

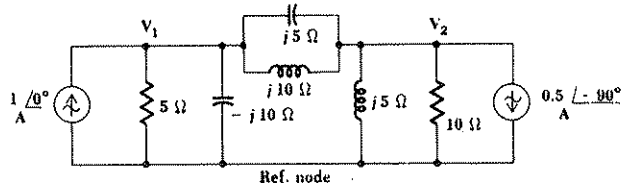
دعنا نعد أولاً المناقشة التي قبلنا بها تحليل العقدة لدائرة مقاومة نقية. وبعد تعيين عقدة المرجع وتأشير الفولتيات المتغيرة بين الـ $N-1$ من العقد الباقية والمرجع نطبق قانون التيار لكروشوف لكل من الـ $N-1$ عقدة. ان تطبيق قانون أوم على جميع المقاومات سيقودنا الى الـ $N-1$ من المعادلات التي فيها $N-1$ من المجاهيل اذا لم تظهر مصادر فولتية أو مصادر معتمدة واذا كان ذلك موجود فتكتب معادلات اضافية بموجب تعاريف نوع المصادر المشمولة.

والآن هل هناك طريقة مشابهة ممكنة بدلالة الطوريات والممانعات لحالة استقرار الجيبي نحن نعلم مسبقاً بأن كلا من قانوني كرشوف نافذان للطوريات أيضاً وعندنا قانون يشبه قانون أوم للعناصر غير الفعالة $V = ZI$. وبكلمة أخرى القوانين التي يستقر عليها تحليل العقدة هي صحيحة للطوريات ويمكننا الاستقرار عندئذٍ لتحليل الدوائر بأسلوب العقدة في حالة الاستقرار الجيبي . ومن الواضح أيضاً بأن طرق تحليل الشبكات والدارات نافذة كذلك . كمثال للتحليل العقدي لناخذ دائرة حيز التردد الميمنة في الشكل 1 - 10 . كل عنصر غير فعال يعرف بممانعة على الرغم من التحليل يمكن تبسيطه قليلاً باستعمال قيم المساربات . أعطينا مصدري التيار كطوريين وفولتيتي العقد كطوريين أيضاً V_1 و V_2 موضحين الى يسار العقدة . نطبق قانون التيار لكرشوف و $I = V/Z$.

$$\frac{V_1}{5} + \frac{V_1}{-j10} + \frac{V_1 - V_2}{-j5} + \frac{V_1 - V_2}{j10} = 1 + j0$$

وللعقدة اليمنى .

$$\frac{V_2 - V_1}{-j5} + \frac{V_2 - V_1}{j10} + \frac{V_2}{j5} + \frac{V_2}{10} = -(-j0.5)$$



الشكل 1 - 10 دائرة في حيز التردد حددت لها فولتيتا العقد V_1 و V_2

بدمج الحدود نحصل على

$$(0.2 + j0.2)V_1 - j0.1V_2 = 1 \quad (1)$$

وكذلك

$$-j0.1V_1 + (0.1 - j0.1)V_2 = j0.5 \quad (2)$$

باستعمال المحددات لحل (1) و (2) نحصل على

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -j0.1 \\ j0.5 & (0.1 - j0.1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (0.2 + j0.2) & -j0.1 \\ -j0.1 & (0.1 - j0.1) \end{vmatrix}} = \frac{0.1 - j0.1 - 0.05}{0.02 - j0.02 + j0.02 + 0.02 + 0.01}$$

$$= \frac{0.05 - j0.1}{0.05} = 1 - j2 \text{ V}$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (0.2 + j0.2) & 1 \\ -j0.1 & j0.5 \end{vmatrix}}{0.05} = \frac{-0.1 + j0.1 + j0.1}{0.05} = -2 + j4 \text{ V}$$

وإن حلول الحيز الزمني يمكن الحصول عليها بالتعبير عن v_1 و v_2 بشكل قطبي

$$V_1 = 2.24 / -63.4^\circ \quad V_2 = 4.47 / 116.6^\circ$$

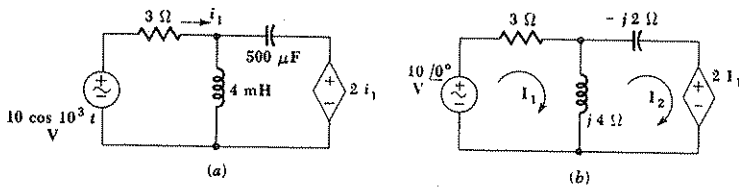
وعند العبور الى حيز الزمن

$$v_1(t) = 2.24 \cos(\omega t - 63.4^\circ) \quad v_2(t) = 4.47 \cos(\omega t + 116.6^\circ) \text{ V}$$

لاحظ بأن قيمة ω يجب معرفتها لأجل حساب قيم الممانعة المعطاة على مخطط الدائرة. وكذلك يفترض في المصدرين أنهما يعملان بالتردد نفسه.
وكمثال عن التحليل الشبكي نأخذ الدائرة المعطاة في الشكل 2 - (أ).
لاحظ من المصدر الأيسر بأن $\omega = 10^3 \text{ rad/s}$. نرسم دائرة حيز التردد للشكل 2 - 10 (ب) ونؤشر تيارى الشبكتين I_1 و I_2 . حول الشبكة 1.

$$3I_1 + j4(I_1 - I_2) = 10 / 0^\circ$$

$$(3 + j4)I_1 - j4I_2 = 10$$



الشكل 2 - (أ) دائرة محتوية على مصدر ممتد في حيز الزمن
(ب) دائرة حيز التردد التي تقابلها وقد أشر عليها التياران الشبكيان I_1 و I_2 .

بينما الشبكة 2 تقودنا الى

$$j4(I_2 - I_1) - j2I_2 + 2I_1 = 0$$

$$(2 - j4)I_1 + j2I_2 = 0$$

أو

والحل يكون

$$I_1 = \frac{14 + j8}{13} = 1.24 / 29.7^\circ \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{20 + j30}{13} = 2.77 / 56.3^\circ \text{ A}$$

$$i_1(t) = 1.24 \cos(10^3 t + 29.7^\circ) \text{ A}$$

$$i_2(t) = 2.77 \cos(10^3 t + 56.3^\circ) \text{ A}$$

وان الحلول لأي من المسائل أعلاه يمكن تدقيقها بالاشتغال كلياً في حيز الزمن ولكن سيكون العمل متعباً حقاً وستجنب اعطاء مثال على ذلك بعد أن تيسرت لدينا الطريقة الطورية هذه .

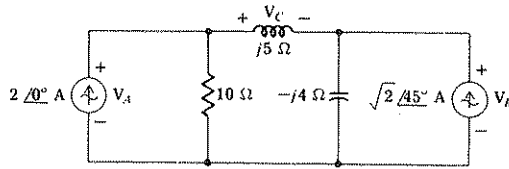
تمرينان : -

10.1 إذا اشتغل المصدران اللذان في الشكل 10.3 عند التردد نفسه ، اكتب

معادلتين عقدتين ثم حلها لايجاد (أ) V_A (ب) V_B (ج) V_C .

الجواب

$$-1.188 + j8.12; 4.95 - j10.50; 3.76 - j2.38 \text{ V}$$

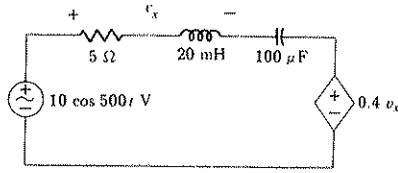


الشكل 3 - 10 انظر التمرين 1 - 10

10 - 2 بعد رسم الدائرة المكافئة للدائرة المبينة في الشكل 4 - 10 في حيز

التردد ، اوجد اتساع الفولتية عبر (أ) المقاوم (ب) المحث (ج) المتسعة

$$\text{الجواب } V \quad 5.42; 10.85; 21.7$$



الشكل 4 - 10 أنظر التمرين 2 - 10

3 - 10 نظرية التراكب وتحويلات المصدر وثيفنن :

SUPERPOSITION, SOURCE TRANSFORMATIONS, AND THÉVENIN'S THEOREM

بعد أن قدمنا المحاضرة والسعة في الفصل الرابع ، وجدنا بأن الدوائر التي تحتوي على هذه العناصر مازالت خطية وأن الفائدة من الخاصية الخطية مازالت ممكنة مرة أخرى . ان إحدى خواص القاعدة الخطية هي قاعدة التراكب ونظريات ثيفنن ونورتن وقد وجدنا أن تحويلات المصدر هي حالة بسيطة للنظريات الاخيرة . لذا فاننا نعلم بأن هذه الطرق ربما تستعمل في الدوائر التي نتعامل معها الآن . والحقيقة كنا نسلط المصادر الجيبية ونبحث فقط عن الاستجابة المرغمة مهما كانت . كما كنا نحلل الدوائر بدلالة الطوريات مهما كانت وما زالت دوائر خطية . وربما نذكر بأن الخاصية الخطية وخاصية التراكب كانتا ضروريتين عندما ندمج المصادر الحقيقية والخيالية لنحصل على المصدر المركب .

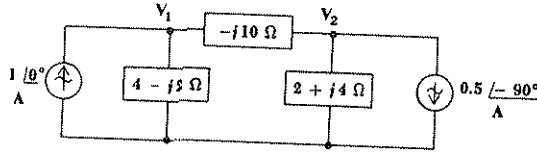
لذا فاننا سندرس عدة أمثلة فيها نحصل على النتيجة بشكل جاهز من خلال تطبيق نظريات التراكب . وتحويلات المصادر وثيفنن او نورتن .

لننظر أولاً مرة اخرى على الدائرة في الشكل 1 - 10 المعاد رسمها في الشكل 5 - 10 مع كل زوج من الممانعات المتوازية مستبدلة بممانعة مكافئة منفردة . اي أن $10.5 - j$ على التوازي تكون $4 - j2 \Omega$ وكذلك $-j10$ على التوازي مع $-j5$ تعطي $10 \Omega + j$ و 10 على التوازي مع $j5$ تؤدي الى $4 + j2 \Omega$. ولايجاد V_1 نشغل أولاً المصدر الايسر لوحده ونجد الاستجابة الجزئية .

$$V_{1L} = 1/0^\circ \frac{(4 - j2)(-j10 + 2 + j4)}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} = \frac{-4 - j28}{6 - j8} = 2 - j2$$

وبجعل المصدر الأيمن فعالاً فقط فان تقسيم التيار يساعدنا للحصول على :

$$V_{1R} = (-0.5 \angle -90^\circ) \left(\frac{2 + j4}{4 - j2 - j10 + 2 + j4} \right) (4 - j2) = \frac{-6 + j8}{6 - j8} = -1$$



الشكل 5 - 10 يمكن ايجاد V_1 و V_2 باستخدام نظرية التراكب لاستجابتي طوريين منفصلين .

وبالجمع نحصل على

$$V_1 = 2 - j2 - 1 = 1 - j2 \text{ V}$$

والذي يتفق مع النتيجة السابقة .

يمكننا التأكد أيضاً فيما اذا كانت نظرية ثيفنن تساعد في تحليل هذه الدائرة (شكل 5 - 10) أم لا . افرض أننا وجدنا مكافئ ثيفنن من جهة الممانعة $-j10\Omega$ فان فولتية الدائرة المفتوحة (المرجع الموجب الى اليسار) هي :

$$\begin{aligned} V_{oc} &= (1\angle 0^\circ)(4 - j2) + (0.5\angle -90^\circ)(2 + j4) \\ &= 4 - j2 + 2 - j1 = 6 - j3 \end{aligned}$$

ممانعة الدائرة غير الفعالة كما لو نظرنا اليها من نهايتي الحمل هي بكل بساطة مجموع الممانعات المتبقية لذا

$$Z_{th} = 6 + j2$$

ف عندما نعيد ربط الدائرة فان التيار المتجه من العقدة 1 الى العقدة 2 خلال

$$I_{12} = \frac{6 - j3}{6 + j2 - j10} = 0.6 + j0.3 \text{ الحمل } -j10\Omega \text{ هو :}$$

وبطرح ذلك من تيار المصدر الأيسر فان التيار النازل خلال الفرع $4 - j2\Omega$ يمكن

$$I_1 = 1 - 0.6 - j0.3 = 0.4 - j0.3 \text{ ايجاده}$$

ولذا

$$V_1 = (0.4 - j0.3)(4 - j2) = 1 - j2 \text{ V}$$

وربما كنا أكثر انتباهاً فيما لو استعملنا نظرية نورتن على العناصر اليمنى الثلاثة مفترضين بأن نرغب بالدرجة الأولى ايجاد V_1 . كما يمكن استعمال تحويلات المصادر بشكل متعاقب لتبسيط الدائرة . لذا فان كل الطرق القصيرة والخدع الميينة في الفصلين الثاني والثالث هي جاهزة لتحليل الدائرة في حيز التردد

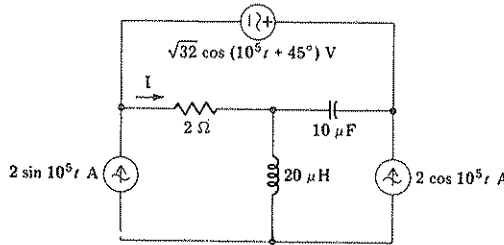
وأن التعقيد الجزئي المضاف قد اتضح الآن وسببه هو ضرورة استعمال الأعداد المركبة وليس لأي اعتبارات نظرية أكثر تعقيداً .

وأخيراً يجب أن نسر لدى سماعنا بأن الأساليب نفسها سيكون بالأمكان تطبيقها لدوائر الاستجابة المرغمة التي تعمل بدالات الجيبية المتضائلة والدالات المرغمة الأسية والدالات المرغمة التي لها تردد مركب بصورة عامة . لذا فسوف نصادف اساليب الحل نفسها مرة أخرى في الفصل الثالث عشر .

تمرينان

3 - 10 باستخدام نظرية التراكب ، أوجد استجابة i في حيز التردد في دائرة الشكل 6 - 10 ماهي الاستجابة الجزئية الناتجة من (أ) المصدر الأيسر (ب) المصدر الأيمن (ج) المصدر الأعلى ؟

الجواب A $0.4 - j0.8$; $-0.8 - j0.4$; $-0.8 - j2.4$



الشكل 6 - 10 أنظر التمرينين 3 - 10 و 4 - 10

4 - 10 افرض أن المقاوم 2Ω هو الحمل في الشكل 6 - 10 ثم اوجد في حيز التردد مكافئ ثفنن للدائرة المربوطة به . ثم احسب I اذا كان الحمل المربوط بمكافئ ثفنن Z_L (أ) $2 + j0 \Omega$ (ب) $2 + j1 \Omega$ (ج) $2 - j1 \Omega$

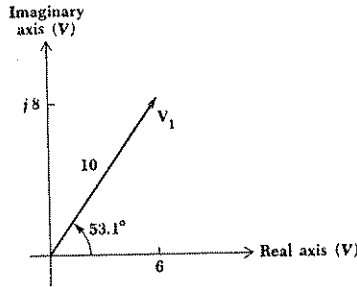
الجواب A $3/-90^\circ$; $4.24/-135^\circ$; $3.79/-108.4^\circ$

10 - المخططات الطورية : PHASOR DIAGRAMS

المخطط الطوري هو الاسم المعطى للرسم التخطيطي على المستوى المركب للفولتيات الطورية والتيارات الطورية خلال دائرة معينة . ويستخدم المخطط الطوري بطريقة تخطيطية لحل مسائل معينة والتي تكون الحسابات الجبرية المركبة فيها متعبة . وتخدم هذه الطريقة لتدقيق معظم الطرق التحليلية الدقيقة . وقد برهنت على أنها عامل مساعد لتبسيط العمل التحليلي لمسائل متناظرة، كأن يساعد المتناظر لغرض التعرف والتطبيق المساعد .

وفي الفصل التالي سنتطرق الى مخططات مشابهة والتي تمثل علاقات القدرة المركبة بحالة الاستقرار الجيبي . وإن استعمال مستويات مركبة أخرى سوف يظهر بترابطه مع التردد المركب في الفصل الثالث عشر .

لقد أصبحنا الآن ملمين باستعمال المستوى المركب في التعريف التخطيطي للأعداد المركبة وجمعها وطرحها . وبما أن الفولتيات الطورية والتيارات هي أعداد مركبة فربما يمكن تعريفها كنقاط على المستوى المركب . وكمثال الفولتية الطورية $V_1 = 6 + j8 = 10/53.1^\circ$ تعرف على مستوى الفولتية المركب المبين في الشكل 7 - 10 . حيث أن المحاور تمثل محور الفولتية الحقيقية ومحور الفولتية الخيالية . فالفولتية V_1 تعين بالسهم المرسوم من نقطة الأصل .

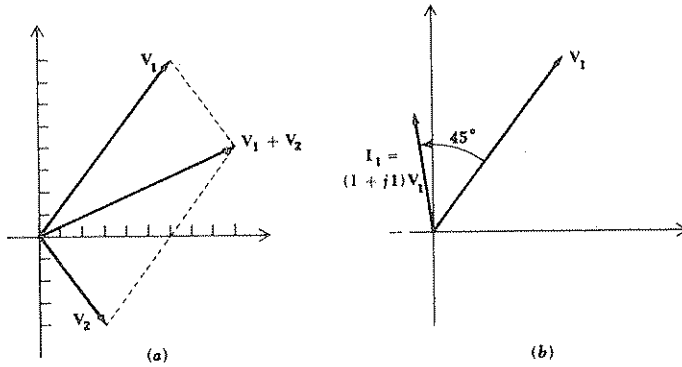


الشكل 7 - 10 مخطط طوري بسيط يبين فولتية منفردة $V_1 = 6 + j8 = 10/53.1^\circ$

وبما أن عمليات الجمع والطرح بصورة خاصة سهلة الانجاز والعرض على المستوى المركب فمن الظاهر بأن الطوريات يمكن جمعها وطرحها بسهولة في المخطط الطوري. ان عمليتي الضرب والقسمة تنتجان عند اضافة وطرح الزوايا وتغيير الاتساعات. وهاتان العمليتان أقل وضوحاً لأن الأتساع الناتج يعتمد على اتساع كل من الطوريات كما يعتمد على مقياس رسم المخطط. يبين الشكل 8 - 10 (أ) جمع V_1 والفولتية الطورية الثانية $V_2 = 3 - j4 = 5 \angle -53.1^\circ$ والشكل 8 -

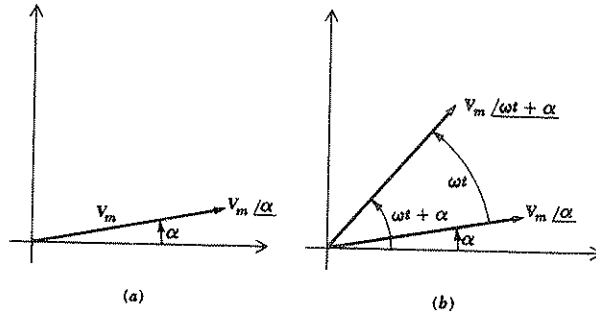
10 (ب) يبين التيار I_1 والذي هو حاصل ضرب V_1 والمسيرة $Y = 1 + j$

إن المخطط الطوري الاخير يبين طوريات التيار والفولتية على المستوى المركب نفسه. ومن المفهوم بأن كلاً منها سوف يكون له مقياس اتساع خاص به مع مقياس زاوية مشترك. فمثلاً الفولتية الطورية التي طولها 1 سنتمتر تمثل 100 فولت بينما التيار الطوري الذي طولها 1 سنتمتر يمثل 3 ملي أمبير.



الشكل 8 - 10 (أ) مخطط طوري يبين مجموع $V_1 = 6 + j8$ و $V_2 = 3 - j4$ ، $V_1 + V_2 = 9 + j4 = 9.85 \angle 24.0^\circ$ (ب) المخطط الطوري يبين V_1 و $I_1 = YV_1$ حيث $Y = 1 + j$

كذلك يمنحنا المخطط الطوري تفسيراً مفيداً لتحويل حيز الزمن الى حيز التردد. لأن المخطط يمكن أن يفسر إما من وجهة نظر حيز الزمن او حيز التردد. ولحد الآن كان واضحاً بأننا كنا نستعمل تفسير حيز التردد لأننا كنا نبين الطوريات مباشرة على المخطط الطوري.

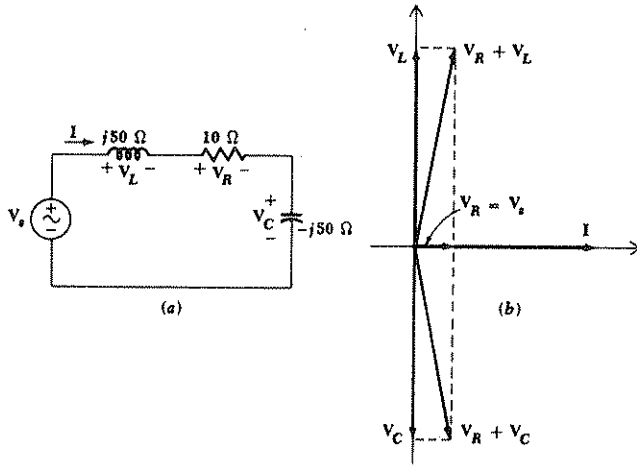


الشكل 8 - 10 (أ) طورى الفولتية V_m/α ، (ب) الفولتية المركبة $V_m/\omega t + \alpha$ مبينة كطوري عند لحظة معينة من الزمن . يسبق الطوري V_m/α بمقدار ωt زاوية نصف قطرية .

على أية حال دعنا ننتقل الى وجهة النظر في حيز الزمن بتبيين أولاً الطوري $V = V_m/\alpha$ كما هو مرسوم في الشكل 9 - 10 (أ) . لأجل تحويل V الى حيز الزمن فان الخطوة الثانية الضرورية هي ضرب الطوري بـ $e^{j\omega t}$. لذا فسوف يكون لدينا الفولتية $V_m e^{j\alpha} e^{j\omega t} = V_m/\omega t + \alpha$ هذه الفولتية ربما تفسر كطوري أيضاً حيث انها تمتلك زاوية طور تزداد خطياً مع الزمن . وعلى المخطط الطوري هناك تمثيل لجزء الخط الدوار . والموقع الآتي هو ωt من الزوايا نصف القطرية متقدماً (عكس عقرب الساعة) على V_m/α . وان كلاً من V_m/α و $V_m/\omega t + \alpha$ مبينة على المخطط الطوري للشكل 9 - 10 (ب) .

وان الوصول الى حيز الزمن قد كمل الآن بأخذ الجزء الحقيقي من القيمة الحقيقية لهذه الكمية المركبة على أي حال هي فقط تسقيط الـ $V_m/\omega t + \alpha$ على المحور الحقيقي . والخلاصة هي أن طوري حيز التردد على المخطط الطوري وأن التحويل الى حيز الزمن يتحقق بالسماح للطوري بالدوران باتجاه عكس عقارب الساعة وبسرعة زاوية ω rad/s ثم النظر الى المسقط على المحور الحقيقي . ومن المساعد التفكير في السهم الذي يمثل الطوري \dot{V} على المخطط الطوري كأنه لقطة مأخوذة عند $\omega t = 0$ للسهم الدوار الذي مسقطه على المحور الحقيقي هو الفولتية الآنية $v(t)$.

دعنا الآن ننشئ المخططات الطورية لدوائر مختلفة بسيطة . فالدائرة المتوالية لـ RLC المبينة في الشكل 10 - 10 (أ) تحوي عدة فولتيات مختلفة ولكن التيار واحد فقط . المخطط الطوري يقام بسهولة وذلك بتسخير التيار المفرد كطوري مرجع . دعنا نختار التيار كيفما اتفق $I = I_m / 0^\circ$ ونضعه على المحور الحقيقي للمخطط الطوري المبين في الشكل 10 - 10 ب . تحسب فولتيات المقاوم والمتسعة والمحث بعدئذ وتوضع على المخطط حيث ان العلاقة الطورية 90° تصبح واضحة . وان مجموع هذه الفولتيات الثلاث هو فولتية المصدر لهذه الدائرة والتي هي في حالة الرنين 1 حيث $Z_C = -Z_L$ فان فولتية المصدر وفولتية المقاوم متساويتان ومجموع الفولتية عبر المقاوم والمحثة او المتسعة والسعة يمكن الحصول عليها بسهولة من المخطط الطوري .

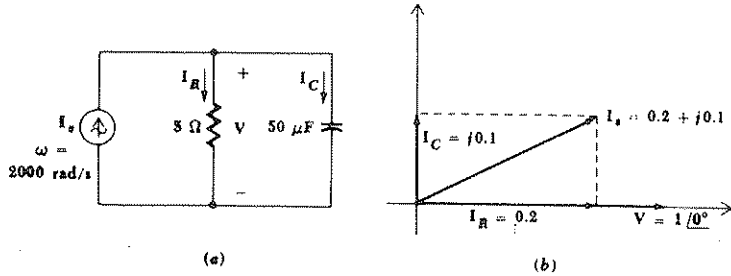


الشكل 10 - 10 (أ) دائرة RLC متوالية مبينة في حيز التردد : (ب) المخطط الطوري المصاحب لها وقد رسم تيار الشبكة الوحيدة كمرجع .

وان المخطط الطوري يمكن أن يفسر في حيز الزمن بالسماح لكل الطوريات بالدوران توافقياً بالسرعة الزاوية ω rad/s عكس عقارب الساعة ثم نأخذ المساقط على المحور الحقيقي .

1 سوف يعرف الرنين في الفصل الرابع عشر .

يبين الشكل 11 - 10 (أ) دائرة تواز بسيطة ومن المنطقي استعمال الفولتية الوحيدة بين العقدين كطوري مرجع. ولو فرضنا ان $V = 1/0^\circ V$ فان التيار المقاوم بالطور نفسه مع الفولتية $I_R = 0.2/0^\circ$ والتيار المتسعة يسبق المرجع بـ 90° وبعد اضافة هذين التيارين الى المخطط الطوري المبين في الشكل 11 - 10 (ب) ربما يتم جمعها للحصول على تيار المصدر والنتيجة هي $I_s = 0.2 + j0.1A$. اذا كان تيار المصدر معروفاً بالبداية مثلاً $1/0^\circ A$ وفولتية العقدة كانت غير معروفة في البداية فما زال من المناسب الابتداء في تكوين المخطط الطوري بفرض فولتية العقدة مثلاً $V = 1/0^\circ V$ مرة اخرى وتستعمل كطوري مرجعي. ثم يكمل المخطط بعدئذ كالسابق كما يحسب ثانية تيار المصدر الذي يجري كنتيجة لفولتية العقدة المفروضة وقيمهته $0.2 + j0.1$ إن تيار المصدر الحقيقي هو $1/0^\circ A$ على أية حال. لذا فان فولتية العقدة الحقيقية أكبر بالعامل $1/0^\circ / (0.2 + j0.1)$ وفولتية العقدة الحقيقية عندئذ هي $4 - j2V$. فالفولتية المفروضة تؤدي الى مخطط طوري يختلف عن المخطط الطوري الحقيقي بتغيير المقياس (المخطط المفروض اصغر بالعامل $1/\sqrt{20}$) ودوران زوايا (المخطط المفروض دور بعكس عقارب الساعة خلال 26.6°).



الشكل 11 - 10 (أ) دائرة RC متوازية (ب) المخطط الطوري لهذه الدائرة وقد استخدمت فولتية العقدة V كمرجع مناسب

المخططات الطورية عادة تكون بسيطة جداً عند التكوين وان معظم تحليلات الحالة المستقرة الجيبية ستكون ذات معنى أكثر اذا استخدمت مثل هذه المخططات . وهناك امثلة اضافية لاستعمال المخططات الطورية ستظهر باستمرار خلال دراستنا الباقية .

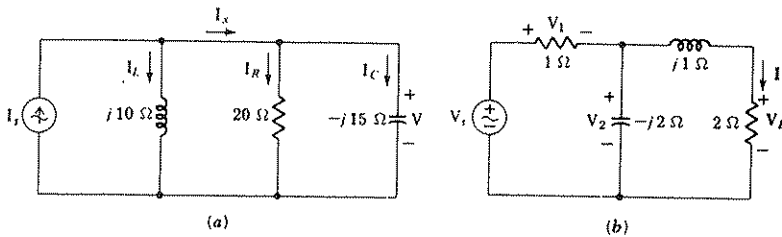
تمرينان :-

5 - 10 افرض قيمة مناسبة لـ V في الشكل 12 - 10 (أ) ثم انشئ المخطط الطوري مبيناً I_R و I_L و I_C بمزج هذه التيارات ، اوجد الزوايا التي يسبق التيار I_R كلاً من (أ) I_R (ب) I_C (ج) I_L

الجواب -124° ; -87° ; -34°

6 - 10 اختر قيمة تردد لـ I_L في الشكل 12 - 10 (ب) ثم ارسم المخطط الطوري مبيناً V_L و V_1 و V_2 ثم قس نسبة طول (أ) V_2 الى V_1 (ب) V_2 الى V_x (ج) V_x الى V_L

الجواب 1.43 ; 1.60 ; 2.86



الشكل 12 - 10 (أ) انظر التمرين 5 - 10 (ب) انظر التمرين 6 - 10

سوف ندرس طرق الحصول على الاستجابة للدائرة ذات الحث الجيبي كدالة للتردد الزاوي ω . وكيفية اظهارها . فإن الاستجابة الترددية الجيبية سوف نشاهد أنها مهمة جداً في معظم فروع الهندسة الكهربائية وكذلك في مجالات أخرى كنظرية الاهتزازات الميكانيكية . الا أنها ليست مهمة عند الاشتغال على تردد القدرة 60-Hz حيث التردد ثابتاً ولا مجال لتغيير شيء سوى الحمل .

دعنا نفترض بأن لدينا دائرة تحتث بمصدر واحد $V_s = V_m \cos(\omega t + \theta)$. هذه الفولتية الطورية يجب أن تحول الى فولتية مصدر حيز الزمن $V_s \cos(\omega t + \theta)$. في مكان ما في الدائرة تظهر الاستجابة المرغوبة أي التيار . وكما نعلم بأن هذه الاستجابة الطورية هي عدد مركب وقيمتها لا يمكن تخصيصها بصورة عامة بدون استعمال كمييتين : أما الجزء الحقيقي والجزء الخيالي أو القيمة وزاوية الطور . والزوج الأخير من الكميات هي أكثر فائدة وأسهل ايجاداً بالتجربة وهي المعلومات التي سنحصل عليها تحليلياً كدالة للتردد .

ويمكن اظهار البيانات كمنحنين هما : قيمة الاستجابة كدالة لـ ω وزاوية الطور كدالة لـ ω . وعادة نغير المنحنين برسم تخطيط نسبة التيار الى الفولتية وزاوية طور لنسبة التيار الى الفولتية مع ω . ومن الواضح بأن الوصف الآخر لمحصلة المنحنيات هو بدلالة قيمة طور المسائرة وزاويتها كدالة التردد . وان استجابة الفولتية الميرة يمكن بصورة مشابهة اظهارها كقيمة الممانعة وزاوية طورها مع ω . والاحتمالات الاخرى هي نسبة الفولتية الى الفولتية (تضخيم الفولتية) او نسبة التيار (تضخيم التيار) . دعنا ندرس تفاصيل هذه العملية بالتفصيل بشرح المثالين الآتين .

في المثال الأول دعنا نختر دائرة RL المتوالية . الفولتية الطورية V_s مسلطة على هذه الدائرة البسيطة ويراد حساب التيار الطوري I على أنه الاستجابة المطلوبة . وتتعامل مع الاستجابة المرغمة فقط وتساعد الاساليب الطورية المعروفة للحصول على التيار :

$$I = \frac{V_s}{R + j\omega L}$$

دعنا الآن نعبر فوراً عن هذه النتيجة بالشكل المعير كنسبة التيار الى الفولتية أي مسائرة الدخل

$$Y = \frac{I}{V_s}$$

$$Y = \frac{1}{R + j\omega L} \quad (3)$$

وإذا رغبتنا في تغيير المسائرة كأنها حاصل ضرب التيار في فولتية المصدر $V \angle 0^\circ$. إن قيمة الاستجابة هي :

$$|Y| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (4)$$

بينما زاوية الاستجابة محدث بأنها

$$\text{ang } Y = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (5)$$

المعادلات (4) و (5) هي تعابير تحليلية لقيمة طور الاستجابة وزاويتها كدالة لـ ω والآن نرغب في اظهار المعلومات نفسها تخطيطياً .

لنأخذ منحنى الاتساع أولاً . ومن المهم ملاحظة أننا قد رسمنا القيمة المطلقة لكمية مع ω ، لذا فان المنحنى بأجمعه يجب أن يقع فوق محور ω . إن منحنى الاستجابة يرسم بملاحظة ان قيمة الاستجابة عند التردد صفر هي $1/R$. وأن الانحدار الابتدائي يساوي صفرأ وأن الاستجابة تقترب من الصفر حينما يقترب التردد من اللانهاية . يبين الشكل 13 - 10 (أ) منحنى اتساع الاستجابة كدالة لـ ω ولأجل الاعمام والكمال فان الاستجابة مبينة لكل من الترددات الموجبة والسالبة وأن التناظر هو نتيجة الحقيقة (4) التي توضح ان $|Y|$ لها القيمة نفسها عندما تستبدل ω بـ $(-\omega)$. وأن التفسير الفيزيائي للتردد الزاوي السالب مثلاً $\omega = -100 \text{ rad/s}$ يعتمد على دالة حيز الزمن وربما يمكن الحصول عليها من النظر الى تعبير حيز الزمن . فلنفرض على سبيل المثال بأننا نعتبر الفولتية $v(t) = 50 \cos(\omega t + 30^\circ)$. عند التردد $\omega = 100$ السفولتية $v(t) = 50 \cos(100t + 30^\circ)$ بينما عندما $\omega = -100$ فان $v(t) = 50 \cos(-100t + 30^\circ)$ أو $v(t) = 50 \cos(100t - 30^\circ)$ وهاتان الفولتيتان لهما القيمة نفسها عندما $t = 1 \text{ ms}$ مثلاً وأن اي استجابة جيبيه يمكن التعامل بها بالطريقة نفسها .

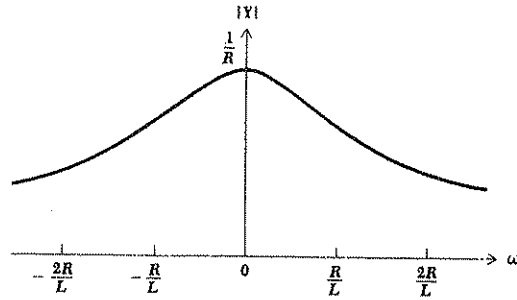
والجزء الثاني من الاستجابة هو زاوية الطور لـ Y مع ω والذي هو دالة معكوس الظل . ان دالة الظل نفسها معروفة تماماً وسوف لانلاقي اي صعوبة لقلب ذلك المنحني على حافته وان الخطوط المقاربة عند $90^\circ +$ وعند $90^\circ -$ هي للمساعدة فقط . وان منحنى الاستجابة مبين في الشكل 13 - 10 ب . والنقاط عندما $\omega = \pm R/L$ مؤشرة على كل من منحنيات القيمة والطور . وفي هذه الترددات تكون القيمة 0.707 من القيمة العظمى عند التردد صفر والتردد صفر وزاوية الطور عندها تساوي 45° . عند التردد الذي فيه قيمة المسائرة 0.707 من المرات بقدر القيمة العظمى فتكون قيمة التيار هي 0.707 من المرات بقدر القيمة العظمى وان معدل

القدرة المجهزة من قبل المصدر هي 0.7072 أو 0.5 بقدر القيمة العظمى . وليس غريباً بأن تعرف $\omega = R/L$ بأنها تردد نصف القدرة .

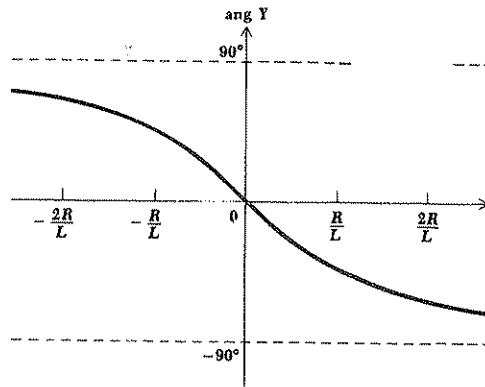
وكمثال ثان دعنا نختار دائرة LC المتوازية المشغلة بواسطة مصدر التيار الجيبي كما هو موضح في الشكل 14 - 10 (أ) . يمكن الحصول على استجابة الفولتية V

$$V = I_s \frac{(j\omega L)(1/j\omega C)}{j\omega L - j(1/\omega C)}$$

بسهولة :



(a)



(b)

الشكل 13 - 10 (أ) اتساع $\gamma = 1/V_s$ و (ب) زاوية γ مرسومان كدالة لـ ω لدائرة RL المتواليّة مع إثارة جيبيّة .

وربما يمكن التعبير عنها كمانعة دخل

$$Z = \frac{V}{I_s} = \frac{L/C}{j(\omega L - 1/\omega C)}$$

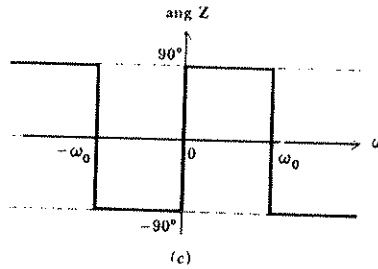
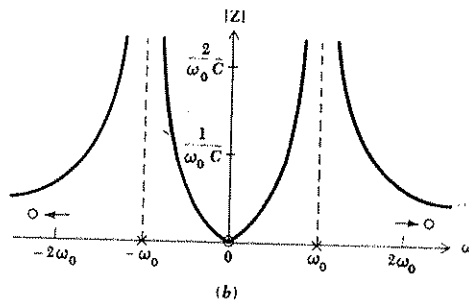
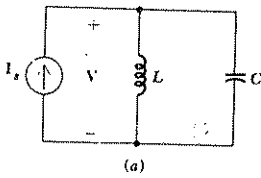
$$Z = -j \frac{1}{C} \frac{\omega}{\omega^2 - 1/LC} \quad (6) \quad \text{أو بافتراض أن}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

وبفك تعبير ممانعة الدخل . يمكن كتابة اتساع الممانعة بالشكل الذي يمكن هذه الترددات من أن تعرف حينما تكون الاستجابة عندها صفراً أو لانهائية .

$$|Z| = \frac{1}{C} \frac{|\omega|}{|(\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0)|} \quad (7)$$

ان ترددات مثل هذه يعبر عنها بالترددات الحرجة .



الشكل 14 - 10 (أ) دائرة LC المتوازية المثارة جيئياً (ب) اتساع ممانعة الادخال $Z = V/I_s$ (ج) زاوية ادخال الممانعة مرسومة كدالة ل ω

وان معرفتها الأولية تبسط رسم منحنى الاستجابة الذي يبين الاتساع مع التردد نلاحظ أولاً بأن استجابة اتساع الصفر تحصل عند $\omega = 0$. يدعى التردد الذي يحدث ذلك عنده بالصفر . تلاحظ الاستجابة لاتساع مقداره مالانهاية عند $\omega = \omega_0$

و $\omega = -\omega_0$. وهذه الترددات سميت بالأقطاب لأنها استجابة لانتهائية . واخيراً نلاحظ بأن الاستجابة تقرب من الصفر كلما $\omega \rightarrow \infty$. ولذا فان $\omega = \pm\infty$ هي أيضاً أصفاراً .

وان مواقع الترددات الحرجة يجب ان تؤشر على محور ω باستعمال دوائر صغيرة للأصفار وعلامة ضرب للأقطاب . الاقطاب والأصفار عند التردد ما لانتهائية يجب أن تعرف بسهم بالقرب من المحور كما هو مبين في الشكل 14 - 10 (ب) . وان الرسم الحقيقي للمخطط البياني يرسم بصورة أسهل باضافة خطوط عمودية مقطعة كخطوط مقارنة لموقع كل قطب . والمنحنى الكامل للاتساع مع ω في الشكل 14 - 10 ب والمنحدر في نقطة الأصل هو ليس صفراً .

لدى ملاحظة (6) تبين بأن زاوية الطور لممانعة الدخل يجب أن تكون اما $90^\circ +$ أو $90^\circ -$ وان أي قيمة أخرى غير ممكنة . كما تظهر الحالة لأي دائرة تتكون كلياً من محثات ومتسعات . وان التعبير التحليلي لزاوية Z سوف تكون حاوية على سلسلة من الجمل التي تفي على أن الزاوية هي $90^\circ +$ أو $90^\circ -$ لبعض مديات الترددات . من الأسهل إظهار المعلومات بالرسم التخطيطي كما هو مبين في الشكل 14 - 10 (ج) . وعلى الرغم من أن هذا المنحنى هو فقط مجاميع لأجزاء الخطوط المستقيمة فان أخطاء ترتكب دائماً في رسمها . ومن المناسب التأكد من رسمها مباشرة من ملاحظة (6)

تمرينان : -

7 - 10 محث ذو 20-mH ومقاوم 500Ω ومصدر تيار جيبي مربوطة على التوازي . ارسم كلاً مما يأتي كدالة لـ ω (أ) اتساع الفولتية عبر المصدر (ب) زاوية طور الفولتية عبر المصدر (ج) اتساع التيار المار خلال المحث .

الجواب عند $\omega = 50 \text{ krad/s}$: $I_s = 1 \text{ A}$; $V_s = 26.6^\circ$; 0.447 A

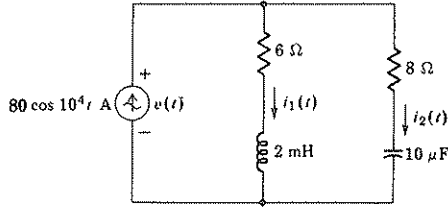
8 - 10 محث ذو 0.05-H ومصدر جيبي V_s ومجموعة مزيج متوازي من $1 \mu\text{F}$ و 0.2 H كلها على التوالي . افرض أن الاستجابة المطلوبة هي النسبة بين فولتية محث 0.05-H الى فولتية المصدر . ارسم اتساع طور الاستجابة وزاويتها كدالة لـ ω . ثم أوجد كل الترددات الحرجة للاستجابة .

الجواب ± 2236 ; $\pm 5000 \text{ rad/s}$

2 من التقليد اعتبار نقطتي اللانهاية الموجبة واللانهاية السالبة كأنهما النقطة نفسها . أما زاوية الطور للاستجابة في القيم الموجبة والسالبة العالية جداً لـ ω لانتحتاج أن تكون نفسها على أي حال .

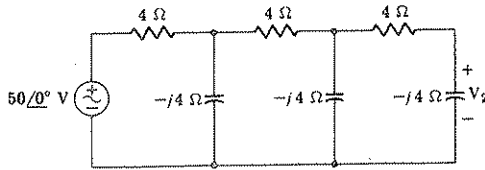
مسائل :-

1 ارسم مكافئ الدائرة المبينة في الشكل 15 - 10 في حيز التردد ثم أوجد I_1 و I_2 و V ثم اعط التعبير عن $i_1(t)$ و $i_2(t)$ و $v(t)$



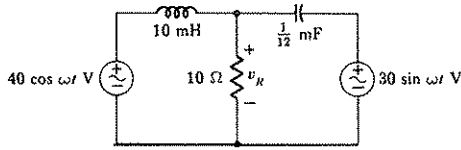
الشكل 15 - 10 انظر المسألة 1

2 □ (أ) أوجد V_2 في الشكل 16 - 10 (ب) ماهي القيم الجديدة المتساوية التي يجب أن تستبدل بها المقاومات التي أقياما $4\text{-}\Omega$ لكي تكون زاوية الطور بين V_2 والمصدر تساوي 180° ؟



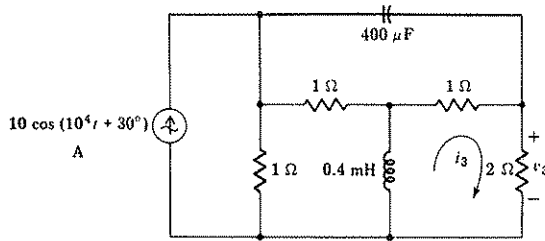
الشكل 16 - 10 انظر المسألة 2

3 ارسم في حيز التردد الدائرة المكافئة لدائرة الشكل 17 - 10 عندما $\omega = 600 \text{ rad/s}$ (ب) أوجد الفولتية الطورية V_{oc} عبر المقاوم $10\text{-}\Omega$ (ج) اوجد في حيز الزمن الفولتية v_{oc} عبر المقاوم $10\text{-}\Omega$



الشكل 17 - 10 انظر المسألة 3

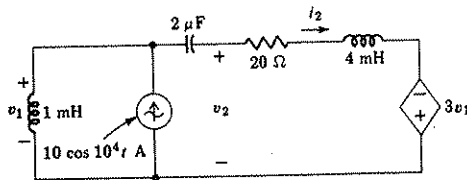
□ 4 أوجد $v_o(t)$ في الدائرة الميينة في الشكل 18 - 10 باستخدام التحليل العقدي



الشكل 18 - 10 انظر المسألة 4 و 5

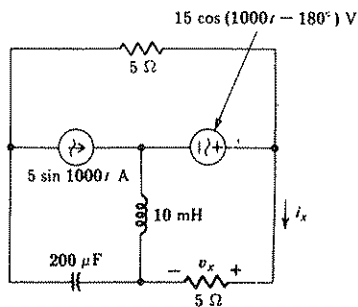
5 اكتب ثلاث معادلات شبكية ثم حلها لايجاد $i_3(t)$ للدائرة الميينة في الشكل 18 - 10

□ 6 (أ) أوجد $i_2(t)$ في الدائرة الميينة في الشكل 19 - 10 (ب) استبدل الفولتية المسيطرة من $3v_1$ الى $3v_2$ ثم احسب $i_2(t)$ مرة أخرى



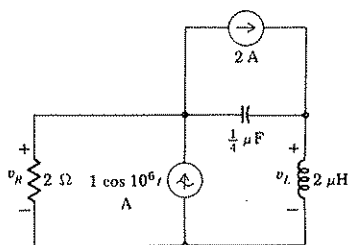
الشكل 19 - 10 انظر المسألة 6

- 7 (أ) أنشئ شجرة للدائرة الميينة في الشكل 20 - 10 التي تكون فيها v_r عبارة عن فولتية فرع شجرة. أشر بمجموعة فولتيات فروع شجرة ثم أوجد $v_r(t)$
- (ب) انشئ شجرة للدائرة التي فيها i_x عبارة عن تيار رباط ثم أشر بمجموعة كاملة من تيارات الرباطات ثم أوجد $i_x(t)$



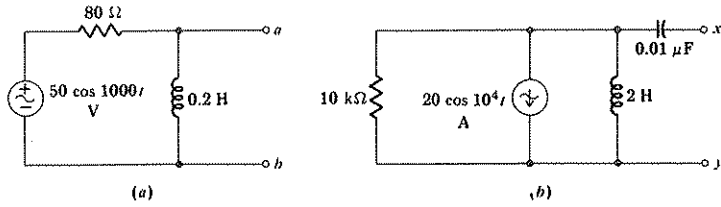
الشكل 20 - 10 أنظر المسألة 7

- 8 أوجد : (أ) $v_u(t)$ (ب) $v_x(t)$ للدائرة الميينة في الشكل 10.21



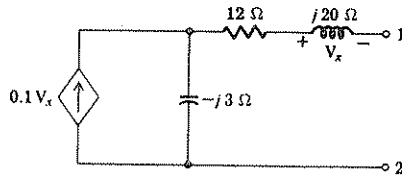
الشكل 21 - 10 أنظر المسألة 8

- 9 (أ) أوجد مكافئ ثفنن للشبكة الميينة في الشكل 22 - 10 (ب) أوجد مكافئ نورتن الميّن في الشكل 22 - 10 ب



الشكل 22 - 10 أنظر المسألة 9

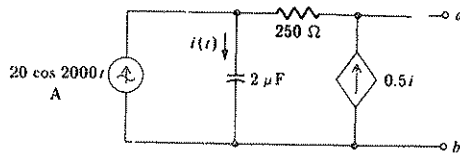
□ 10 أوجد الممانعة الخارجية للشبكة المبينة في الشكل 23 - 10



الشكل 23 - 10 أنظر المسألة 10

11 (أ) أوجد مكافئ نورتن في حيز التردد للشبكة المبينة في الشكل 24 - 10 .

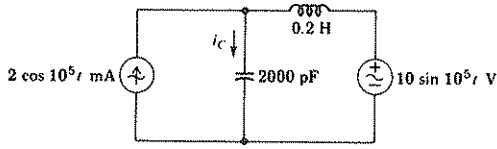
(ب) إعط قيم العناصر لاحدى الشبكات التي لها مكافئ نورتن هذا (عند $\omega = 2000 \text{ rad/s}$)



الشكل 24 - 10 أنظر المسألة 11

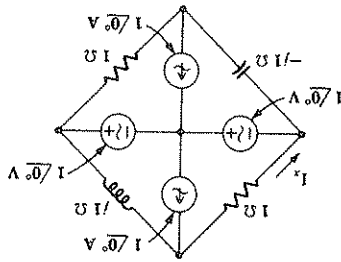
12 (أ) استخدم نظرية التراكب لايجاد i_c من الشكل 25 - 10 . إعمل في حيز التردد .

(ب) استبدل مصدر الفولتية بـ $10 \sin 40,000t \text{ V}$ ثم أعد الحل .



الشكل 25 - 10 أنظر المسألة 12

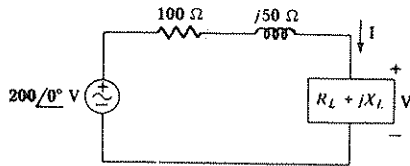
□ 13 استخدم نظرية التراكب لايجاد i_c في الشكل 26 - 10



الشكل 26 - 10 أنظر المسألة 13

14 اختر قيماً لـ R_L و X_L في الدائرة المبينة في الشكل 27 - 10 بحيث أن

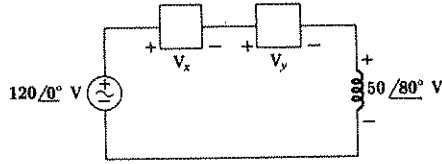
$$V = 100 \angle 30^\circ \text{ V (ب)} \quad I = 1 \angle 30^\circ \text{ A (أ)}$$



الشكل 27 - 10 أنظر المسألة 14

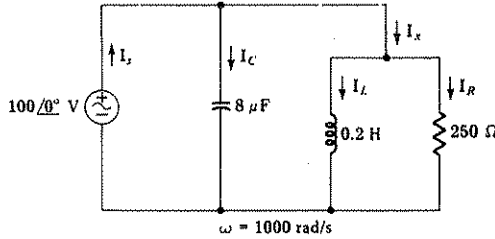
□ 15 أوجد زوايا الطور لكل من v_r و v_b بيانياً للدائرة المبينة في الشكل 28 -

$$10 \text{ إذا كانت } |v_b| = 150 \text{ V و } |v_r| = 90 \text{ V}$$



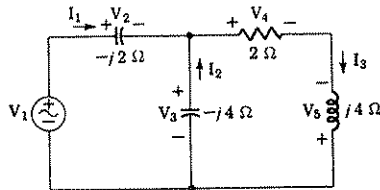
الشكل 28 - 10 أنظر المسألة 15

16 ارسم المخطط الطوري للدائرة المبينة في الشكل 29 - 10 مبيناً كل التيارات الخمسة . أشر الى المضلع الذي يبين $I_s = I_C + I_x$ و $I_x = I_R + I_L$



الشكل 29 - 10 أنظر المسألة 16

17 اذا كان $I_s = 2∠0° A$, أوجد كل الفولتيات المجهولة والتيارات المبينة في المخطط للشكل 10 - 30 ثم بينها كلها في مخطط طوري واحد .

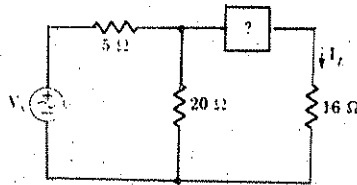


الشكل 30 - 10 أنظر المسألة 17

18 □ ارسم اتساع وزاوية المسيرة الداخلية للشبكة المتوالي لـ RC مع ω اذا كانت
 $C = 50 \mu F$ و $R = 25 \Omega$

19 مقاوم $5\text{-}\Omega$ ومحث 20-mH ومتسعة $50\text{-}\mu F$ مربوطة على التوالي مع مصدر $V = 25\angle 0^\circ V$ ارسم اتساع وزاوية طور فولتية المتسعة كدالة للتردد
 $0 \leq \omega \leq 3 \text{ krad/s}$

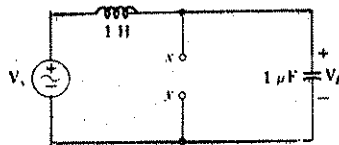
20 ارسم اتساع طور النسبة I_1/V_s وزاويته مع ω للدائرة المبينة في الشكل
 31 - 10 اذا كان العنصر المجهول هو محث مقدارها 0.1-H



الشكل 31 - 10 أنظر المسألين 20 و 21

21 ارسم اتساع وزاوية طور النسبة I_1/V_s مع التردد للدائرة المبينة في الشكل
 32 - 10 اذا كان العنصر المجهول هو متسعة مقدارها $50\text{-}\mu F$

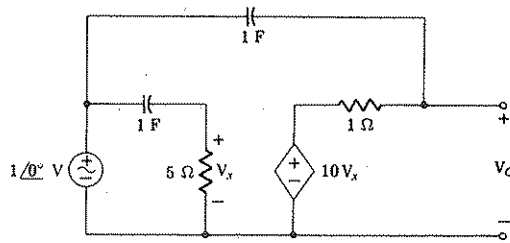
22 □ ارسم $|V_1/V_s|$ مع ω للدائرة المبينة في الشكل 32 - 10 اذا
 (أ) بقي الطرفان x و // مفتوحى الدائرة (ب) ربط المحث 1-H بين الطرفين
 x و //



الشكل 32 - 10 أنظر المسألة 22

23 مصدر تيار $10\angle 0^\circ$ -mA ومحث 3-H وربط متوالي من محث 2-H وومتسعة $80\text{-}\mu\text{F}$ كلها ربطت على التوازي . ارسم اتساع فولتية المتسعة كدالة للتردد .

24 ارسم $|V_c|$ مع ω للدائرة الميينة في الشكل 33 - 10 ثم أشر الى قيم ω التي فيها $|V_c| = 2\text{ V}$.



الشكل 33 - 10 أنظر المسألة 24

الفصل الحادي عشر

معدل القدرة وقيم ج. م. ت AVERAGE POWER AND RMS VALUES

11.1 مقدمة INTRODUCTION

تشمل جميع المسائل في تحليل الدائرة تقريباً تسليط مصدر واحد للطاقة الكهربائية أو أكثر إلى دائرة ثم حساب الاستجابة الناتجة خلال الدائرة . والاستجابة يمكن أن تكون تياراً أو فولتية ولكننا نهتم أيضاً بكمية الطاقة المجهزة من المصادر وكمية الطاقة المبددة أو المخزونة ضمن الدائرة كما نهتم بطريقة إيصال الطاقة إلى النقاط التي تحسب الاستجابات فيها . وعلى أية حال نهتم أولاً بمعدل توليد وامتصاص الطاقة لذا يجب أن يوجه انتباهنا الآن إلى القدرة .

وسوف نبدأ بدراسة القدرة الآنية وهي حاصل ضرب فولتية حيز الزمن وتيار الزمن الخاصين بالعنصر الذي يهمننا . ان القدرة الآنية في بعض الأحيان مفيدة جداً بحد ذاتها لأن قيمتها القصوى ربما يجب أن تحدد لأجل تجنب تجاوز مدى السلامة أو المدى المفيد للأداة الحقيقية على سبيل المثال إن كلا من مضخات القدرة التي تستخدم الترانزستور أو الصمام المفرغ تنتج خرجاً مشوهاً عند تجاوز قمة القدرة قيمة معينة . على أية حال نحن يهمننا بصورة رئيسة القدرة الآنية لسبب بسيط هو أنها تهيء لنا الوسيلة لحساب كمية أكثر أهمية ألا وهي معدل القدرة . وبطريقة مشابهة فإن تقدم رحلة المركبة التي تقطع القطر توصف أفضل مايمكن بمعدل سرعتها . وان اهتمامنا بالسرعة الآنية هو لتجنب السرعة القصوى التي تعرض سلامتنا للخطر أو لتجنب اعتراض شرطي المرور عليها .

وفي المسائل العملية سوف نتعامل مع قيم معدل القدرة التي تتراوح بين أجزاء صغيرة من البيكوواط الموجودة في إشارة القياس عن بعد telemetry من الفضاء الخارجي إلى بضعة واطات للقدرة الصوتية المجهزة إلى الحاكية في أنظمة الصوت

المجسم العالية الكفاءة الى عدة مئات من الواطات اللازمة لتسيئة القهوة الصباحية الى ملايين الواطات اللازمة لتجهيز كل احتياجات الكهرباء لمدينة كبيرة .
وان مناقشتنا سوف لا تقتصر كلياً على معدل القدرة المجهزة من قبل التيار أو الفولتية الجيبية بل اننا سوف نكون المقياس الرياضي لتأثير أشكال الموجات الأخرى في تجهيز القدرة التي سوف نسميها القيمة المؤثرة . وان دراستنا للقدرة سوف تكتمل بدراسة كميتين مهمتين هما عامل القدرة والقدرة المركبة وهما الكميتان اللتان تهيئان المعايير العملية والاقتصادية اللازمة لتوزيع القدرة الكهربائية .

2 - 11 القدرة الانية INSTANTANEOUS POWER

ان القدرة المجهزة الى اية اداة كدالة للزمن تعطى بحاصل ضرب الفولتية الانية عبر الأداة والتيار الانى خلالهم كما نعلم ذلك جيداً عند اتباع مفهوم الاشارة غير الفعالة . لذا

وقد افترض كل من التيار الفولتية . اذا كانت الاداة في المسألة هي المقاوم R فإنه يمكن التعبير عن القدرة كلياً اما بدلالة التيار او الفولتية .

وإذا كانت الفولتية والتيار العائدين لأداة حثية كلياً فإنه

$$p = vi = Li \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} v \int_{-\infty}^t v dt \quad (3)$$

حيث أننا فرضنا اعتبارياً بأن الفولتية تكون صفراً عند $t = -\infty$. وفي حالة المتسعة

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} = \frac{1}{C} i \int_{-\infty}^t i dt \quad (4)$$

حيث وضعت فرضية مشابهة للتيار وعلى اية حال إن هذه القائمة من المعادلات للقدرة بدلالة التيار أو الفولتية سوف تصبح بعد قليل فقط غير سهلة الاستخدام كلما بدأنا نأخذ شبكات أكثر شمولاً ولكن القائمة هي ضرورية أيضاً لأننا نحتاج ايجاد كل من التيار والفولتية على نهايات الشبكة . وكمثال سوف نعتبر دائرة RL المتوالية المبينة في الشكل 11.1 المسلط عليها فولتية الخطوة . وان الاستجابة المعهودة هي :

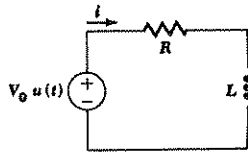
$$i(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

لذا فان القدرة الكلية المجهزة من قبل المصدر أو المتصلة من قبل الشبكة غير الفعالة هي

$$p = vi = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})u(t)$$

وحيث أنه من الواضح أن مربع دالة وحدة الخطوة هي وحدة الخطوة نفسها ، فالقدرة المجهزة الى المقاوم هي :

$$p_R = i^2 R = \frac{V_0^2}{R} (1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$$



الشكل 11.1 القدرة المجهزة الى R هي $p_R = i^2 R = (V_0^2/R)(1 - e^{-Rt/L})^2 u(t)$

ولأجل حساب القدرة المتصلة من قبل المحث نحصل أولاً على فولتية المحث

$$\begin{aligned} v_L &= L \frac{di}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) + \frac{LV_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \frac{du(t)}{dt} \\ &= V_0 e^{-Rt/L} u(t) \end{aligned}$$

وبما أن $du(t)/dt$ هي صفر للزمن $t > 0$ وأن $(1 - e^{-Rt/L})$ هي صفر للزمن $t = 0$. فالقدرة المتصلة من قبل المحث هي

$$p_L = v_L i = \frac{V_0^2}{R} e^{-Rt/L} (1 - e^{-Rt/L}) u(t)$$

نحتاج بضعة عمليات جبرية فقط لتبيين أن

$$p = p_R + p_L$$

والتي تستعمل لتدقيق حلنا .

وأن غالبية المسائل التي تتضمن حسابات القدرة من المحتمل أن تتعامل مع الدوائر المثارة بالدالات المرغمة الجيبية في حالة الاستقرار كما علمنا سابقاً حتى حين استخدام الدالات المرغمة الدورية غير الجيبية فان بالامكان حل المسائل بعدد من المسائل الفرعية التي تكون دالاتها المرغمة جيبية . ولهذا فان الحالة الخاصة الجيبية تستحق عناية خاصة .

دعنا نغير مصدر الفولتية في الدائرة للشكل 1.11 الى مصدر جيبي $V_m \cos \omega t$

فأستجابة حيز الزمن المعهودة هي $i(t) = I_m \cos (\omega t + \theta)$

$$I_m = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{ and } \theta = -\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad \text{حيث أن}$$

القدرة الآنية المجهزة الى الدائرة كاملة في حالة الاستقرار الجيبي تكون :

$$p = vi = V_m I_m \cos (\omega t + \theta) \cos \omega t$$

والتي سوف نجدها مناسبة لاعادة كتابتها بالشكل الذي حصلنا عليه باستعمال المتطابقة المثلثية لحاصل ضرب دالتين جيبيتين . لذا

$$p = \frac{V_m I_m}{2} [\cos (2\omega t + \theta) + \cos \theta]$$

$$= \frac{V_m I_m}{2} \cos \theta + \frac{V_m I_m}{2} \cos (2\omega t + \theta)$$

المعادلة الاخيرة لها عدة خصائص وهي صحيحة بصورة عامة في الدوائر في حالة الاستقرار الجيبي وان هناك حداً واحداً ليس دالة زمنية وهو الأول . أما الحد الثاني المشمول فيتغير دورياً بضعف التردد المسلط . وبما أن هذا الحد هو موجة جيبتامية وبما أن الموجات الجيبية والموجات الجيبتامية لها معدل مقداره صفر (عند اخذ المعدل على عدد متكامل من الدورات) فان هذا المثال ربما يستخدم كمقدمة لتوضيح أن معدل القدرة هو $\frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$. وهذا صحيح وسوف نتحقق من هذه العلاقة بحدود أكثر شمولاً .

تمرينان :

1 - 11 مصدر فولتية $50u(t) \text{ V}$ وبطارية 10-V (ربط الطرفين الموجبان سوية) ومقاوم $20\text{-}\Omega$ وملتعة $50\text{-}\mu\text{F}$ على التوالي . عند $t = 1.5 \text{ ms}$, أوجد القدرة الممتصة من (أ) المقاوم (ب) الملتعة (ج) البطارية
الجواب W 5.58; 6.22; 16.09

2 - 11 مصدر فولتية $50 \sin 800t \text{ V}$ وبطارية 10-V (ربط الطرفين الموجبان سوية ومقاوم $20\text{-}\Omega$ وملتعة $50\text{-}\mu\text{F}$ على التوالي . عند $t = 4 \text{ ms}$ أوجد القدرة الممتصة من (أ) المقاوم (ب) الملتعة (ج) البطارية
الجواب W -16.02; -12.74; 32.5

11.3 معدل القدرة AVERAGE POWER

عندما نتكلم على قيمة معدل القدرة الآنية فان الفترة الزمنية التي يحسب خلالها المعدل هذا يجب أن تعرف بوضوح . دعنا أولاً نختر فترة زمنية عامة من t_1 الى t_2 . فربما نحصل على قيمة المعدل بأخذ تكامل $p(t)$ من t_1 الى t_2

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt \quad (5)$$

ونقسم النتيجة على الفترة الزمنية $t_2 - t_1$ لذا
قيمة المعدل تؤشر بحرف كبير P لانها ليست دالة للزمن وتظهر عادة بدون توصيفات .

ورغم أن P هي ليست دالة للزمن فانها دالة لـ t_1 و t_2 الزمان اللذان يعرفان فترة التكامل . وهذا الاعتماد لـ P على الفترة الزمنية المعينة ربما يعبر عنه بطريقة مشابهة اذا كانت $p(t)$ دالة متناوبة . وسوف ندرس هذه الحالة المهمة أولاً .

دعنا نفرض بأن دالتنا المرغمة واستجابات الدائرة كلها متناوبة وقد وصلنا الى ظرف الحالة المستقرة على الرغم من أن فرضية الوصول الى الحالة المستقرة غير ضرورية . يمكن أن تعرف الدالة المتناوبة رياضياً بأن لها

$$f(t) = f(t + T) \quad (6)$$

حيث T هي الفترة . وسوف يبين الآن بان قيمة معدل القدرة الآنية كما عبر عنها في (5) ربما تحسب خلال فترة دورة واحدة لها بداية اعتباطية . ويبين الشكل 2.11 شكل الموجة الدورية العامة ويعرف بـ $p(t)$. سوف نحسب أولاً معدل القدرة بأخذ التكامل من اللحظة t_1 الى اللحظة t_2 التي تتأخر عن الأولى بفترة واحدة أي

$$P_1 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p(t) dt$$

ثم بالتكامل من زمن آخر t_x الى $t_x + T$

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_x}^{t_x+T} p(t) dt$$

وان مساواة P_x و P_1 يجب أن تفهم على أنها ضمن معنى التكامل بالرسم حيث أن المساحة التي تمثل التكامل المطلوب حسابه لايجاد P_x هي اصغر بالمساحة t_1 الى t_x ولكن اكبر بالمساحة من $t_1 + T$ الى $t_x + T$ ولكن الطبيعة الدورية للمنحنى تتطلب بأن تكون هاتان المساحتان متساويتين . لذا فان معدل القدرة ربما

يمكن حسابه بأخذ تكامل القدرة الآنية لأي فترة تكون دورة واحدة في الطول ثم القسمة على الفترة .

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} p dt \quad (7)$$

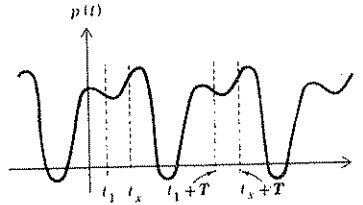
ومن المهم ملاحظة أننا يجب ان نكامل خلال عدد كامل من الفترات ثم نقسم على عدد الفترات نفسه لذا

$$P = \frac{1}{nT} \int_{t_1}^{t_1+nT} p dt \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

وإذا أهملنا هذه الفكرة الى أقصى الأطراف بالتكامل لكل الأزمنة سنحصل على نتيجة أخرى مفيدة . وسوف نهيء لأنفسنا حدود التكامل المتناظرة على التكامل .

$$P = \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p dt$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \int_{-nT/2}^{nT/2} p dt$$



الشكل 2 - 11 معدل قيمة P لدالة قدرة دورية $p(t)$ هي نفسها لأي فترة T

فإذا كانت $p(t)$ دالة تتصرف رياضياً بصورة جيدة كجميع الدالات المرغمة الحقيقية وكذلك الاستجابات فمن الظاهر أنه لو استبدلت n العدد الصحيح الكبير بعدد آخر أكبر قليلاً ولكنه غير صحيح فان قيمة التكامل وكذلك قيمة P تتغير بكمية صغيرة يمكن اهمالها . هذا اضافة الى أن الخطأ يقل كلما زادت n . وبدون تبرير هذه الخطوة بعمق سوف نستبدل المتغير المتقطع nT بالمتغير المتصل τ .

$$P = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} p dt \quad (9)$$

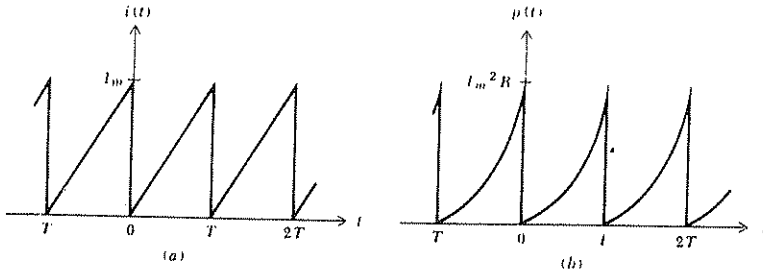
وسوف نجد من المناسب في مناسبات عدة أخذ تكامل الدالات الدورية خلال هذه الفترة اللانهائية وفيما يلي أمثلة على استخدام (7) و (8) و (9) . دعنا نوضح حساب معدل القدرة لموجة دورية بايجاد معدل القدرة المجهزة من قبل تيار شكل

موجته كأسنان المنشار (الدورية) المبينة في الشكل 3 - 11 (أ) الى المقاوم . لدينا

$$i(t) = \frac{I_m}{T} t \quad 0 < t \leq T$$

$$i(t) = \frac{I_m}{T} (t - T) \quad T < t \leq 2T$$

الى آخره .



الشكل 3.11 (أ) شكل موجة تيار سن المنشار (ب) شكل موجة القدرة الناتجة عن مقاوم

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R t^2 \quad 0 < t \leq T$$

$$p(t) = \frac{1}{T^2} I_m^2 R (t - T)^2 \quad T < t \leq 2T$$

وان

كما مرسوم في الشكل 3.11 (ب) بأخذ التكامل خلال أبسط مدى وهو دورة واحدة من $t = 0$ الى $t = T$ لدينا :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{I_m^2 R}{T^2} t^2 dt = \frac{1}{3} I_m^2 R$$

ان اختيار دوريات أخرى لدورة واحدة مثلاً من $t = 0.1T$ الى $t = 1.1T$ سوف ينتج الجواب نفسه سوف يهيء التكامل من 0 الى $2T$ والقسمة على $2T$ أي تطبيق (8) مع $n = 2$ و $t_r = 0$ الجواب نفسه

والآن دعنا نحصل على النتيجة العامة لحالة الاستقرار الجيبية .
سوف نفرض الفولتية الجيبية العامة

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha)$$

والتيار

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \alpha - \theta)$$

الملازمة للاداءة في المسألة . القدرة الآنية هي :

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \alpha - \theta)$$

وبالتعبير مرة أخرى عن حاصل ضرب دالتين جيبتاميتين كنصف مجموع جيبتام
لفرق الزاويتين وجيبتام مجموع الزاويتين .

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + 2\alpha - \theta) \quad (10)$$

وربما سنوفر على أنفسنا أخذ بعض التكاملات بتمحيص الناتج . فالحد الأول هو ثابت لا يعتمد على t والحد المتبقي هو دالة جيبتامية . و $p(t)$ هي على أية حال دورية وفترةها هي $\frac{1}{2}T$. لاحظ بأن الفترة T تأتي مع التيار والفولتية المعطاة وليس مع القدرة . حيث ان دالة القدرة فترتها $\frac{1}{2}T$. على أية حال يمكننا أخذ التكامل للفترة T لحساب قيمة الفولتية اذا رغبتنا . ومن الضروري فقط القسمة أيضاً على T . ان المامنا بالموجات جيب التمامية والجيبية على أية حال يبين بأن قيمة المعدل لأي فترة هي صفر فلا حاجة لتكامل (10) شكلياً . فمن مجرد ملاحظتها نعلم أن قيمة معدل الحد الثاني صفر للفترة T (أو $\frac{1}{2}T$) وقيمة معدل الحد الأول الثابت يجب أن تكون الثابت نفسه . لذا

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta \quad (11)$$

هذه النتيجة المهمة المقدمة في الفقرة السابقة لدائرة معينة على أية حال هي عامة لحالة الاستقرار الجيبي . ان معدل القدرة هو نصف حاصل ضرب اتساع الفولتية مع اتساع التيار وجيبتام فرق زاوية الطور بين التيار والفولتية . وان إشارة الفرق غير مهمة وكتوضيح عددي ، دعنا نفرض بان الفولتية .

$$v(t) = 4 \cos \frac{\pi t}{6}$$

$$v = 4 \angle 0^\circ$$

سلطت عبر الممانعة $Z = 2 \angle 60^\circ \Omega$ فان التيار الطوري سيكون $2 \angle -60^\circ$ ومعدل القدرة هي

$$P = \frac{1}{2}(4)(2) \cos 60^\circ = 2 \text{ W}$$

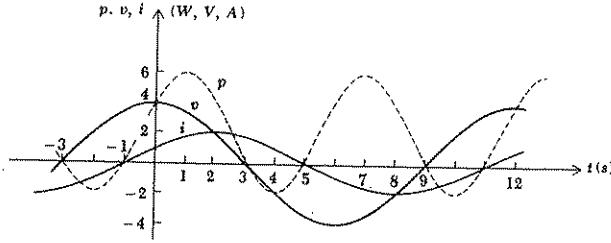
والفولتية في حيز الزمن

$$v(t) = 4 \cos \frac{\pi t}{6}$$

$$i(t) = 2 \cos \left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) \quad \text{وتيار حيز الزمن}$$

والقدرة الآنية

$$\begin{aligned} p(t) &= 8 \cos \frac{\pi t}{6} \cos \left(\frac{\pi t}{6} - 60^\circ \right) \\ &= 2 + 4 \cos \left(\frac{\pi t}{3} - 60^\circ \right) \end{aligned}$$



الشكل 4-11 متحنيات $v(t)$ و $i(t)$ و $p(t)$ مرسومة كدالات للزمن لدائرة بسيطة فيها فولتية الطور
 $v = 4\sqrt{2} \text{ V}$ مسلطة على الممانعة $Z = 2\sqrt{60^\circ} \Omega$ عندما $\omega = \pi/6$.

وجميعها مرسومة على المحور الزمني نفسه في الشكل 4.11. وتتضح قيمة معدل القدرة $2-W$ وفترتها 6 s كما تتضح نصف الفترة للتيار أو للفولتية كما تظهر كذلك قيمة الصفر للقدرة الآنية لكل لحظة عندما تكون الفولتية أو التيار صفراً. وهناك حالتان خاصتان للمقاوم المثالي وللمفاعل المثالي (أي مزيج من المتسعات والمحاثات فقط) حيث أن فرق زاوية الطور بين التيار خلال المقاوم أو الفولتية عبره هي صفر وعليه فإن :

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \quad \text{أو أن}$$

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R \quad (12)$$

$$P_R = \frac{V_m^2}{2R} \quad \text{أو} \quad (13)$$

والقانونان الأخيران يساعداننا لحساب معدل القدرة المجهزة الى المقاومة النقية من معرفة التيار أو الفولتية الجيبية وهما قانونان بسيطان ومهمان. وعادة يساء استعمالهما. والخطأ الأكثر شيوعاً يحدث عند محاولة تطبيقهما في الحالات التي تقول فيها أن الفولتية الداخلة في (13) هي ليست الفولتية عبر المقاوم. وإذا اعتنينا

باستعمال التيار خلال المقاوم في (12) والفولتية عبر المقاوم في (13) فان العملية المرضية تكون مضمونة . وان معدل القدرة المجهزة الى الأداة التي هي مفاعلة تقيية يجب ان تكون صفراً وهذه واضحة من فرق الطور 90° والذي يجب أن يظهر بين التيار والفولتية وعليه $\cos \theta = 0$ وان

$$P_r = 0$$

وان معدل القدرة المجهزة الى أي شبكة تتكون كلياً من محثات ومتسعات مثالية هي صفر والقدرة الأنوية صفر فقط في اللحظة المعينة . لذا فالقدرة تجهز الى الشبكة لجزء من الدورة وتجهز من الشبكة للجزء الآخر من الدورة .

وكمثال على ذلك ، لنفرض أن معدل القدرة المجهزة الى الممانعة $Z_L = 8 - j11 \Omega$ يتم بواسطة $I = 5 \angle 20^\circ \text{ A}$ وبذا تكتب القدرة المتوسطة

$$P = \frac{1}{2}(5)^2 \cdot 8 = 100 \text{ W}$$

حيث انه لا يمكن امتصاص اي قدرة متوسطة من قبل $11 - j \Omega$. لاحظ ايضاً اذا اعطي تيار بشكل الاحداثيات المتعامدة مثل $I = 2 + j5 \text{ A}$ فان مربع الاتساع هو $2^2 + 5^2$ وتكون القدرة المتوسطة

$$P = \frac{1}{2}(2^2 + 5^2) \cdot 8 = 116 \text{ W}$$

وكمثال آخر يوضح علاقات القدرة هذه الدائرة المبينة بالشكل 11 - 5 . وان قيم كل من I_1 و I_2 يمكن ايجادها بوحدة من عدد من الطرق كالتحليل الشبكي او

$$I_1 = 5 - j10 = 11.18 \angle -63.45^\circ$$

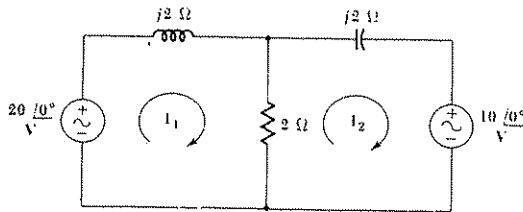
$$I_2 = 5 - j5 = 7.07 \angle -45^\circ$$

وان التيار خلال المقاوم $2 - \Omega$ هو

$$I_1 - I_2 = -j5 = 5 \angle -90^\circ$$

بحيث أن $I_m = 5$ ومعدل القدرة المستهلكة من المقاوم يوجد بسهولة بواسطة المعادلة (12) .

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} (5)^2 \cdot 2 = 25 \text{ W}$$



الشكل 5 - 11 معدل القدرة المجهزة الى كل عنصر مفاعلي يساوي صفراً في حالة الاستقرار الجيبي

ويمكن تدقيق النتيجة باستعمال (12) او (13) وبالالتفات الى المصدر الأيسر فان الفولتية $20\angle 0^\circ$ والتيار $11.18\angle -63.45^\circ$ يتطابق مع مصطلح الاشارة غير الفعال . لذا فان القدرة المجهزة من قبل هذا المصدر هي

$$P_{\text{net}} = \frac{1}{2}(20)(11.18) \cos (0^\circ + 63.45^\circ) = 50 \text{ W}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن القدرة الممتصة من قبل المصدر الأيمن .

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{2}(10)(7.07) \cos (0^\circ + 45^\circ) = 25 \text{ W}$$

فالقدرة المجهزة الى كل من المفاعلين هي صفر وبذا تحققت علاقات القدرة . في الفقرة 4 من الفصل الثالث درسنا نظرية أقصى قدرة منتقلة لدى تسليطها على الاحمال المقاومية حينما تكون ممانعات المصدر مقاومية . فلمصدر ثيفنن V_s ترتبط الممانعة $Z_{in} = R_{in} + jX_{in}$ مع الحمل $Z_L = R_L + jX_L$ ويمكن تبيانها جاهزة (المسألة 10) بأن معدل القدرة المجهزة الى الحمل يكون أقصى مايمكن عندما $R_L = R_{in}$ و $X_L = -X_{in}$ أي $Z_L = Z_{in}^*$. وهذه النتيجة غالباً ما تعرف بتسميتها بنظرية أقصى قدرة منتقلة لحالة الاستقرار الجيبي . ومن الظاهر بأن حالة المقاومة المعتبرة سابقاً ماهي إلا حالة خاصة .

ويجب علينا أن ننتبه بعض الشيء للدالات غير الدورية وكمثال معين لدالة القدرة غير الدورية التي تطلب فيها قيمة معدل القدرة هي قدرة الخرج للتلسكوب الراديوي الموجه الى النجم الراديوي وكمثال آخر : مجموع عدد من الدالات الدورية كل دالة لها فترة تختلف عن الأخرى بحيث لايمكن إيجاد فترة مشتركة أكبر للمزيج . فمثلاً التيار

$$i(t) = \sin t + \sin \pi t \quad (14)$$

غير دوري لأن نسبة الفترتين للموجتين الجيبيتين ليست بالعدد الصحيح . ففي $t = 0$ تكون كل الحدود صفراً وهي بازياد . وحيث أن الحد الاول صفر وهو بازياد فقط عندما $t = 2\pi n$ حيث n عدد صحيح . لذا فان الخاصية الدورية تتطلب بان πt او $\pi(2\pi n)$ يجب أن تساوي $2\pi m$ حيث m عدد صحيح ايضاً . وليس هناك حل ممكن (لقيم صحيحة لكل من m و n) لهذه المسألة . ويمكن ان توضح لمقارنة التعبير غير الدوري (14) مع الدالة الدورية

$$i(t) = \sin t + \sin 3.14t \quad (15)$$

حيث أن 3.14 عدد عشري صحيح ولا يقصد أن تمثل ما يعرف بالنسبة الثابتة الممثلة بالعدد ...3.141592 ودون عناء كبير يمكن تبين أن فترة موجة التيار هي $100\pi \text{ s.}^1$

وإن قيمة معدل القدرة المجهزة إلى المقاوم $1-\Omega$ أما بالتيار الدوري (15) أو بالتيار غير الدوري (14) ويمكن إيجادها بأخذ التكامل لفترة غير محددة ويمكن تجنب الكثير من التكاملات الحقيقية بسبب معرفتنا الواسعة عن قيمة المعدل للدالات البسيطة . وسوف نحصل على القدرة الآنية المجهزة من قبل التيار في (14) بتطبيق (9)

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (\sin^2 t + \sin^2 \pi t + 2 \sin t \sin \pi t) dt$$

سوف نعتبر الآن P أنها مجموع قيم ثلاثة معدلات . وإن قيمة معدل $\sin^2 t$ لفترة لانهاية تحسب باستبدال $\sin^2 t$ بـ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2t)$ ومن الواضح أنها تساوي $\frac{1}{2}$. وبصورة مشابهة فإن قيمة معدل $\sin^2 \pi t$ هي أيضاً $\frac{1}{2}$. والحد الأخير يمكن أن يعبر عنه كمجموع دالتين جيبيتايتين كل منها بالتأكيد له قيمة معدل تساوي صفرأ . لذا

$$P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ W}$$

ويمكن الحصول على نتيجة مماثلة للتيار الدوري (5) . بتطبيق الطريقة نفسها على دالة التيار الذي هو مجموع عدة جيوب لفرات مختلفة واتساعات اعتباطية ، فإن

$$i(t) = I_{m1} \cos \omega_1 t + I_{m2} \cos \omega_2 t + \dots + I_{mN} \cos \omega_N t \quad (16)$$

ونجد أن معدل القدرة المجهزة إلى المقاوم R .

$$P = \frac{1}{2}(I_{m1}^2 + I_{m2}^2 + \dots + I_{mN}^2)R \quad (17)$$

ولا تتغير هذه النتيجة إذا أعطيت زاوية مختلفة لكل مكونة من مكونات التيار . وهذه النتيجة المهمة بسيطة بشكل عجيب عندما نفكر بالخطوات اللازمة لاشتقاقها ؛ وبترتيب دالة التيار وتكاملها وأخذ غاياتها . والنتيجة هي أيضاً عجيبية بشكل واضح لأنها تبين بأن في هذه الحالة الخاصة للتيار كما في (16) فإن نظرية التراكب يمكن تطبيقها على القدرة . والتراكب لا يمكن تطبيقه على التيار الذي هو

$T_1 = 2\pi$ و $T_2 = 2\pi/3.14$ لذا فإننا نتوخى قيم التكامل لـ m و n بحيث إن $2\pi m = 2\pi n/3.14$ أو $3.14n = 2\pi m$ أو $n = m(2\pi/3.14)$ أو $157n = 50m$ لذا فإن اصغر قيم التكامل لـ n و m هي $n = 50$ و $m = 157$ الفترة تكون $T = 2\pi n = 100\pi$ أو $T = 2\pi(157)/3.14 = 100\pi \text{ s}$

مجموع تيارين مباشرين ولا يمكن تطبيقه على التيار الذي هو مجموع تيارين جييين لهما في الفترة نفسها . أي أن تياراً $i_1 = 2 \cos 10t - 3 \cos 20t$ A يعطي 26 W الى مقاوم ذي $4-\Omega$ بينما $i_2 = 2 \cos 10t - 3 \cos 10t$ A يعطي فقط 2-W كمعدل قدرة للمقاوم نفسه .

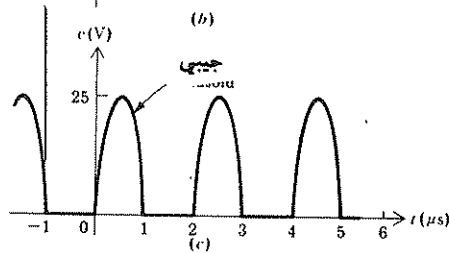
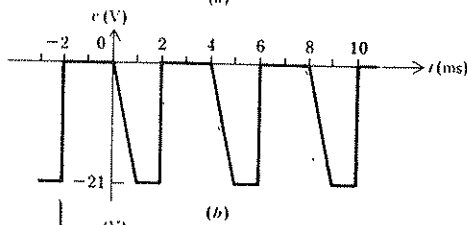
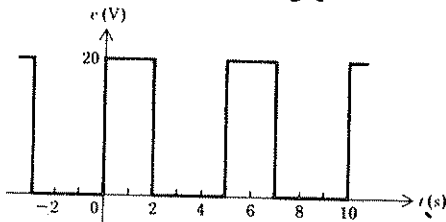
تمارين

3 - 11 اوجد معدل القدرة المجهزة من المصدر $V_s = 12\angle 30^\circ$ V الى (أ) مفاعلة مقدارها $Z = 5 + j10 \Omega$ (ب) مسامحة $Y = 0.12 + j0.6$ S (ج) مصدر فولتية (الطرفان الموجبان مربوطان سوية) مقداره $V_s = 20\angle 0^\circ$ V على التوالي مع سمانعة $Z = 2 + j5 \Omega$

الجواب W 24 : 8 : 3.72-

4 - 11 اوجد معدل القدرة المجهزة الى مقاوم $5-\Omega$ من كل من موجتي الفولتيتين المبينتين في الشكل 6 - 17 .
الجواب W 32.0 ; 31.2 ; 29.4

تتوخى



الشكل 7 - 11 انظر التمرينين 4 - 11 و 5 - 11

5 - 11 ربط مصدر تيار i_s الى مقاوم $100-\Omega$. أوجد معدل القدرة المجهزة الى مقاوم اذا كان $i_s = i_1$ (أ) $4 \cos 100t$ A . (ب) $4 \cos (100t - 50^\circ)$ A (ج) $4 \cos 100t - 3 \cos (100t - 50^\circ)$ A (د) $4 \cos 100t - 3 \sin 100t$ A (هـ) $4 \cos 100t - 3 \cos 90t$ A (و) $4 \cos 100t - 3$ A الجواب
479; 800; 800; 1250; 1250; 1700 W

4 - 11 القيم المؤثرة للتيار والفولتية

EFFECTIVE VALUES OF CURRENT AND VOLTAGE

ان معظمنا يخشى الفولتية الموجودة في ماخذ القدرة في منازلنا وهي فولتية جيبية ترددها 60 Hz والفولتية 115 V . ولكن المقصود بـ 115 فولت ؟ هذه بالتأكيد ليست القيمة الآنية للفولتية لأن الفولتية ليست ثابتة . وان قيمة 115 هي ايضا ليست القيمة القصوى والتي كنا نرمز لها بـ V_m . اذا عرضنا شكل موجة الفولتية على مرسمة التذبذبات لأشعة المهبط المعبرة يجب أن نجد بأن القيمة القصوى لهذه الفولتية لا يمكن أن تناسب فكرة قيمة المعدل لـ 115 لأن قيمة المعدل لموجة جيبية هي صفر . وربما نصل قريباً من الحقيقة بمحاولة حساب قيمة المعدل خلال نصف الموجة الموجب أو السالب باستعمال فولتميتر من النوع المعدل على المأخذ حيث نقيس 103.5 V . وسيعود بنا المطاف على أية حال أخيراً الى أن الـ 115 V هي القيمة المؤثرة لهذه الفولتية الجيبية . هذه القيمة هي مقياس لتأثير مصدر الفولتية لتجهز القدرة الى الحمل المقاومى .

دعنا الان نسترسل في ايجاد القيمة المؤثرة لأى شكل موجة دورية تمثل إما التيار أو الفولتية . وسوف نعتبر شكل الموجة الجيبية حالة خاصة فقط ولو انها عمليا حالة مهمة . دعنا نعرف اعتباطياً القيمة المؤثرة بدلالة شكل موجة التيار ولو ان الفولتية يمكن أن تختار على حد سواء . وان القيمة المؤثرة لأى تيار دوري تساوي قيمة التيار المستمر الذي يمر خلال المقاومة R والذي يجهز القدرة نفسها الى R كما يعمل التيار الدوري . وبكلمة أخرى نحن نسمح للتيار الدوري المعطى للجريان خلال المقاومة الاعتباطية R ونحسب القدرة الآنية $i^2 R$ ثم نجد قيمة معدل $i^2 R$ خلال الفترة وهذا هو معدل القدرة . ثم بعدها نسب جريان تيار مستمر خلال المقاومة نفسها وننظم قيمة التيار المستمر الى أن نحصل على معدل القدرة نفسه . وان قيمة التيار المستمر هذه تساوي القيمة المؤثرة للتيار الدوري المعطى .

في العراق التردد 50 Hz والفولتية 220 V .

والتعبير الرياضي العام للقيمة المؤثرة لـ $i(t)$ يمكن الحصول عليها الآن بسهولة . فمعدل القدرة المجهزة الى المقاوم بواسطة التيار الدوري $i(t)$ هو :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt = \frac{R}{T} \int_0^T i^2 dt$$

حيث أن فترة $i(t)$ هي T والقدرة المجهزة من قبل التيار المستمر هي :

$$P = I^2 R = I_{eff}^2 R$$

وبمساواة تعابير القدرة وحل المعادلة لايجاد

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (18)$$

والقيمة لاتعتمد على المقاومة كما يجب ان تزودنا بفكرة تستحق الاهتمام . ويمكن الحصول على تعبير مشابه للقيمة المؤثرة للفولتية الدورية باستبدال i بـ V_{eff} و V على التعاقب لاحظ أن القيمة المؤثرة يمكن الحصول عليها بتربيع الدالة الزمنية أولاً ثم أخذ قيمة المعدل للدالة المربعة خلال الفترة . وأخيراً أخذ الجذر التربيعي لمعدل الدالة المربعة . وباختصار فان العملية المشمولة لايجاد القيمة المؤثرة هي الجذر التربيعي لمعدل المربع ولهذا السبب فالقيمة المؤثرة غالباً ماتسمى قيمة جذر - معدل - التربيع أو ببساطة قيمة ج . م . ت rms . وإن أهم حالة خاصة هي شكل الموجة الجيبية . دعنا نختر تياراً جيبياً .

$$i(t) = I_m \cos(\omega t - \theta)$$

والذي له فترة

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

وبالتعويض في (18) للحصول على القيمة المؤثرة :

$$\begin{aligned} I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t - \theta) dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t - 2\theta)] dt} \\ &= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} [t]_0^{2\pi/\omega}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

لذا فان القيمة المؤثرة للتيار الجيبي هي كمية حقيقية ولا تعتمد على زاوية الطور وتساوي عددياً 0.707 من المرات بقدر قيمتها القصوى . فالتيار $\sqrt{2} \cos(\omega t - \theta)$ اذاً له القيمة المؤثرة هي 1A وسوف يجهز القدرة نفسها لدي مقاوم كما يفعل تيار مستمر قيمته 1A .

ويجب ان نلاحظ بدقة ان العامل $\sqrt{2}$ الذي حصلنا عليه كنسبة القيمة القصوى للتيار الدوري الى القيمة المؤثرة ينطبق فقط حينما تكون الموجة الدورية جيئية . أما لموجة سن المنشار المبينة في الشكل 3 - 11 مثلاً فان القيمة المؤثرة مساوية الى القيمة القصوى مقسومة على $\sqrt{3}$.

أما العامل الذي يجب أن تقسم عليه القيمة القصوى للحصول على القيمة المؤثرة فيعتمد على الصيغة الرياضية للدالة الدورية المعطاة حيث يمكن أن تكون نسبة او غير نسبية وفق طبيعة الدالة .

وان استعمال القيمة المؤثرة بسيط قليلاً أيضاً التعبير لمعدل القدرة المجيزة من قبل التيار الجيبي أو الفولتية وذلك بتجنب العامل $1/2$ فعلى سبيل المثال معدل القدرة المجيزة الى المقاومة R من قبل التيار الجيبي هو

$$P = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

وإذا استبدلنا I_m بـ $\sqrt{2} I_{eff}$ فان معدل القدرة يمكن كتابته بالشكل

$$P = I_{eff}^2 R \quad (19)$$

والتعابير الأخرى المألوفة للقدرة ربما تكتب أيضاً بدلالة القيم التأثيرية

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \theta \quad (20)$$

$$P = \frac{V_{eff}^2}{R} \quad (21)$$

إن حقيقة أن القيمة المؤثرة تعرف بدلالة قيمة التيار المستمر المكافئة تعطينا قانون معدل قدرة لدوائر مقاومة والتي تماثل تلك المستعملة في تحليل التيار المستمر .

على الرغم من أننا نجحنا في حذف عامل النصف من علاقات معدل القدرة يجب أن نعني الآن بحساب ماذا كانت الكمية الجيئية تعبر بدلالة قيمتها القصوى أو قيمتها المؤثرة. تستعمل القيمة التأثيرية عادة في مجالات نقل القدرة أو توزيعها وللمكائن الدوارة أما في مجالات الألكترونيك والمواصلات فتستعمل القيمة القصوى غالباً . وسوف نفترض أن القيمة القصوى معينة الا اذا استعمل المصطلح ج . م . ت كما هو

في الحالة المستقرة الجيئية ربما تعطى الفولتيات الطورية والتيارات أما قيمتها المؤثرة أو قيمها القصوى . فالتعبيران يختلفان بالعامل $\sqrt{2}$. فالفولتية $V \underline{30^\circ}$ 50 معبر عنها بدلالة القيمة القصوى . وفولتية ج . م . ت وسوف نكتب $V \underline{30^\circ}$ 35.36

ولأجل حساب القيمة المؤثرة لشكل الموجة غير الدورية والذي يتكون من مجموع من عدد من الجيبيات مختلفة التردد ربما نستعمل علاقة معدل القدرة المناسبة (17) التي حصلنا عليها في الفقرة السابقة مع إعادة كتابتها بدلالة القيم المؤثرة لعدة مكونات .

$$P = (I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2 + \dots + I_{n\text{eff}}^2)R \quad (22)$$

هذه النتائج توضح بأن التيار الجيبي 5 A ج . م . ت 60 Hz الذي يسري خلال المقاوم 2-Ω يكون معدل القدرة الممتصة من قبل المقاوم 50 W وإذا كان هناك تيار ثان مثلاً 3 A ج . م . ت للتردد 120 Hz أيضاً فالقدرة الممتصة 68 W . وإذا كان التيار الثاني أيضاً 60 Hz فان القدرة الممتصة ربما يكون لها القيمة بين 8 و 128 W وذلك يعتمد على نسبة الطور لمكونات التيارين لذا فقد وجدنا القيمة المؤثرة لتيار متكون من أي عدد من التيارات الجيبية وبترددات مختلفة. التيار الكلي ربما

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{I_{1\text{eff}}^2 + I_{2\text{eff}}^2} \quad (23)$$

يكون دورياً أو لا يكون . والنتيجة هي نفسها . فالقيمة المؤثرة لمجموع التيارين 60-Hz و 120 في المثال أعلاه هي 5.83 A والقيمة المؤثرة لمجموع التيارين 60-Hz ربما يكون لها قيمة بين 2 و 8 A

تمرينان

6 - 11 استخدم المعادلة (18) المكتوبة للفولتية لحساب القيمة لشكل الموجة الجيبية للفولتية المبينة في الشكل 6.11 .

الجواب V 12.65; 12.50; 12.12

7 - 11 حدد القيمة التأثيرية لكل من التيارات الدورية الآتية :

(أ) $\cos 2t + \cos 2t$ (ب) $\cos 2t + \sin 2t$

(ج) $\cos 2t + \cos (2t + 135^\circ)$ (د) $\cos 2t + \cos 3t$

(هـ) $\cos 2t + 1$

الجواب A 1.414; 1.225; 1; 0.541

ترجع المقدمة الى أفكار القدرة الظاهرية وعامل القدرة الى صناعة القدرة الكهربائية من الوجهة التاريخية حيث أن كمية كبيرة من الطاقة الكهربائية يجب أن تنتقل من نقطة الى أخرى وإن الكفاءة التي يتأثر بها هذا النقل تعود مباشرة الى كلفة الطاقة الكهربائية والتي هي بالواقع تدفع من قبل المستهلك . والمستهلك الذي يجهز الحمل الناتج عن كفاءة نقل ضعيفة يجب أن يدفع سعراً أعلى لكل كيلواط ساعة (kWh) من الطاقة الكهربائية التي يستلمها فعلاً ويستهلكها هو . وبطريقة مشابهة فالمستهلك الذي يحتاج الى استثمار اعلى في معدات النقل والتوزيع من قبل شركة القدرة سوف يدفع أيضاً سعراً أعلى لكل كيلواط ساعة .

دعنا أولاً نعرف القدرة الظاهرية وعامل القدرة ثم نبين بايجاز كيف ترتبط هذه العبارات مع الحالة الاقتصادية المشار إليها أعلاه . وسوف نفرض بأن الفولتية الجيبية

$$v = V_m \cos (\omega t + \alpha)$$

سلطت على شبكة والتيار الجيبية الناتج هو

$$i = I_m \cos (\omega t + \beta)$$

زاوية الطور التي تسبق بها الفولتية التيار هي

$$\theta = \alpha - \beta$$

ومعدل القدرة المجهزة الى الشبكة مفترضين مصطلح الاشارة غير الفعالة في نهايات الدخل ربما يعبر عنها إما بدلالة القيم القصوى .

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos \theta$$

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos \theta \quad \text{أو بدلالة القيم المؤثرة .}$$

وإذا كانت استجابات فولتياتنا او تياراتنا المسلطة قيم التيار المستمر فمعدل القدرة المجهزة الى الشبكة ربما تعطى ببساطة بحاصل ضرب الفولتية والتيار . وبتطبيق هذا الأسلوب على المسائل الجيبية يجب أن نحصل على قيمة للقدرة المتصلة والتي هي ظاهرياً معطاة بـ ضرب $V_{eff} I_{eff}$. هذا الضرب للقيمتين المؤثرتين للفولتية والتيار هو ليس معدل القدرة ونعرف ذلك بالقدرة الظاهرية . أما بالنسبة للوحدات فان القدرة الظاهرية يجب أن تقاس بوحدات القدرة الحقيقية نفسها طالما أن $\cos \theta$ هو كمية بدون وحدات . ولكن لأجل تجنب الالتباس فالاصطلاح

فولت أمبير أو VA أو kVA ويطلق على القدرة الظاهرية . وبما ان $\cos \theta$ لا يمكن أن تحمل قيمة اكبر من الوحدات فمن الواضح بان قيمة القدرة الحقيقية لا يمكن ان تكون اكبر من قيمة القدرة الظاهرية .

ان القدرة الظاهرية ليست مقصورة على الدالات المرغمة والاستجابات الجيبية . يمكن أن تحسب القدرة الظاهرية لأي شكل موجة تيار أو فولتية ببساطة بأخذ حاصل ضرب القيم المؤثرة للتيار والفولتية . هذا الامتداد لتعريف القدرة الظاهرية لاداعي للاهتمام به الآن ولكن سوف ينال اهتماماً أكثر بربطه مع الدالات الدورية العامة حينما نناقش تحليل فوريير في الفصل السابع عشر وان نسبة القدرة الحقيقية أو معدل القدرة الى القدرة الظاهرية تدعى بعامل القدرة ورمزها PF . لذا

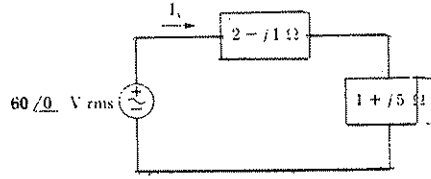
$$PF = \frac{\text{معدل القدرة}}{\text{القدرة الظاهرية}} = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}}$$

ففي الحالة الجيبية يساوي عامل القدرة ببساطة $\cos \theta$ حيث θ هي الزاوية التي بها الفولتية تسبق التيار . وهذه العلاقة هي السبب الذي يفسر لماذا تدعى الزاوية بأنها زاوية عامل القدرة . للحمل المقاومي النقي تكون الفولتية والتيار بالطور نفسه وتكون θ صفراً وعامل القدرة واحداً وتكون القدرة الظاهرية ومعدل القدرة متساويين . ويمكن الوصول الى عامل قدرة مقداره واحداً على أية حال للأحمال التي تحتوي كلاً من المحاثية والسعة اذا كانت قيم العناصر وتردد التشغيل مختارة لتعطي ممانعة ادخال لها زاوية طور مقدارها صفر .

وان الحمل المفاعلي النقي أي الذي لا يحوي مقاومة يسبب فرق زاوية بين الفولتية والتيار إما 90° أو -90° وعامل القدرة يكون صفراً .

وبين هاتين الحالتين المتباينتين هناك شبكات عامة يتراوح فيها عامل القدرة بين الصفر والواحد فعامل القدرة الذي يساوي 0.5 على سبيل المثال يبين بان الحمل له ممانعة ادخال بزواوية طور إما 60° أو -60° فالأولى تصف الحمل الحثي لأن الفولتية تسبق التيار بـ 60° بينما الثانية تنسب الى الحمل السعوي والغموض في الطبيعة الحقيقية للحمل تحل بذكر أن عامل القدرة يسبق أو يتخلف . فكلما يسبق أو يتخلف تعود الى طور التيار بالنسبة الى الفولتية . لذا فالحمل الحثي سوف يكون له عامل قدرة متخلف وللحمل السعوي عامل قدرة سابق .

قبل دراسة العواقب العملية لهذه الأفكار . يمكننا استخدام الأساليب المناسبة بتحليل الدائرة المبينة في الشكل 7 - 11 . يطلب ايجاد قيم معدل القدرة المجهزة الى كل من الحملين والقدرة الظاهرية المجهزة من المصدر وعامل القدرة للحمل الكلي .



الشكل 7 - 11 دائرة يطلب إيجاد معدل القدرة في كل عنصر فيها والقدرة الظاهرية المجهزة من المصدر وعامل قدرة الحمل الكلي

ان تيار المصدر يساوي

$$I_s = \frac{60}{2 - j1 + 1 + j5} = 12 \angle -53.1^\circ \text{ A rms}$$

لذا فان المصدر يجهز قدرة ظاهرية مقدارها $60(12) = 720 \text{ VA}$ ومعدل قدرة مقداره $720 \cos(0 - 53.1^\circ) = 432 \text{ W}$ يستلم الحمل العلوي قدرة معدلها $12^2(2) = 288 \text{ W}$. اما للحمل الايمن فنجد ان معدل القدرة يساوي $12^2(1) = 144 \text{ W}$. لذا فالمصدر يزودنا بـ 432 W يستهلك منها 288 W في الحمل العلوي و 144 W في الحمل الايمن . لذا فان توازن القدرة صحيح .

وأخيراً فان عامل قدرة الحمل الكلي يمكن ايجاده بالرجوع الى الفولتية والتيار للحمل الكلي والذي هو بالطبع يكافئ عامل قدرة المصدر . لذا

$$PF = \frac{P}{V_{eff} I_{eff}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6$$

كما يمكننا أيضاً دمج حملين على التوالي للحصول على $3 + j4 \Omega$ أو $5.53.1^\circ \Omega$ والذي تظهر فيه الزاوية 53.1° كزاوية لعامل القدرة . لذا يكون عامل القدرة $\cos 53.1^\circ = 0.6$ كما نلاحظ أيضاً أن الحمل الكلي يكون حثياً . لذا فان عامل القدرة هو 0.6 متخلف . وان الأهمية العملية لهذه المصطلحات الجديدة مبيّنة في أمثلة متعددة قادمة . دعنا أولاً نفرض بأن لدينا مولدة تيار متناوب والتي هي ماكنة تدور وتساق بمعدات أخرى والتي خارجها هو عزم ميكانيكي كالتربين البخاري أو المحرك الكهربائي او ماكنة الاحتراق الداخلي .

سوف ندع مولدتنا تنتج فولتية اخراج 200 V ج . م . ت في 60 Hz . نفترض

الآن بأن تقنيننا آخر للمولد عرف كقدرة اخراج قصوى مقدارها 1 kW

فالمولد سيكون باستطاعته تجهيز تيار ج . م . ت 5 A الى حمل مقاومي واذا ربط حمل يحتاج الى 1 kW بعامل قدره متخلف 0.5 الى الحمل فان التيار

اللازم سيكون 10 A ج . م . ت . وكلما قل عامل القدرة فإن التيار المجهز للحمل يزيد أكثر وأكثر إذا حافظنا على التشغيل عند 200 V و 1 kW . وإذا صنع المولد وصمم اقتصادياً ليولد بأمان أقصى تيار 5 A فإن هذا التيار الأكثر سوف يسبب تشغيلاً غير أمين . وأن تقنين rating المولد يكون أكثر دقة إذا اعطي بدلالة القدرة الظاهرية بالفولت امبير . لذا فإن التقين 1000-VA لـ 200 V يبين بأن المولد يمكنه تجهيز أقصى تيار 5 A عند فولتية المقننة . فالقدرة المجهزة تعتمد على الحمل والحالة المتطرفة ربما تكون صفراً . وأن تقنين القدرة الظاهرية يكافئ تقنين التيار عند التشغيل في فولتية ثابتة .

وعند تجهيز القدرة الكهربائية الى المستهلكين الصناعيين الكبار من قبل شركة القدرة فإن الشركة سوف تدخل غالباً شرط عامل القدرة في جدول التسعيرة . وتحت هذا الشرط فإن سعراً اضافياً سيترتب على المستهلك كلما انخفض عامل القدرة أقل من قيمة محددة معينة تقارب عادة 0.85 تخلف . وتستهلك قدرة صناعية قليلة لعامل قدرة يسبق نظراً لطبيعة الاحمال الصناعية الاعتيادية . وهناك عدة أسباب تجبر شركات تجهيز القدرة لاضافة تعريفه اضافية لعامل القدرة المنخفض : اولها انه من الواضح يجب انشاء أنظمة نقل أكبر كلما كان التيار أكبر نتيجة التشغيل بعامل قدرة منخفض وبقدرة وفولتية ثابتتين . والسبب الآخر هو الضياعات المتزايدة في منظومة النقل والتوزيع .

كمثال دعنا نفرض بأن مستهلكاً معيناً يستعمل معدل قدرة 11 kW عند عامل قدرة يساوي واحداً و 220 V ج . م . ت . ولنفرض أن المقاومة الكلية في خطوط النقل التي تجهز القدرة الى المستهلك عبرها تساوي 0.2Ω . ان التيار 50 A ج . م . ت سيجري في الحمل والخطوط منتجاً ضياعاً في الخط مقداره 500 W . ولأجل تجهيز 11 kW الى المستهلك فإن شركة القدرة يجب أن تولد 11.5 kW (في فولتية اعلى 230 V) . لأن الطاقة اللازمة تقاس في موقع الحمل وهذا المستهلك سوف يدفع كلفة 95.6 بالمائة من الطاقة التي تنتجها شركة القدرة فعلاً .

والآن دعنا نفرض مستهلكاً آخر يحتاج الى 11 kW ايضاً ولكن بزواوية عامل قدرة مقدارها 60 متخلفة . هذا المستهلك يجبر شركة القدرة لأن تجهزه بـ 100 A الى حملة (ولهذا يهم الشركة بصورة خاصة) خلال مقاومة الخط . وان ضياعات الخط توجد الان على أنها 2 kW بينما يؤشر مقياس المستهلك فقط 84.6 بالمائة من الطاقة الحقيقية للمولد . وهذا الرقم يقل عن 100 بالمائة بأكثر مما تسمح به شركة الكهرباء وهذا يكلفها مبالغ . لذا من المحتم تقليل ضياعات النقل باستعمال خطوط

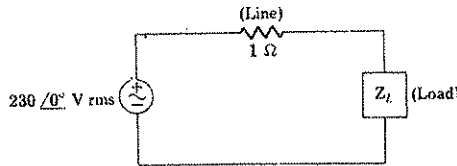
نقل أكبر حجماً وثقلاً والتي تكون مقاومتها أقل . ولكن هذا يكلف مبالغ أيضاً .
 وإن حل شركة القدرة لهذه المسألة هو تشجيع التشغيل على عامل قدرة يزيد على 0.9
 متخلف بمنح تسعيرة منخفضة وعدم تشجيع التشغيل بعامل القدرة الأقل من 0.85
 متخلف باحتساب تسعيرة أعلى .

وإن القدرة المحسوبة من قبل معظم المنازل تستعمل عامل قدرة عالياً نسبياً
 (ومستويات قدرة صغيرة نسبياً) ولا تحتسب كلفة على التشغيل بعامل قدرة
 منخفض . إلى جانب ذلك فإن دفع كلفة الطاقة الحقيقية المستهلكة وكذلك للتشغيل
 بعامل قدرة واطئ، جداً فإن المستهلكين الصناعيين يُحمّلون كلفة أيضاً للطلب غير
 المنتظم . فالطاقة 100 kWh تجهز أكثر اقتصادياً 5 kW لـ 20 ساعة منها لـ
 20 kW لـ 5 ساعات وبصورة خاصة إذا طلب المستهلكون الآخرون حملاً كبيراً في
 الوقت نفسه .

تمرينان

8 - 11 افرض أن $Z_L = 10 + j3 \Omega$ في الدائرة المبينة في الشكل 8 - 11 ثم
 احسب القيم الآتية (أ) معدل القدرة المزودة للحمل (ب) معدل القدرة الممتصة من
 الخط (ج) القدرة الظاهرية المجهزة من المولد (د) عامل قدرة الحمل (هـ) عامل
 قدرة الخط مع الحمل

الجواب متخلف 0.958 ; متخلف 0.965 VA; 4640 W; 4069 W; 407 W



الشكل 8 - 11 انظر التمرينين 8 - 11 و 9 - 11

2 قسم من المستفيدين من الطاقة الكهربائية نصبوا مقاييس الكيلوواط - ساعة للطلب على منازل المستهلكين

افرض أن الحمل Z_L في الشكل 8 - 11 يحتوي على مقاوم $25-\Omega$ على التوازي مع متسعة $100-\mu F$. إذا كانت $f = 60 \text{ Hz}$ ، احسب (أ) القدرة الظاهرية للمجهزة الى الحمل (ب) القدرة الظاهرية للمجهزة من المصدر (ج) عامل قدرة الحمل
الجواب

سابق $2685 \text{ VA}; 2794 \text{ VA}; 0.728$

6 - 11 القدرة المركبة COMPLEX POWER

يتحقق بعض التبسيط في حسابات القدرة إذا كانت القدرة المعتبرة كمية مركبة. فقيمة القدرة المركبة يمكن ايجادها كالقدرة الظاهرية. فالجزء الحقيقي للقدرة المركبة سيتبين بأنه هو عبارة عن معدل القدرة (الحقيقية) أما الكمية الجديدة أي الجزء الخيالي للقدرة المركبة فسوف نسميها القدرة المفاعلة.

نعرف القدرة المركبة بدلالة الفولتية الجيبية العامة $V_{eff} = V_{eff}/\theta_v$ عبر نهايتين والتيار الجيبية العام $I_{eff} = I_{eff}/\theta_i$ الجاري في احد النهايتين بطريقة تتماشى مع مصطلح الاشارات غير الفعالة. إن معدل القدرة P الممتصة من قبل نهايتي الشبكة تكون

$$P = V_{eff} I_{eff} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

ونصل الى التسمية المعقدة باستعمال قانون اويلر Euler بالطريقة التي قدمنا بها الطوريات نفسها. فنعبر عن P كأنها
أو

$$i' = V_{eff} I_{eff} \text{Re} [e^{j(\theta_v - \theta_i)}]$$

$$P = \text{Re} [V_{eff} e^{j\theta_v} I_{eff} e^{-j\theta_i}]$$

والفولتية الطورية ربما تميز الآن حيث هي العامل الاول داخل القوسين في المعادلة أعلاه. ولكن العاملان الثابتان لايعودان تماماً الى التيار الطوري لأن الزاوية تضم اشارة سالبة لاتظهر في تعبير التيار الطوري. وبكلمة اخرى فان التيار الطوري هو

$$I_{eff} = I_{eff} e^{j\theta_i}$$

وعليه يجب أن نستفيد من استعمال مصطلح المرافق

3 يجب ملاحظة أن P هي ليست قيمة P . ولو أن هذه التسمية استعملت سابقاً. فمثلاً V_{eff} هي قيمة V_{eff} و Z_L هي قيمة Z_L وهكذا.

$$I_{eff}^* = I_{eff} e^{-j\theta}$$

لذا

$$P = \text{Re} (V_{eff} I_{eff}^*)$$

وربما تترك الآن الأمر، ليصبح مركباً وذلك بتعريف القدرة المركبة كأنها P

$$P = V_{eff} I_{eff}^* \quad (24)$$

وإذا راقبنا أولاً الشكل القطبي أو الأسّي للقدرة المركبة

$$P = V_{eff} I_{eff} e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

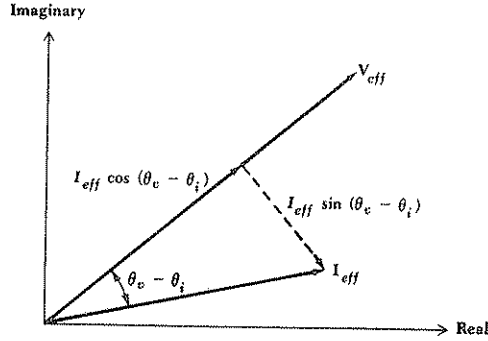
ومن الواضح بأن قيمة P هي القدرة الظاهرية وزاوية P هي زاوية عامل القدرة أي أن الزاوية التي تسبق بها الفولتية التيار. وبالشكل المتعامد فان

$$P = P + jQ \quad (25)$$

حيث أن P هي معدل القدرة الحقيقية كما سبق³ والجزء الخيالي لمعدل القدرة يرمز له Q ويعبر عنه بالقدرة المتفاعلة. ومن الواضح أن وحدات Q هي نفسها للقدرة الحقيقية P والقدرة المركبة P والقدرة الظاهرية $|P|$. ولأجل تجنب الملاحظات مع هذه الكميات فان وحدات Q تعرف على أنها فار VAR نسبة الى الفولت امبير المتفاعلة. ومن (24) يرى أنه

$$Q = V_{eff} I_{eff} \sin (\theta_v - \theta_i)$$

كما يمكن ملاحظة تفسير آخر للقدرة المتفاعلة بانشاء مخطط طوري يحوي I_{eff} و V_{eff} كالمبين في الشكل 9 - 11. فاذا حلل التيار الطوري الى مركبتين احدهما بطور الفولتية نفسه قيمته $I_{eff} \cos (\theta_v - \theta_i)$ والاخر⁹⁰ يختلف عن طور الفولتية وقيمته $I_{eff} \sin (\theta_v - \theta_i)$ ، فمن الواضح بأن القدرة الحقيقية معطاة بحاصل ضرب طوري الفولتية ومركبة طوري التيار هي بطور الفولتية نفسها. وأكثر من ذلك فان حاصل ضرب قيمة طوري الفولتية ومركبة طوري التيار



الشكل 9 - 11 حلل التيار الطوري I_{eff} الى مركبتين احدهما بطور الفولتية الطوريه V_{eff} نفسه والاخرى تصنع 90° مع الفولتية الطورية . وهذه المركبة الاخيرة تدعى بالمركبة المتعامدة

الذي يختلف عن الفولتية بـ 90° القدرة المفاعلة Q . ومن الشائع التكلم على مركبة الطوري المزاحة بالطور بمقدار 90° مع طوريات اخرى على انها مركبة متعامدة *quad-rature* . لذا فان Q ببساطة هي V_{eff} مرة بقدر المركبة المتعامدة لـ I_{eff} كما تعرف Q ايضاً بأنها القدرة المفاعلة .

وان اشارة القدرة المفاعلة تميز طبيعة الحمل غير الفعال الذي فيه وتعيين V_{eff} و I_{eff} . فاذا كان الحمل حثياً فان $\theta_v - \theta_i$ هي زاوية تتراوح بين 0 و 90° وان اشارة هذه الزاوية موجبة والقدرة المفاعلة موجبة ايضاً . أما الحمل السعوي فينتج قدرة مفاعلة سالبة . تماماً كما يقرأ الواطميتر4 معدل القدرة الحقيقية المحسوبة من قبل الحمل فان الفارميتر سوف يقرأ معدل القدرة المفاعلة Q المحسوبة من قبل الحمل . وكلا الكميتين يمكن وضع مقياس لهما في آن واحد وبالإضافة فان مقياس الواط ساعة والفار ساعة ربما يستعملان في آن واحد لتسجيل الطاقة الحقيقية والطاقة المفاعلة المستعملة من قبل المستهلك خلال أي فترة زمنية مرغوبة . ومن هذه التسجيلات فان معدل عامل القدرة ربما يمكن حسابه وقائمة المستهلك يمكن تنظيمها بموجبه .

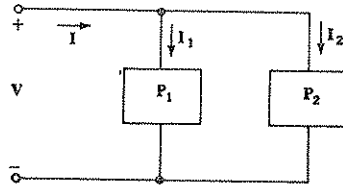
من السهل تبين أن القدرة المركبة المجهزة الى عدة احمال مربوطة مع بعضها هي مجموع القدرات المركبة المجهزة الى كل حمل على انفراد ولا تهم الكيفية التي تربط بها هذه الأحمال . على سبيل المثال نعتبر الحملين المبينين على أنهما مربوطان على التوازي في الشكل 9 - 11 . فإذا كانت قيمة ج.م.ت مفترضة فالقدرة المركبة

$$P = VI^* = V(I_1 + I_2)^* = V(I_1^* + I_2^*) \quad \text{المحسوبة مجتمعة هي}$$

ولذا فإن

$$P = VI_1^* + VI_2^*$$

كما ذكر سابقاً



الشكل 10 - 11 دائرة تستخدم للتحديد . ان القدرة المركبة المسحوبة من حملين متوازيين هي مجموع القدرتين المركبتين المسحوبتين من كل حمل منفرد

إن الأفكار الجديدة يمكن توضيحها بمثال عددي عملي . دعنا نفترض بأن مستهلكاً صناعياً يشغل محركاً حثياً مقداره 1-kW بعامل قدرة 0.8 متخلف . لأجل الحصول على معدلات كهربائية أقل يرغب زيادة عامل القدرة الى 0.95 متخلف . على الرغم من أن عامل القدرة يمكن تصعيده بزيادة القدرة الحقيقية والحفاظ على القدرة المفاعلة ثابتة ولكن هذا لا يؤدي الى تقليل قائمة الكهرباء . لذا فإن هذا العلاج لا يفيد المستهلك . فالحمل المفاعل النقي يجب اضافته الى المنظومة ومن الواضح بأنه يجب أن يضاف على التوازي لان فولتية التجهيز الى المحرك الحثي يجب أن لا تتغير . فالدائرة في الشكل 9 - 11 يمكن تطبيقها اذا فسرنا P1 على انها قدرة المحرك الحثي وأن P2 على أنها القدرة المركبة المحسوبة من قبل الاداة المصححة . دعنا نفترض بأن الفولتية $V = 200/0^\circ$ ج.م.ت

فالقدرة المركبة المجهزة الى المحرك الحثي يجب أن يكون لها جزء حقيقي

1000 W وزاوية $\cos^{-1}(0.8)$ لذا

$$P = \frac{1000}{0.95} / \cos^{-1}(0.95) = 1000 + j329$$

ولفرض الحصول على عامل القدرة 0.95 فان القدرة المركبة الكلية يجب أن تصبح

$$P_1 = \frac{1000 / \cos^{-1}(0.8)}{0.8} = 1000 + j750$$

لذا فان القدرة المركبة المسحوبة من قبل الحمل المصحح هي

$$P_2 = -j421$$

وممانعة الحمل الضرورية Z_2 يجب أن توجد بعدة خطوات بسيطة . فالتيار المسحوب من قبل Z_2 هو

$$I_2^* = \frac{P_2}{V} = \frac{-j421}{200} = -j2.107$$

$$I_2 = j2.107$$

$$Z_2 = \frac{V}{I_2} = \frac{200}{j2.107} = -j94.9 \Omega$$

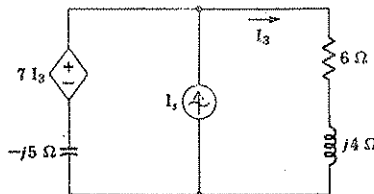
أو أن
لذا فان

وإذا كان تردد التشغيل 60 Hz فانه يمكن تجهيز هذا الحمل من قبل متسعة قيمتها $27.9\mu F$ والحمل يمكن أيضاً تشبيهه بمتسعة مترامنة وهو نوع من المكائن الدوارة ولو أن هذا اقتصادي فقط للمفاعلات السعوية الصغيرة جداً . ومهما تكن الاداة المختارة فان سعرها الابتدائي والصيانة والانذار يجب أن تغطى بتقليلها لقائمة الكهرباء .

تصريين

10 - 11 إذا كان $I_s = 10\angle 0^\circ A$ ج.م.ت في الشكل 11 - 11 ، أوجد القدرة المركبة الكلية المستهلكة (أ) في الفرع الأيمن (ب) في الفرع الأيسر (ج) في الفرع الأوسط

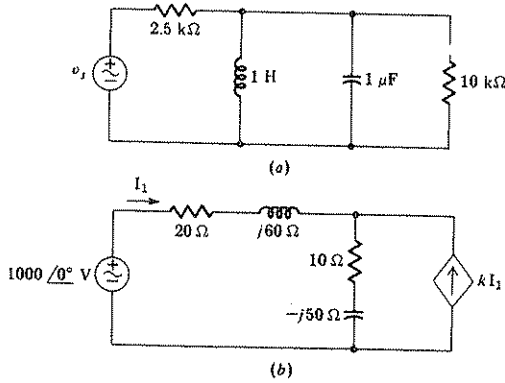
الجواب VA $7500 + j5000$; $-7000 - j2500$; $-500 - j2500$



شكل 11 - 11 انظر التصريين 10 - 11

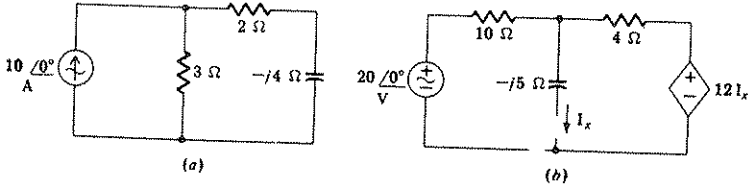
مسائل

- 1 إذا كانت $v_s = 20 \cos(1000t + 30^\circ) \text{ V}$ في الدائرة المبينة في الشكل 12 -
 11 (أ) ، أوجد القدرة المستهلكة من كل عنصر غير فعال عند $t = 0$



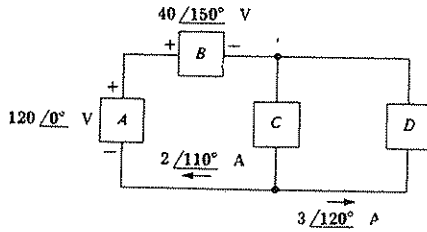
الشكل 12 - 11 (أ) انظر المسألة 1 (ب) انظر المسألة 4

- 2 مصدر تيار $i_s = (1 + t^2)^{-1} \text{ A}$ ربط على التوالي مع مقاوم $10\text{-}\Omega$ ومحث 2-H ومتسعة 0.5-F كانت فولتية المتسعة عندما $t = -1 \text{ s}$ (أ) كم مقدار القدرة المجهزة الى كل عنصر عندما $t = 1$ ؟
 (ب) كم من الطاقة تخزن في كل عنصر عندما $t = 1$ ؟
 3 مقاوم $100\text{-}\Omega$ ومحث 20-mH ومصدر $v_s = 50 \cos 4000t \text{ V}$ ربطت على التوالي .
 مامقدار القيمة القصوى للقدرة المستهلكة في أي لحظة من قبل (أ) المقاوم (ب) المحث
 □ 4 أوجد معدل القدرة المجهزة الى كل عنصر في الشبكة المبينة في الشكل 12 - 11
 (ب) إذا كانت $k = 0$ (أ) (ب) 1
 5 أوجد معدل القدرة المجهزة من كل عنصر في الدائرة المبينة في (أ) الشكل
 13 - 11 (أ) (ب) الشكل 13 - 11 (ب)

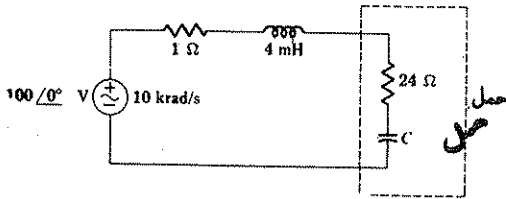


الشكل 13 - 11 أنظر المسألة 5

- 6 (أ) أي العناصر من بين A و B و C و D المبينة في الشكل 14 - 11 يجب أن يكون مصدراً (ب) كم مقدار معدل القدرة الذي يجهزه كل مصدر؟
 □ 7 (أ) كم يجب أن تكون قيمة C في الشكل 15 - 11 لكي يجهز أقصى معدل قدرة الى الحمل (ب) ما مقدار $P_{Lar,max}$ ؟

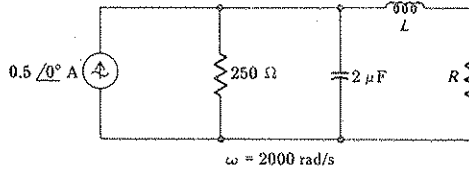


الشكل 14 - 11 أنظر المسألة 6



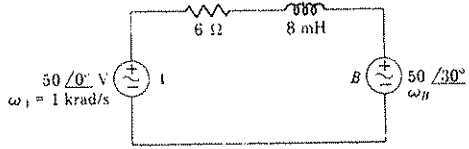
الشكل 15 - 11 أنظر المسألة 7

- 8 (أ) بعد استخدام ثفنن في دائرة الشكل 16 - 11 ، اختر قيمة ل R و L بحيث يكون معدل القدرة الأقصى المجهز الى R : (ب) أوجد $P_{Lar,max}$



الشكل 16 - 11 انظر المسألة 8

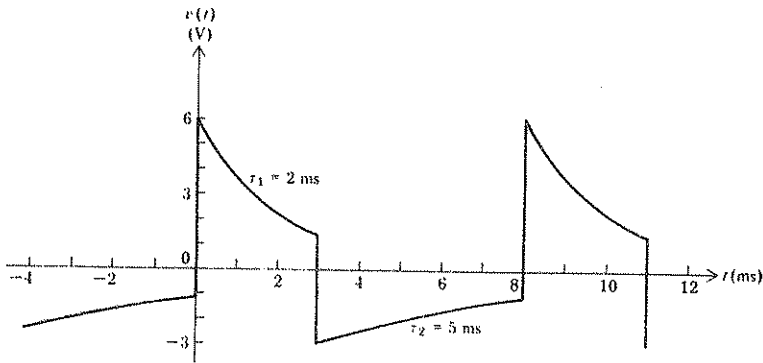
- 9 أوجد معدل القدرة المستهلكة من كل عنصر في الشكل 17 - 11 اذا كان المصدر A يعمل عند 1 krad/s. والمصدر B عند $\omega_B = 1$ krad/s (أ)
 (ب) $\omega_B = 1.00001$ krad/s



الشكل 17 - 11 انظر المسألة 9

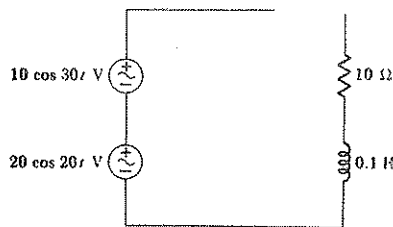
- 10 □ دائرة مكافئة ثفنن في حيز التردد تحتوي على مصدر V_{th} على التوالي مع ممانعة $Z_{th} = R_{th} + jX_{th}$. حدد الظروف على حمل $Z_L = R_L + jX_L$. اذا استلم معدل قدرة أقصى تحت التحديدات الآتية : (أ) $X_{th} = 0$ (ب) R_L و X_L يمكن اختيارهما غير معتمد احدهما على الآخر (ج) تثبت (لاتساوي R_{th}) (د) X_L محددة (غير معتمدة على X_{th}) (هـ) $X_L = 0$

- 11 فترة فولتية دورية معينة معينة في الشكل 18 - 11. كل فترة تحتوي على دالة أسية موجبة وسالبة لهما ثابت زمن هما على التعاقب 2 و 5 ms. أوجد معدل القدرة الذي تجهزه هذه الفولتية لمقاوم مقداره 8-Ω



الشكل 18 - 11 انظر المسألة 11

12 أوجد معدل القدرة المجهزة من كل مصدر والقدرة الممتصة من كل عنصر غير فعال في الدائرة المبينة في الشكل 19 - 11 .



الشكل 19 - 11 انظر المسألة 12

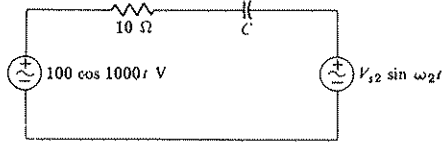
□ 13 في الدائرة المبينة في الشكل 20 - 11 (أ) افرض ان $C = 100 \mu F$ و

$\omega_2 = 1000 \text{ rad/s}$ ثم أوجد معدل القدرة المستهلكة من المقاوم (ب)

افرض أن $\omega_2 = 1000 \text{ rad/s}$ $C = 100 \mu F$ ثم أوجد V بحيث أن $P_R = 1500$

(ح) افرض أن $C = 100 \mu F$ و $V_{r2} = 100 \text{ V}$ ثم أوجد ω_2 بحيث أن $P_R = 400 \text{ W}$

(د) افرض أن $V_{r2} = 100 \text{ V}$ و $\omega_2 = 1000 \text{ rad/s}$ ثم اختر قيمة لـ C بحيث أن $P_R = 400 \text{ W}$



الشكل 20 - 11 انظر المسألة 13

14 افرض أن مصدر تيار مستمر 10 V . أضيف لكل موجة دورية مبينة في الشكل 6 - 11 احسب القيمة المؤشرة لكل منها .

15 أوجد القيمة المؤشرة لكل من الدوال المعطاة فيما يأتي : (أ) $10 \cos 30t$

(ب) $20 \sin 50t$ (ج) $10 \cos 30t + 20 \sin 50t$ (د) $10 u(\sin \pi t) - 20$

16 □ المزيج المتوالي لمقاوم $1000\text{-}\Omega$ ومحث 2-H يجب أن لا يستهلك قدرة

أكثر من 100 mW في أي لحظة . افرض أن تيار جيبياً له $\omega = 400\text{ rad/s}$

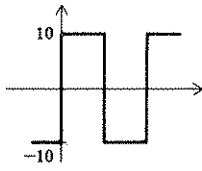
مامقدار أكبر ج . م . ت للتيار يمكن أن يسمح به ؟

17 مقاوم R ومتسعة C ومصدر فولتية $v_s = 100 \cos 300t\text{ V}$ كلها على

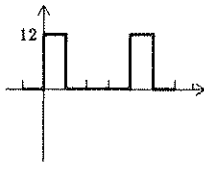
المتوالي . اذا كان معدل القدرة المستهلكة من المقاوم يساوي 150 W وقيمة ج . م .

ت لفولتية المتسعة هي 40 V أوجد R و C .

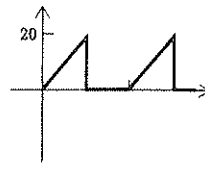
18 أوجد القيمة المؤشرة لكل من أشكال الموجات المبينة في الشكل 21 - 11



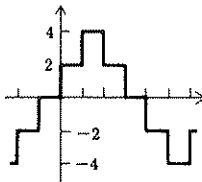
(a)



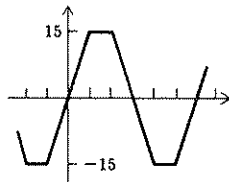
(b)



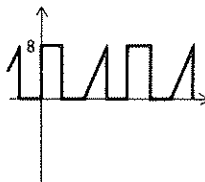
(c)



(d)



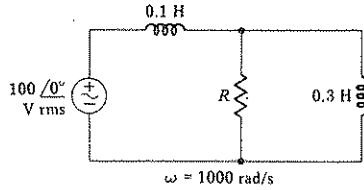
(e)



(f)

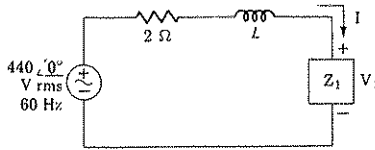
الشكل 21 - 11 انظر المسألة 18

□ 19 (أ) ما قيمة R التي تسبب أن تكون قيمة ج. م. ت للفولتيتين عبر الحثيين في الشكل 22 - 11 متساويتين ب) ما قيمة ج. م. ت للفولتية هذه ؟



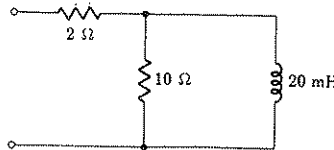
الشكل 22 - 11 انظر المسألتين 19 و 24

20 اتساع Z_1 في الدائرة المبينة في الشكل 11 - 23 تساوي 20Ω وتسحب قدرة مقداره 6.4 kW . إذا كان المصدر يجيز 7.2 kW . أوجد (أ) I_{eff} ب) $V_{1,eff}$ ج) عامل قدرة Z_1



الشكل 23 - 11 انظر المسألة 20

21 الحمل ذو الطرفين المبينين في الشكل 11 - 24 يعمل عند 60 هيرتز. أ) ما قيمة عامل القدرة ؟ ب) ما حجم المتسعة التي يجب أن تربط عبر طرفي ادخال لكي تجهز عامل قدرته واحداً ؟ ج) لكي تجهز عامل قدرة متخلف مقداره 0.9 ؟



الشكل 24 - 11 انظر المسألة 21

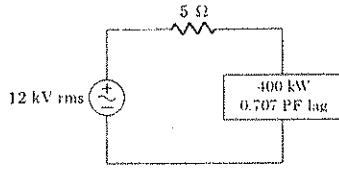
□ 22 حمل معقد يتكون من ثلاثة أحمال مربوطة على التوازي . الأول يسحب 100 W بعامل قدرة متخلف 0.9 والثاني يسحب 200 W بعامل قدرة متخلف 0.8 والثالث يحتاج 150 W بعامل قدرة مقداره واحد . الحمل الكلي بجهاز من مصدر v_s على التوالي مع مقاوم $10\text{-}\Omega$ إذا كانت الاحمال تعمل عند 110V ج . م . ت ، أوجد (أ) قيمة ج . م . ت للتيار خلال المصدر (ب) عامل القدرة للحمل الكلي

23 شبكة غير فعالة لها طرف ادخال . سلطت عليهما فولتية $v = 10 \cos(120\pi t + 70^\circ)$ V فسحبت الشبكة تياراً $i = 4 \sin(120\pi t + 100^\circ)$ A على فرض اتباع مفهوم الإشارة غير الفعالة . أوجد (أ) معدل القدرة المجهزة الى الشبكة (ب) القدرة الظاهرية المستهلكة من الشبكة (ج) عامل قدرة الشبكة مينا إذا كان سابقاً أو متخلفاً (د) ماقيمة التسعة التي يجب أن تربط عبر طرفي الإدخال لكي يصبح عامل القدرة واحداً .

24 افرض أن $R = 200 \Omega$ في دائرة الشكل 27 - 11 . حدد قيمة التسعة المطلوبة لرفع عامل القدرة للحمل الكلي المربوط الى المصدر الى 0.92 متخلف . إذا أضيفت التسعة (أ) على التوالي مع المحث 0.1-H (ب) على التوازي مع محث 0.1-H .

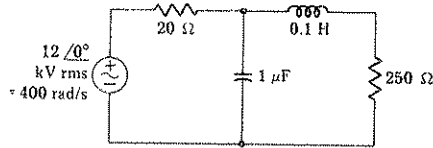
□ 25 حمل يعمل عند 2300 V ج . م . ت ويسحب 25 A ج . م . ت بعامل قدرة 0.815 . أوجد (أ) القدرة المستهلكة من قبل الحمل (ب) القدرة الفاعلة (ج) القدرة المركبة (د) الكيلوفولت أمبير المسحوبة من الحمل (هـ) ممانعة الحمل .

26 أوجد قيمة ج . م . ت للتيار والقدرة الكلية المجهزة من مصدر في دائرة الشكل 25 - 11 .



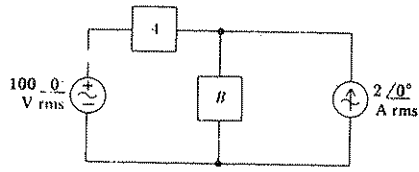
الشكل 25 - 11 أنظر المسألة 26

27 أوجد القدرة المركبة المجهزة الى كل من العناصر غير الفعالة في دائرة الشكل 26 - 11 ثم وضع أن مجموع هذه القيم يساوي القدرة المركبة المتولدة في المصدر. هل النتيجة صحيحة لقيم القدرة الظاهرية ؟



الشكل 26 - 11 أنظر المسألة 27

28 □ (غير سهل) في الشبكة المبينة في الشكل 27 - 11 يستلم الحمل A $P_A = 80 + j40$ VA بينما الحمل B يستهلك $P_B = 100 - j200$ VA . أوجد القدرة المركبة المجهزة من كل مصدر.



الشكل 27 - 11 أنظر المسألة 28

29 مصدر قيمة ج. م. ت. ل. 20-V على التوالي مع ممانعتين هما Z_A و Z_B . قيمة ج. م. ت. للفولتية عبر كل من الممانعتين هي 100 V وكل منهما تستهلك قدرة معدلها 100 W أوجد Z_A و Z_B .

الفصل الثاني عشر

الدوائر متعددة الأطوار

Polyphase Circuits

1 - 12 مقدمة INTRODUCTION

أن احد أسباب دراسة الحالة المستقرة الجيبية هو أن معظم مستخدمي الكهرباء في الدور والمنشآت الصناعية يستهلك تياراً متناوباً. يتصف شكل الموجة الجيبية بخاصية رياضية متميزة الا أنها شائعة الاستعمال ومفيدة كدالة مرغمة forcing function . إن المصدر متعدد الأطوار هو أكثر تخصصاً لكننا سندرسه نظراً لأن كل القدرة الصناعية في القطر تولد وتوزع كقدرة متعددة الاطوار بتردد 60-Hz هرتز. وقبل تعريف مصطلحاتنا بدقة لننظر باختصار الى أكثر الانظمة المتعددة الاطوار استخداماً وهو النظام الثلاثي الأطوار المتوازن - balanced three-phase system . ويحتوي المصدر عادةً على ثلاث نهايات ومقاييس للفولتية التي توضح تساوي مقدار الفولتيات الموجودة بين النهايات الا أن هذه الفولتيات ليست في طور واحد وسنوضح ببساطة فيما بعد أن كلاً منها مزاح بـ 120° درجة في الطور عن الفولتيتين الاخرتين . وتعتمد إشارة زاوية الطور على اتجاه الفولتيات يسحب الحمل المتوازن قدرة متساوية من الأطوار الثلاثة . الا أنه حينما تكون إحدى الفولتيات في لحظة ما مساوية للصفر تبين العلاقات الطورية أن الفولتيتين الاخرتين يجب أن يساويا نصف الاتساع وليس هناك أية لحظة تكون فيها القدرة المستهلكة من الحمل كله مساوية للصفر . وبالحقيقة تكون القدرة الآنية الكلية ثابتة . وهذه هي إحدى فوائد المكائن الدواره في أنها تحافظ على إبقاء العزم ثابتاً بصورة أدق من المكائن ذات الطور الواحد . كما أن الاهتزاز يكون أقل أيضاً .

* التردد المستخدم في المراق هو 50 هرتز .

(المترجمون)

وهناك فوائد أخرى لاستخدام المكائن الدوارة لتوليد قدرة ثلاثية الأطوار بدل القدرة ذات الطور الواحد . كما أن هناك فوائد اقتصادية تشجع نقل القدرة بانظمة ثلاثية الأطوار .

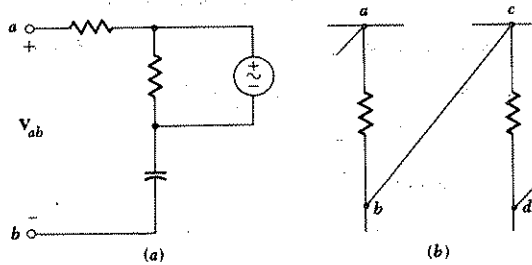
وان استخدام عدد أكبر من الاطوار مثلاً أنظمة ذات 6 أو 12 طوراً ينحصر بتجهيز القدرة الى المقومات الكبيرة rectifiers . حيث تحول المقومات التيار المتناوب الى تيار مستمر لاستخدامه في عمليات خاصة كالتحليل الكهربائي مثلاً electrolysis . وان التيار الخارج من المقوم هو تيار مستمر مضافاً إليه مركبة متذبذبة صغيرة أو تموجات تزداد بازدياد عدد الأقطاب .

تحتوي كافة الأنظمة متعددة الأطوار المستخدمة عملياً دون استثناء على مصادر يمكن تقريبها الى مصادر فولتية مثالية او الى مصادر فولتية مثالية على التوالي مع ممانعات داخلية صغيرة . أما مصادر التيار ثلاثي الأطوار فنادرة جداً .

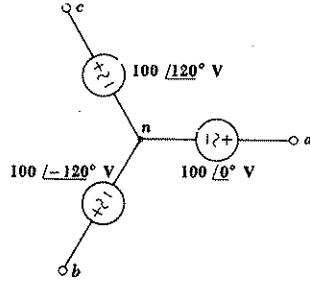
ومن المناسب وصف الفولتيات متعددة الأطوار والتيارات بتوصيف سفلي مزدوج

double-subscript notation . وفي هذا التوصيف تكون الفولتية بشكل V_{ab} والتيار I_{aa} معطية معنى أوضح من تمثيلهما بـ V_s و I_s مثلاً . ومن التعريف لنفرض أن فولتية النقطة a بالنسبة للنقطة b هي V_{ab} لهذا تكون الإشارة الموجبة واقعة في النقطة 1 - 2 (أ) . وبالرجوع الى الشكل 1 - 12 ب من البديهي أن $V_{ad} = V_{ab} + V_{cd}$. وان القدرة في هذا التوصيف تقع في الحقيقة القائلة أن قانون الفولتية لكرشوف يحتاج الى أن الفولتية بين نقطتين هي نفسها بغض النظر عن المسار المستخدم بين النقطتين . ولذا

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bd} = V_{ac} + V_{cd} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} \quad \text{الخ. ومن الواضح}$$



شكل 1 - 12 (أ) تعريف الفولتية V_{ab} (ب) $V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = V_{ac} + V_{cd}$



شكل 2 - 12 شبكة مستخدمة كمثال لرمز الفولتية ذات التوصيف المزدوج

أن قانون الفولتية لكرشوف يمكن تحقيقه بدون الرجوع الى مخطط الدائرة . حيث يمكن كتابة المعادلات الصحيحة حتى ولو كان هناك نقطة أو الحرف السفلي غير المؤشر على الشكل . فمثلاً كان بإمكاننا أن نكتب المعادلة اعلاه الى الشكل 2 - 12 . لنفرض أن الفولتية V_{cn}, V_{bn}, V_{an} معلومة .

$$V_{an} = 100/0^\circ \text{ V rms}$$

$$V_{bn} = 100/-120^\circ$$

$$V_{cn} = 100/-240^\circ$$

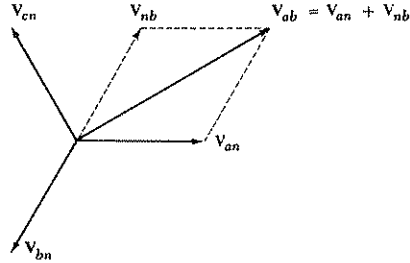
لذا فالفولتية V_{ab} يمكن ايجادها . لاحظ التوصيف المستخدم .

$$\begin{aligned} V_{ab} &= V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} \\ &= 100/0^\circ - 100/-120^\circ \\ &= 100 - (-50 - j86.6) \\ &= 173.2/30^\circ \end{aligned}$$

ان رسم الفولتيات الثلاثة بالمخطط الطوري مبين بالشكل 3 - 12 . يمكن تطبيق نفس النظام من التوصيف على التيارات ايضاً فمثلا التيار I_{ab} يمثل سريان التيار بمسار مباشر من a الى b . وفي كل دائرة كاملة ندرسها يجب أن يكون هناك مساران ممكنان على الاقل بين النقطتين a و b . كما سنتفق على

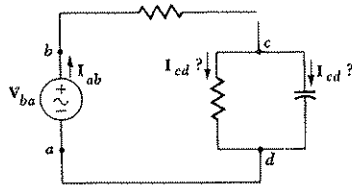
1 سنستخدم قيم ج . م . ت . (r.m.s.) . للفولتيات والتيارات خلال هذا الفصل .

عدم استخدام التوصيف المدروج مالم يكن هناك مسار واحد أقصر أو مباشر. وفي العادة يكون هذا المسار خلال عنصر واحد. فمثلا التيار I_{ab} قد اشير له بشكل صحيح في الشكل 4 - 12. الا ان تمثيل التيار I_{cd} يمكن ان يحدث التباساً.



الشكل 3 - 12 يبين المخطط الطوري لهذا الاستخدام البياني لمفهوم الفولتية ذات التوصيف المزدوج للحصول على V_{ac} لشبكة الشكل 2 - 12

وقبل دراسة الأنظمة المتعددة الاطوار ستستخدم التوصيف المزدوج للمساعدة في تحليل أنظمة خاصة ذات طور واحد.



الشكل 4 - 12 توضيح يبين الاستخدام الصحيح والخاطيء للمفهوم التوصيف المزدوج لرمز التيار.

تمرينان :

$$V_{21} = 4V_{31} + 20/60^\circ \quad V_{13} = 12/15^\circ + V_{42}, V_{14} = 3V_{23} \text{ كانت } 12 - 1$$

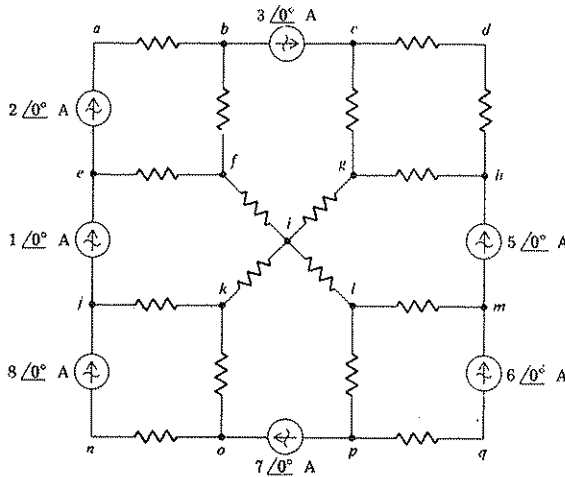
أوجد (أ) V_{12} ، (ب) V_{34} (ملاحظة : أكتب ثلاث معادلات ل V_{12} و V_{23} و V_{34} ثم حلها) .

$$\text{الجواب } 4.77/96.4^\circ; 7.08/-26.7^\circ$$

2 - 12 مقاوم في الشكل 5 - 12 هو 1Ω وكل مصدر يعمل عند 1 krad/s

أوجد (أ) I_{ui} ، (ب) I_{ki} (ج) I_{bf} (د) I_{ca}

$$\text{الجواب } A \quad 1/180^\circ; 0.5/180^\circ; 6/0^\circ; 8/0^\circ$$



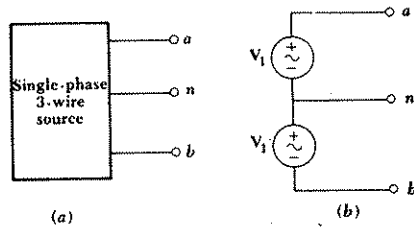
الشكل 5 - 12 انظر التمرين 2 - 12 .

2 . أنظمة الطور الواحد ذات الأسلاك الثلاثة

SINGLE-PHASE THREE-WIRE SYSTEMS

يعرف مصدر الطور الواحد ذو الاسلاك الثلاثة بأنه المصدر المحتوي على ثلاثة أطراف خرج مثل a و n و b في الشكل 6 - 12 حيث أن الفولتيتين الطوريتين V_{nb} و V_{an} متساويتان لذا يمكن تمثيل المصدر بمزيج من مصدري فولتية

متماثلين. ففي الشكل 12-6 ب $V_1 = V_{an} = V_{nb}$ ومن الواضح أن $V_{ab} = 2V_{an} = 2V_{nb}$ لذا لدينا مصدر يمكن ان تربط الاحمال لأية من الفولتيتين. وان نظام تزويد الدور بالكهرباء الاعتيادي هو نظام طور واحد ذو ثلاثة اسلاك بواسطته يمكن تشغيل الأدوات التي تعمل على 115 فولت أو 230 فولت* وأن الأدوات التي تعمل بفولتية عالية تكون في العادة تلك الأدوات التي تستهلك قدرة كبيرة ثم تسبب سريان تيار في الخطوط يعادل نصف ما يجب أن تسجبه عند نصف الفولتية. هذا على فرض ثبوت القدرة. ويمكن استخدام سلك أصغر قطراً بأمان في هذه الادوات وفي اسلاك التوزيع في الدور وشبكة توزيع مؤسسة الكهرباء.

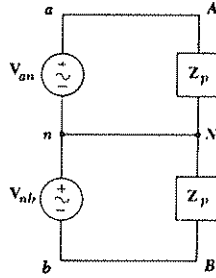


الشكل 6-12 (أ) مصدر ذي ثلاث اسلاك وطور واحد (ب) تمثيل المصدر ذي الثلاث اسلاك والطور الواحد بمصدري فولتية مثاليين.

ولقد استخدمت تسمية الطور الواحد بسبب ان الفولتيتين V_{nb} و V_{an} متساويتان ولهما زاوية الطور نفسها. ومن وجهة نظر اخرى تعمل الفولتيتان بين السلكين الخارجيين والسلك الوسطي (المدعو بخط التعادل) بفرق طور مقداره 180 درجة بالضبط اي ان $V_{bn} = V_{an}$ أو $0 = V_{bn} + V_{an}$. وسنرى في فقرة لاحقة ان الانظمة المتعددة الأطوار المتوازنة تتصف بأنها فولتيات متساوية بالمقدار ومجموعها الطوري يساوي صفراً. من ذلك يتبين أن نظام الطور الواحد ذو الاسلاك الثلاثة هو فعلاً نظام متوازن ذو طورين. الا أن اصطلاح النظام ذي الطورين قد استخدم ليرمز الى حالة مصدرين بينهما فرق طور مقداره 180° درجة وهو نظام غير مهم وسوف لانتاقشه أكثر من ذلك.

* هذا النظام مطبق في الولايات المتحدة الامريكية.

ولنرجع الى نظام الطور الواحد ذي 3 اسلاك والذي يحوي حملين متماثلين Z_p بين كل سلك خارجي وسلك التعادل نفرض أن الأسلاك التي تربط المصدر مع الحمل هي موصلات مثالية .



الشكل 7 - 12 نظام ذي ثلاث اسلاك بطور واحد بسيط .
الحملان متطابقان وتيار التعادل صفر .

$$V_{an} = V_{nb}$$

حيث

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = I_{bB} = \frac{V_{nb}}{Z_p}$$

$$I_{nN} = I_{bB} + I_{aA} = I_{bB} - I_{aA} = 0$$

ثم

لذلك ليس هناك تيار في خط التعادل ويمكن ازالته دون تغير أي تيار أو فولتية في النظام . ويمكن الحصول على نتيجة من خلال تساوي المصدرين .
لندرس بعد ذلك تأثير وجود ممانعة محدودة في كل سلك . اذا احتوى الخطان aA و bB كل على نفس الممانعة فان هذه الممانعة تضاف الى Z_p منتجة مرة أخرى تيار تعادل مقداره صفر . لنفرض ان هناك ممانعة معينة في خط التعادل Z_n فانه دون القيام باي تحليل عميق فان نظرية التراكب توضح ان تناظر الدائرة مايزال يسبب تيار في خط التعادل مقداره صفر وبالإضافة الى ذلك فان ربط أي ممانعة مباشرة من خطوط خارجية الى خط خارجي اخر تنتج دائرة متماثلة وتيار تعادل مقداره صفر . لذلك فان تيار التعادل الذي قيمته صفر هو نتيجة لتوازن الحمل وتناظره ومن ثم فان اي ممانعة في سلك التعادل لا تؤثر على التعادل .

يحوي نظام الطور الواحد ذو الاسلاك الثلاثة بأعم حالاته حملين غير متساويين بين الخططين الخارجين وخط التعادل . كما يحوي حملاً آخر مربوط مباشرة بين الخططين الخارجيين . ويتوقع في ممانعتي الخططين الخارجيين أن يكونا متساويين ويتوقع في ممانعة خط التعادل أن تكون أكبر من ذلك بكثير . يبين الشكل 8 - 12 مثالا على ذلك . يكن تحليل هذه الدائرة بتأشير التيارات الدوارة وبكتابة المعادلات المناسبة وينتج ذلك

$$\begin{aligned} I_1 &= 11.2 \underline{-19.8^\circ} \text{ A rms} && \text{أمبير ج . م . ت} \\ I_2 &= 9.39 \underline{-24.5^\circ} && \text{أمبير ج . م . ت} \\ I_3 &= 10.4 \underline{-21.8^\circ} && \text{أمبير ج . م . ت} \end{aligned}$$

لذا التياران في الخططين الخارجيين،

$$\begin{aligned} I_{n1} = I_1 &= 11.2 \underline{-19.8^\circ} \text{ A rms} && \text{أمبير ج . م . ت} \\ I_{n2} = -I_3 &= 10.4 \underline{158.2^\circ} && \text{أمبير ج . م . ت} \end{aligned}$$

والتيار الاقل في خط التعادل

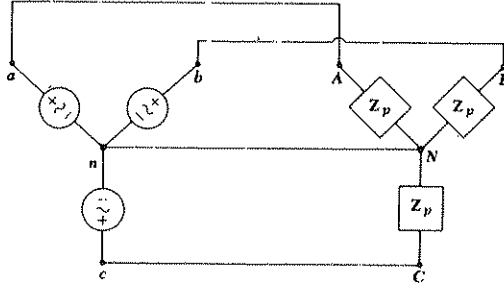
$$I_{n3} = I_3 - I_1 = 0.95 \underline{-177.9^\circ} \text{ A rms} \quad \text{أمبير ج . م . ت}$$

يمكن حساب القدرة المسحوبة من قبل كل حمل .

$$P_{3n} = |I_1 - I_2|^2 (50) = 207 \text{ W}$$

كما أن V_{nb} تسبق V_{bc} و V_{bc} تسبق V_{ca} كذلك بـ 120 درجة . وهذه العبارة تبقى صحيحة لترتيب الطوري السالب اذا ما استبدلت كلمة « تسبق » بعبارة « تتخلف عن » .

لنحاول الآن ربط حمل ذي ثلاثة اطوار مربوط بشكل Y للمصدر باستخدام ثلاثة خطوط وخط تعادل كما مبين في الشكل 13 - 12 تمثل الممانعة « Z » الحمل بين كل خط وخط التعادل . يمكن ايجاد تيارات خطوط التعادل بسهولة نظراً لانه لدينا بالفعل ثلاث دوائر أحادية الطور متصلة بتوصيل مشترك .



الشكل 13 - 12 نظام ثلاثي الطور متوازن ، مربوط بشكل Y-Y وحايي على خط تعادل .

$$I_{n,A} = \frac{V_{an}}{Z_p}$$

$$I_{n,B} = \frac{V_{bn}}{Z_p} = \frac{V_{an} \angle -120^\circ}{Z_p} = I_{n,A} \angle -120^\circ$$

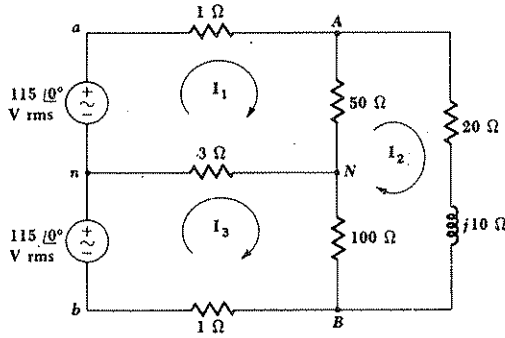
$$I_{n,C} = I_{n,A} \angle -240^\circ$$

ومن ثم

$$I_{Nn} = I_{n,A} + I_{n,B} + I_{n,C} = 0$$

لذا فان خط التعادل لا يحمل تياراً اذا كان كل من المصدر والحمل متزنين على فرض أن الأسلاك الأربعة لاتحتوي على أية ممانعة . كيف سيتغير ذلك اذا أدخلت ممانعة Z_n على التوالي مع كل من الخطوط الثلاثة وأدخلت ممانعة مقدارها Z_n في خط التعادل ؟ ومن البديهي أن ممانعات الخطوط يمكن دمجها مع ممانعات الحمل الثلاث وهذا الحمل الفعال يبقى متزناً ومن ثم فان خط التعادل المثالي التوصيل يمكن ازالته . لذا فانه اذا لم يحدث أي تغير في النظام نتيجة دائرة قصر أو دائرة مفتوحة بين n و N فان بالامكان اضافة أي ممانعة في خط التعادل وتيار التعادل سيبقى صفراً .

ينتج مما سبق أنه اذا كان لدينا مصادر متزنة وأحمال متزنة وممانعات خطوط متزنة فان خط التعادل الحايي على أي ممانعة يمكن الاستعاضة عنه بأي ممانعة أخرى ويضمن ذلك دائرة قصر أو دائرة مفتوحة .



الشكل 8 - نظام احادي الطور ذو ثلاث خطوط نموذجي

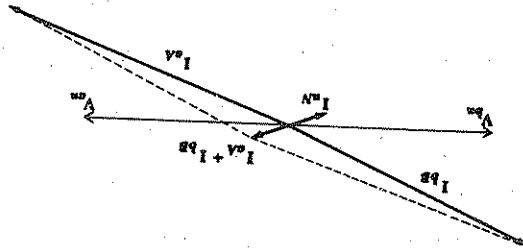
والتي تمثل مصباحين كل منهما يستهلك 100 واط على التوازن تقريباً

$$P_{100} = I_3^2 (100) = 117 \text{ W}$$

والذي يمثل مصباح يستهلك 100 واط تقريباً

$$P_{20-j10} = I_2^2 (20) = 1763 \text{ W}$$

والتي يمكن تصورها بشكل محرك حثي ذي قدرة مقدارها حصانين . فتكون القدرة الكلية في الحمل 2087 واط ويمكن حساب الخسارة في الأسلاك كما يأتي



الشكل 9 - 12 فوتيه المصدر وثلاثة من تيارات الدائرة في الشكل 8 - 12 مبينة في مخطط طوري . ملاحظاً أن

$$I_{na} + I_{nb} + I_{nc} = 0.$$

$$P_{na} = I_1^2 (1) = 126 \text{ W}$$

$$P_{nb} = I_3^2 (1) = 108 \text{ W}$$

$$P_{nc} = I_{nc}^2 (3) = 2.7 \text{ W}$$

أي خسارة كلية في الأسلاك مقدارها 237 واط . ومن ثم يتبين أن الأسلاك طويلة جداً والاتبقي الخسارة في السلكين الخارجيين في ارتفاع خطير في درجة الحرارة . لذلك فإن القدرة الكلية المتولدة يجب أن تكون 2324 واط ويمكن التأكد منها بحساب القدرة المتولدة في كل مصدر فولتية

$$P_{m1} = 115(11.2) \cos 19.8^\circ = 1216 \text{ W}$$

$$P_{m2} = 115(10.4) \cos 21.8^\circ = 1107 \text{ W}$$

أي أن المجموع 2326 واط . وتكون كفاءة النقل في هذا النظام هي

$$\text{Eff} = \frac{2087}{2087 + 237} = 89.8\%$$

وهذه القيمة غير حقيقية للمكائن البخارية أو مكائن الاحتراق الداخلي الا انها منخفضة جداً لأنظمة التوزيع المصممة بشكل جيد . حيث أنه يجب استخدام أسلاك ذات أقطار أكبر اذا لم يكن بالامكان وضع المصدر على مقربة من الحمل .

ويبين الشكل 9 - 12 المخطط الطوري لمصدري الفولتية والتياريين في السلكين الخارجيين وتيار سلك التعادل . والحقيقة أن $I_{m1} + I_{m2} + I_{m3} = 0$ واضحة من المخطط .

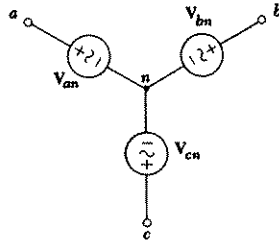
تمرين :-

3 - 12 ضاعف مقاومة كل خط وخط التعادل في دائرة الشكل 8 - 12 ثم اوجد معدل القدرة المستعملة من كل حمل .

الجواب 1489 W : 165 : 104

3 - 12 ربط Y-Y للأطوار الثلاثة THREE-PHASE Y-Y CONNECTION

تحتوي مصادر الأطوار الثلاثة على ثلاث نهايات تدعى نهايات الخطوط وقد يكون خط التعادل مربوطاً أو غير مربوط . وسنبداً بمناقشة مصدر الأطوار الثلاثة التي تحتوي على خط التعادل . ويمكن تمثيل هذا المصدر بثلاثة مصادر فولتية متتالية مربوطة بشكل Δ كما مبين في الشكل 10 - 12 ومن ثم تكون النهايات a و b و c و n متوفرة . وسندرس فقط المصادر ذات الاطوار الثلاثة المترنة



الشكل 10 - 12 مصدر ثلاثي الطور مربوط على شكل

والتي يمكن تعريفها

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| \quad \text{و}$$

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0$$

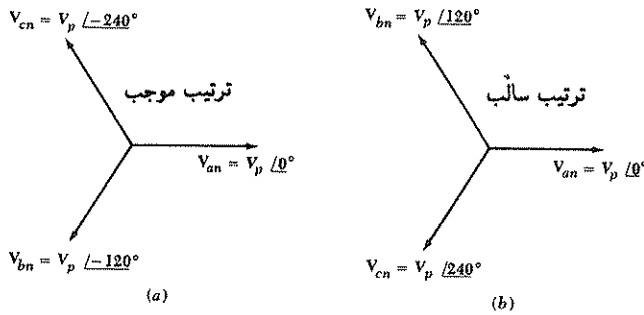
تسمى هذه الفولتيات الثلاث والموجودة كلها بين أحد الخطوط وخط التعادل بالفولتيات الطورية إذا اخترنا V_{an} بشكل اعتباطي كمرجع

$$V_{an} = V_p \angle 0^\circ$$

حيث سنستخدم باستمرار V_p لتمثيل قيمة ج . م . ت . لكل من الفولتيات الطورية ومن ثم يكون تعريف المصدر ذي الأطوار الثلاثة مبنياً اما بالصورة

$$\begin{aligned} V_{bn} &= V_p \angle -120^\circ & V_{cn} &= V_p \angle -240^\circ \\ V_{bn} &= V_p \angle 120^\circ & V_{cn} &= V_p \angle 240^\circ \end{aligned} \quad \text{أو بالصورة}$$

وتسمى الأولى بترتيب الطوري الموجب او الترتيب الطوري abc كما في الشكل 11 - 12 (أ) . أما الأخيرة فتدعى بالترتيب الطوري السالب او الترتيب الطوري cba وهو بالمخطط الطوري المبين في الشكل 11 - 12 ب ومن الواضح أن الترتيب الطوري لمصدر ذي الاطوار الثلاثة يعتمد على الاختيار الاعتباطي للنهايات الثلاث



شكل 11 - 12 أ ترتيب طورى موجب او 'abc' (ب) ترتيب طور سالب او 'cba'

التي سيرمز لها بالحروف b و a و c ويمكن اختيار ذلك على الدوام لكي تعطي ترتيباً طورياً موجباً. كما يمكن أن نفترض أن ذلك يتم في معظم الأنظمة التي ندرسها.

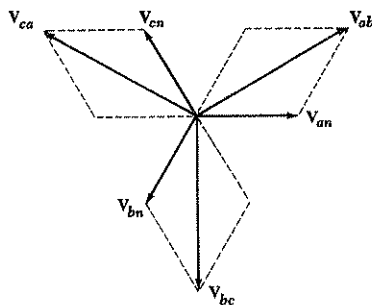
ولنحاول إيجاد الفولتيات بين الخطوط (او ما تسمى بفولتيات الخطوط) الموجودة عند افتراض الفولتيات الطورية المبينة في الشكل 11 - 12 (أ). ويمكن إجراء ذلك بسهولة باستخدام المخطط الطوري نظراً لأن كافة الزوايا هي مضاعفات 30 درجة. يبين الشكل 12 - 12 نتيجة ذلك والتي هي:

$$V_{an} = \sqrt{3} V_p \angle 30^\circ \quad V_{bc} = \sqrt{3} V_p \angle -90^\circ \quad V_{ca} = \sqrt{3} V_p \angle -210^\circ$$

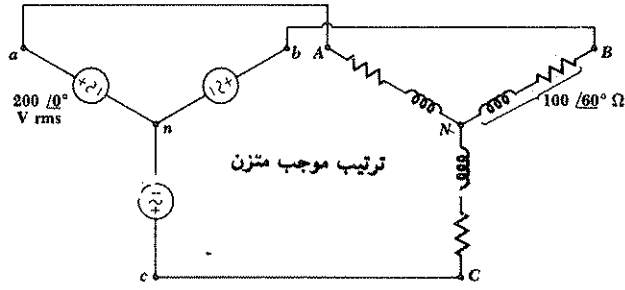
يحتاج قانون الفولتية لكرشوف أن مجموع هذه الفولتيات الثلاث صفراً وبالحقيقة أن المجموع هو صفر.

لربط مصدر ذي ثلاثة أطوار بشكل Y على النحو

$$V_L = \sqrt{3} V_p$$



الشكل 12 - 12 مخطط طورى يستخدم لتعيين فولتيات الخطوط من فولتيات الاطوار المعروفة



الشكل 14 - 12 نظام ثلاثي الطور ذو ثلاث خطوط مربوط على شكل Y-Y

لاحظ ان V_{an} تسبق V_{bn} و V_{bn} تسبق V_{cn} في الترتيب الطوري الموجب كل حالة بـ 120 درجة ومن المفيد أحياناً أن تتصور دائرة القصر بين نقطتي التعادل ومن ثم تبسط المسألة الى ثلاث مسائل ذات طور واحد كلها متشابهة . ويقال بأن المسألة قد حلت « للطور الواحد » « per-phase » . وسنحاول حل عدد من المسائل المحتوية على أنظمة ذات ثلاثة أطوار مربوطة بشكل Y-Y تؤدي دائرة الشكل 14 - 12 الى مسألة بسيطة ومباشرة حيث يطلب منا إيجاد تيارات متعددة وفولتيات الدائرة الدائرة ثم إيجاد القدرة الكلية .

نظراً لأن الفولتيات الطورية للمصدر معروفة وان ترتيبها الطوري يفرض أن يكون موجياً ، ويمكن كتابة الفولتيات الطورية الثلاث

$$V_{an} = 200 \angle 0^\circ \quad V_{bn} = 200 \angle -120^\circ \quad V_{cn} = 200 \angle -240^\circ$$

وان فولتية الخط هي $200\sqrt{3}$ او 346 فولت ج . م . ت . ويمكن إيجاد زاوية الطور لكل خط برسم المخطط الطوري كما سبق . وبالحقيقة فان المخطط الطوري المبين في الشكل 12 - 12 ينطبق في هذه الحالة حيث V_{an} تساوي $346 \angle 30^\circ$ V فولت .

لتحاول العمل مع الطور A . يكون تيار الخط

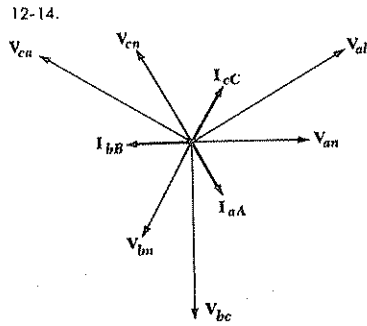
$$I_{a,1} = \frac{V_{an}}{Z_a} = \frac{200 \angle 0^\circ}{100 \angle 60^\circ} = 2 \angle -60^\circ \text{ A rms}$$
 أمبير ج . م . ت .

والقدرة الممتصة في هذا الطور تكون .

$$P_{AV} = 200(2) \cos (0^\circ + 60^\circ) = 200 \text{ W}$$

لذا تكون القدرة الكلية المستهلكة من الحمل ذي الاطوار الثلاثة تساوي 600 واط . وتستكمل المسألة برسم المخطط الطوري ثم قياس الزوايا الطورية المناسبة منه والتي تنطبق لفولتيات الخطوط الأخرى وتياراتها . يبين الشكل 15 - 12 مخططاً كاملاً .

ويمكن حل المسائل بطريقة تدعى بطريقة الاتجاه العكسي وتعرف احياناً بطرق « للطور الواحد » . لنفرض لدينا نظام ذي ثلاثة اطوار متزن فولتية الخط له 300 فولت ج . م . ت . ويجهز حملاً متزناً مربوطاً بشكل Y قيمته 1200 واط



الشكل 15 - 12 مخطط طوري يطبق على دائرة الشكل 14 - 12 .

بعامل قدرة 0.8 سابق . ماقيمة تيار الخط وممانعة الحمل للطور الواحد من الواضح ان فولتية الطور هي $300/\sqrt{3}$ فولت ج . م . ت . وأن القدرة للطور الواحد تساوي 400 واط . لذا فان تيار الخط يمكن ايجاده من علاقة القدرة .

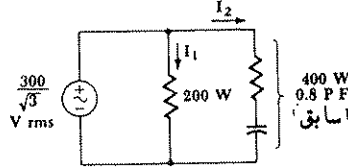
$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_L)(0.8)$$

ومن ثم يكون تيار الخط 2.89 أمبير ج . م . ت . وتعطى ممانعة الطور بما يأتي

$$|Z_{\phi}| = \frac{V_{\phi}}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60 \Omega$$

نظراً لأن عامل القدرة هو 0.8 سابق وزاوية طور الممانعة هي -36.8° درجة و $Z_{\phi} = 60/\underline{-36.9^\circ} \Omega$ أوم ويمكن معاملة أحمال أعقد من ذلك بسهولة أيضاً نظراً

لأن المسألة قد تبسّطت إلى مسائل أبسط ذات طور واحد. لنفرض أن حملاً ضوئياً متزناً قيمته 600 واط أضيف على (التوازي) إلى النظام المذكور أعلاه. يبين الشكل 12 - 16 مخططاً لدائرة مناسبة للطور الواحد .



شكل 12 - 16 دائرة للطور الواحد مستعملة لتحليل مثال ثلاثي الطور متوازن

يمكن حساب قيمة تيار الإضاءة من المعادلة

$$200 = \frac{300}{\sqrt{3}} |I_1| \cos 0^\circ$$

و

$$|I_1| = 1.155$$

وبطريقة مشابهة يمكن إيجاد قيمة تيار الحمل السعوي دون أن يكون قد اختلف عن القيمة السابقة .

$$|I_2| = 2.89$$

وإذا فرضنا أن الطور الذي نحن بصدده له فولتية طور ذات زاوية مقدارها صفر فإن

$$I_1 = 1.155 \angle 0^\circ \quad I_2 = 2.89 \angle +36.9^\circ$$

ويكون تيار الخط

$$I_L = I_1 + I_2 = 3.87 \angle +26.6^\circ \text{ A rms}$$

أمبير ج . م . ت .

لذا تكون القدرة المتولدة من طور المصدر هذا

$$P_p = \frac{300}{\sqrt{3}} 3.87 \cos (+26.6^\circ) = 600 \text{ W}$$

والتي تحقق الفرضية الاصلية .

وإذا ربط حمل غير متزن مربوط بشكل Y مع نظام ذي ثلاثة أطوار متزن فإن الدائرة يمكن تحليلها أيضاً على أساس الطور الواحد . هذا إذا كان خط التعادل موجوداً ويحوي على ممانعة مقدارها صفر . أما إذا لم يتحقق أي من هذين الشرطين فيجب استخدامه طرق أخرى . وسيجد المهندس الذي يقضي معظم وقته مع أنظمة

ذات ثلاثة أطوار غير متزنة بأن استخدام « المركبات المتماثلة » مختصراً للوقت .
وسنتجنب مناقشة هذه الطريقة هنا .

تمارين :-

4 - 12 نظام ثلاثي الأطوار ذو ثلاثة أسلاك متوازن مربوط بحمل نجمي يحتوي على مقاوم $50\text{-}\Omega$ ومتسعة $50\text{-}\mu\text{F}$ ومحث 0.12-H على التوازي في كل طور . استخدم ترتيب الأطوار الموجب مع $V_{an} = 240/60^\circ \text{ V}$ ج . م . ت . و
 $\omega = 500 \text{ rad/s}$. لايجاد (أ) V_{bn} ، (ب) V_{ca} ، (ج) I_{bn} ، (د) I_{ca}
 الجواب $A_{rms} 5.20/22.6^\circ; 5.20/-37.4^\circ; 416/-150^\circ; 240/-60^\circ \text{ V rms}$

5 - 12 نظام ثلاثي الأطوار ذو ثلاثة أسلاك فولتية خطه 440 ج . م . ت . يغذي حملين مربوطين بشكل Y . أحد الحملين ممانعته $8 + j3 \Omega$ لكل طور والآخر $4 - j1 \Omega$ لكل طور . أوجد معدل القدرة المجزأة الى (أ) حمل حثي (ب) حمل سعوي

الجواب $21.2; 45.6 \text{ kW}$

6 - 12 حملان متوازيان نجميان يسحبان 5.4 kW بعامل قدرة 0.85 متخلف و 8.1 kW بعامل قدرة سابق مربوطان الى نظام ثلاثي الأطوار ذي ثلاثة أسلاك اذا كان تيار الخط 10 A ج . م . ت . ، أوجد التيار في كل حمل وفولتية الطور وفولتية الخط

الجواب $479; 830 \text{ V rms}; 4.42; 8.05 \text{ A rms}$

4 - 12 ربط الدلتا (Δ) CONNECTION THE DELTA

هناك أحمال ثلاثية الاطوار مربوطة بشكل دلتا أكثر من تلك المربوطة بشكل نجم . وأن أحد أسباب ذلك على الأقل للأحمال غير المتزنة هو المرونة التي يمكن بها إضافة أو فصل أحمال على طور واحد . وهذا صعب (أو غير ممكن) عمله في حمل مربوط بشكل نجم بثلاثة أسلاك .

دعنا ندرس حملاً متوازناً مربوطاً بشكل دلتا ويحتوي على ممانعة « Z » مربوطة بين زوجين من الخطوط . سوف نفترض أن النظام ذا ثلاثة أسلاك لاسباب بديهية . وبالرجوع الى الشكل 17 - 12 ، دعنا نفرض أن فولتيات الخطوط معروفة ،

$$V_L = |V_{ab}| = |V_{bc}| = |V_{ca}|$$

أو أن فولتيات الأطوار معلومة :

$$V_p = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}|$$

$$V_L = \sqrt{3} V_p \quad \text{و} \quad V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} / 30^\circ \quad \text{حيث}$$

وهكذا كما سبق . نظراً لأن الفولتية عبر كل من فروع الدلتا معروفة فإنه يمكن إيجاد تيارات الأطوار :

$$I_{AB} = \frac{V_{ab}}{Z_p} \quad I_{BC} = \frac{V_{bc}}{Z_p} \quad I_{CA} = \frac{V_{ca}}{Z_p}$$

ويعطينا الفرق بينهما بتيارات الخطوط بحيث

$$I_{aA} = I_{AB} - I_{CA}$$

تيارات الأطوار الثلاثة لها اتساعات متساوية :

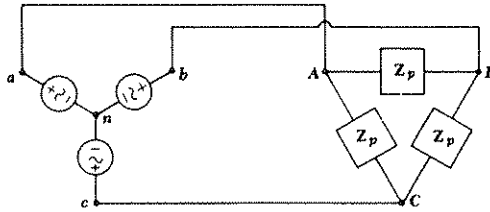
$$I_p = |I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}|$$

وإن تيارات الخطوط متساوية أيضاً في اتساعاتها . وهذا يعود إلى أن هناك تيارات أطوار متساوية بالاتساع ومن الضروري كونها تصنع زوايا طور فيما بينها مقدارها 120 . وإن التناظر ظاهر من المخطط الطوري في الشكل 18 - 12 . لذا نحصل على

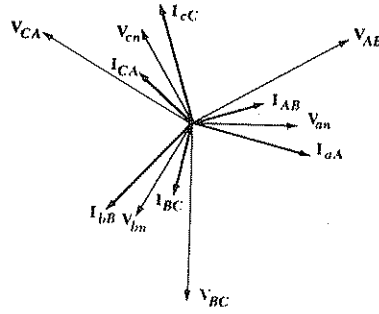
$$I_L = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}|$$

$$I_L = \sqrt{3} I_p$$

وكذلك



الشكل 17 - 12 حمل متوازن مربوط بشكل Δ إلى نظام ثلاثي الطور ذي ثلاثة أسلاك . صادف إن كان المصدر نجمي الربط .



الشكل 18 - 12 المخطط الطوري الذي ينطبق على دائرة الشكل 17 - 12 اذا كانت الممانعة Z_r حثية .

لنحاول اهمال المصدر للحظة من الزمن ونأخذ الحمل المتوازن فقط . اذا كان الحمل مربوطاً بشكل د فان فولتية الطور وفولتية الخط لا يمكن التمييز بينهما . لكن تيار الخط أكبر من تيار الطور بعامل مقداره $\sqrt{3}$. اذا كان الحمل مربوطاً بشكل Y . الا أن تيار الطور وتيار الخط يعودان الى التيار نفسه وتكون فولتية الخط أكبر من فولتية الطور بعامل مقداره $\sqrt{3}$.

وان حل المسائل الثلاثية الطور يمكن الأسراع بها اذا استخدمت العوامل $\sqrt{3}$ استخداماً متقناً . لنأخذ مثلاً رقمياً نموذجياً . علينا أن نحسب اتساع تيار الخط في نظام ثلاثي الطور قيمة ج . م . ت . له 300-V . يجيز 1200 W الى حمل مربوط بشكل د بعامل قدرة متخلف مقداره 0.8 . لنفرض ثانياً دائرة ذات طور واحد . تحسب 400 W بعامل قدرة متخلف 0.8 من فولتية خط 300-V . ج . م . ت . لذا

$$400 = 300(I_r)(0.8)$$

$$I_r = 1.667 \text{ A rms}$$

وكذلك

تعطي العلاقة بين تيارات الأطوار وتيارات الخطوط

$$I_l = \sqrt{3} (1.667) = 2.89 \text{ A rms}$$

هذا اضافة الى أن ممانعة كل طور يجب أن تكون

$$Z_r = \frac{30^2}{1.667^2} \cos^{-1} 0.8 = 180 \angle 36.9^\circ \quad \Omega$$

دعنا نغير منظوق المسألة بربط الحمل بشكل نجم بدل د . باستخدام القيم لكل طور . لدينا فولتية طور مقدارها 173 V . ج . م . ت . وقدرة مقدارها 400 W وعامل قدرة متخلف 0.8 . لذا

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}} (I_L)(0.8)$$

وكذلك

$$I_p = 2.89 \quad \text{or} \quad I_L = 2.89 \text{ A rms}$$

وان الممانعة في كل طور من Y هي

$$Z_p = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} / \cos^{-1} 0.8 = 60/36.9^\circ \quad \Omega$$

وان العامل $\sqrt{3}$ يربط فقط الكميات الطورية والخطية لكن يظهر أيضاً في تعابير مفيدة للقدرة الكلية المستهلكة في أي حمل متزن ثلاثي الأطوار. واذا فرضنا ان ربط الحمل Y وزاوية عامل قدرته θ فان القدرة المستلمة من كل طور هي :

$$P_p = V_p I_p \cos \theta$$

$$= V_p I_L \cos \theta$$

$$= \frac{V_L}{\sqrt{3}} I_L \cos \theta$$

$$P = 3P_p$$

والقدرة الكلية هي

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta$$

وبطريقة مشابهة فان القدرة المسلمة الى كل طور من أطوار الحمل المربوط بشكل

$$P_p = V_p I_p \cos \theta$$

هي

$$= V_L I_p \cos \theta$$

$$= V_L \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \theta$$

والقدرة الكلية

$$P = 3P_p$$

أو

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta \quad (1)$$

لذا فان (1) تمكننا من حساب القدرة الكلية المجهزة الى حمل متزن من معرفة اتساع فولتية الخط وتيار الخط وزاوية طور ممانعة الحمل (أو المسائرة). ويمكن حل المثال السابق لطور واحد

$$1200 = \sqrt{3}(300)(I_L)(0.8)$$

لذلك

$$I_L = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2.89 \text{ A rms}$$

ويمكن ربط المصدر Δ . وهذا أمر غير اعتيادي، الا أنه حينما يكون هناك عدم اتزان بسيط في أطوار المصدر يمكن أن يؤدي ذلك الى تيارات كبيرة تدور حول دائرة الدلتا. وكمثال على ذلك دعنا ندع مصادر الطور الواحد الثلاثة V_{ca} V_{bc} V_{ab} قبل غلق الدلتا بربط d الى a . دعنا نجد عدم الاتزان

بقياس مجموع $V_{nb} + V_{bc} + V_{ca}$. افرض أن اتساع المحصلة هو فقط واحد بالمائة من فولتية الخط . لذا يكون التيار الدوار تقريباً ثلث الواحد بالمائة من فولتية الخط مقسوماً على الممانعة الداخلية للمصدر . كم يتوقع ان تكون هذه الممانعات ؟ أنها يجب أن تعتمد على التيار الذي يتوقع أن يعطيه المصدر بهبوط مهمل على فولتية الأطراف . اذا فرضنا أن التيار الأقصى هذا يتسبب في هبوط مقداره واحد بالمائة في فولتية الاطراف لذا نرى أن التيار الدوار يعادل ثلث التيار الأقصى . وهذا يقلل من فائدة سعة التيار المصدر ويزيد من الفقدان في النظام .

تمرينان :

7 - 12 حمل بشكل Δ متزن يحتوي على مقاوم 50Ω على التوالي مع ربط متواز من $50\mu F$ و 75 mH في كل طور . يجهز الحمل من نظام ثلاثي الأطوار ذي ثلاثة أسلاك فيه $V_{\text{line}} = 500\sqrt{3}\text{ V}$ ج . م . ت .
 $\omega = 400\text{ rad/s}$. افرض أن تسلسل الأطوار موجب . اوجد (أ) I_{line} (ب) I_{line} (ج) القدرة الكلية .

الجواب

$$9.61\sqrt{3.7^\circ} \text{ A rms}; 16.64\sqrt{-26.3^\circ} \text{ A rms}; 13.85 \text{ kW}$$

8 - 12 نظام ثلاثي الأطوار متزن ذو ثلاثة أسلاك يحتوي على حمل مربوط بشكل Δ فيه $30 + j10\Omega$ في كل طور على التوازي مع حمل مربوط بشكل Y فيه $40 - j10\Omega$ في كل طور . فولتية الخط 2400 فولت ج . م . ت . عند الحمل وكل خط من الخطوط فيه مقاومة مقدارها 0.4 أوم (أ) المجهزة الى حمل الدلتا (ب) المجهزة الى حمل النجم (ج) المفقودة في الخطوط .

$$31.0; 135.5; 518 \text{ kW}$$

5 - 12 استخدام الواطميتر (مقياس القدرة) USE OF THE WATTMETER

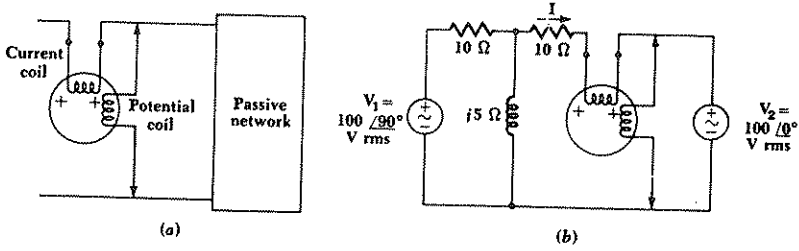
قبل مناقشة الأساليب المتخصصة المستخدمة لقياس القدرة في أنظمة الأطوار الثلاثة (الفقرة 6 - 12) فإنه لمصلحتنا أن ندرس أولاً كيف يستعمل الواطميتر (مقياس القدرة) في دوائر الطور الواحد .

وان قياس القدرة يتم في غالب الأحيان عند ترددات تحت عدة مئات من الهرتز باستخدام واطميتر يحتوي على ملفين اثنين . يصنع أحد هذين الملفين من سلك سميك ذي مقاومة واطئة جداً ويدعى بملف التيار ويحوي الملف الثاني على عدد أكبر بكثير من اللفات المصنوعة من سلك دقيق ذي مقاومة عالية ويدعى بملف الجهد أو ملف الفولتية . ويمكن إدخال مقاومة إضافية داخلياً أو خارجياً على التوالي مع ملف الجهد . يتناسب العزم المسلط على النظام المتحرك والمؤشر مع حاصل الضرب الآني للتيارين المارين في الملفين . إلا أن عزم القصور الذاتي الميكانيكي للنظام المتحرك يتسبب في انحراف يتناسب مع متوسط قيمة هذا العزم .

ويستخدم الواطميتر بربطه في الشبكة بطريقة بحيث أن التيار المار في ملف التيار هو التيار المار في الشبكة والفولتية عبر ملف الجهد هي الفولتية عبر طرفي الشبكة . لذا فالتيار في ملف الجهد هو فولتية الإدخال مقسومة على مقاومة ملف الجهد . وأنه انحراف الواطميتر يتناسب مع متوسط القدرة المجهزة من الشبكة .

ومن الواضح أن الواطميتر يحوي أربعة أطراف وأن الربط الصحيح يجب أن يتم لهذه الأطراف للحصول على قراءة على وجهة القياس . ولكي نكون دقيقين، دعنا نفرض أننا نقيس القدرة المستهلكة من شبكة غير فعالة passive . يوضع ملف التيار على التوالي مع موصل واحد أو موصلين مربوطين إلى الحمل كما يوضع ملف الجهد بين الموصلين عادةً على «جهة الحمل» من ملف التيار . ويؤشر طرفاً ملف الجهد عادةً يسهم كما مبين في الشكل 19 - 12 (أ) . وكل ملف يحتوي على طرفين لذا يجب ملاحظة العلاقة الصحيحة بين اتجاهي التيار والفولتية . وتؤشر إحدى نهايتي كل ملف بالإشارة (+) ومن ثم يتم الحصول على قراءة بالاتجاه الصحيح إذا كان التيار الموجب يدخل النهاية المؤشر (+) من طرفي ملف التيار بينما الطرف (+) من ملف الجهد موجباً بالنسبة إلى الطرف غير المؤشر . لذا فالواطميتر المبين في الشكل 19 - 12 (أ) يعطي انحرافاً بالاتجاه الصحيح حينما تستهلك الشبكة إلى اليمين قدرة .

وان انعكاس ربط أي من الملفين (ولكن ليس كلاهما) سيتسبب في ان يحاول المقياس أن ينحرف بعكس اتجاه القياس . أما انعكاس الملفين كليهما فلا يؤثر بتاتا على القراءة .



الشكل 19 - 12 (أ) ربط واظميتر يجعل التأشير صحيحاً لقراءة القدرة لشبكة غير فعالة : (ب) مثال ربط فيه الواظميتر لتأشير قراءة صحيحة للقدرة المستهلكة من المصدر الأيمن .

كمثال على استخدام مثل هذا الواظميتر في قياس متوسط القدرة ، دعنا ندرس الدائرة المبينة في الشكل 19 - 12 (ب) . وإن ربط الواظميتر يجعل قراءته الصحيحة تقابل طاقة مستهلكة موجبة من الشبكة الى يمين المقياس أي المصدر الأيمن . وإن القدرة المستهلكة من المصدر تساوي

$$P = |V_2| |I| \cos (\text{ang } V_2 - \text{ang } I)$$

باستخدام نظرية التراكب أو التحليل الشبكي يمكن ايجاد التيار

$$I = 11.18 / 153.4^\circ \text{ A rms}$$

وبذا تكون القدرة المستهلكة هي :

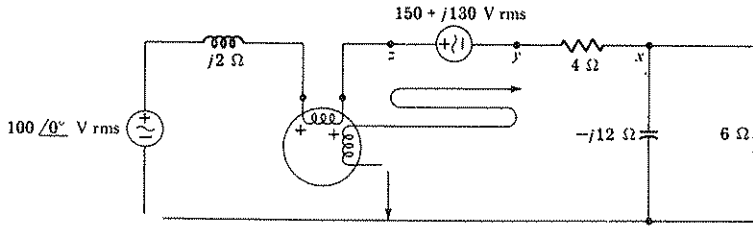
$$P = (100)(11.18) \cos (0^\circ - 153.4^\circ) = -1000 \text{ W}$$

لذا فالمؤشر يستقر على أسفل واجهة المقياس مشيراً الى قراءة سالبة . ومن الناحية العملية يمكن عكس ملف الجهد أسرع من عكس ملف التيار وهذا الواظميتر في قياس متوسط القدرة ، دعنا ندرس الدائرة المبينة في الشكل 19 - 12 (ب) . وإن ربط الواظميتر الانعكاس يعطي قراءة موجبة مقدارها 1000 واط .

تمرين : -

19 - 12 أوجد قراءة الواطميتر في الشكل 20 - 12 وأوضح إذا كان ملف الجهد يجب أن يعكس للحصول على قراءة بالاتجاه الصحيح للمؤشر ثم أوضح الجهاز أو الاجهزة المستهلكة أو المولدة لهذه القدرة . إن الطرف (+) للواطميتر يربط بـ (أ)
 x (ب) y (ج) z .

الجواب 500 واط مجهز 100 فولت معكوسة ، 1200 واط (د) P_{in}
 2200 واط (هـ) $P_{4\Omega} + P_{6\Omega}$

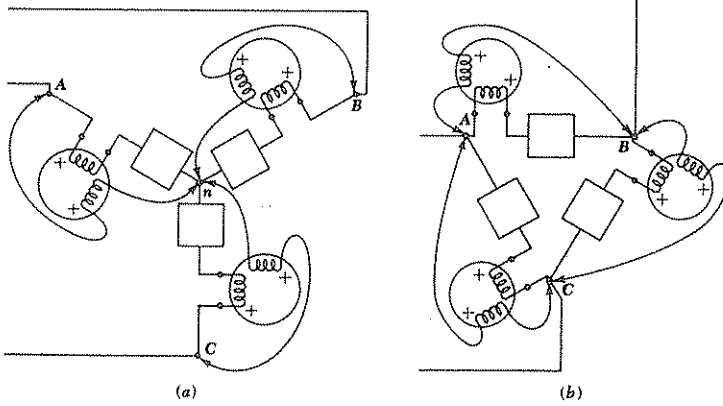


شكل 20 - 12 أنظر المسألة 9 - 12

6 - 12 قياس القدرة في أنظمة الأطوار الثلاثة

POWER MEASUREMENT IN THREE-PHASE SYSTEMS

لأول مرحلة تبدو مسألة قياس القدرة المستهلكة في حمل ثلاثي الأطوار مسألة سهلة . فلا تحتاج سوى وضع واطميتر في كل طور من الأطوار الثلاثة ثم نجمع النواتج . فمثلاً الربط الصحيح لحمل مربوط بشكل نجم مبين في الشكل 21 - 12 (أ) . لكل واطميتر ملف تياره ضمن أحد أطوار الحمل وملف الجهد مربوط بين جهة الخط لذلك الحمل وخط التعادل . وبالأسلوب نفسه يمكن ربط ثلاثة واطميترات كما مبين في الشكل 21 - 12 ب لقياس القدرة الكلية الممتصة من قبل حمل مربوط بشكل Δ . وإن هذه الطرق هي صحيحة من الناحية النظرية ولكنها غير مجدية عملياً نظراً لأن خط التعادل للحمل النجمي لا يكون متوفراً عادةً كما أن أطوار ربط الدلتا ليست متوفرة . أن الأطوار الثلاثة للماكنة الدوارة مثلاً فيها فقط ثلاثة أطراف متوفرة وهي التي رمزنا لها بالرموز A و B و C .



الشكل 21 - 12 ثلاثة واطميترات مربوطة بطريقة بحيث أن كل منها يقرأ القدرة الممتصة من طور واحد من الأطوار الثلاثة ومجموع القراءات يعطي القدرة الكلية .
 (أ) حمل مربوط بشكل نجم (ب) حمل مربوط بشكل Δ . لا يشترط في الحمل ولا في المصدرين أن يكونا متزيين .

ومن البديهي أننا نحتاج الى طريقة لقياس القدرة الكلية المسحوبة من حمل ذي ثلاثة أطوار لها ثلاثة أطراف فقط . يمكن إجراء القياسات فقط على جهة « الخط » من هذه الأطراف وليس على جهة الحمل . وتتوفر مثل هذه الطريقة ويمكنها قياس القدرة المسحوبة من قبل حمل غير متزن من مصدر غير متزن . دعنا نربط ثلاث واطميترات بطريقة بحيث أن كل منها يكون ملف تياره في أحد الخطوط وملف فولتيته بين ذلك الخط واحدى النقاط المشتركة x كما مبين في الشكل 22 - 12

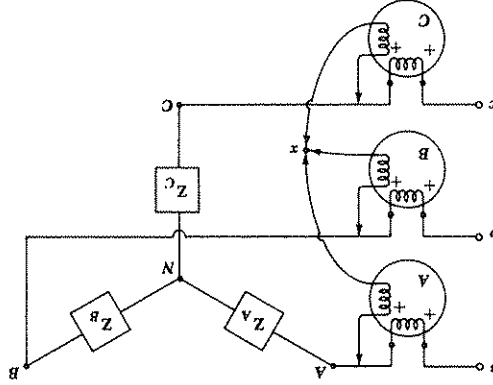
على الرغم من أن نظاماً بحمل مربوط بشكل Y موضح فيه فإن المناقشة الآلية تنطبق أيضاً لحمل مربوط بشكل Δ . يمكن أن تكون النقطة x نقطة غير محدود في نظام ذي ثلاثة أطوار أو يمكن أن تكون نقطة في الفراغ لاغير تكون ملفات الجهد الثلاثة فيها عقدة . وإن معدل القدرة المبينة بالواطميتر يجب أن يكون

$$P_A = \frac{1}{T} \int_0^T v_{A,r} i_{n,A} dt$$

حيث T هي فترة فولتيات المصادر كلها . وإن قراءتي الواطميترين الآخرين تعطيان بتعبيرين متشابهين . لذا فالقدرة الكلية المسحوبة من الحمل

$$P = P_A + P_B + P_C = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt$$

وكل فولتية من الفولتيات الثلاث في التعبير المذكور يمكن ان تكتب بدلالة فولتية الطور والفولتية بين النقطة x وخط التعادل .



الشكل 22 - 12 طريقة ربط ثلاثة واطميترات لقياس القدرة المسحوبة من حمل ذي ثلاثة أطوار يمكن الوصول الى ثلاثة أطراف من أطراف الحمل فقط.

$$v_{Ax} = v_{AN} + v_{Nx}$$

$$v_{Bx} = v_{BN} + v_{Nx}$$

$$v_{Cx} = v_{CN} + v_{Nx}$$

ولذا

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt + \frac{1}{T} \int_0^T v_{Nx} (i_{aA} + i_{bB} + i_{cC}) dt$$

الا أنه يمكن اعتبار الحمل ذي الأطوار الثلاثة كله كعقدة مترابطة ويتطلب تطبيق قانون كرشوف للتيار :

$$i_{aA} + i_{bB} + i_{cC} = 0$$

لذا

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T (v_{AN} i_{aA} + v_{BN} i_{bB} + v_{CN} i_{cC}) dt$$

وبالرجوع الى مخطط الدائرة يتبين أن هذا المجموع بالحقيقة هو مجموع معدل القدرات المأخوذة من كل طور من أطوار الحمل لذا فإن مجموع القراءات للأطوار الثلاثة يمثل معدل القدرة الكلية المسحوبة من الحمل كله .

دعنا نوضح هذه الطريقة بمثال عددي قبل أن نكتشف أن أحد هذه الواطمترات فائض عن الحاجة . وسوف نفرض أن لدينا مصدراً متزناً ،

$$V_{ab} = 100/0^\circ \quad V_{rms}$$

$$V_{bc} = 100/-120^\circ$$

$$V_{ca} = 100/-240^\circ$$

$$V_{an} = \frac{100}{\sqrt{3}} / -30^\circ$$

أو

$$V_{bn} = \frac{100}{\sqrt{3}} / -150^\circ$$

$$V_{cn} = \frac{100}{\sqrt{3}} / -270^\circ$$

ولحمل غير متزن :

$$Z_A = -j10 \quad \Omega$$

$$Z_B = j10$$

$$Z_C = 10$$

دعنا نفترض أن واطمترات مثالية مربوطة كما هو مبين في الشكل 22 - 12 بحيث تقع النقطة x على خط تعادل المصدر n . يمكن الحصول على تيارات الخط الثلاثة بالتحليل العقدي :

$$I_{aA} = \frac{\begin{vmatrix} 100/0^\circ & -j10 \\ 100/-120^\circ & 10 + j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -j10 \\ -j10 & 10 + j10 \end{vmatrix}} = 19.32/15^\circ \quad A \text{ rms}$$

وبطرق مشابهة

$$I_{bB} = 19.32/165^\circ \quad I_{cC} = 10/-90^\circ$$

الفولتية بين خطوط التعادل

$$V_{nv} = V_{nb} + V_{bn} = V_{nb} + I_{bB}(j10) = 157.7/-90^\circ$$

لذا فإن معدل القدرة المبين في كل واطميتر يمكن حسابه :

$$P_A = V_n I_{aA} \cos(\text{ang } V_{an} - \text{ang } I_{aA})$$

$$= \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(15^\circ + 30^\circ) = 788.7 \quad W$$

$$P_B = \frac{100}{\sqrt{3}} 19.32 \cos(165^\circ + 150^\circ) = 788.7 \quad W$$

$$P_C = \frac{100}{\sqrt{3}} 10 \cos(-90^\circ + 270^\circ) = -577.4 \quad W$$

أو أن القدرة الكلية تساوي 1000 واط . نظراً لأن تياراً قيمة ج . م . ت . له تساوي 10 A يسري خلال الحمل المقاومي فإن القدرة الكلية المسحوبة من الحمل هي :

$$P = 10^2(10) = 1000 \text{ W}$$

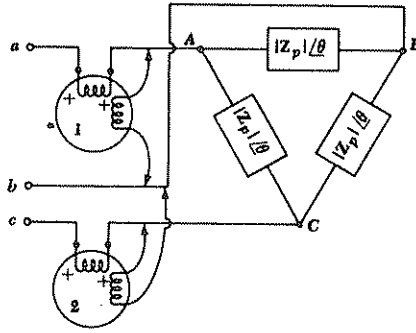
وبذا تتفق الطريقتان .

ومن المفيد ملاحظة أن قراءة أحد الواطميترات سالبة . ولقد أشارت المناقشة لاستخدام الواطميتر في الفقرة السابقة الى أن القراءة الصحيحة للمقياس يمكن الحصول عليها فقط بعد عكس توصيل ملف الجهد أو ملف التيار .

ولقد برهننا على النقطة x اي النقطة المشتركة بين ملفات الجهد الثلاثة يمكن وضعها بأي مكان تشاء بدون التأثير على المجموع الجبري لقراءات الواطميترات الثلاثة . دعنا ندرس الآن تأثير وضع النقطة x المشتركة للواطميترات الثلاثة مباشرة على أحد الخطوط . اذا أعيد مثلاً احد الطرفين من كل ملف جهد الى B . فإنه لن تكون هناك فولتية عبر ملف الجهد للواطميتر B ويجب ان يقرأ ذلك المقياس صفرأ . ومن ثم يمكن حذفه ويبقى المجموع الجبري لقراءتي الواطميترين مساوية للقدرة الكلية المأخوذة من قبل الحمل . وحينما تختار النقطة x بهذه الطريقة نصف طريقة قياس القدرة بأنها طريقة الواطميترين . إن مجموع القراءتين يعطي القدرة الكلية بغض النظر عن (1) عدم اتزان الحمل (2) عدم اتزان المصدر (3) الفرق بين الواطميترين (4) شكل الموجة الدورية . وإن الافتراض الوحيد الذي افترضناه هو أن تعديل الواطميتر صغيراً بحيث يمكن اهماله . فمثلاً في الشكل 22 - 12 يمر خلال ملفات التيار لكل مقياس تيار الخط المسحوب من الحمل مضافاً اليه التيار المار في ملف الجهد . وحيث ان الأخير عادةً يكون صغيراً فإن تأثيره يكون تقديره من معرفة مقاومة ملف الجهد والفولتية عبر طرفيه وإن هاتين الكميتين تمكننا من تخمين القدرة المستهلكة في ملف الجهد .

وفي المثال العددي المذكور فيما سبق ، دعنا نفترض ان الواطميترين قد استخدمنا ، بحيث أن أحدهما يكون ملف تياره في الخط وملف جهده بين A و B وملف تيار الآخر في الخط C وملف جهده بين C و B يقرأ المقياس الأول :

$$\begin{aligned} P_1 &= V_{110} I_{a,1} \cos (\text{ang } V_{110} - \text{ang } I_{a,1}) \\ &= 100(19.32) \cos (0^\circ - 15^\circ) \\ &= 1866 \text{ W} \end{aligned}$$



والثاني

$$\begin{aligned}
 P_2 &= V_{cb} I_{cc} \cos(\text{ang } V_{cb} - \text{ang } I_{cc}) \\
 &= 100(10) \cos(60^\circ + 90^\circ) \\
 &= -866 \text{ W}
 \end{aligned}$$

ومن ثم

$$P = P_1 + P_2 = 1866 - 866 = 1000 \text{ W}$$

ونعلم أن هذا هو الجواب الصحيح .

وفي حالة عدم اتزان الحمل تمكن طريقة الواطميترين من إيجاد زاوية عامل القدرة اضافة الى القدرة الكلية المسحوبة من الحمل . دعنا نفترض أن ممانعة الحمل ذات زاوية طور θ . باستخدام ربط Y و Δ . لنفرض ان الحمل مربوط بشكل Δ كما في الشكل 23 - 12 . أن تركيب المخطط الطوري القياسي كالمبين في الشكل 18 - 12 يمكننا من إيجاد زاوية الطور الصحيحة بين عدة فولتيات خطوط وتيارات خطوط . لذا يمكننا إيجاد القراءات .

وكذلك

$$\begin{aligned}
 P_1 &= |V_{AB}| |I_{aA}| \cos(\text{ang } V_{AB} - \text{ang } I_{aA}) \\
 &= V_L I_L \cos(30^\circ + \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_2 &= |V_{CB}| |I_{cc}| \cos(\text{ang } V_{CB} - \text{ang } I_{cc}) \\
 &= V_L I_L \cos(30^\circ - \theta)
 \end{aligned}$$

وان نسبة القراءتين هي

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\cos(30^\circ + \theta)}{\cos(30^\circ - \theta)} \quad (2)$$

إذا فتحنا الحدين الجيب تمامين يمكن حل المعادلة بسهولة لظلم لزاوية

$$\tan \theta = \sqrt{3} \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} \quad (3)$$

لذا فان قراءتين متساويتين للواطميتين يعينان أن عامل القدرة واحد للحمل . أما القراءتان المتعاكستان فتعنيان أن الحمل مفاعلي نقبي . وإذا كانت P_2 أكبر من P_1 (جبرياً) فان ذلك يعني أن الممانعة حثية كما تعني قراءة P_2 أقل من P_1 أن الحمل سعوي . ولكن كيف يمكن أن نعرف أي من الواطميتين يقرأ P_1 وأيها يقرأ P_2 ؟ وصحيح أن P_1 في الخط A و P_2 في الخط C كما أن قوى النظام الموجب الترتيب الطوري تجعل V_{an} تتخلف عن V_{cn} . هذه المعلومات كافية للتفريق بين الواطميتين الا انها محيرة عند تطبيقها عملياً . وحتى إذا لم نستطيع التفريق بين الاثنين فاننا نعلم اتساع زاوية الطور ولكن دون معرفة إشارتها . وهذه غالباً ماتكون معلومات كافية . فاذا كان الحمل محركاً حثياً فأن إشارة الزاوية يجب أن تكون موجبة فليس هناك حاجة لأجراء اختبار لمعرفة قراءة أي منهما . وإذا لم تكن هناك معرفة مسبقه للحمل فأن هناك عدة طرق لحل هذا الاشكال . ربما تكون أبسط طريقة بإضافة حمل ذي ممانعة عالية مفاعلية مثلاً متسعة ذات ثلاثة أطوار عبر الحمل المجهول . لذا فالحمل يجب أن يصبح أكثر سعوية . لذا فأنه اذا نقص مقدار ظل الزاوية $\tan \theta$ (أو مقداراً الزاوية θ) فأن الحمل حثي بينما إذا زاد مقدار ظل الزاوية $\tan \theta$ فيعني ذلك أن الممانعة سعوية .

لنفرض أن أحد المقياسين قرأ 30 واط بينما قرأ الآخر 100 واط . وحيث أننا فرضنا حملاً غير فعال فأن إشارة القراءة الكبرى يجب أن تكون موجبة بينما يجب أن نجد إشارة القراءة الصغرى بالتمعن في موقع طرفي الملف المؤشر (+) . لنفرض أننا وجدنا أن ذلك يمثل قدرة سالبة . لذا فأن P_1 ان تكون 30 - أو 100 وان P_2 اما 100 أو 30 - . لذا فان قيمة $\tan \theta$ اما 3.22 أو 3.22 - وزاوية وعامل القدرة أما 72.7° أو 72.7° - . وبعد ذلك تضع ثلاث متسعات عبر الحمل في ترتيب متزن نجد أن القراءة التي كانت 30 - واط اصبحت 27 - واط بينما القراءة التي كانت 100 واط اصبحت 97 واط . وبقيت القدرة الكلية 70 واط . وحيث أنه لم تتغير أي من القراءتين بصورة محسوسة فاننا نرى أن المتسعات لها ممانعات عالية لحد أنها لم تسبب الا بتغير طفيف ثم نحسب زاوية الطور الجديدة لتكون أما 71.9° أو 71.9° - . ان الحمل يجب أن تكون أكثر سعوية مما كان سابقاً ومن ثم فان الاستنتاج الوحيد الذي يمكن الوصول اليه أن زاوية الطور الاصلية كانت 72.7° فاصبحت 71.9° .

تمارين

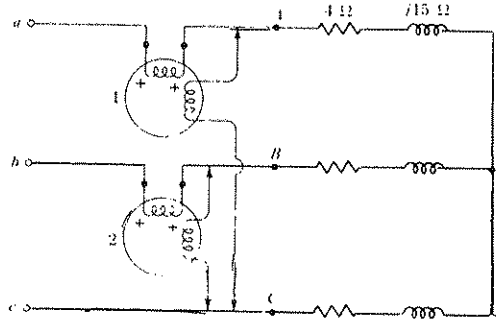
10 - 12 لنفرض أن أحمال الشكل 22 - 12 كانت $Z_c = Z_b^* = 2Z_a = 50 \angle 60^\circ \Omega$. وكانت $V_{ab} = 600 \angle 0^\circ \text{ V}$ ج . م . ت . بترتيب موجب للأطوار وكانت x تقع عند C .

أوجد (أ) P_i (ب) P_{ii} (ج) P_c

الجواب $0; 0; 7.2 \text{ kW}$

11 - 12 الحمل المتزن المبين في الشكل 24 - 12 مغذى من نظام ذي ثلاثة أطوار فيه $V_{abc} = 230 \angle 0^\circ \text{ V}$ ج . م . ت . ويتسلسل موجب للأطوار . أوجد قراءة كل من الواطميترين والقدرة الكلية المسحوبة من الحمل

الجواب $W: 1389; 878$ (مكبوسة) 511



الشكل 24 - 12 انظر التمرين 11 - 12

12 - 12 حمل ذو ثلاث أطوار متزن يغذي ممانعة سعوية متزنة بواسطة فولتية خط مقدار ج . م . ت لها 440 فولت . إذا استخدمت طريقة الواطميترين لقياس القدرة الكلية فقرأ 1200 واط و 400 واط (دون انعكاس) . أوجد Z_{ii} إذا كان الحمل (أ) بربط Δ (ب) Y

الجواب $\Omega: 274 \angle -40.9^\circ; 91.5 \angle -40.9^\circ$

مسائل

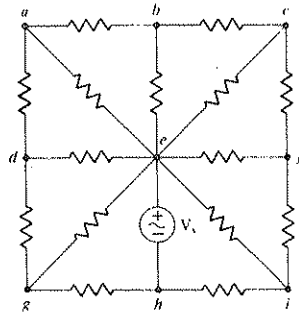
1 □ إذا كانت $V_{ab} = 80 \angle 130^\circ \text{ V}$, $V_{bc} = 160 \angle -50^\circ \text{ V}$, $V_{ca} = 100 \angle 20^\circ \text{ V}$

أوجد (أ) V_{bc} (ب) V_{ca} (ج) V_{ab}/V_{bc}

2 بعض قيم التيارات في الشكل 25 - 12 هي: $I_{bc} = -13 \text{ A}$, $I_{ac} = -6 \text{ A}$, $I_{bc} = 8 \text{ A}$

$I_{ca} = 3 \text{ A}$, $I_{ab} = 5 \text{ A}$, $I_{ba} = 16 \text{ A}$, $I_{ca} = 8 \text{ A}$,

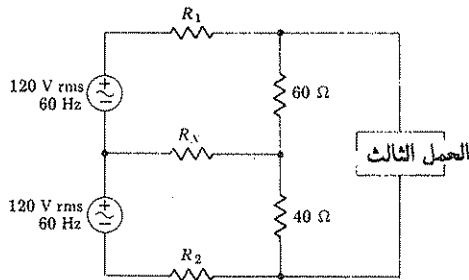
أوجد I_{bc} و I_{ca} و I_{ab} .



الشكل 25 - 12 أنظر المسألة 2

3 أوجد القدرة المجهزة من كل مصدر والتيار في خط التعادل للدائرة المبينة في الشكل 26 - 12 إذا كان الحمل 3 هو مقاوم ذي $30\text{-}\Omega$ و (أ)

$R_X = 3 \Omega$ و (ب) $R_1 = R_2 = R_X = 0$



الشكل 26 - 12 أنظر المسألتين 3 و 4

□ 4 أوجد القدرة المجهزة من كل مصدر والتيار في خط التعادل للدائرة المبينة في الشكل 12 - 26 إذا احتوى الحمل 3 على $30\text{-}\Omega$ على التوالي مع محث 60-mH و (أ) $R_1 = R_2 = R_N = 0$ (ب) $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$ و $R_N = 3\ \Omega$.
 5 دائرة ذات ثلاثة أسلاك وبطور واحد $120/240\text{-V rms}$ تحتوي على حمل ب 120-V مقداره 3 kW بعامل قدرة 0.8 متخلف و 4 kW بعامل قدرة 0.9 سابق بينما حمل الفولتية 240-V مقداره 5 kVA بعامل قدرة 0.75 متخلف .
 بفرض أن المقاومة صفر لكل الأسلاك أوجد كلاً من تيارات الخطوط والتيار خط التعادل

6 دائرة ذات طور واحد بثلاثة أسلاك فيها الحملان $5 + j10\ \Omega$ و $8 - j3\ \Omega$ مربوطان بين الخط A وخط التعادل والخط B وخط التعادل على الترتيب . على فرض أن مقاومة الأسلاك صفر . مامقدار الحمل مربوط مباشرة بين الخط A والخط B لينتج ان V_{an} تجهز قدرة مقدارها نصف القدرة المجهزة من V_{bn} ؟

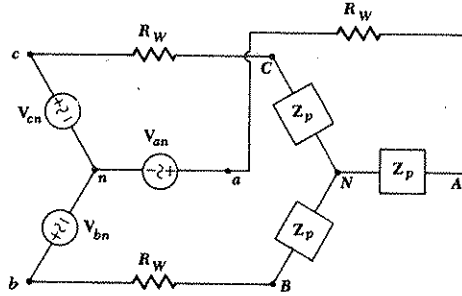
□ 7 نظام ذو ثلاثة اطوار بأربعة أسلاك يحتوي على حمل غير متزن $Z_{AN} = 10 + j10\ \Omega$ و $Z_{BN} = 3 - j12\ \Omega$ و $Z_{CN} = 7.5 + j10\ \Omega$. أوجد تيارات الخطوط الثلاثة والتيار التعادل والقدرة المجهزة الى الحمل اذا كان $V_{an} = 250\angle 0^\circ\text{ V rms}$ وكان ترتيب الأطوار موجباً

8 نظام ذو ثلاثة أطوار بثلاثة أسلاك يحوي حملاً نجمياً متزناً فيه $50\ \mu\text{F}$ و 120 mH و $45\ \Omega$ على التوالي بين كل خط ونقطة التعادل . على فرض أن ترتيب الاطوار موجب وأن $V_{n} = 135\text{ V rms}$ بتردد 60 Hz . أوجد تيار الخط والقدرة الكلية المسحوبة من الحمل وعامل قدرة الحمل .

9 للدائرة المتزنة المبينة في الشكل 12 - 27 افرض أن $V_{an} = 40\angle 0^\circ\text{ V}$ وعلى فرض أن ترتيب الأطوار موجب . أوجد قيمة ج . م . ت . لتيار الخط والقدرة الكلية المجهزة إلى الحمل إذا كانت $Z_n = 50 + j20\ \Omega$ و $R_w = 3\ \Omega$ (أ) $10\ \Omega$ (ب)

□ 10 بالرجوع الى الدائرة المبينة في الشكل 12 - 27 افرض أن $V_{an} = 12,000\angle 0^\circ\text{ V rms}$ وافرض أن ترتيب الاطوار موجب . يجهز المصدر المتزن

1 MW و 0.2 MVAR . إذا كانت $R_w = 12 \Omega$ أوجد (أ) ج . م . ت . لتيار الخط (ب) Z_p (ج) كفاءة النقل .



الشكل 27 - 12 أنظر المسائل 9 إلى 11

11 كل حمل في الشكل 27 - 12 يحتوي على ممانعة حثية مقدارها $100/28^\circ \Omega$ على التوازي مع متسعة $0.5-\mu F$ و $R_w = 4 \Omega$. باستخدام الترتيب الموجب للأطوار $V_{ab} = 24/0^\circ \text{ V rms}$ عند $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ أوجد قيمة ج . م . ت لتيار الخط والقدرة الكلية المجهزة للحمل والقدرة المفقودة في الأسلاك .

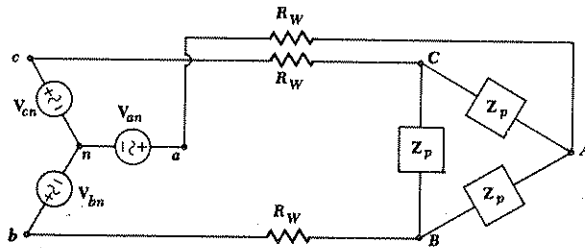
12 نظام متزن ثلاثي الأطوار مع حمل مربوط بشكل Δ فيه $10 + j4 \Omega$ في كل طور يجزء من مصدر فيه $V_L = 250 \text{ V rms}$ (أ) أوجد ج . م . ت لتيار الخط والقدرة الكلية المسحوبة من الحمل (ب) مامقدار أصغر قيمة يمكن تقليل تيار الخط إليها بربط مفاعلات سعوية متساوية عبر كل طور (ج) ما حجم المتسعة التي يجب أن تستخدم عند تردد 60 Hz . (د) إذا وضعت المتسعات في مواقعها . مامقدار القدرة الكلية المجهزة الى الحمل ؟

□ 13 مصدر ثلاثي الأطوار متزن بفولتية 230-V يجزء 6 kVA ، بعامل قدرة 0.83 الى حملين مربوطين بشكل Δ على التوازي . أحدهما مقاومي تقي يسحب 2 kW . أوجد ممانعة الطور للحمل الثاني .

14 قيم المتغيرات الوسيطة للنظام المتزن الثلاثي الأطوار المبين في الشكل 28 - 12 هي $V_{AB} = 200/0^\circ \text{ V rms}$ و $R_w = 0.5 \Omega$ على فرض ترتيب موجب

للأطوار وأن Z_n تحتوي على 20Ω على التوازي مع مفاعلة حثية مقدارها 50Ω .
أوجد القدرة الكلية للمجهزة من المصدر وعامل القدرة الذي تعمل عنده واحسب كفاءة النقل.

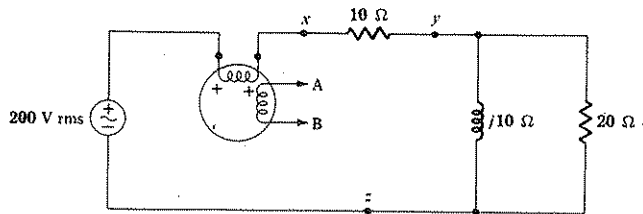
15 حمل الدلتا المبين في الشكل 28 - 12 يسحب 1800 واط بعامل قدرة متخلف مقداره $\sqrt{2}/2$ وتفقد $240 W$ في مقاومة السلك $R_w = 5 \Omega$. أوجد قيمة ج. م. ت لفولتية طور المصدر و ج. م. ت. لتيار طور الحمل.



الشكل 28 - 12 انظر المسألتين 14 و 15

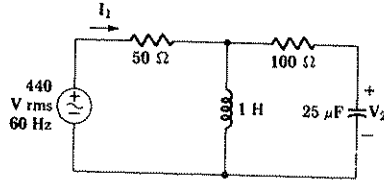
□ 16 نظام ثلاثي الأطوار متزن فولتية طوره $230-V$ rms يحوي حملاً مربوطاً بشكل Δ فيه $12 + j3 \Omega$ لكل طور وحمل مربوط بشكل Y فيه $5 + j1 \Omega$ لكل طور.

17 أوجد تيار الخط والقدرة المسحوبة من الحمل المشترك وعامل قدرة الحمل. أوجد قراءة الواطميتر (مبيناً اذا كانت الأطراف يجب أن تعكس للحصول على القراءة) في الشكل 29 - 12 اذا ربطت الأطراف A و B على الترتيب (أ) x و z (ب) x و y (ج) y و z



الشكل 29 - 12 انظر المسألة 17

18 ربط واطميتر الدائرة المبينة في الشكل 30 - 12 بحيث دخل الطرف I₁ الطرف الموجب لملف التيار بينما V₂ هي الفولتية عبر ملف الجهد، أوجد قراءة الواطميتر.



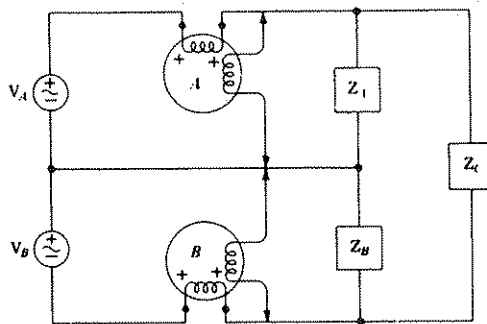
الشكل 30 - 12 انظر المسألة 18

19 □ (أ) أوجد قراءتي الواطميترين في الشكل 31 - 12 إذا كانت $V_A = 100/0^\circ$ V rms و $V_B = 50/90^\circ$ V rms و $Z_A = 10 - j10 \Omega$ و

$$Z_C = 30 + j10 \Omega \text{ و } Z_B = 8 + j6 \Omega$$

(ب) هل إن مجموع هاتين القراءتين يساوي القدرة الكلية المسحوبة من الأحمال الثلاثة؟

(ج) هل إن جواب (ب) صحيح لاحمال عامة ومصادر عامة (تعمل عند التردد نفسه)؟

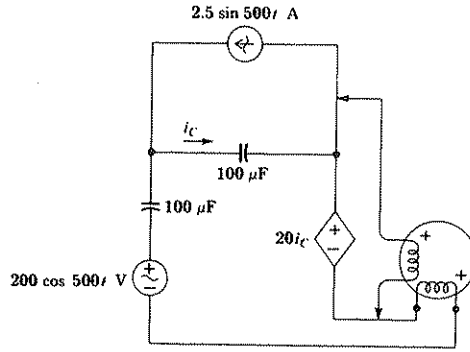


الشكل 31 - 12 انظر المسألة 19

20 أوجد قراءة الواطميتر في الشكل 32 - 12

21 قيم دائرة الشكل 33 - 12 هي $V_{bc} = 200\angle 120^\circ$ و $V_{cb} = 200\angle 0^\circ$ و $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 50\angle -60^\circ \Omega$ و $Z_A = Z_B = Z_C = 25\angle 30^\circ \Omega$ و $V_{ca} = 200\angle 240^\circ$ V rms.

(أ) أوجد قراءة كل واطميتر (ب) اذا ربطت كل الأطراف السالبة لملفات الجهد الى النقطة ماتكون القراءات الثلاث ؟ .



الشكل 32 - 12 انظر المسألة 21

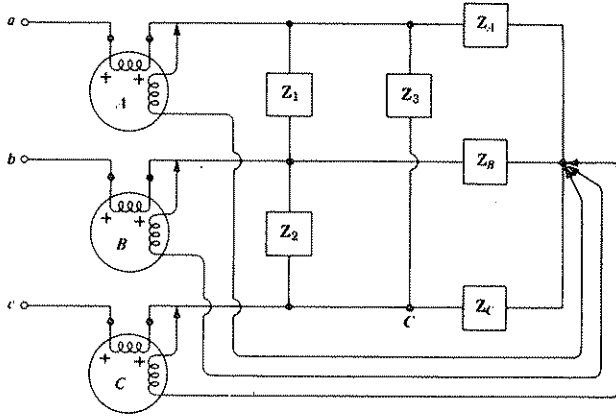
□ 22 ثلاثة واطميترات مثالية مرتبة حسب مامبين في الشكل 22 - 12 افرض $V_{AB} = 125\angle 0^\circ$ V rms وان ترتيب الأطوار موجب . كل طور يحوي على مقاوم 24Ω على التوالي مع مفاعلة سعوية مقدارها 7Ω بينما المتسعات الثلاث لها عقدة واحدة عند N . افرض أن النقطة تقع بين المقاوم والمتسعة في الطور A ، قراءة كل واطميتر .

23 قيم دائرة الشكل 22 - 12 هي $V_{AB} = 240\angle 0^\circ$ و $V_{BC} = 240\angle -120^\circ$ و $V_{CA} = 240\angle 120^\circ$ V rms فيها $Z_A = 120 \Omega$ و $Z_B = 240 \Omega$ و $Z_C = -j240 \Omega$

أوجد قراءة كل واطميتر مبنياً اذا كان ملف الجهد يجب أن يعكس للحصول على القراءة وذلك اذا وضعت النقطة x (أ) عند N (ب) عند A

24 □ استخدم واظميتران كما هو مبين في الشكل 23 - 12 لقياس القدرة . أوجد القدرة الكلية وعامل القدرة وممانعة كل طور من أطوار Δ ، اذا كانت فولتية الخط 120 V rms و (أ) $P_1 = -500$ W و $P_2 = 1300$ W (ب) $P_1 = 1300$ W و $P_2 = -500$ W

25 استخدم واظميترين لقياس القدرة الكلية المسحوبة من حمل ثلاثي الاطوار متزن بـ 230-V فادى ذلك الى قراءة 600 و 1000 واط (أ) اذا فرضنا أن الحمل حثي مامقدار القدرة الكلية والممانعة لكل طور؟ (ب) أدى ربط ثلاث متسعات صغيرة عبر الاطوار الى أن أصبحت القراءتين 570 و 1030 واط . بين فيما اذا كان الحمل حثياً أم لا ؟



الشكل 33 - 12 انظر المسألة 21

الجزء الرابع

التردد المركب

COMPLEX FREQUENCY

الفصل الثالث عشر

التردد المركب

COMPLEX FREQUENCY

1 - 13 مقدمة INTRODUCTION

نحن الان مقبلون على البدء بالجزء الرئيسي الرابع من دراستنا لتحليل الشبكات ، الا وهو مناقشة لمفهوم التردد المركب . وسندرس ذلك كمفهوم موحد واضح وسيمكنا ذلك من ربط كل طرق التحليلات السابقة مع بعضها بطريقة دقيقة تربط هذه التحليلات مع بعضها البعض .

فتحليل الدوائر المقاومة وتحليل الحالة المستقره الجيبية والتحليل الزائل ، والاستجابة المرغمة والأستجابة الكاملة وتحليل الدوائر المغذاة بدوال مرغمة أسية ودوال مرغمة جيبية متضائلة أسياً كلها ستكون حالات خاصة من الأساليب العامة والتي ترافق مفهوم التردد المركب .

سوف نقدم مفهوم التردد المركب بدراسة دالة جيبية متضائلة أسياً كالفولتية

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos (\omega t + \theta) \quad (1)$$

والتي فيها σ (سكما) هي كمية حقيقية سالبة عادة . وعلى الرغم من اشارتنا الى هذه الدالة على أنها متضائلة ولكن من الممكن ان يزداد الاتساع الجيبي لها اذا كانت σ موجبة الا ان الحالة الأكثر عملياً هي حالة الدالة المتضائلة . وتؤكد خبرتنا مع الاستجابة الطبيعية لدائرة الـ RLC الى ان σ هي معامل أسى متضائل . ويمكننا تكوين فولتية ثابتة من المعادلة (1) اذا كان كل σ و ω يساوي صفراً .

$$v(t) = V_m \cos \theta = V_0 \quad (2)$$

عندما تكون σ تساوي صفرأ فقط فاننا نحصل على فولتية عامة جيبية

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (3)$$

اما اذا كانت ω صفرأ ، فيسكون لدينا الفولتية الاسية .

$$v(t) = V_m \cos \theta e^{\sigma t} = V_0 e^{\sigma t} \quad (4)$$

ولذلك فان الموجة الجيبية المتضائلة (1) تحوي الحالات الخاصة كالدالة المستمرة (2) والدالة الجيبية (3) والدالة الأسية

وان بعض مدلولات سكما σ يمكن ان نحصل عليها بمقارنة الدالة الأسية (4) مع التمثيل المركب بموجة جيبية والتي لكل منها زاوية طورية مقدارها صفر .

$$v(t) = V_0 e^{j\omega t} \quad (5)$$

يتبين أن كلا من الدالتين (4) و (5) لهما أشياء مشتركة كثيرة . واختلافهما هو في ظهور مقدار أسّي حقيقي ومقدار أسّي خيالي . وتؤكد من أوجه التشابه بين هاتين الدالتين بالنظر الى σ كتردد . إن اختيار هذا الاصطلاح سوف يناقش بالتفصيل في الفقرات القادمة . ولكننا الآن بحاجة لتسمية σ بالجزء الحقيقي من التردد المركب . ولكن يجب أن لا يسمى « التردد الحقيقي » وعلى كل حال فإن هذا الحد هو أنسب (أو بحرية أكثر لـ ω) . كما سوف نسمي أيضاً σ تردد النيبر neper . وهذا الاسم يظهر من أس الحرف e العديم الوحدة فللكمية $e^{\sigma t}$ وحدة الأس $2t$ هي النيبر neper ، و 2 هي تردد النيبر ذى وحدة نيبر لكل ثانية . والنيبر بحد ذاته قد سمي على أسم العالم Napier ونظامه اللوغارتمي النيبري وتهجئة هذا الاسم غير أكيدة تاريخياً . دعنا الآن نفكر بدالة مرغمة أو مصدر له موجة جيبية متضائلة أو موجة أسية . وفي الماضي البعيد عندما كانت σ أصغر من 0 . كان اتساع الدالة المرغمة ذا قيم كبيرة . وذلك لأعتبارنا الاستجابة المرغمة هي الاستجابة الناتجة عن الدالة المرغمة والمسلطة حينما يساوي الزمن t ناقص ما لانهاية . وتسلط هذه الدالة عند أزمنة محددة يعطى زيادة لاستجابة الانتقال بالاضافة الى الاستجابة المرغمة . وان الأتساع اللانهائي للدالة المرغمة عند $t = \infty$ يجعلنا نشعر بعدم الارتياح . ولكن من الممكن تحديد الظروف الابتدائية لأي دائرة بحيث يكون عند تسليط دالة مرغمة معينة في لحظة تنتج استجابة المرغمة بدون أي استجابة متلاشية كما ستظهر امثلة على هذه الحالة فيما بعد من ناحية عملية ونعلم أنه ليس من الممكن توليد دالة مرغمة جيبية متضائلة أو دالة مرغمة أسية صحيحة لكل الازمنة في

المختبر . ولكن من الممكن توليد دالة تقريبية يمكن أن تفي بالفرض للدوائر التي استجابتها الانتقالية لاتستمر طويلاً .

وان الاستجابة المرغمة لدالة مرغمة عامة من النوع المبين في المعادلة (١) يمكن ايجادها بسهولة باستعمال طريقة مشابهة تقريبا لتلك التي استعملت للدالة . الجيبية المرغمة ، ويتبين أن الاستجابة المرغمة الناتجة هي استجابة فولتية مستمرة وفولتية أسية وفولتية جيبية . والآن دعنا نر كيف سنعتبر σ و ω الجزءين الحقيقي والخيالي من التردد المركب .

2 - 13 التردد المركب COMPLEX FREQUENCY

دعنا نتزود بتعريف رياضي للتردد المركب ثم نتدرج الى التعليل الفيزياوي مع تقدمنا في الفصل . وان أي دالة يمكن أن تكتب بالصيغة

$$f(t) = Ke^{st} \quad (6)$$

حيث K و s هما ثابتان مركبان (غير معتمدين على الزمن) ، موصوفان بالتردد المركب s . وبسهولة فان التردد المركب s هو المعامل المضروب بـ t في هذا التمثيل المركب . لايجاد التردد المركب بدون تحليل ، ومن الضروري كتابة الدالة كما في الصيغة (6) .

لنطبق هذا التعريف أولاً على الدالات المعروفة لدينا . وكمثال لفولتية ثابتة :

$$v(t) = V_0$$

حيث يمكن كتابتها بالصيغة

$$v(t) = V_0 e^{0t}$$

ولهذا فالتردد المركب لفولتية تيار مستمر او لتيار مستمر هو صفر . أي أن s تساوي صفرأ . والحالة السهلة التالية هي الدالية الأسية .

$$v(t) = V_0 e^{\sigma t}$$

والتي هي اصلاً بالصيغة المطلوبة . إذن فالتردد المركب لهذه الفولتية هو $s = \sigma + j0$ وأخيراً لناخذ فولتية جيبية ، والتي تثير بعض التعجب

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

انه من الضروري ايجاد تعبير مكافئ بدلالة التردد المركب . ومن تجربتنا السابقة . يمكن استعمال المتطابقة المشتقة من قاعدة أويلر Euler

$$\cos(\omega t + \theta) = \frac{1}{2}(e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)})$$

ونحصل على

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2}V_m(e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}) \\ &= (\frac{1}{2}V_m e^{j\theta})e^{j\omega t} + (\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta})e^{-j\omega t} \\ v(t) &= K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \end{aligned}$$

أو

ولدينا الآن مجموع مقدارين أسيين مركبين ، ولذلك يجب ان يظهر ترددان مركبان لكل حد ، التردد المركب للمقدار الأول s يساوي s_1 ويساوي $j\omega$ وللمقدار الثاني التردد s يساوي s_2 ويساوي $-j\omega$. قيمتا s هاتين مترافقتان ، او ان s_2 تساوي s_1^* وكذلك قيمتا K مترافقتان K_1 يساوي $\frac{1}{2}V_m e^{j\theta}$ و K_2 يساوي $\frac{1}{2}V_m e^{-j\theta}$ وكذلك فالثابت الكلي الاول هو المرافق للثابت الكلي الثاني . وهذا ما نتوقعه لكون مجموعهما يجب أن يكون قيمة حقيقية .

لنجد قيمة التردد المركب بل القيم العائدة للدالة الجيبية الأسية المتضائلة (١) باستعمال قاعدة أويلر للحصول على تمثيل أسى مركب :

$$\begin{aligned} v(t) &= V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \\ &= \frac{1}{2}V_m e^{\sigma t} (e^{j(\omega t + \theta)} + e^{-j(\omega t + \theta)}) \end{aligned}$$

ولذلك

$$v(t) = \frac{1}{2}V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t} + \frac{1}{2}V_m e^{-j\theta} e^{(\sigma - j\omega)t}$$

سنجد مرة أخرى أننا بحاجة الى زوج مترافق من الترددات المركبة لتمثيل الدالة الجيبية الأسية المتضائلة $s_2 = s_1^* = \sigma - j\omega$ $s_1 = \sigma + j\omega$ حيث أن كلا من σ و ω لا يساوي صفراً بصورة عامة ، والحالة العامة هي الموجة الجيبية أسية التغير أما الموجات المستمرة والجيبية والأسية فهي حالات خاصة وك توضيح رقمي ، يطلب معرفة الترددات المركبة للفولتيات الآتية

$$\begin{aligned} v(t) &= 100 & s &= 0 \\ v(t) &= 5e^{-2t} & s &= -2 + j0 \\ v(t) &= 2 \sin 500t & \begin{cases} s_1 = j500 \\ s_2 = s_1^* = -j500 \end{cases} \\ v(t) &= 4e^{-3t} \sin(6t + 10^\circ) & \begin{cases} s_1 = -3 + j6 \\ s_2 = s_1^* = -3 - j6 \end{cases} \end{aligned}$$

وكمثال آخر فانه من الممكن تعيين الدالات من الترددات المركبة العائدة لها . فعندما $s = 0$ ، فان هذا التردد يعني دالة تيار مستمر وهي حالة خاصة أما بالنسبة للدالة المعرفة بالصيغة (6) ، فان الثابت K يجب أن يكون حقيقياً اذا كانت الدالة حقيقية .

لنعتبر الآن بعض القيم الحقيقية لـ s . فمثلاً القيمة الحقيقية الموجبة $s = 5 + j0$ تعني دالة أسية متزايدة Ke^{st} . ولكي يكون لدينا دالة ملموسة يجب أن تكون K حقيقية.

والقيمة الحقيقية السالبة $s = -5 + j0$. تعود الى دالة أسية تناقصية Ke^{-st} والصيغة الدالية $s = j10$ هي Ke^{j10t} والتي تظهر كلاً من الجزء الحقيقي والخيالي، وكل قسم منها ذو طبيعة جيبية. ولأجل بناء دالة حقيقية، من الضروري اعتبار قيم مترافقة لـ s ، مثل $s_{1,2} = \pm j10$ ، حيث تكون هناك قيم مترافقة K أيضاً. وعندما نتحدث بحرية أكثر يمكننا أن نصف أحد الترددات المركبة $s_1 = j10$ أو $s_2 = -j10$ على أنه يعود الى فولتية جيبية ذات تردد منتظم مقداره 10 rad/s . الاتساع وزاوية الطور لهذه الفولتية الجيبية يعتمدان على اختيار K لكل من الترددين. ولذلك باختيار $s_1 = j10$ و $K_1 = 6 - j8$ علماً بأنه $s_2 = s_1^*$ و $K_2 = K_1^*$ نحصل على الدالة الجيبية الحقيقية $20 \cos(10t - 53.1^\circ)$ وبالطريقة نفسها يمكن أن تشير $s = 3 - j5$ الى كمية حقيقية فقط اذا رافقت الكمية $s = 3 + j5$. وبحرية أكثر يمكن اعتبار كلاً من هذين الترددين المترافقين يصفان دالة جيبية أسية متزايدة $e^{st} \cos 5t$. الاتساع والزاوية الطورية سيكونان أيضاً معتمدين على القيم المترافقة للثالث $K's$.

والآن من المفروض اننا قد أدركنا الطبيعة الفيزيائية للتردد المركب s والتي تصف دالة جيبية متغيرة أسياً بصورة عامة. الجزء الحقيقي من s يشير الى التغير الأسي، فاذا كان سالباً فالدالة تتناقص كلما ازدادت t . أما اذا كان موجباً، فالدالة تزداد وعندما يكون صفراً فان الاتساع الجيبي يكون ثابتاً. والقيمة الأكبر للجزء الحقيقي من s تعطي معدلاً أكبر للزيادة أو النقصان الأسي. الجزء الخيالي من s يوضح التغييرات الجيبية، وبالتخصيص التردد نصف القطري. حيث أن قيمة كبيرة للجزء الخيالي من s تشير الى دالة سريعة التغير مع الزمن. ولذلك فان قيمة كبيرة للجزء الحقيقي أو الجزء الخيالي أو القيمة المطلقة لـ s تشير الى دالة سريعة التغير.

ويدعى الجزء الحقيقي من s عادة σ والجزء الخيالي ω (وليس ω) .

$$s = \sigma + j\omega \quad (7)$$

يطلق في بعض الأحيان على التردد نصف القطري « تردد حقيقي » ولكن هذا

الاصطلاح يمكن أن يكون مربكاً حيث انه يجب أن نقول ان التردد الحقيقي هو الجزء الخيالي من التردد المركب ! ولكي نكون دقيقين نسسمي σ بالتردد النيبيري و ω بالتردد نصف القطري و f بالتردد الدوري وعندما لا يكون هناك مجال للاختلاط ، من الممكن استعمال « التردد » لكي يرمز لأي من هذه الترددات الاربعة . والتردد النيبيري يقاس بالنيبير لكل ثانية . والتردد نصف القطري يقاس بزاوية نصف قطرية لكل ثانية والتردد المركب s يقاس بوحدات تسمى النيبير المركب ثانية أو زاوية نصف قطرية مركبة لكل ثانية

تمرينان

1 - 13 اعط كل الترددات المركبة والموجودة في التيار

$$i(t) = 2e^{-100t}(1 - 0.1 \cos 50t) \text{ (أ)}$$

$$i(t) = 2 - 0.2e^{-100t} \sin(50t - 10^\circ) \text{ (ج)} \quad i(t) = 2e^{-100t} - 0.2 \cos 50t \text{ (ب)}$$

$$\text{الجواب} \quad -10, j50, -j50, -10, -10 + j50, -10 - j50, \\ 0, -10 + j50, -10 - j50 \text{ } s^{-1}$$

2 - 13 أكتب صيغة عامة للدالة الحقيقية والتي تحوي عناصر في الترددات

المركبة الآتية

$$\text{ (أ) } 0, -5 \quad \text{ (ب) } -5, -5 - j10, j10 \quad \text{ (ج) } -5 + j10, 5 - j10$$

$$\text{الجواب} \quad A + Be^{-5t}; Ae^{-5t} \cos(10t + \phi) + Be^{5t} \cos(10t + \theta); \\ Ae^{-5t} + B \cos(10t + \phi) + Ce^{-5t} \cos(10t + \theta)$$

3 - 13 الدالة المرغمة الجيبية المتضائلة

THE DAMPED SINUSOIDAL FORCING FUNCTION

لقد تكلمنا مافيه الكفاية عن تعريف التردد المركب . والآن حان الوقت لكي نضعه موضع التطبيق وتتعرف على الدالة الجيبية العامة المتغيرة أسياً والتي من الممكن أخذها كقولتية وباستخدام

$$v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \quad (8)$$

متطابقة يولير المستعملة سابقاً للتعبير عن هذه الدالة بدلالة التردد المركب

$$v(t) = \text{Re}(V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}) \quad (9)$$

$$v(t) = \text{Re}(V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}) \quad (10)$$

وان كلا من التعبيرين مناسب . وهذان التعبيران يشيران الى وجود زوج من الترددات المركبة للدالة الجيبية أو الدالة الجيبية أسية التضاؤل . والدالة الجيبية المتضائلة المعطاة بالمعادلة (9) يجب أن نحصر اهتمامنا مبدئياً بها . وجمع المعادلات نحصل على

$$v(t) = \text{Re} (V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t})$$

والان نعوض عن قيمة s بـ $\sigma + j\omega$ ونحصل على

$$v(t) = \text{Re} (V_m e^{j\theta} e^{st}) \quad (11)$$

قبل تسليط دالة مرغمة بهذه الصيغة على أي دائرة . يجب ملاحظة تشابه التعبير الأخير للدالة الجيبية المتضائلة مع التعبير ذي العلاقة للدالة الجيبية غير المتضائلة ،

$$\text{Re} (V_m e^{j\theta} e^{j\omega t})$$

حيث انه لدينا الآن s بينما كان لدينا سابقاً $j\omega$. وبدلاً من تعقيد أنفسنا فقد وسعنا التمثيل لكي يحوي على الدالة المرغمة الجيبية المتضائلة بدلالة التردد المركب . ويجب أن لانتعجب أبداً اذا رأينا في هذه الفقرة أو في الفقرات القادمة بعض التطور لوصف مجال التردد للدالة الجيبية أسية التضاؤل بالطريقة التي استعملت للدالة الجيبية نفسها حيث سنحذف التوصيف Re ونختصر e^{st} .

ونحن الآن مستعدون لتطبيق الدالة الجيبية أسية التضاؤل والمعطاة بالمعادلات (8) و (9) و (10) او (11) على شبكة كهربائية . لنفرض أن المطلوب هو الاستجابة المرغمة للتيار في احد فروع الشبكة . وبما ان الاستجابة المرغمة لها صيغة الدالة المرغمة وكذلك لها التكامل والتفاضل نفسه كما هي للدالة المرغمة . فالاستجابة يمكن ان تفرض كالآتي :

$$i(t) = I_m e^{st} \cos(\omega t + \phi) \quad \text{او}$$

$$i(t) = \text{Re} (I_m e^{j\theta} e^{st})$$

حيث التردد المركب للمصدر وللاستجابة يجب ان يكونا متطابقين يمكننا تسليط دالة مرغمة مركبة على شبكتنا هذه بعد تذكرنا بأن الجزء الحقيقي من الدالة المرغمة المركبة ينتج الجزء الحقيقي من الاستجابة ، والجزء الخيالي من الدالة المرغمة المركبة يسبب الجزء الخيالي من الاستجابة . والجزء الحقيقي من الاستجابة المركبة الناتجة هو الاستجابة المطلوبة

سنقوم بالعمل مع حذف التوصيف Re ، ولكن يجب ان نتبين بانه من الممكن أن تدخل في اي وقت أو بالأحرى يجب أن تدخل عندما نحتاج الى استجابة حيز الزمن لذا فعند تسليط الدالة المرغمة الحقيقية : $v(t) = \text{Re}(V_m e^{j\omega} e^{st})$ تكون الاستجابة المطلوبة بحيز الزمن هي الجزء الحقيقي من الاستجابة المرغمة الناتجة

$$i(t) = \text{Re}(I_m e^{j\phi} e^{st})$$

لحل مسالتنا هذه في تحليل الدائرة يجب ايجاد كل من المجهولين : اتساع الاستجابة I_m وزاوية الطور ϕ .

كنا في السابق عند تحليل مسألة مانجري التفاصيل بالطريقة التي كانت متبعة للتحليل الجيبي نفسها ، حيث من المفيد تبين الخطوات الاساسية . أولاً : في هذه المعادلات توصف الدائرة بمجموع من معادلات الدارة المعقدة التفاضلية التكاملية . ثم نعوض في هذه المعادلات كل الدالات المرغمة المعطاة في صيغ مركبة ، وكذلك الاستجابات المرغمة المفروضة في هذه المعادلات بصيغة مركبة أيضاً ونجري التكاملات والتفاضلات المعنية . وان كل حد في المعادلات يحوي على العامل e^{st} . ولذلك سنقسم المعادلات على هذا العامل أو نختصر e^{st} . بحيث يمكن ادخاله (أي العامل المختصر) وفي حالة احتياجنا الى اي استجابة للدالة في حيز الزمن . والآن بعد اختفاء التوصيف Re والعامل e^{st} فقد تحولت كل الفولتيات والتيارات من حيز الزمن الى حيز التردد وأصبحت المعادلات التفاضلية التكاملية معادلات جبرية ، والحل لهذه المعادلات يمكن ايجاده بسهولة كما لو كانت في الحالة الجيبية المستقرة . دعنا نوضح الطريقة الأساسية بمثال عددي . لنسلط الدالة المرغمة

$$v(t) = 60e^{-2t} \cos(4t + 10^\circ)$$

على دائرة RLC المتوالية المبينة في الشكل 13 - 13 حيث الاستجابة المرغمة هي المطلوبة

$$i(t) = I_m e^{-2t} \cos(4t + \phi)$$

أولاً نوضح الدالة المرغمة بالتوصيف Re

$$v(t) = 60e^{-2t} \cos(4t + 10^\circ)$$

$$= \text{Re}(60e^{-2t} e^{j(4t + 10^\circ)})$$

$$= \text{Re}(60e^{j10^\circ} e^{t(-2 + j4)})$$

$$v(t) = \text{Re}(Ve^{st})$$

$$V = 60 \underline{10^\circ} \quad \text{and} \quad s = -2 + j4$$

بعد اهمال Re بقيت لدينا الدالة المرغمة المركبة

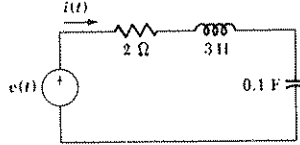
$$60 \underline{10^\circ} e^{st}$$

وبالطريقة نفسها نمثل الأستجابة المجهولة بالكمية المركبة

$$Ie^{st}$$

حيث

$$I = I_m / \phi$$



الشكل 1. 13 دائرة RLC المتوالية مسلط عليها دالة مرغمة جيبيية متضادة والمطلوب إيجاد $i(t)$ في حيز التردد .

بما أننا لحد الآن لم نوسع مفهوم الممانعة بدلالة جيبيية أسية المتضائل والتردد المركب . فالخطوة التالية هي تكوين المعادلة التفاضلية التكاملية للدائرة . ونحصل عليها من تطبيق قانون الفولتية لكروشوف .

$$\begin{aligned} v(t) &= Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \\ &= 2i + 3 \frac{di}{dt} + 10 \int i dt \end{aligned}$$

بعد تعويض الدالة المرغمة المركبة المعطاة والأستجابة المرغمة المركبة في هذه

$$60 \frac{10^\circ}{s} e^{st} = 2Ie^{st} + 3sIe^{st} + \frac{10}{s} Ie^{st} \quad \text{المعادلة}$$

وباختصار الحد المشترك أي e^{st}

$$60 \frac{10^\circ}{s} = 2I + 3sI + \frac{10}{s} I$$

$$I = \frac{60 \frac{10^\circ}{s}}{2 + 3s + 10/s}$$

من المفيد اختيار صيغة هذه المعادلة قبل حساب هذا التيار المركب .
 الجانب الأيسر من المعادلة يمثل تياراً ، والبسط من الجانب الأيمن هو فولتية ،
 لذلك فالمقام يجب أن تكون له وحدة الأوم ، والذي سيفرض بعد قليل كمانعة .
 وبالإضافة الى ذلك يمكننا أن نضمن ممانعة كل من هذه العناصر الثلاثة غير الفعالة
 بدلالة التردد المركب s . الممانعة للمقاوم $2-\Omega$ هي ببساطة 2 والممانعة للمحث $3-H$
 هي $3s$ او sL ، والممانعة للمتسعة $0.1-F$ هي $10/s$ او $1/sC$. هذه العبارات ستحقق
 في الفقرة القادمة .

لنعد الى مثالنا العددي ولنحاول إيجاد التيار I من المعادلة السابقة عندما

$$s = -2 + j4$$

$$I = \frac{60/10^\circ}{2 + 3(-2 + j4) + 10/(-2 + j4)}$$

بعد معالجة المقادير المركبة لعدة دقائق ، نحصل على

$$I = 5.37/-106.6^\circ$$

ولذلك I_m هي $5.37 A$ و ϕ هي -106.6° . والاستجابة المرغمة هي

$$i(t) = 5.37e^{-2t} \cos(4t - 106.6^\circ)$$

والآن يمكننا أن نبين بأن مفهوم الممانعة يمكن أن يوسع ليشمل التردد المركب .
 كما أن الحل لن يختلف عن الطريقة المستعملة للدوائر المقاومة النقية ما عدا ظهور
 أعداد مركبة .

تمرينان

3 - 13 اعط الصيغة الطورية للفولتية $v(t)$ اذا كانت تساوي (أ)
 $10e^{-5t} \cos(100t - 20^\circ)$ (ب) $10e^{-5t} \cos 20^\circ \cos 100t$ اذكر الدالة الزمنية العائدة لـ
 $v = 10/20^\circ$ اذا كانت s تساوي (ج) 0 ، (د) $-5 - j100$

$$V = 10/-20^\circ; V = 9.40/0^\circ; v(t) = 9.40;$$

$$v(t) = 10e^{-5t} \cos(100t + 20^\circ); v(t) = 9.40e^{-5t}$$

الجواب

4 - 13 اذا كان $I = 10/25^\circ A$ ، اوجد القيمة العددية للتيار عندما t تساوي 0.4 اذا
 كانت s تساوي (أ) 0 ، (ب) -5 ، (ج) $-5 + j2$ ، (د) $-5 - j2$

$$0.444; 1.227; 1.265; 9.06 A$$

الجواب

4 - 13 Y(s) و Z(s)

لتطبيق قانوني كرشوف مباشرة على الدالات المرغمة المركبة والاستجابات المرغمة المركبة من الضروري تعريف ثابت التناسب بين الفولتية المركبة عبر عنصر ما والتيار المركب المار خلاله . وثابت التناسب هذا هو الممانعة أو المسايمة للعنصر ، ويمكن تعيينه بسهولة بالنسبة للمقاوم والمحث والمتسعة . ولندرس المحث بصورة تفصيلية ثم نعكس النتائج على العناصر الاخرى . ولنفرض أن مصدرا للفولتية

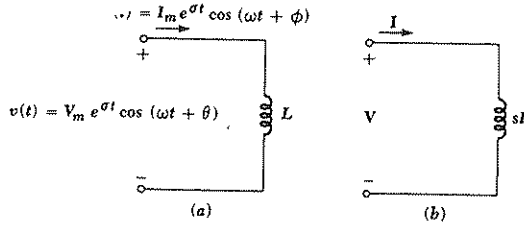
$$v(t) = V_m e^{j\omega t} \cos(\omega t + \theta)$$

قد سلط على محث L وكانت استجابة التيار بالصيغة

$$i(t) = I_m e^{j\omega t} \cos(\omega t + \phi)$$

في دائرة حيز الزمن وقد اشرت الأشارة غير الفعالة في الشكل 2 - 13 (أ) . وإذا مثلت الفولتية

$$v(t) = \text{Re} (V_m e^{j\theta} e^{st}) = \text{Re} (V e^{st})$$



الشكل 2 - 13 (أ) فولتية المحث في حيز الزمن والتيار مرتبطان $\dot{\psi} = L di/dt \Rightarrow \psi = sLI$ (ب) فولتية المحث في حيز التردد (المركب) والتيار مرتبطان $V = sLI$

والتيار

$$i(t) = \text{Re} (I_m e^{j\phi} e^{st}) = \text{Re} (I e^{st})$$

عند تعويض هذه التعابير في المعادلة المعرفة للمحث

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

نحصل على

$$\text{Re} (V e^{st}) = \text{Re} (sLI e^{st})$$

عند اهمال Re ، واعتماد الاستجابة المركبة كدالة مرغمة مركبة ، وكذلك اختصار

$$V = sLI$$

العامل e^{st}

النسبة بين الفولتية المركبة والتيار المركب تمثل الممانعة . وبما أنها تعتمد بصورة عامة على التردد المركب s فهذا الاعتماد الدالي يمكن أن يكتب

$$Z(s) = \frac{V}{I} = sL$$

وبالطريقة نفسها فإن مسابرة المحث L هي $Y(s) = \frac{1}{sL}$

ونسنستمر نطلق على V و I بطوريين . هاتان الكميتان المركبتان لهما اتساع وزاوية طور والتان بالاشتراك مع قيمة التردد المركبة يمكن بواسطتها وصف الموجة الجيبية أسية التغيير بصورة كاملة . والطوري مازال وصفاً في حيز التردد ولكن تطبيقه ليس مقتصراً على حقل الترددات نصف القطرية الشكل

2 - 13 (ب) ويبين المكافئ للشكل 13 - 2 أ لحيز التردد وقد استخدمت

تيارات طورية وفولتيات طورية وممانعات أو مسابرات .

وبدون الدخول في التفاصيل فالممانعة لمقاوم R وامتسعة C للتردد المركب s يمكن

ايجادها بالتتابع باستخدام الخطوات نفسها والنواتج لكل من المقاوم والمحث والامتسعة مبينة كالآتي

	R	L	C
$Z(s)$	R	sL	$\frac{1}{sC}$
$Y(s)$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{sL}$	sC

إذا عدنا لمثال الشكل 13-1 ، لدائرة RLC المتوالية في حيز التردد وفولتية المصدر

$$v(t) = 60e^{-2t} \cos(4t + 10^\circ)$$

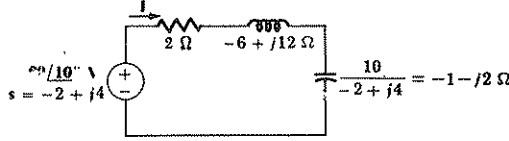
بتحويلها الى فولتية طورية

$$V = 60/10^\circ$$

فالتيار المجهول يمكن ايجاده بسهولة بتقسيم الفولتية الطورية على مجموع الممانعات الثلاثة بعد فرض تيار طوري I وايجاد الممانعة لكل عنصر للتردد المركب $s = -2 + j4$ ووضعها في مخطط حيز التردد كما هو معين في الشكل 13 - 13 .

$$I = \frac{60/10^\circ}{2 + (-6 + j12) + (-1 - j2)} = \frac{60/10^\circ}{-5 + j10} = 5.37/-106.6^\circ \text{ A}$$

وهكذا فقد حصلنا على النتيجة السابقة ولكن بسهولة وبسرعة أكثر.



الشكل 3 - 13 المكافئ في حيز التردد لدائرة RLC المتوالية المبينة في الشكل 1 - 13

انه من الصعوبة أن نقول بأن كل النظريات مثل التراكب وتحويل المصدر والثنائية ونظرية ثيفنن ونظرية نورتن والتي استعملت سابقاً لتبسيط التحليل لحيز التردد مازالت مفيدة ومن الممكن تطبيقها. وكمثال يمكن إيجاد مكافئ ثيفنن للشبكة المبينة في الشكل 4 - 13 (أ) كما يأتي:

التردد المركب هو

$$s = -5 + j10$$

وفولتية المصدر لحيز التردد هي

$$V_s = 100/0^\circ$$

وممانعة المحث هي

$$Z_L(s) = 4(-5 + j10) = -20 + j40$$

وممانعة المقاوم هي

$$Z_R(s) = 20$$

وممانعة ثيفنن هي مكافئ التوازي لـ Z_L و Z_R

$$Z_{Th} = \frac{20(-20 + j40)}{20 - 20 + j40} = 20 + j10$$

والفولتية للدائرة المفتوحة هي

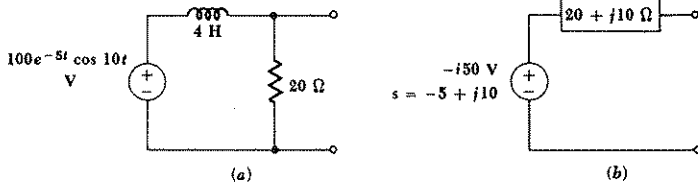
$$V_{oc} = 100/0^\circ \frac{20}{20 - 20 + j40} = -j50$$

ويبين الشكل 4 - 13 (ب) شبكة ثيفنن المكافئة لحيز التردد. وبعد تعيين

الاستجابة في حيز التردد يمكننا العودة الى حيز الزمن . عند وضع محث محاثته 4-H هنري عبر الدائرة المفتوحة فتيار حيز التردد .

$$I = \frac{-j50}{20 + j10 - 20 + j40} = -1$$

$$i(t) = -e^{-3t} \cos 10t$$

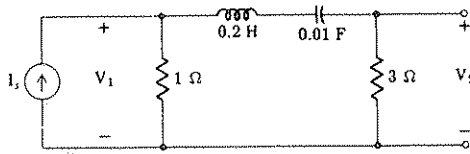


الشكل 13.4 (أ) الشبكة المطاة ذات نهايتان (ب) مكافئ تيفنن لحيز التردد

تمارين

13 - 5 دائرة الشكل 13 - 5 أوجد (أ) $V_1(s)$ ، (ب) $V_2(s)$

$$\frac{15sI_s}{s^2 + 20s + 500} ; \quad \frac{I_s(s^2 + 15s + 500)}{s^2 + 20s + 500} \text{ الجواب}$$



الشكل 13 - 5 انظر التمارين 13 - 5 الى 13 - 7

13 - 6 للجزء (ب) من التمرين 13 - 5 أوجد $V_2(s)$ عندما $I_s = 0.2/30^\circ$ A و s_0 تساوي (أ) 0 (ب) ∞ (ج) -10 (د) $-10 + j20$

$$\text{الجواب } V : \infty ; 0 ; 0 ; 0.075 / -150^\circ$$

7- 13 تيار حيز الزمن لمصدر الشكل 5 - 13 هو $i_s(t) = 5e^{-st} \sin 20t$ أو وجد v_2 عندما t تساوي (أ) 0 ؛ (ب) 0.1 s .
الجواب V 8.42 : 5.92

5 - 13 استجابة التردد بدلالة ،

FREQUENCY RESPONSE AS A FUNCTION OF σ

لقد اعتبرت الاستجابة المرغمة لدائرة كدالة للتردد نصف القطري ω . حيث مثلت هذه الكميات كمانعات أو مسابرات أو فولتيات أو تيارات معينة أو كسب للتيار أو كسب للفولتية كما مثلت الممانعة والمسابرة التحويلية بدلالة ω مع تعيين الأقطاب والأصفار ورسم مخطط الاستجابة . لنترك بعض الوقت لمسألة استجابة التردد بدلالة σ قبل مناقشة المسألة الأكثر عموماً ، الا وهي استجابة التردد بدلالة التردد المركب والتي ستناقش في الفقرة القادمة .

وسنختار دائرة RL المتوالية والمغذاة بمصدر فولتي حيز التردد $V_m \angle 0^\circ$ مثلاً بسيطاً . ويمكن إيجاد التيار بدلالة بتقسيم فولتية المصدر على ممانعة الادخال .

$$I = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + sL}$$

لنتقيد بمصادر حيز الزمن $\omega = 0$ و $s = \sigma + j0$ معتبرين

$$v_s = V_m e^{st}$$

وبعد ذلك

$$I = \frac{V_m}{R + \sigma L}$$

$$I = \frac{V_m}{L} \frac{1}{\sigma + R/L}$$

أو (12)

$$i(t) = \frac{V_m}{R + \sigma L} e^{st}$$

وبالتحويل الى حيز الزمن (13)

على كل حال فان المعلومات المطلوبة حول هذه الاستجابة المرغمة موجودة في (12) والتي تصف حيز التردد . ويمكن اعطاء وصف سهل لتحقيق الاستجابة عند تغير تردد النيبر σ . فعندما تكون σ مقداراً سالباً كبيراً فانها تعني وجود دالة اسية تتناقص باطراد . وتكون استجابة التيار في (12) سالبة وصغيرة الاتساع نسبياً وتمثل دالة أسية تتناقص بالقيمة باطراد . عندما تزداد قيمة σ وتصبح رقماً سالباً صغيراً فان قيمة الاستجابة السالبة تزداد ويكون اتساع التيار لانهاياً . عندما تصبح قيمة σ تساوي $-R/L$ تماماً فان قطب الاستجابة المرغمة يعني أن قيمة اتساع التيار لانهاية .

والنقطة التالية والجديرة بالملاحظة هي عندما تستمر قيمة σ بالزيادة وتصبح قيمتها تساوي صفراً. حيث ان v_2 تساوي V_m فسنواجه حالة التيار المستمر وتساوي الاستجابة المرغمة بديهاً V_m/R والتي تتفق مع (12). القيم الموجبة لـ σ يجب أن تعطي استجابات ذات اتساع موجب وتظهر اتساعات أكبر عندما تكون σ اصغر. وأخيراً فان استجابة ذات اتساع مقداره صفراً تنتج عندما تساوي مالانهاية. وبالتالي تُعيّن صفراً. والترددات الحرجة هي فقط في قيم $\sigma = -R/L$ حيث يظهر هناك قطب وعند $\pm\infty$ حيث يكون هناك صفر.

وهذه المعلومات يمكن أن تبين بصورة سهلة عند رسم $|I|$ ، أي اتساع التيار بيانياً بدلالة σ كما مبين في الشكل 13 - 6. وتحضيراً لحالة الاستجابة الأكثر عموماً عند تغيير s في الفقرة التالية فان الشكل يبين قيمة I فقط بدلالة σ وزاوية الطور (غير المبينة) هي اما صفراً أو 180° .
لنلفت الانتباه للترددين الحرجين لهذه الاستجابة: التردد الحرج المحدود الوحيد هو القطب عندما $\sigma = -R/L$ كما أنه من المفيد تعيين سبب الحصول على استجابة مرغمة لانهاية عند تغذية الدائرة بفولتية لها هذا التردد.

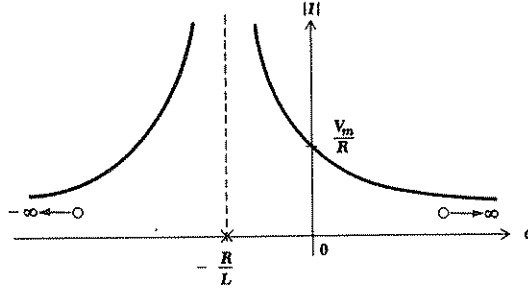
$$v = V_m e^{-R/Lt} \quad (14)$$

وصيغة الدالة المرغمة في (14) معروفة حيث لها كل صفات الاستجابة الطبيعية والتيار المار بالدائرة مع فرض وجود تيار ابتدائي مقداره I_0 هو

$$i = I_0 e^{-R/Lt} \quad (15)$$

اذا غذيت الدائرة بدالة مرغمة ذات اتساع يساوي صفراً «أي تغذية الدائرة بدائرة قصر» مع كون هذه الاستجابة هي استجابة طبيعية تتحقق فقط عندما تكون $t > 0$ فانه من غير المعقول تقديم النتيجة كاستجابة مرغمة معرضة لكل الأزمنة. وسنجد بأن دالة مرغمة ذات اتساع مقداره صفر انتجت استجابة مرغمة اتساعها ليس بصفر. وبما أن الدائرة خطية فالدالة المرغمة ذات اتساع مقداره صفر يجب أن تنتج استجابة مرغمة لانهاية.

وسنجد أن هذه النتيجة عامة وانه عند تغذية أية دائرة بتردد مساو لقطب الاستجابة فالاستجابة المرغمة الناتجة هي لانهاية وترددات الأقطاب ذات علاقة مباشرة مع الاستجابة الطبيعية للدائرة. وهذه العلاقة ستظهر في عدة أمثلة ستبحث في هذه الفقرة، ولكنها سوف لن تناقش بعمق في هذه الفقرة بل في الفقرات القادمة.



الشكل 6 - 13 رسم بياني لقيمة I بدلالة التردد النيجري σ لدائرة RL المتوالية والمغذاة بمصدر فولتية آسي $V_m e^{\sigma t}$. هناك قطب وحيد عندما تكون σ تساوي $-R/L$ وهناك صفر عند قيمتي $\sigma = \pm \infty$.

لنأخذ الدائرة المرسومة في الشكل 7 - 13 (أ) ذات مصدر التيار الآسي كمشال

ثان

$$i = I_m e^{\sigma t}$$

هذا التيار مسلط على دائرة RC المتوالية والفولتية عبر المصدر معطاة

$$V = IZ(\sigma) = I_m \left(R + \frac{1}{\sigma C} \right)$$

أو

$$V = I_m R \frac{\sigma + 1/RC}{\sigma}$$

(16)

وهذه الصيغة الأخيرة للاستجابة المرغمة والمكتوبة كثابت مضروب بنسبة العوامل ذات $(\sigma + \sigma_1)$ وهي أنسب ماتكون لتعيين الاصفار والاقطاب للاستجابة. استجابة الفولتية تبين وجود قطب عند $\sigma = 0$ وصفر عند $\sigma = -1/RC$. بينما التردد اللانهائي هو ليس بتردد حرج. وقيمة الاستجابة المطلقة $|V|$ قد رسمت بيانياً بدلالة التردد في الشكل 7 - 13 (ب). ويمكن توضيح سبب ظهور قطب عندما يساوي التردد صفراً وفق أسس فيزيائية. وعندما يساوي صفراً فان مصدر التيار يمثل فعلياً دائرة مفتوحة والاستجابة هي الفولتية الثابتة الاولى على المتسعة وبالتالي فان أية قيمة لاتساوي صفراً للتيار I_m تنتج استجابة فولتية مرغمة لانهاية. وبكلمات أخرى، عند تسليط تيار ثابت على الشبكة لفترة لانهاية من الزمن فان المتسعة يجب ان تشحن الى فولتية لانهاية. وان كل الأقطاب هي نتيجة للنماذج المثالية التي نفرض انها تمثل الأجهزة الفيزيائية. فالمتسعة الحقيقية مثلاً

تسمح للفولتية عبر طرفيها بالازدياد الى قيمة كبيرة معينة قبل ان يحدث انهيار في العازل .

ومنحنى استجابة أعقد من ذلك يمكن الحصول عليه للدائرة الميئة في 8 - 13 (أ) . يمكن ايجاد التيار بسهولة :

$$I = \frac{100}{6 + \sigma + 5/\sigma}$$

او

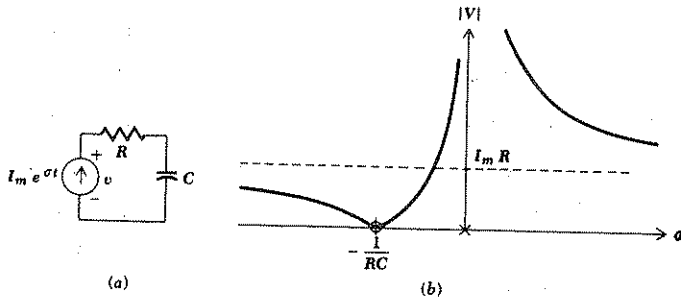
$$I = 100 \frac{\sigma}{(\sigma + 1)(\sigma + 5)} \quad (17)$$

ومنحنى الاستجابة يمكن ايجاده بعد تعيين مواقع كل الاصفار والاقطاب على الاحداثيات ، ووضع مقتربات عمودية في نقاط الأقطاب . وبعد انجاز هذا العمل نجد أن أصغر استجابة مرغمة نسبياً يجب أن تكون بين القطبين ، وأكبر قيمة نسبية يجب ان تكون في تردد ما أكبر من الصفر . ومن التعريف فالقيمة الصغرى والقيمة العظمى يمكن تعيينهما بقيمتي σ و $-\sqrt{5}$ و $\sqrt{5}$ بالتعاقب . قيمة الاستجابة عند القيمة الصغرى تساوي 65.5 وعند القيمة العظمى تساوي 9.55 . لتأكيد العلاقة بين حيز التردد وحيز الزمن مرة أخرى فقد وجد أن الاستجابة المرغمة من المعادلة (17) تساوي 75 A . لذلك فتغذية الشبكة بالدالة المرغمة $i(t) = 75e^{-3t}$ تنتج استجابة التيار المرغمة $v(t) = 100e^{-3t}$.

والآن يمكن استعمال القطبين أيضاً لتكوين الاستجابة الطبيعية

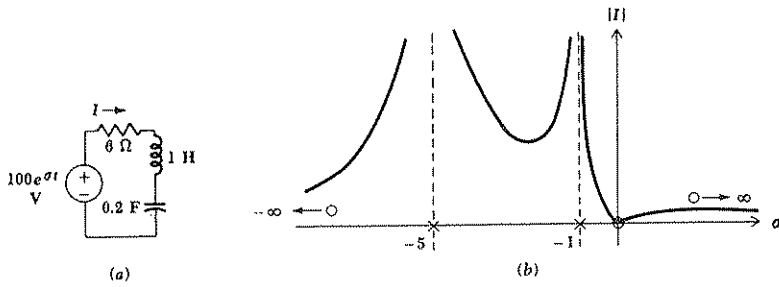
وقيمتا هذين الترددين الطبيعيين يمكن مقارنتهما مع تلك القيم التي وجدت باستعمال الطرق المذكورة في الفقرة 7 - 6 لدائرة RLC المتوالية . وذلك عندما

$$i_n = Ae^{-t} + Be^{-3t}$$



الشكل 7 - 13 (أ) دائرة RC المتوالية والمغذاة بمصدر تيار أسى

(ب) القيمة المطلقة لاستجابة الفولتية تعطي قعياً عند $\sigma = 0$ وصفاً عند $\sigma = -1/RC$



الشكل 8 - 13 (أ) دائرة RLC المتوالية والمساقية بدالة أسية مرغمة : (ب) منحني استجابة قيمة التيار حيث الناتج يبين اصفراً عندما $\sigma = 0$ تساوي صفراً . وعندما تساوي $\pm \infty$ وأقطاباً عندما σ تساوي -5 -1 نيمبر لكاً، ثانية .

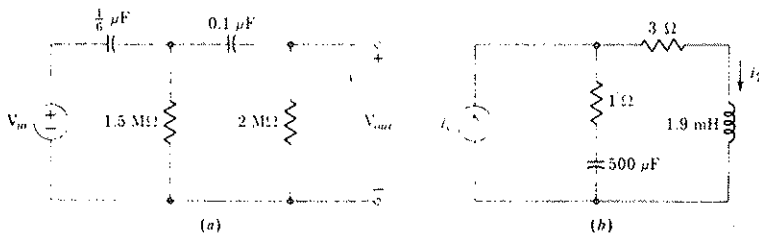
$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$= -1 \text{ and } -5$$

ولذلك فدالة مرغمة ذات قيمة لاتساوي صفراً في أي من هذين الترددين $\sigma = -1$ ، او $\sigma = -5$ تعطى استجابة مرغمة لانهاية أو قطباً . كما أن دالة مرغمة ذات اتساع لايساوي صفراً يمكن ان ترافق باستجابة مرغمة ذات اتساع محدود والتي يمكن تمثيلها بالاستجابة الطبيعية للدائرة

تمارين

8 - 13 أوجد تعبير لـ V_{out}/V_{in} كدالة لـ الشكل 9 - 13 (أ) وأوجد كل الترددات الحرجة وارسم مخطط $|V_{out}/V_{in}|$ بدلالة σ
 الجواب 2.0, 0, -10 - نيمبر لكل ثانية



الشكل 9 - 13 (أ) انظر التمارين 8 - 13 الى 10 - 13

- 9 - 13 إذا كان الاخراج في الشكل 9 - 13 (أ) مفتوح الدائرة اوجد كل الترددات الحرجة وارسم مخطط $|Z_{in}(\sigma)|$ بدلالة σ
- 10 - 13 في الشكل 9 - 13 (ب) إذا كان $i_s(t) = 5e^{-1000t}$ ، أوجد $i_2(t)$ عندما t تساوي (أ) 1 ms - (ب) 0 (ج) 1 ms .
- الجواب -18.39 ; -50.0 ; -135.9 ملي امبير
- 10 - 13 أنشئ الدالة $Y(\sigma)$ والتي لها اصفار عندما σ تساوي 20 - و 50 - نيير ثانية وأقطاباً عندما σ تساوي 10 - و 30 - نيير / ثانية إذا كانت $Y(\sigma)$ تقترب من 5 ملي موه عندما تصبح σ كبيرة جداً وسالبة / أحسب (أ) $Y(0)$ (ب) $Y(-40)$
- الجواب : 3.33 ; 16.67 mU

6 - 13 مستوى التردد المركب THE COMPLEX-FREQUENCY PLANE

ونحن الآن على استعداد لتكوين تمثيل عام لرسم مخطط الكميات بدلالة s ، بعد أن أخذنا في الاعتبار الاستجابة المرغمة للدائرة عندما تتغير ω (مع كون σ تساوي صفراً) وعندما تتغير σ (مع كون ω تساوي صفراً) وذلك بتبيان الاستجابة بدلالة σ و ω في وقت واحد

إن مثل هذا المخطط للاستجابة المرغمة بدلالة التردد المركب s يكون مفيداً كأسلوب توضيحي في تحليل الدوائر أو في تصحيح الدوائر وتركيبها أيضاً . بعد تطوير مفهوم مستوى التردد المركب ، أو المستوى s ، وسنرى كيف أن تصرف دائرة يمكن أن يقرب بسرعة من التمثيل التخطيطي لتردداتها المركبة في هذا المستوى .

والخطوات المقابلة هي أيضاً مفيدة جداً . وكمثال يمكن تركيب مرشح ماذا أعطينا منحنى الاستجابة (استجابة التردد للمرشح) وعينت المواقع اللازمة للأقطاب والأصفار في المستوى s . وهذه المسألة التركيبية هي مادة لدراسة تفصيلية لمواد متعاقبة والتي سوف تشرح بصورة مختصرة فقط . والمستوى s هو الأداة الأساسية التي بواسطتها يمكن تحليل الترددات غير المرغوبة في المضخمات ذات التغذية العكسية وأنظمة السيطرة الذاتية .

دعنا نظور طريقة لايجاد استجابة الدائرة بدلالة s بتعميم الطرق التي استعملناها لايجاد الاستجابة كدالة لكل من σ أو ω . ولأجل مراجعة تلك الطرق

سنجد ممانعة نقطة السوق بدلالة s لشبكة مؤلفة من مقاوم 3 أوم على التوالي مع محثة 4 هنري . حيث يكون لدينا .

$$Z(j\omega) = 3 + j4\omega$$

إذا رغبتنا بالحصول على تمثيل خطي لتغير الممانعة مع σ نجعل $s = \sigma + j0$

$$Z(\sigma) = 3 + 4\sigma$$

ونتبين من وجود صفر عندما σ تساوي $-\frac{3}{4}$ وقطب في اللانهاية . وهذه الترددات الحرجة تؤثر على احداثي σ . وبعد تشخيص قيم $Z(\sigma)$ في بعض الترددات المناسبة غير الحرجة (من الممكن $Z(0) = 3$) . فانه من السهل تخطيط $|Z(\sigma)|$ بدلالة σ ولكي نرسم الاستجابة بيانياً بدلالة التردد نصف القطري ω .

$$s = 0 + j\omega$$

$$Z(s) = 3 + 4s$$

وبعد ذلك نجد كلاً من القيمة المطلقة والزاوية لـ $Z(j\omega)$ بدلالة ω

$$|Z(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2}$$

$$\text{ang } Z(j\omega) = \tan^{-1} \frac{4\omega}{3}$$

دالة القيمة المطلقة تشير الى وجود قطب منفرد في اللانهاية والى قيمة صفرى عندما ω تساوي صفرأ . ومن الممكن تخطيط $|Z(j\omega)|$ كمنحنى بدلالة ω . وزاوية الطور هي مقلوب ظل الدالة وعند رسم البياني لزاوية $Z(j\omega)$ بدلالة ω فانها تأخذ القيمة صفرأ عندما تساوي ω صفرأ وتساوي $\pm 90^\circ$ عندما $\omega = \pm\infty$ وعند تخطيط استجابة $Z(j\omega)$ بدلالة ω نحتاج الى رسمين بيانين كل منهما ذي بعدين : القيمة المطلقة والزاوية الطورية كدالتين لـ ω . أما عند فرض تغذية أسية فيمكننا أن نمثل كل المعلومات في مخطط منفرد ذي احداثيين يجعل كلاً من القيم الموجبة والسالبة لـ $Z(\sigma)$ تتغير مع σ .

وعلى كل حال اختيار الرسم البياني للقيمة المطلقة لـ $Z(\sigma)$ بحيث يكون التخطيط أقرب للمقارنة مع ذلك الذي يعطي القيمة المطلقة لـ $Z(j\omega)$. اما زاوية الطور لـ $Z(\sigma)$ فهي ($\pm 180^\circ$ فقط) وقد أهملت . النقطة الواجب ملاحظتها وهي وجود متغير واحد غير معتمد . وفي حالة التغذية الأسية و ω في الحالة الجيبية . والان لناخذ الاحتمالات الاخرى الموجودة عندما نرغب برسم الاستجابة بدلالة s بيانياً .

والتردد المركب s يحتاج الى اثنين من المتغيرات الوسيطة σ و ω لأجل اكمال مواصفاته . الاستجابة هي أيضاً دالة مركبة . ولهذا يجب أن يؤخذ بالاعتبار تخطيط كل من القيمة المطلقة وزاوية الطور كدالتين لـ s . وكل من هذه الكميات ؛ كالقيمة المطلقة مثلاً هي دالة المتغيرين الوسيطين σ و ω وبامكاننا رسمهما بيانياً ببعدين كعائلة من المنحنيات وذلك برسم القيمة المطلقة بدلالة σ مع كون ω متغيراً وسيطاً . وبالتالي رسم القيمة المطلقة بدلالة σ مع كون ω متغيراً ونحن بصدد تجنب مثل هذه العائلات من المنحنيات الى جهود كبيرة وعلى كل حال نحصل على خلاصة مفيدة من عائلات المنحنيات هذه بعد ايجادها أم لا .

ويمكن تمثيل القيمة المطلقة لبعض الاستجابات المركبة تخطيطياً بشكل أفضل وذلك نموذج ذي ثلاثة أبعاد وعلى الرغم من أن نموذجاً كهذا صُغِبَ الرسم على ورقة ذات بعدين ، سوف نجد بأنه ليس من الصعب تخيل مثل هذا النموذج وسوف تعمل معظم الرسوم ذهنياً ، حيث سيحتاج الى مصادر قليلة ، ومن ثم يكون البناء والتصحيح والحذف سريعاً دعنا نفكر بأحداثي σ ، وأحداثي ω المتعامدين مع بعضهما والواقعين في مستوى أفقي كسطح الأرض

يمثل سطح الأرض مستوى التردد المركب او المستوى s وكما هو مخطط في الشكل 10 - 13 حيث هناك لكل نقطة في المستوى قيمة واحدة لـ s وترافق كل قيمة لـ s نقطة منفردة في هذا المستوى المركب

ولقد تعودنا مسبقاً على ان تقترن دالة حيز الزمن مع قيمة معينة للتردد المركب s . فمن الممكن الآن جعل الصيغة الدالية للدالة المرغمة او الاستجابة المرغمة متقارنة مع المناطق المختلفة في المستوى s . فنقطة الأصل مثلاً يجب أن تمثل كمية للتيار المستمر . والنقاط الواقعة على أحداثي σ يجب أن تمثل دوال اسية تكون تناقصية لقيم $\sigma > 0$ وتزايدية لقيم $\sigma < 0$ ودوال النقاط الموجبة والسالبة في أحداثي ω تقترن مع قيم موجبة نقية . والنصف الايمن للمستوى s ، يسمى ببساطة RHP ن م يمن * والذي يحوي نقاطاً تصف ترددات اجزاء حقيقية موجبة ولذلك تقترن مع

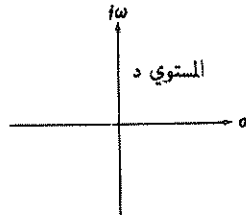
* ن م يمن = نصف المستوى الايمن

كميات جيبيية أسية التزايد لحيز الزمن . ماعدا النقاط الواقعة على احداثي σ وبالتناظر فان النقاط في النصف الأيسر من المستوى s (ن م يسر *) تصف الترددات الجيبيية اسية التناقص وهنا أيضاً . باستثناء النقاط للاحداثي السالب لـ σ . يبين الشكل 11 - 13 العلاقة باختصار بين حيز الزمن والمناطق المختلفة من المستوى s .

دعنا الآن نعد لنبحث عن طريقة مناسبة لتمثيل الاستجابة تخطيطياً كدالة للتردد المركب . القيمة المطلقة للاستجابة يمكن ان تمثل ببناء نموذج من الجص ارتفاعه عن الأرضية في كل نقطة يقابل القيمة المطلقة للاستجابة في تلك القيمة لـ s . وبكلمات اخرى ، لقد أضفنا أحداثياً ثالثاً عمودياً على كل من احداثي واحداني $j\omega$ ويمر خلال نقطة الاصل . هذا الأحداثي يمكن ان يدعى بـ $|Z|$ أو $|Y|$ أو $|V_2/V_1|$ او اي رمز مناسب آخر ان القيمة المطلقة للاستجابة تحسب لكل قيمة من قيم s . ويكون الرسم البياني النهائي هو سطح يستقر فوق (أو تقريباً يلامس) المستوى .

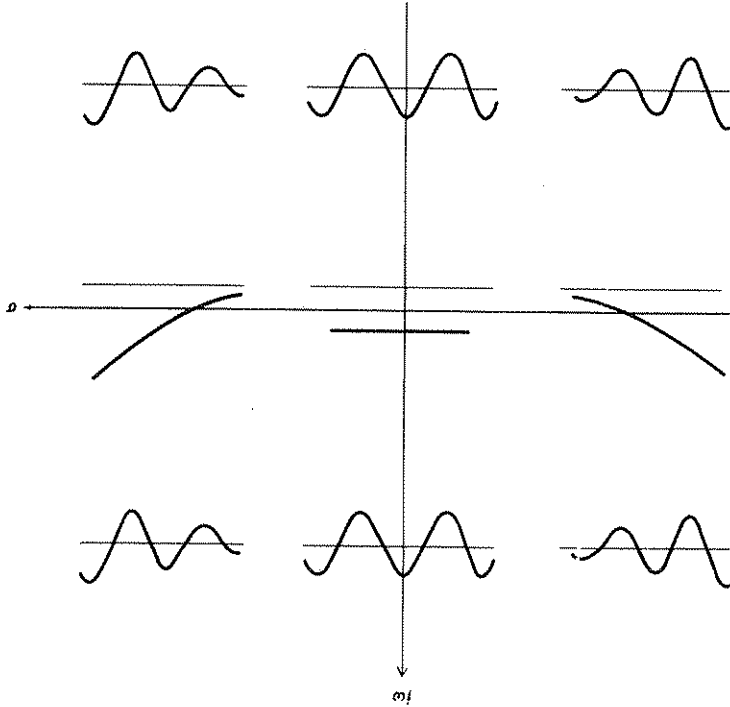
ويمكننا معالجة هذه الافكار الأساسية بملاحظة ماذا يشبه هذا النموذج الجصي . وكمثال لناخذ التوصيلية لمجموعة متوالية مؤلفة من محث 1-H ومقاوم 3- Ω

$$Y(s) = \frac{1}{s + 3}$$



الشكل 11 - 13 طبيعة دالة حيز الزمن وقد خططت في الاماكن المائلة لها من مستوى التردد المركب

* ن م يسر = نصف المستوى الايسر



الشكل 11 - 13 طبيعة دالة حيز الزمن وقد خططت في الاماكن العائدة لها من مستوى التردد المركب

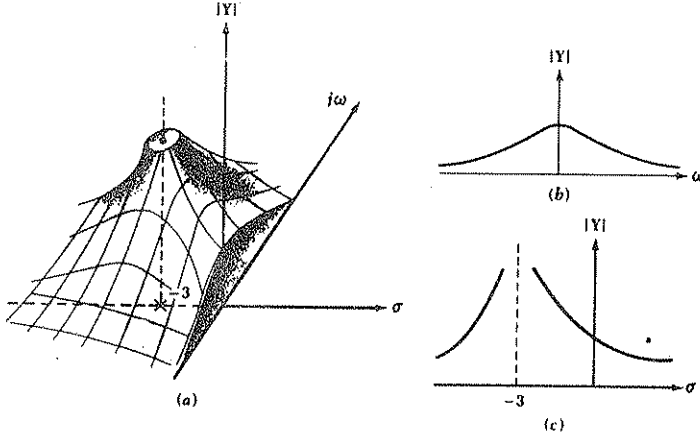
وبدلالة كل من σ و ω لدينا القيمة المطلقة

$$|Y(s)| = \frac{1}{\sqrt{(\sigma + 3)^2 + \omega^2}}$$

وتكون القيمة المطلقة للاستجابة لانهاية عندما تكون s تساوي $-3 + j0$ وعندما تكون قيمة s مالانهاية تكون القيمة المطلقة لـ $Y(s)$ صفراً، لذلك فان نموذجاً ذا ارتفاع لانهاية يجب ان يكون فوق النقطة $(-3 + j0)$. ويجب ان يكون ذا ارتفاع يساوي صفراً في كل النقاط ذات البعد اللانهائي من نقطة الاصل بين الشكل 12 - 13 (أ) منظرًا لمقطع النموذج كهذا.

وبعد بناء النموذج تحقق التغيرات لـ $|Y|$ بدلالة ω ببساطة (مع كون $\sigma = 0$). وذلك بقطع النموذج بمستوى عمودي يحوي الاحداثي $j\omega$. النموذج المبين في الشكل 12 - 13 أ مقطوع بمستوى كهذا ويمكن الرجوع الى الرسم البياني

المطلوب لـ $|Y|$ عندما تتغير مع ω في الشكل 12 - 13 (ب) وبالطريقة نفسها نأخذ مستويًا عمودياً يحتوي على الأحداثي σ ويمكننا من إيجاد $|Y|$ عندما تتغير مع σ (مع كون $\omega = 0$) وكما مبين في الشكل 12 - 13 (ج).

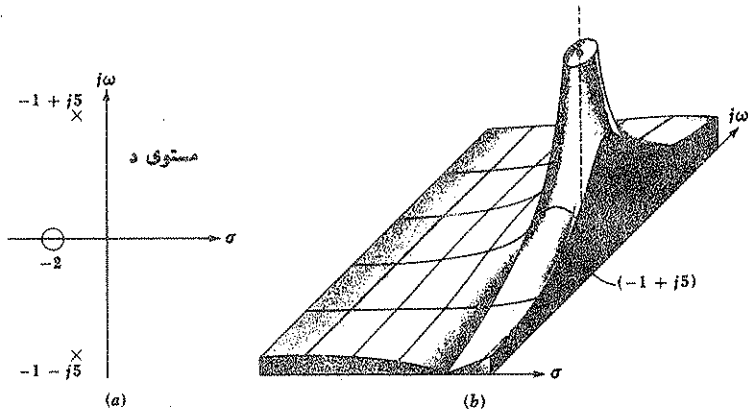


الشكل 12 - 13 (أ) منظر مقطع لنموذج الجص والذي سطحه المألوي يمثل $|Y(s)|$ للمجموعة التوافقية لمحث 1-H ومقاوم $3-\Omega$: (ب) $|Y(s)|$ بدلالة ω (ج) $|Y(s)|$ بدلالة σ

والآن مع السؤال التالي، كيف لو وجدت بعض المعلومات ذات قيمة عن الاستجابة بدون القيام بهذا العمل؟ وبالإضافة إلى ذلك فالغالبية العظمى ليس لديها الوقت ولا الميل لصنع النماذج من الجص وتحتاج إلى طريقة عملية أكثر. دعنا نتصور المستوى s كأرضية مع صفيحة من المطاط ملقاة على تلك الأرضية ولنحصر انتباهنا في أصفار وأقطاب الاستجابة. فعند كل صفر للاستجابة يجب أن يكون ارتفاع الصفيحة صفراً، لذلك تثبت الصفيحة بالأرض في مناطق الأصفار. وعند القيم العائدة لكل قطب يمكن رفع الصفيحة بقضيب دقيق عمودي. والأصفار والأقطاب في اللانهاية يجب أن تعامل باستخدام حلقة تثبيت ذات نصف قطر كبير أو سياج دائري عالٍ بالتعاقب ولو استخدمنا قطعة ذات مساحة لانهاية ليس لها وزن ومثالية المطاطية. مثبتة بمسامير صغيرة متناهية في مواقع الأصفار ومرفوعة بقضبان ذات أطوال لانهاية وذات مساحة مقطع مساو للصفر في مواقع الاقطاب فارتفاع الصفيحة المطاطية اذن في أي نقطة سيتناسب مع القيمة المطلقة للاستجابة ويمكن بناء

صفائح مطاطية ذات دقة أقل في المختبر ، ولكن المنفعة الرئيسية تقع في سهولة البناء بعد التعرف على مواقع أقطاب الاستجابة واصفارها .

وهذه الملاحظات يمكن ان توضح من وضعية الأقطاب والأصفار ، وفي بعض الأحيان تسمى تركيبة الأقطاب والأصفار *pole-zero constellation* والتي تعين جميع الترددات الحرجة لبعض كميات حيز التردد ، ولنقل الممانعة $Z(s)$ مثلاً . وهكذا فان تركيبة الأقطاب والأصفار مبينة في الشكل 13 - 13 (أ) . وإذا تخيلنا نموذجاً من صفيحة مطاطية مثبتة بالاسفل في النقطة $s = -2 + j0$ ومرفوعة للأعلى في نقطتين $s = -1 + j5$ و $s = -1 - j5$ فاننا سنرى منطقة معالمها المميزة ارتفاعان وانخفاض قعبي . والجزء الأيسر العلوي من النموذج مبين في الشكل 13 - 13 (ب)



الشكل 13 - 13 (أ) تركيبة الاقطاب والاصفار للممانعة ما $Z(s)$ ، (ب) جزء من نموذج الصفيحة المطاطية للقيمة المطلقة لـ $Z(s)$

دعنا الآن نكون التعبير الذي يدلنا على وضعية الاقطاب والأصفار لـ $Z(s)$.
الصفير يحتاج الى عامل $(s + 2)$ في البسط والتقطبين يحتاجان الى عاملين $(s + 1 - j5)$ و $(s + 1 + j5)$ في المقام . بالإضافة الى ثابت الضرب k . ونحن نعلم

$$Z(s) = k \frac{s + 2}{(s + 1 - j5)(s + 1 + j5)} \quad \text{أن } Z(s) \text{ ذو صيغة}$$

$$Z(s) = k \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 26} \quad \text{أو (18)}$$

لنختبر قيمة k بفرض حقيقة فريدة اخرى عن $Z(s)$ لنوع $Z(0) = 1$ وبالتعويض المباشر في (18) نجد أن k تساوي 13 ، ولذلك

$$Z(s) = 13 \frac{s+2}{s^2+2s+26} \quad (19)$$

والرسم البياني يبين تغير $|Z(\sigma)|$ مع تغير σ و $|Z(j\omega)|$ متغيرة مع تغير ω وقد أمكن الحصول على هذه التغيرات من المعادلة (19) ، ولكن الصيغة العامة للدالة تتضح من وضعية الأقطاب والأصفار ومن التمثيل بصفيحة المطاط .

وتظهر أجزاء من هذين المنحنيين على جانبي هذا النموذج المبين في الشكل 13 - 13 (ب) وبعد هذا القدر من استعمال المستوى s ونموذج الصفيحة المطاطية للحصول على معلومات ذات قيمة عن تغير القيمة المطلقة لدالة حيز التردد مع التردد ، فانه من الممكن الحصول على معلومات ذات علاقة كمية تتعلق بتغير كل من القيمة المطلقة وزاوية الطور

ليكن تمثيل التردد المركب في صيغة قطبية ، وليمثل كما هو موضح بسهم مرسوم من نقطة الأصل في المستوى s الى ذلك التردد المركب المعتبر بحيث يمثل طول السهم القيمة المطلقة وللتردد ، وتمثل الزاوية التي يصنعها هذا السهم مع الأحداثي الموجب لـ σ زاوية هذا التردد المركب . والتردد $s_1 = -3 + j4$ سيمثل بـ $5/126.9^\circ$ وكما مبين في الشكل 14 - 13 (أ) .

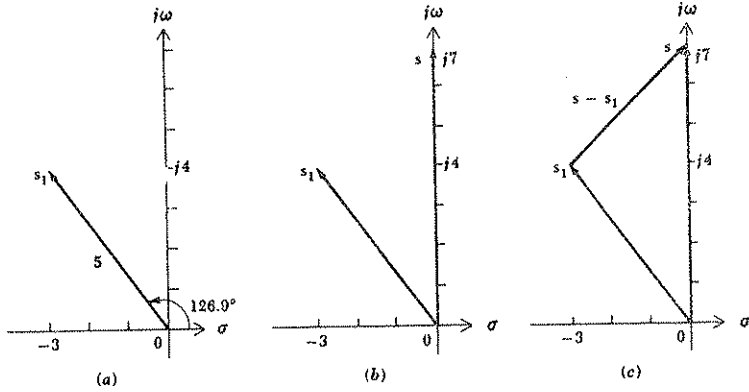
وانه من الضروري تمثيل الفرق بين قيمتين لـ s الأولى ممثلة كسهم والثانية كمتجه في المستوى المركب . لنختبر قيمة جيبيية لـ s ، $s = j7$. ونؤشر هذه القيمة كمتجه كما هو مبين في الشكل 14 - 13 (ب) . فيكون حاصل الطرح $s - s_1$ هو المتجه المرسوم من آخر نقطة مسماة s_1 الى أول نقطة مسماة s . هذا المتجه $s - s_1$ مرسوم في الشكل 14 - 13 (ج) . كما يمكن ملاحظة أن $s - s_1 = j7 - (-3 + j4) = 3 + j3 = 4.24/45^\circ$. وبصورة حسابية فان $s = s_1 + (s - s_1)$ وهذه القيمة تتوافق مع حاصل الطرح في المخطط .

لنر كيف يمكننا هذا التمثيل التخطيطي لحاصل الطرح $(s - s_1)$ من تعيين استجابة التردد . ولنأخذ المسائرة

$$Y(s) = s + 2$$

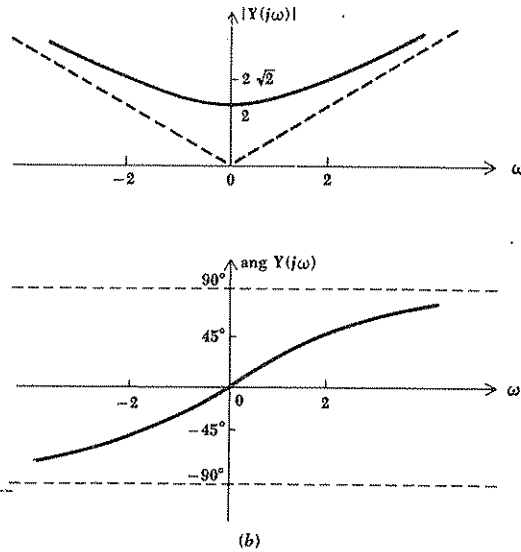
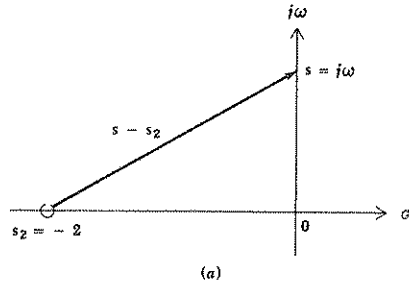
هذا التعبير يمكن ان يمثل كالفرق بين ترددهما s وموقعا لـ s . لنأخذ الصفر الذي يقع في $s_2 = -2 + j0$ العامل $s + 2$ يمكن كتابته كـ $s - s_2$ ويمثل بمتجه مرسوم من موقع الصفر s_2 الى التردد s وهي الاستجابة المطلوبة . اما اذا طلبت

الاستجابة الجيبية فيجب ان تقع s على أحداتي $j\omega$ كما مبين في الشكل 15 - 13 (أ) .



الشكل 14 - 13 (أ) التردد المركب $s_1 = -3 + j4$ مؤشر بسهم مرسوم من نقطة الأصل الى s_1 : (ب) التردد $s = j7$ هو أيضاً ممثل اتجاهياً . (ج) الفرق بين $s_1 - s$ ممثل بالمتجه المرسوم من s_1 الى s .

يمكن توضيح تغير القيمة المطلقة لـ $s + 2$ مع تغير ω من الصفر اللانهاية كما يأتي : وعندما تساوي s صفراً تساوي القيمة المطلقة للمتجه 2 وتساوي زاويته صفراً ولذلك $Y(0) = 2$. وتزداد القيمة المطلقة ببطء في البداية تزداد تقريباً بصورة خطية مع زيادة ω . زاوية الطور في البداية تزداد خطياً تقريباً مع زيادة ω وبعد ذلك تقترب من 90° كلما اقتربت ω من اللانهاية . وعندما $\omega = 7$ فإن القيمة المطلقة $Y(j7) = \sqrt{2^2 + 7^2}$ وتكون لها زاوية طور تساوي الرسم التخطيطي للقيمة المطلقة لـ $Y(s)$ وزاويتها بدلالة ω مبين في الشكل 15 - 13 (ب) .



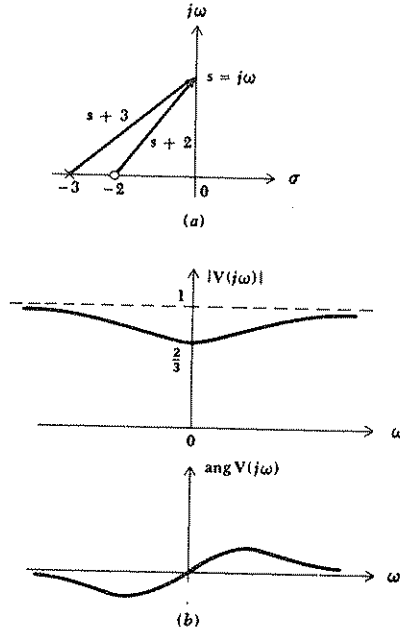
الشكل 15 - 13 (أ) المتجه الذي يمثل المسايرة $V(s) = s + 2$ مبين عندما تكون $s = j\omega$. (ب) رسم تخطيطي يبين تغير $|Y(j\omega)|$ وزاوية $Y(j\omega)$ مع تغير s نحو الأعلى أو نحو الأسفل على الأحداثي $j\omega$ من نقطة الاصل.

لنضرب الآن مثالا أقرب للحقيقة بأخذ دالة حيز التردد معطاة كنتاج قسمة متجهين .

$$V(s) = \frac{s + 2}{s + 3}$$

لنختار قيمة لـ s تعود الى تغذية جيبيية ونرسم المتجهين $s + 2$ و $s + 3$ كما يأتي : الأول من موقع الصفر الى نقطة مختارة على احداثي $j\omega$ والثاني من موقع القطب الى تلك النقطة المختارة كما هو في الشكل 16 - 13 (أ) . وناتج قسمة هذين

المتجهين له قيمة مطلقة تساوي حاصل قسمة القيمتين المطلقتين للمقام والبسط والزاوية تساوي الفرق بين زاويتي طورَي البسط والمقام . وتغير القيمة المطلقة لـ $V(s)$ قد وجد بالسماح لـ s بالتحرك من نقطة الأصل الى الأعلى على الاحداثي $j\omega$ مع الأخذ بنظر الاعتبار النسبة بين كل من المسافة . من مواقع الصفر الى النقطة $s = j\omega$ والمسافة من موقع القطب الى النقطة نفسها على الاحداثي $j\omega$. هذه النسبة تساوي $\frac{2}{3}$ عندما $\omega = 0$ وتقترب من الواحد عندما تقترب ω من اللانهاية . وبأخذ الفرق بين الزاويتين بنظر الاعتبار فان زاوية $V(j\omega)$ هي صفر عندما $\omega = 0$ وتزداد كلما زادت ω طالما كانت الزاوية للمتجه $s + 2$ هي أكبر من تلك للمتجه $s + 3$ ومن ثم تقل بزيادة ω واخيراً تقترب من الصفر عندما يبلغ التردد مالانهاية حيث كل من المتجهين زاوية 90° . يبين الشكل 16 - 13 (ب) رسماً تخطيطياً



الشكل 16 - 13 (أ) المتجهان المرسومان من الترددين الحرجين لاستجابة الفولتية $V(s) = \frac{(s+2)}{(s+3)}$ (ب) رسم تخطيطي لكل من القيمة المطلقة وزاوية الطور لـ $V(j\omega)$ كما وجدت من حاصل القسمة لكل من المتجهين المبينين في (أ)

لهذه النتائج مع أنه ليس هناك ملاحظات ذات قيمة في هذه المخططات . إلا أنه من المهم ملاحظة سهولة إيجادها . لنأخذ الاستجابة المركبة كمثال فأنها تكون معطاة بالنسبة الآتية عندما تكون $s = j4$

$$V(j4) = \frac{\sqrt{4 + 16/\tan^{-1}(4/2)}}{\sqrt{9 + 16/\tan^{-1}(4/3)}}$$

$$V(j4) = \sqrt{20/25/\tan^{-1} 2 - \tan^{-1}(4/3)}$$

$$= 0.894/10.3^\circ$$

وان تصرف المتجهات المرسومة من كل من الترددات الحرجة الى نقطة عامة على الاحداثي هو من العوامل المساعدة في تصميم الشبكات المنتجة لاستجابات مطلوبة . وكمثال فانه اذا كان من الضروري زيادة النتوء hump من الاستجابة الطورية في الشكل 16 - 13 (ب) فالفرق بين المتجهين يجب ان يزداد وزيادة هذا الفرق يمكن الحصول عليها في الشكل 16 - 13 (أ) اما بتحريك الصفر بحيث يصبح اقرب من نقطة الاصل او بوضع القطب ابعد من نقطة الاصل او كلا الحاليتين معاً . وان الفكرة التي ساعدتنا في ايجاد الرسم التخطيطي للقيمة المطلقة وتغير الزاوية لبعض دالات حيز التردد مع التردد وسنحتاج اليها في الفصول القادمة عندما نبحث في خواص المرشحات ذات الاختيار العالي أو دوائر الرنين . وهذه الخطوات هي أساس لايجاد تصرف الشبكة الكهربائية او انظمة هندسية أخرى بسرعة وبصورة واضحة ومفهومة . طريقة العمل مختصرة هي كما يأتي :

- 1 ارسم تركيبة الأقطاب والأصفار لدالة حيز التردد المعينة في المستوى s . وعين نقطة اختبار تعود الى التردد الذي ستحسب فيه الدالة .
- 2 ارسم سهماً من كل من القطب والصفر الى نقطة الاختبار .
- 3 عين طول كل من سهم القطب وسهم الصفر وكذلك جد قيمة كل زاوية من زوايا أسهم الأقطاب والأصفار .
- 4 اقسّم حاصل ضرب أطوال أسهم الأصفار على حاصل ضرب أسهم الأقطاب . وحاصل القسمة هذا هو القيمة المطلقة لدالة حيز التردد للمفروض لنقطة الاختبار « مع وجود عامل ضرب حيث $F(s)$ و $kF(s)$ لهما التركيبة نفسها للأقطاب والأصفار » .
- 5 اطرح مجموع زوايا الأقطاب من مجموع زوايا الأصفار . محصلة الطرح هي زاوية دالة حيز التردد . محسوبة لتردد نقطة الاختبار . والزاوية لاتعتمد على القيمة الحقيقية لعامل الضرب k .

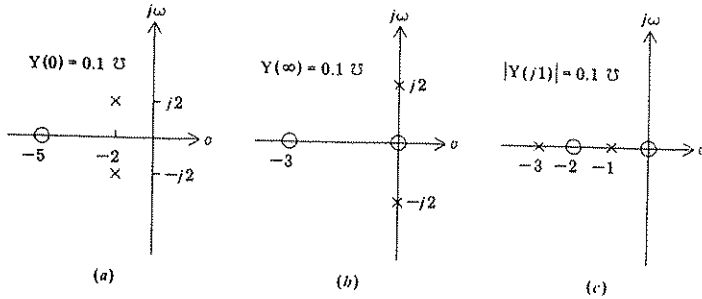
تمارين

12 - 13 ممانعة تتألف من متسعة 20 مايكروفراد على التوازي مع مجموعة متوالية تتألف من مقاوم 10Ω ومحث 1-mH . أوجد كل الترددات الحرجة لـ $Z(s)$ وارسم تركيبة الأقطاب والأصفار .

الجواب: ∞ ; $-5 \pm j5$ complex rad/s; -10 kNp/s;

13 - 13 ثلاث وضعيات للأقطاب والأصفار مبينة في الشكل 17 - 13 . كل منها تعود الى مسايرة ما . أوجد تعبيراً لكل من المسابير على أن يكون حاصل قسمة لمتعددات الحدود للمتغير s الجواب

$$\frac{s^2 + 3s}{10s^2 + 40}; \quad \frac{4s + 20}{25s^2 + 100s + 200}; \quad \frac{s^2 + 2s}{5s^2 + 20s + 15}$$



الشكل 17 - 13 انظر التمرين 13 - 13

14 - 13 تركيبة نموذج جصي للممانعة يبين أن هناك قطبين عند $s = -3 \pm j4$ وصفرين عند $s = -1 \pm j5$. أوجد النسبة بين ارتفاع النموذج في نقطة الأصل وتلك عندما s تساوي (أ) $j1$; (ب) $-3 + j1$ (ج) ∞

15 - 13 تركيبة نموذج جصي لكسب الفولتية يبين وجود قطبين مترافقين في $s = p_1$ و $s = p_2$ وصفر منفرد يقع على الأحداثي السالب لـ σ عند $s = z_0$. زوايا الأسهم المرسومة من كل تردد حرج الى النقطة $s = j100$ هي $\theta_1 = 45^\circ$ و $\theta_2 = 75^\circ$ و $\theta_3 = 80^\circ$. أوجد (أ) p_1 ، (ب) p_2 (ج) z_0 الجواب $-42.3 + j57.7$; $-42.3 - j57.7$; -17.63

هناك كمية هائلة من المعلومات محتواة في الرسم البياني للأقطاب والأصفار لاستجابة مرغمة ما في المستوى s . وسنجد كيف أن استجابة تيار كاملة. الطبيعية زائداً المرغمة، والعائدة الى دالة مرغمة يمكن كتابتها بسرعة من وضعية الأقطاب والأصفار لتلك الاستجابة المرغمة للتيار والظروف الابتدائية. وهذه الطريقة ذات تأثير أيضاً في ايجاد الفولتية الكاملة والمتولدة من مصدرها.

دعنا نقدم الطريقة بأخذ أبسط الأمثلة ولتكن دائرة RL المتوالية والميمنة في الشكل 18 - 13. ان مصدر الفولتية $v_s(t)$ ينسب سريان التيار $i(t)$ بعد غلق المفتاح عند $t=0$. الاستجابة الكاملة $i(t)$ للفترة $t > 0$ تتألف من استجابة طبيعية واستجابة مرغمة:

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) \quad (20)$$

يمكننا ايجاد الاستجابة المرغمة عند العمل في حيز التردد مع فرق أن الفولتية $v_s(t)$ لها صيغة دالية من الممكن تحويلها الى حيز التردد. وإذا كانت $v_s(t) = 1/(1+t^2)$ فان أفضل مالدينا هو البدء من المعادلة التفاضلية الأساسية للدائرة حيث

$$I_f(s) = \frac{V_s}{R + sL}$$

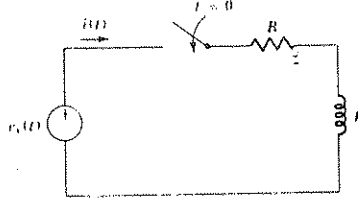
أو

$$I_f(s) = \frac{1}{L} \frac{V_s}{s + R/L} \quad (21)$$

ويتم ايجاد قيمة $i_f(t)$ بتعويض قيم s و L و R ثم اعادة e^{st} وأخذ الجزء الحقيقي. كما يمكن ايجاد الجواب بدلالة ω و R و L اذا كان ذلك مطلوباً.

لنأخذ بنظر الاعتبار الآن الاستجابة الطبيعية. وبالطبع نحن نعلم أن هذه الصيغة منحدره أسياً بثابت الزمن L/R ، ولكن على فرض ان ايجادها يتم لأول مرة.

والاستجابة الطبيعية او الاستجابة الخالية من المصدر هي بالتعريف الصيغة التي لاتعتمد على الاستجابة المرغمة، حيث يستفاد من الدالة المرغمة والظروف الابتدائية الأخرى لايجاد القيمة المطلقة للاستجابة الطبيعية فقط. ولايجاد الصيغة المناسبة نعوض عن كل المصادر غير المعتمدة بممانعاتها الداخلية.



الشكل 18 - 15 مثال يوضح ايجاد الاستجابة الكاملة اذا كانت الترددات العرجة للماعة التي يلاقيها المصدر معلومة .

وسيعوض هنا عن $v_s(t)$ بدائرة قصر والان لنجد الاستجابة الطبيعية ولتكن كحد نهائي للاستجابة المرغمة . لنعد الى تعبير حيز التردد (21) ولتقبل بأن تساوي V_s صفراً . ومن نظرة سطحية يتبين بأن $I(s)$ يجب أن تكون صفراً ، ولكن هذا ليس من الضروري ان يكون صحيحاً حيث ان المصدر يعمل بتردد مركب هو قطب بسيط $I(s)$. وذلك يعني احتمال كون كل من البسط والمقام صفراً ، ولذلك فان $I(s)$ ليس من الضروري أن يكون صفراً .

لنتفحص هذه الفكرة الجديدة من وجهة نظر مفيدة اخرى . ولنركز انتباهنا على النسبة بين الاستجابة المرغمة المطلوبة والدالة المرغمة . ولندع هذه النسبة بصورة عامة بـ $H(s)$ ولنطلق عليها الدالة التحويلية . وهنا

$$\frac{I(s)}{V_s} = H(s) = \frac{1}{L(s + R/L)}$$

في هذا المثال الدالة التحويلية هي مسايرة الدخل التي يلاقيها V_s . والان لو حدث وسلطنا فولتية ذات تردد يساوي بالضبط تردد احد الاقطاب لـ $H(s)$. فان تياراً لانهاياً سيسري وهذا صحيح حتى عند تسليط فولتية ذات قيمة مساوية لفولت واحد . ويمكن استنتاج الخلاصة بأن تياراً محدوداً يمكن ايجاده في تردد كهذا ولو بدون تسليط أي فولتية . وبما أن الدائرة الآن خالية من المصدر فالتيار يكون بصيغة الاستجابة الطبيعية أو الصيغة الخالية من المصدر .

وبالعودة الى الدائرة المتوالية RL . نجد بأنه عندما يكون التردد $s = -R/L + j0$ فان هناك قطباً للدالة التحويلية كما ينتج تيار لانهايي . ان تياراً محدوداً في هذا التردد يمثل الاستجابة الطبيعية .

$$I(s) = A \quad \text{at } s = -\frac{R}{L} + j0$$

وبتحويل هذه الاستجابة الطبيعية الى حيز الزمن

$$i_n(t) = \text{Re} (Ae^{-\mu t})$$

$$i_n(t) = Ae^{-\mu t}$$

أو

ولاكمال هذا المثال تكون الاستجابة الكلية

$$i(t) = Ae^{-\mu t} + i_f(t)$$

ويمكن ايجادها من الظروف الابتدائية .

لنعمم هذه النتائج فالشكل 19 - 13 (أ) و (ب) يبين مصادر منفردة لدوائر لاتحتوي أي مصادر غير معتمدة . والاستجابة التي يمكن أن تكون تياراً ما $I_1(s)$ او فولتية ما $V_2(s)$ يمكن التعبير عنها بدالة تحويلية والتي تظهر كل الترددات الحرجة ولكي نكون دقيقين ، سنختار الاستجابة في الشكل 13 - 19

$$\frac{V_2(s)}{V_s} = H(s) = k \frac{(s - s_1)(s - s_2) \dots}{(s - s_3)(s - s_4) \dots} \quad (22)$$

ولها أقطاب عند $s = s_3, s_4, \dots$ وإذا كان تردد فولتية الدالة المرغمة V_s في تلك الترددات فان استجابة لانهاية $V_2(s)$ ستولد . ولذلك فان فولتية محدودة في أي من هذه الترددات يجب أن تكون صيغة دالية ممكنة للاستجابة الطبيعية . ولنفكر في مصدر ذي فولتية مقدارها صفر (والذي هو بالضبط دائرة قصر) مسلطة على نهايتي الدخل . فالاستجابة الطبيعية الحاصلة ستكون لها الصيغة التالية عندما تكون نهايات الادخال متصلة بدائرة قصر :

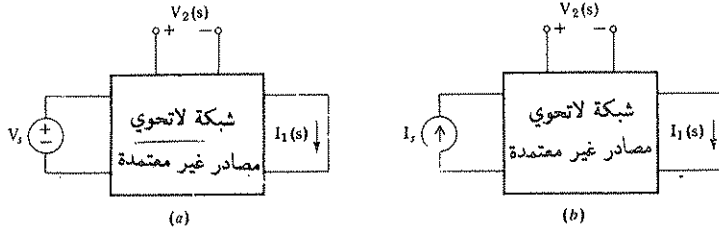
$$v_{2n}(t) = A_2 e^{s_2 t} + A_4 e^{s_4 t} + \dots$$

حيث كل من قيم A يجب أن تحسب بدلالة الظروف الابتدائية (آخذين بنظر الاعتبار القيم الابتدائية لأي مصدر للفولتية مسلط على نهايتي الدخل) .

ولايجاد صيغة الاستجابة الطبيعية $i_{1n}(t)$ في الشكل 19 - 13 (أ) ، يجب تعيين الأقطاب للدالة التحويلية $H(s) = I_1(s)/V_s$. والدالتان التحويليتان المتعلقتان بالوضعية الموصوفة في الشكل 19 - 13 (ب) سوف تكونان بصورة بديهية $I_1(s)/I_s$ و $V_2(s)/I_s$ بالتعاقب .

. وإذا كانت الاستجابة الطبيعية هي الاستجابة المطلوبة في شبكة لاتحتوي على أي مصادر غير معتمدة فالمصدر V_s او I_s يمكن ان يدخل في أي نقطة ملائمة بشرط أن تعود الشبكة الى طبيعتها الاصلية حين القضاء على هذا المصدر . ويمكن تعيين الدالة التحويلية وتحدد الترددات الطبيعية أقطاب تلك الدالة . علماً بأنه

يجب أن نحصل على الترددات نفسها باستعمال أي مكان مناسب آخر لوضع المصدر. وإذا كانت الشبكة تحوي أصلاً على مصدر فان ذلك المصدر يمكن اعتباره صفرًا. ويدخل مصدر آخر في أي نقطة مناسبة.



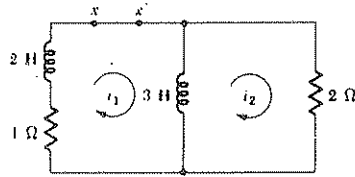
الشكل 19 - 13 أقطاب الاستجابة $i_1(s)$ أو $V_2(s)$ والناتجة من مصدر الفولتية V_1 في (أ) ومصدر التيار I_1 في (ب) تعيين صيغة الاستجابة الطبيعية $i_{1n}(t)$ أو $v_{2n}(t)$ ، والتي تحدث عندما تبدل V_1 بدائرة قصر أو تبدل I_1 بدائرة مفتوحة مع وجود طاقة ابتدائية.

وقبل توضيح هذه الطريقة ببعض الأمثلة ولأكمال العمل يجب أن نذكر ببعض التقدير حالتين خاصتين يمكن أن تظهرها. الحالة الأولى تحدث عندما تحوي الشبكة في الشكل 19 - 13 (أ) أو ب على جزئين آخرين أو أكثر معزولين عن بعضهما. وكمثال يمكن أن يكون لدينا مجموعة متوازية لثلاث شبكات R_1 على التوالي مع C و R_2 على التوالي مع L ودائرة قصر ومن البديهي أن مصدر الفولتية على التوالي مع R_2 و L لا يمكن أن ينتج أي تيار من R_2 و L وستكون ذلك الدالة التحويلية صفرًا. ولايجاد صيغة الاستجابة الطبيعية لفولتية المحث يجب وضع مصدر للفولتية في شبكة LR_2 . وأن حالة من هذا النوع يمكن دائماً التعرف عليها بالتمعن بالشبكة قبل أن يدخل أي مصدر، والا فسيكون الناتج دالة تحويلية ذات قيمة تساوي صفرًا. وعندما تساوي $H(s)$ صفرًا فلن يكون هناك أية معلومات حول الترددات الواصفة للاستجابة الطبيعية، لذلك يجب اختيار مكان مناسب للمصدر وإن شبكة من هذا النوع موجودة في نهاية الفصل ولا ينبه المؤلفان على وجه التحديد أي مسألة هي تاركين للطالب محاولة إيجادها

الحالة الأخرى تدخل عدة أقطاب في الدالة التحويلية، وتلك الحالة هي كما في المعادلة 22 ويمكن أن نجد s_2 و s_4 و s_{10} وتكون متطابقة. ان دالات تحويلية

من هذه الصيغة ستعالج بصورة ايسط بتحويلة لابلاس وسنؤجل اعتبار كل المسائل من هذا النوع حتى الفصل العشرين . على كل حال أنه من المسلمي ان نلاحظ دوائر RLC الحرجة المضائلة (الحرجة التلاشي) في الفصل السابع والتي تعطي زوجاً من الأقطاب وصيغة استجابتها الطبيعية تلقي بعض الضوء على النتائج التي سنجدها فيما بعد .

لنحاول استعمال هذا الأسلوب بمثالين . الدائرة الأولى خالية من المصدر وميينة في الشكل 20 - 13 . والمطلوب هو تعبير ل i_1 و i_2 للفترة $t > 0$ وبمساعدة الظروف الابتدائية $i_1(0) = i_2(0) = 11 \text{ A}$. لندخل مصدر للفتولية يبين النقطتين x و x' ونجد الدالة التحويلية $H(s)$ والتي تساوي $I_1(s)/V_s$. والتي بالواقع هي مسابرة الدخل التي يلاقيها مصدر الفتولية .



الشكل 21 - 13

دائرة مطلوب ايجاد استجابتها الطبيعية i_1 و i_2

$$I_1(s) = \frac{V_s}{2s + 1 + 6s/(3s + 2)} = \frac{(3s + 2)V_s}{6s^2 + 13s + 2} \quad \text{أو}$$

$$H(s) = \frac{I_1(s)}{V_s} = \frac{1/2(s + 2/3)}{(s + 2)(s + 1/6)}$$

ولذلك يجب ان يكون i_1 بالصيغة

$$i_1(t) = Ae^{-2t} + Be^{-t/6}$$

ولأكمال الحل تستعمل الظروف الابتدائية المعطاة لاجاد قيمتي A و B . مع تمكننا من ايجاد صيغ للحل بسرعة فان الطريقة لحساب الثابتين المجهولين في هذا النظام ذي الدرجة الثانية وهو مماثل لذلك المستعمل لدوائر RLC في الفصل السابع . وأن أي توفير بالجهد سيكون بعد دراسة تحويلة لابلاس . لغرض التمرين دعنا نكمل الحل للتيار i_1 . حيث $i_1(0)$ يساوي 11A لذلك

$$11 = A + B$$

المعادلة الضرورية الأخرى تكون بمفاضلة i_1

$$\left. \frac{di_1}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{11+22}{2} = -2A - 1/6B$$

لذلك A تساوي 8 و B تساوي 13 والحل المطلوب هو

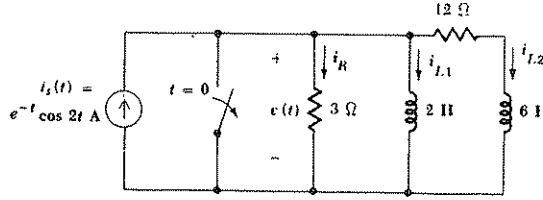
$$i_1(t) = 8e^{-2t} + 3e^{-t/6}$$

الترددات الطبيعية للتيار i_2 هي نفسها تلك لـ i_1 وحساب الثابتين يوصلنا الى

$$i_2(t) = 12e^{-2t} - e^{-t/6}$$

وكما في المثال السابق لا بد من ايجاد الاستجابة الكاملة $v(t)$ للدائرة المبينة في الشكل 21 - 13 . وعندما كان المفتاح في وضع الغلق قبل $t = 0$ ، كانت كل الفولتيات والتيارات الى اليمين من المفتاح ابتدائياً تساوي صفراً . وان فولتية ستظهر عبر المفتاح عند فتحه عند $t = 0$ ولا بد من ايجادها . وهذه الاستجابة مؤلفة من كل من الاستجابة المرغمة والاستجابة الطبيعية

$$v(t) = v_n(t) + v_f(t)$$



الشكل 21 - 13 الاستجابة الكلية للدائرة وجدت بمساعدة تردداتها الحرجة

كل من هاتين الاستجابتين يمكن ايجادهما اذا علمنا تركيبة الأقطاب والأصفار للدالة التحويلية $H(s) = V(s)/I_s$ ، والتي هي أيضاً ممانعة الادخال للجزء من الشبكة على يمين المفتاح . حيث لدينا

$$V(s) = \frac{I_s}{\frac{1}{3} + 1/2s + 1/(6s + 12)}$$

أو بعد الجمع والفضل

$$H(s) = \frac{V(s)}{I_s} = \frac{3s(s+2)}{(s+1)(s+3)} \quad (23)$$

والآن صيغة الاستجابة الطبيعية يمكن أن تكتب

$$v_n(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t}$$

لايجاد الاستجابة المرغمة يضرب تيار حيز التردد $I_s(s)$ بممانعة الادخال او الدالة التحويلية ، ثم تحسب قيمة الاستجابة عندما s تساوي $2+j-1$ حيث تساوي قيمة $I_s(s)$ واحداً أيضاً .

$$V(s) = I_s(s)H(s) = 3 \frac{(-1+j2)(1+j2)}{j2(2+j2)}$$

ولذلك

$$V(s) = 1.875\sqrt{2} \angle 45^\circ$$

وبالتحويل الى حيز الزمن يكون لدينا

$$v_f(t) = 1.875\sqrt{2} e^{-t} \cos(2t + 45^\circ)$$

والاستجابة الكاملة تساوي

$$v(t) = Ae^{-t} + Be^{-3t} + 1.875\sqrt{2} e^{-t} \cos(2t + 45^\circ)$$

وبما أن التيار خلال المحاثتين في البداية هو صفر ، فالتيار الابتدائي الذي يساوي أمبيراً واحداً يجب أن يمر خلال المقاوم $3-\Omega$

$$v(0) = 3 = A + B + \frac{1.875\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

ومرة أخرى من الضروري أن نأخذ التفاضل ومن ثم الحصول على ظرف ابتدائي من

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 1.875\sqrt{2} \left(-\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - A - 3B$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = -5.625 - A - 3B \quad (25)$$

القيمة الابتدائية لمعدل التغير بتحليل الدائرة . وعلى كل حال هذه المعدلات من التغير والتي من السهل جداً ايجادها وهي تفاضل تيارات المحث ، كما أنه ليس من الصعب ايجاد القيم الابتدائية لفولتية المحاثه $v = L di/dt$ سنعتبر عن الاستجابة $v(t)$ بدلالة تيار المقاوم .

$$v(t) = 3i_R$$

ومن ثم نطبق قانون كرشوف للتيار

$$v(t) = 3i_s - 3i_{L1} - 3i_{L2}$$

والآن يمكن أخذ التفاضل

$$\frac{dv}{dt} = 3 \frac{di_s}{dt} - 3 \frac{di_{L1}}{dt} - 3 \frac{di_{L2}}{dt}$$

ولحد الأول قيمة V/s -3 توجد عند مفاضلة دالة المصدر ثم حساب القيمة عند $t = 0$ والحد الثاني يساوي عددياً ثلثا الفولتية الابتدائية عبر المحث $2-H$ أو

والحد الاخير هو -1.5 V/s ولذلك $\frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} = -9$

ومن الممكن استعمال المعادلة (24) والمعادلة (25) لتعيين الاتساعات المجهولة .

$$A = 0 \quad B = 1.125$$

اذن الاستجابة الكاملة هي

$$v(t) = 1.125e^{-3t} + 1.875\sqrt{2}e^{-t} \cos(2t + 45^\circ)$$

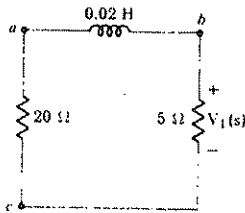
على الرغم من الطريقة المفضلة والتي يجب اتباعها لحساب اتساعات معاملات الاستجابة الطبيعية ويجب أن لاتهمل السهولة والسرعة في ايجاد صيغة الاستجابة الطبيعية ماعدا تلك الحالات التي يمكن ايجاد المقادير الابتدائية وتفاضل الاستجابة فيها بصورة بديهية .

تمارين

13 - 16 عين الدالة التحويلية $H(s)$ والتي تساوي $V_1(s)/I_1$ والترددات الطبيعية الموجودة في الاستجابة $v_1(t)$ اذا ربط مصدر للتيار I_1 بصورة فجائية في شبكة الشكل 22 - 13 عبر العقد (أ) a و b ; (ب) a و c و (ج) b و c

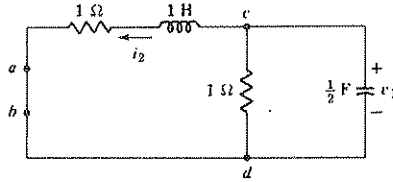
الجواب

$$\text{Ans: } \pm \frac{5s}{s+1250}, -1250; \pm \frac{5000}{s+1250}, -1250; \pm \frac{5s+5000}{s+1250}, -1250 \text{ (}\Omega, s^{-1}\text{)}$$



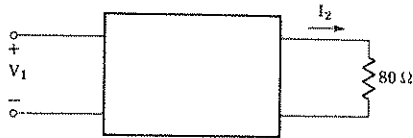
الشكل 22 - 13 انظر التمرين 16 - 13

17 - 13 أوجد الترددات الطبيعية الموجودة (أ) في الأستجابة الطبيعية $v_{in}(t)$ لدائرة الشكل 23 - 13 ، إذا ربط مصدر $v_s(t)$ بصورة فجائية في مكان دائرة القصر بين a و b (ب) للاستجابة الطبيعية $i_{2n}(t)$ إذا ربط مصدر $i_s(t)$ بصورة فجائية عبر العقدتين c و d في الشكل نفسه
 الجواب $-1.5 \pm j1.323; -1.5 \pm j1.323 \text{ s}^{-1}$



الشكل 23 - 13 انظر التمرين 17 - 13

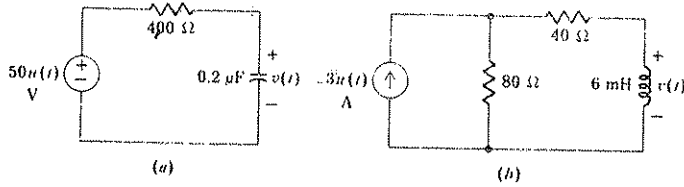
18 - 13 في الشكل 24 - 13 ، الدالة التحويلية i_2/v_1 معطاة بـ $8(s+5)/(s+20)$ (أ) إذا كانت v_1 تساوي $10e^{-5t} \text{ V}$ اوجد الاستجابة المرغمة $i_2(t)$ (ب) إذا كانت v_1 تساوي 20 V . اوجد الاستجابة الطبيعية $i_2(t)$ (ج) إذا كانت v_1 تساوي $20u(t) \text{ V}$ اوجد الاستجابة الكاملة $i_2(t)$
 الجواب $40; -20e^{-5t}; (40 - 40e^{-20t})u(t) \text{ A}$



الشكل 24 - 13 انظر التمرين 18 - 13

مسائل

- 1 □ أوجد الترددات الحرجة المرافقة للاستجابة الطبيعية لدائرة RLC المتواليّة الخالية من المصدر والتي فيها $L = 10\text{ H}$ و $C = 250\ \mu\text{F}$ و R تساوي (أ) $500\ \Omega$; (ب) $320\ \Omega$
- 2 صف الترددات المركبة والمثثلة في الفولتية $v(t)$ لكل دائرة مبينة في الشكل 25 - 13 للفترة بعد $t = 0$



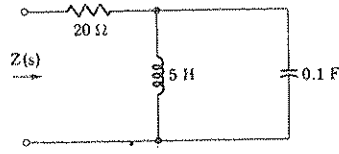
الشكل 25 - 13 انظر المسألة 2

- 3 فولتية طورية معرفة بالمعادلة $100 = 8V/s + (5 + 2s)V$ أوجد (أ) V بدلالة s (ب) $s = -2 + j5$ عند $v(0.5)$ (ج) $s = -2 + j5$ عند $v(t)$ (د) $s = -2 + j5$ عند $v(0.5)$

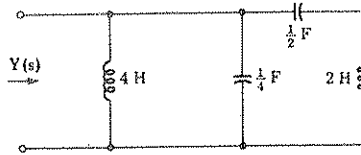
- 4 □ (أ) إذا كان $i_1(t) = 2e^{-1000t} \cos(1000t - 35^\circ)\text{ mA}$ أوجد الطوري الممثل بمجموع هذين التيارين . (ب) أوجد الطوري المائد لـ $i_2(t) = 4e^{-1000t} \sin(1000t + 20^\circ)\text{ mA}$
- $i(t) = 2e^{-3t}(3 \cos 50t + 2 \sin 50t)\text{ mA}$

- 5 (أ) أوجد $Z(s)$ لشبكة الشكل 26 - 13 كنسبة لمتعدتي الحدود لـ s . (ب) عند أي قيم لـ s تساوي Z صفراً؟ احسب $Z(s)$ عندما تساوي s (ج) 0 (د) -4 (هـ) $-4 + j3$ (و) $-4 - j3$ (ز) عند أي قيم لـ $Z = 19 + j2\ \Omega$

- 6 (أ) أوجد $Y(s)$ لشبكة الشكل 27 - 13 كنسبة لمتعدتي الحدود لـ s . (ب) في أي قيم لـ s تساوي $Y(s)$ صفراً؟ (ج) في أي قيم لـ s تساوي $Y(s)$ صفراً؟ احسب $Y(s)$ عندما s تساوي (د) -4 (هـ) $j5$ (و) $-j5$

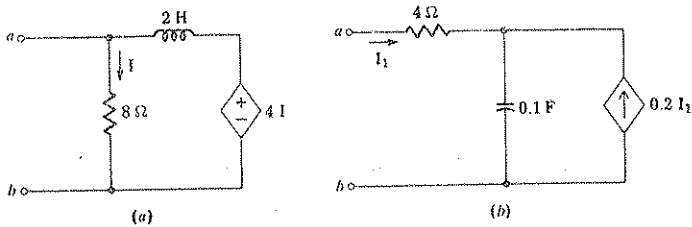


الشكل 26 - 13 انظر المسألة 5



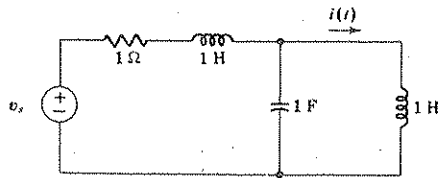
الشكل 27 - 13 انظر المسألة 6

7 أوجد مكافئ ثيفنن لكل من الشبكتين المبينة في الشكل 28 ... 13 .



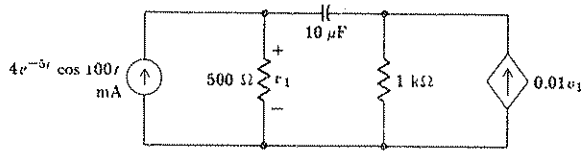
الشكل 28 - 13 انظر المسألة 7

8 أوجد $i(t)$ عند $t = 0.5 s$ في الدائرة المبينة في الشكل 29 - 13 إذا كان v_s يساوي $10 V$ (ب) $10 \cos 2t V$ (ج) $10e^{-3t} V$ (د) $10e^{-3t} \cos 2t V$.



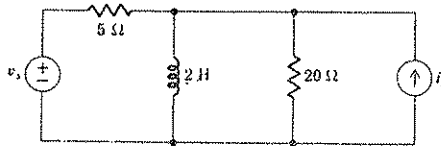
الشكل 29 - 13 انظر المسألة 8

9 أوجد $v_1(t)$ في دائرة الشكل 30 - 13 .



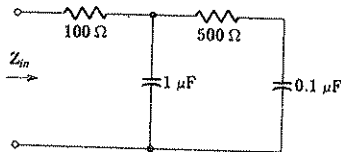
الشكل 30 - 13 انظر المسألة 9

10 إذا كان $v_s = 20e^{-t} \cos 3t$ V بينما $i_s = 3e^{-3t} \cos 4t$ A في دائرة الشكل 31 - 13 أوجد الطاقة المخزنة في المحث عندما t تساوي صفراً .



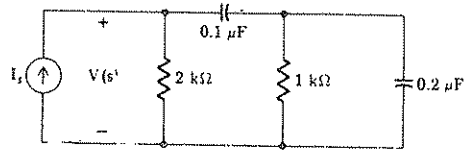
الشكل 31 - 13 انظر المسألة 10

11 أوجد Z_{in} بدلالة σ لشبكة RC في الشكل 31 - 13 ثم احسب الترددات الحرجة وخطط $|Z_{in}(\sigma)|$ بدلالة σ .



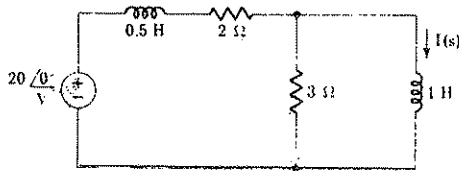
الشكل 32 - 13 انظر المسألة 11

12 (أ) أوجد تعبير لـ $I(s)$ في دائرة الشكل 33 - 13 وعين جميع الترددات الحرجة (ب) خطط $|I(\sigma)|$ مع تغيير σ حيث تتغير σ كالآتي $-30 \leq \sigma \leq 10$.



الشكل 33 - 13 انظر المسألة 12

- 13 أوجد جميع الترددات الحرجة للنسبة $V(s)/I_s$ ، لدائرة الشكل 34 - 13 وخطط القيمة المطلقة لهذه النسبة بدلالة σ .

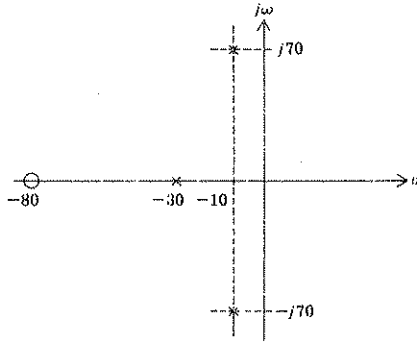


الشكل 34 - 13 انظر المسألة 13

- 14 ممانعة ما لها قطب عند $s = -2$ وقطب آخر عند $s = -4$ وصفر عند $s = -3$ إذا كانت $Z(-1) = 10 \Omega$ (أ) أوجد تعبير لـ $Z(s)$ كدالة لتعددتي الجذور لـ s (ب) خطط $|Z(\sigma)|$ وزاوية $Z(\sigma)$ بدلالة σ

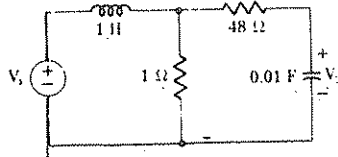
- 15 أحد الترددات الحرجة لممانعة دائرة RLC المتوالية يحدث عند $s = -4 + j10$ إذا كانت أقل قيمة مطلقة للممانعة هي 100Ω عين (أ) R (ب) L (ج) C

- 16 تركيبية الأقطاب والأصفار لكسب الفولتية V_{out}/V_{in} مبينة في الشكل 13 - 35 . إذا كان الكسب هو -3 عند $s = -50$ (أ) أكتب التعبير V_{out}/V_{in} كنسبة بين متعددتي حدود لـ s . (ب) اعط القيمة المطلقة والاتجاه لكل سهم مرسوم من التردد الحرج إلى النقطة $s = j70$ (ج) احسب v_{out}/v_{in} عند $s = j70$



الشكل 35 - 13 انظر المسألة 16

- 17 المسايرة $Y(s)$ معروف انها تساوي $5(s^2 + 50s + 400)/(s^2 + 40s + 4000)$ (أ) $Y(s)$ عين كل الترددات الحرجة في المخطط البياني للاقطاب والأصفار (ب) خطط $|Y(s)|$ بدلالة σ عندما تساوي ω صفراً وتكون $10 \leq \sigma \leq -70$ (ج) خطط $|Y(s)|$ بدلالة ω عندما تساوي، صفراً وتكون $200 \leq \omega \leq -200$ في دائرة الشكل 13-36، (أ) اوجد تعبير للنسبة $V_2(s)/V_1(s)$ (ب) خطط الرسم البياني للاقطاب والأصفار للدالة. (ج) بالتمعن في الرسم البياني للاقطاب والأصفار عين في اي قيمة لـ $|V_2(j\omega)/V_1(j\omega)|$ تكون ω في قيمتها العظمى واحسب تلك القيمة.

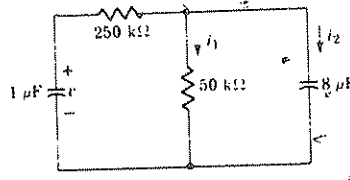


الشكل 36 - 13 انظر المسألة 18

- 19 وضعية الأقطاب والأصفار لممانعة الادخال تظهر صفراً عند $s = -50$ وقطباً عند $s = -20 \pm j30$ (أ) عين القيمة العظمى وزاوية كل قيمة من تردد حرج ما الى النقطة $s = j20$. (ب) احسب النسبة (مركبة) لـ $Z_{in}(j20)$ الى $Z_{in}(j40)$

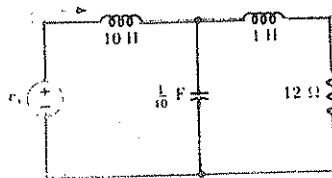
- 20 مسايرة الادخال لها بالضبط قطب واحد وصفر واحد ، قيمتها تقرب من $0.01 U$ كلما تقربت s من اللانهاية . عين $Y(s)$ اذا كانت (أ) $Y(0) = 0.05 U$ و $Y(-5) = -0.05 U$; (ب) $Y(0) = 0.05 U$ و $|Y(j5)| = 0.02 U$ (ج) $|Y(j5)| = 0.05$ و $|Y(j10)| = 0.04 U$

- 21 التسعة في الدائرة المبينة في الشكل 37 - 13 تحمل شحنة م عند $t = 0$. أوجد الترددات الموجودة في الاستجابة المعينة لقيم $t > 0$. (أ) $i_1(t)$ في (ب) $i_2(t)$ (ج) $v_c(t)$



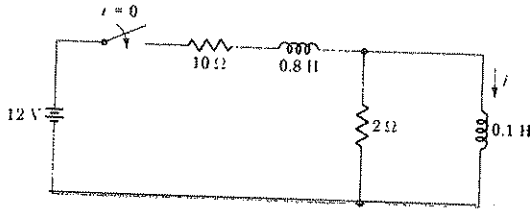
الشكل 37 - 13 انظر المسألة 27

- 22 أوجد كل الترددات المركبة الموجودة في الاستجابة الكاملة $i(t)$ في الشكل 38 - 13 عند قيم $t > 0$ اذا كان v_c يساوي (أ) $60u(t)V$; (ب) $60u(t) \cos 12t V$



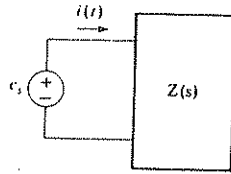
الشكل 38 - 13 انظر المسألة 22

- 23 أوجد $i(t)$ كل قيم في الدائرة المبينة في الشكل 39 - 13 .



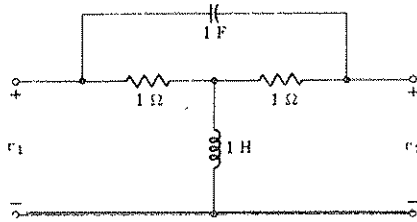
الشكل 39 - 13 انظر المسألة 23

24 الممانعة $Z(s)$ في الشكل 40 - 13 - 40 لها اصفار بسيطة عند $s = -3$ و $s = -5$ وزوج من الاقطاب البسيطة عند $s = -2 \pm j6$ وكذلك $Z(\infty) = 1$. (أ) اذا كانت $v_s = 4u(t)e^{-t} \cos(3t + 30^\circ)$ أوجد $i(t)$. (ب) اذا كانت $v_s = 4u(t)e^{-t} \cos(3t + 30^\circ)$ أوجد كل قيم $t > 0$. اذا كانت الطاقة المخزونة تحتاج الى الظروف الابتدائية التالية $i(0^+) = 12$ و $i'(0^+) = -8$.



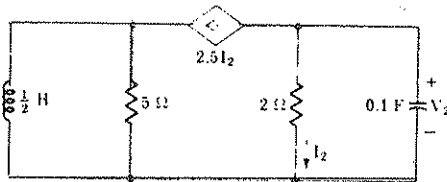
الشكل 40 - 13 انظر المسألة 24

25 في شبكة قنطرة T للشكل 41 - 13 افرض أن النهايتين في جهة اليمين تمثلان دائرة مفتوحة (أ) عين الدالة التحويلية $H(s)$ والتي تساوي $V_2(s)/V_1(s)$. (ب) اذا كانت $v_1(t) = u(t)$ أوجد $v_2(t)$.



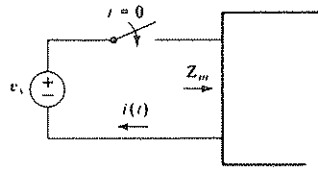
الشكل 41 - 13 انظر المسألة 25

- 26 للدائرة المبينة في الشكل 42 - 13 عين (أ) الدالة التحويلية V_2/I_{r1} اذا كان المصدر I_{r1} على التوازي مع المحث مع كون السهم يؤشر الى الأعلى : (ب) الدالة التحويلية V_2/I_{r2} ، اذا كان المصدر I_{r2} على التوازي مع المتسعة مع كون السهم يؤشر الى الأعلى (ج) الدالة التحويلية V_2/V_{r1} ، اذا كان المصدر V_{r1} على التوالي مع المحث مع كون النقطة المرجعية الموجبة في الاعلى . (د) صفة الاستجابة الطبيعية



الشكل 42 - 13 انظر المسألة 26

- 27 ممانعة الادخال للشبكة التي في داخل الصندوق المبين في الشكل 41 - 13 معطاة بالصيغة $Z_{in}(s) = 100(s + 200)/(s + 1000)\Omega$. (أ) اذا كانت $v_s = 25u(t) \text{ V}$ أوجد $i(t)$ لقيم $t > 0$ اذا كان $i(0^+) = 0.25 \text{ A}$: (ب) أعد العملية اذا كان $v_s = 25u(t) \cos 500t \text{ V}$ $i(0^+) = 0.25 \text{ A}$.



الشكل 43 - 13 انظر المسألة 27

الفصل الرابع عشر

استجابة التردد

FREQUENCY RESPONSE

1 - 14 مقدمة INTRODUCTION

استجابة التردد هو الموضوع الذي طرح عدة مرات سابقاً. ففي الفصل المباشر ناقشنا الخطوط البيانية للمسايرة والممانعة والتيار والفولتية كدوال لـ ω . كما عرض مفهوم القطب - الصفر كمفهوم مساعد لانشاء وترجمة مدلول منحنيات الاستجابة وترجمته. كما تمت مناقشة الاستجابة كدالة لتردد التوهين σ من المنطلق نفسه في الفصل السابق. وفي ذلك الوقت وسنا مفهومنا أيضاً للتردد وقدمنا التردد المركب s ومستوى s . ووجدنا بأن تخطيط الترددات الحرجة للاستجابة على مستوى التردد المركب يساعدنا لربط الاستجابة المرغمة سوية مع الاستجابة الطبيعية. وان الترددات الحرجة نفسها ظهرت لنا مع شكل الاستجابة الطبيعية مباشرة تقريباً كما ان تفحص نموذج الصفيحة المطاطية بالأبعاد الثلاثة أو أداء المتجهات المرسومة من كل تردد حرج الى تردد الفحص. كل ذلك أعطانا معلومات قيمة تخص تغير الاستجابة المرغمة وسوف ندرس تغيراً ما بصورة خاصة مع التردد نصف القطري ω . ولنسأل أنفسنا لماذا نهتم بالاستجابة للدالات المرغمة الجيبية وهي نادراً ماتدخل في المسائل العلمية هكذا؟ إن صناعة القدرة الكهربائية هي المحل الفريد الذي تظهر فيه أشكال الموجات الجيبية كلياً ولو انه من الضروري اعتبار ترددات أخرى تظهر بسبب خاصية اللاخطية لبعض الأجهزة. اما في معظم الأنظمة الكهربائية الأخرى فتكون الدالات المرغمة والاستجابات غير جيبية. وفي أي نظام يتم فيه إرسال المعلومات فإن الجيبى نفسه ليس له قيمة لمدم احتوائه على أي معلومات لأن قيمها المستقبلية هي معروفة بالضبط نتيجة معرفة قيمها الماضية. هذا بالإضافة الى أنه عند اكتمال فترة كاملة فإن أي شكل موجة دورية حتى اللاجيبية أيضاً لاتحوي معلومات إضافية.

أن التحليل الجيبي على أية حال يجهزنا باستجابة الشبكة كدالة ل ω وعملنا القادم في الفصلين التاسع عشر والعشرين سوف يكون منصباً على تطوير طرق لحساب استجابة الشبكة للأشارات الدورية (والتي يمكن أن تحوي معلومات عالية) من استجابة التردد الجيبية المعلومة .

وأن استجابة التردد لشبكة تجهزنا بمعلومات مفيدة بذاتها على أية حال . دعنا نفترض بأنه وجد. أن دالة مرغمة معينة تحوي عناصر جيبية لها ترددات بالمدى 10 Hz الى 100 Hz . والآن دعنا نتصور بأن هذه الدالة المرغمة سلطت على شبكة لها خواص بحيث أن جميع الفولتيات الجيبية بالترددات من الصفر الى 200 Hz المسلطة على نهايتي الدخل تظهر بضعف قيمتها على نهايتي الاخراج بدون الاختلاف في زاوية الطور . وان الدالة الخارجة تكون صورة طبق الأصل غير مشوهة للدالة الداخلة . ولكن بضعف الاتساع فاذا كان للشبكة استجابة تردد بحيث أن قيم الدخول الجيبية بين 10 Hz الى 50 Hz تضرب بعامل يختلف عن الترددات 50Hz الى 100 Hz فان الخرج بصورة عامة سوف يشوه . وسوف لن تكون نوعاً مكبراً من أنواع اشارات الادخال . وان هذا الخرج المشوه ربما يكون مرغوباً في بعض الحالات وغير مرغوب في حالات اخرى . اي إن استجابة تردد الشبكة ربما تختار بشكل متعمد لرفض بعض عناصر التردد للدالة المرغمة أو للتأكيد على عناصر أخرى .

وان أهمية استجابة التردد لاتقتصر على النظم الكهربائية على اية حال فان فهم استجابة التردد الكهربائية يساعد بالتأكيد في تحليل استجابة التردد مثلاً لنظام ميكانيكي . فلو أننا اعتبرنا عملية اطلاق سفينة الفضاء فان الرافعة تعرض السفينة بكاملها الى اهتزازات لاجيبية متطرفة حيث تكون الدالة المرغمة الميكانيكية ذات مكونات تردد من بضعة ذبذبات ربما الى 50 هرتز . وان أجزاء الهيكل لكل مرحلة سوف تعرف او تشوه الاستجابة الميكانيكية بكمية تعتمد على المكونات الجيبية لقوى الاهتزاز وكذلك على استجابة التردد للهيكل من هذه المعلومات يمكن التنبؤ فيما اذا كانت سفينة الفضاء تتحمل عملية الاطلاق العنيفة أو لاتتحملها .

فاذا وجد أن الاستجابة الميكانيكية لبعض ترددات الاهتزاز عالية فإن تلك المكونات لاهتزاز المعزز booster يجب أن تقلل وان يعاد تصميم الهيكل الساند او ان يجهز بمضائلة الاهتزاز (مرشحات) .

هذا المثال يجب أن لا يجعلنا نفكر بأنه من غير المرغوب فيه معرفة استجابة الشبكة لتردد معين اذا كان أكبر من الأستجابة منه لجميع الترددات الأخرى . وإن هذا التصرف هو خاصية دوائر التوليف كما سنرى في هذا الفصل فعند مناقشة الرنين سوف يكون باستطاعتنا تطبيق جميع الطرق التي ناقشناها بواسطة استجابة التردد .

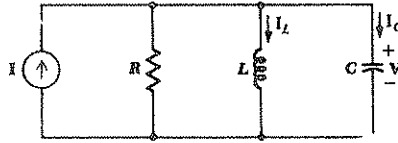
2- 14 رنين التوازي PARALLEL RESONANCE

في هذه الفقرة سوف نبدأ بدراسة خاصة مهمة جداً والتي ربما تحدث في الدوائر التي تحوي كلاً من المحثات والمتسمعات . وتدعى الخاصية بالرنين وربما تشرح بصورة عامة بأنها الحالة التي تظهر في أي نظام فيزيائي عندما تولد دالة جيبيية ذات اتساع ثابت استجابة بأقصى اتساع . على أية حال غالباً ما نتكلم عن الرنين على أنه يحدث حتى حينما تكون الدالة المرغمة غير جيبيية . وربما يكون نظام الرنين كهربائياً أو ميكانيكياً أو هيدروليكياً أو صوتياً أو أي نوع آخر ولكننا سوف نركز انتباهنا على النظم الكهربائية . وسوف نعرف الرنين بدقة أكثر فيما يأتي .

الرنين : هو خاصية معروفة فالقفز أعلى وأسفل والمسلط على دعامة السيارة على سبيل المثال يمكن أن يضع العجلة بحاجة بحركة رنين كبيرة اذا كان القفز يتم بتردد مناسب (تقريباً قفزة لكل ثانية) خاصة اذا كان كاتم الصدمات مستهلك وقديم نوعاً ما . على أية حال اذا زيد تردد القفز أو أنقص فإن استجابة التردد للسيارة سوف تقل بشكل ملحوظ عن السابق . وبتوضيح أكثر يكون في الحالة الشائعة وهي أن مغني الأوبرا الذي بإمكانه تكسير كؤوس الكريستال عن طريق نغمة منتجة جيداً بتردد مناسب . ففي كل من هذين المثالين ناقشنا التردد الذي يمكن تنظيمه الى أن نحصل على الرنين ومن الممكن أيضاً تنظيم حجم وشكل ومادة الجسم الميكانيكي المهتز . ولكن ربما لا يمكن تحقيق ذلك بسهولة فيزيائياً .

وإن حالة الرنين ربما تكون مرغوبة او غير مرغوبة ويعتمد ذلك على الفرض الذي يؤديه الفيزيائي . ففي مثال السيارة اعلاه فإن اهتزازاً ذا اتساع كبير ربما يساعد لعزل دعامتي سيارتين متعاشقتين ولكن لا يكون ذلك مناسباً عند السرعة 55 ميل بالساعة (88.5 كيلومتر بالساعة)

دعنا الآن نعرف الرنين بدقة أكثر ففي الشبكة الكهربائية ذات النهايتين التي تحوي على الأقل محثاً واحداً ومتسعة واحدة فإن الرنين هو الحالة التي تظهر عندما تكون ممانعة الدخل للشبكة مقاومة نقية . لذا فإن الشبكة يقال أنها في حالة رنين (ترن) حينما تكون الفولتية والتيار في نهايتي الإدخال بالطور نفسه . وسوف نجد أيضاً بأن أقصى اتساع للاستجابة يحدث في الشبكة حينما تكون في حالة رنين أو مايقرب من حالة الرنين .



الشكل 1 - 14 المزيج المتوازي من مقاوم ومحث ومتسعة والذي يدعى عادةً بدائرة رنين التوازي

وسوف نطبق تعريف الرنين على شبكة RLC المتوازية المبينة في الشكل 1 - 14 ففي كثير من الحالات العملية تكون هذه الدائرة أحسن تقريباً للدائرة التي نبنيها في المختبر بربط المحاثة الفيزيائية على التوازي مع المتسعة الفيزيائية حينما يفذي هذا المزيج المتوازي من مصدر طاقة له ممانعة اخراج عالية . فالمسايرة المواجهة لمصدر التيار المثالي هي :

$$Y = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (1)$$

وعليه يحصل الرنين عندما

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

فحالة الرنين تتحقق بتغيير L أو C أو ω وسوف نركز انتباهنا على الحالة التي تتغير فيها ω . لذا فإن تردد الرنين ω_0 هو .

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} \quad (3)$$

وتردد الرنين ω_0 يشابه تردد الرنين المعرف في المعادلة (10) في الفصل السابع .

وإن هيئة القطب - الصفر لدالة المسايرة يمكن أن تعطى فائدة كبيرة هنا . إذا أعطيت $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs$$

$$Y(s) = C \frac{s^2 + s/RC + 1/LC}{s} \quad (4)$$

وربما نعرض الأضفار $Y(s)$ بتخلييل البسط الى عامليه .

$$Y(s) = C \frac{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}{s}$$

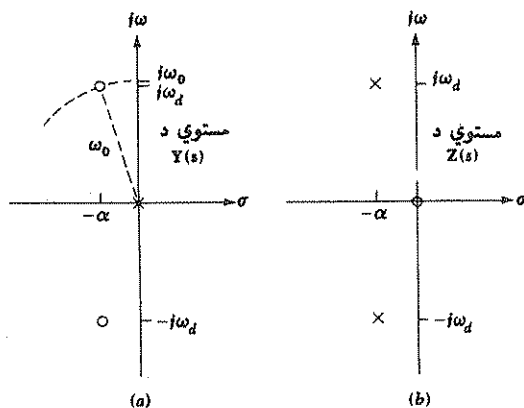
حيث α و ω_d تمثلان الكمييتين اللتين مثلتا عندما ناقشنا الاستجابة الطبيعية لدائرة RLC المتوازية في الفقرة (2 - 7) . أي أن α هي معامل المضاءة الأسي .

$$\alpha = \frac{1}{2RC}$$

وأن ω_d هو تردد الرنين الطبيعي (وليس تردد الرنين ω_0)

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

إن تركيبة الأقطاب والأضفار المبينة في الشكل 2 - 14 (أ) تتبع مباشرة من شكل المعاملات



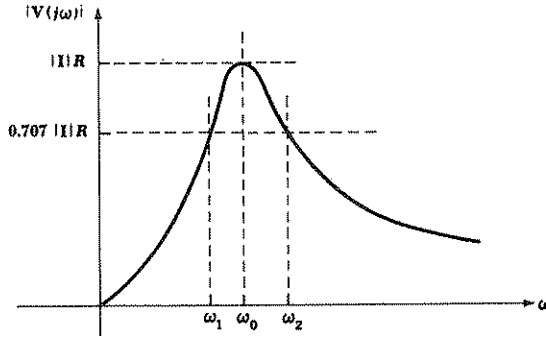
الشكل 2 - 14 (أ) التخطيط للقطب - الصفر لمسايرة دخل دائرة رنين تواز مبينة

في مستوى s حيث $\omega_n^2 = \alpha^2 + \omega_d^2$ ، (ب) تخطيط للقطب - الصفر لممانعة الدخل فعند امعان النظر في العلاقة بين α و ω_d و ω_0 يتضح بأن البعد من نقطة الأصل لمستوى s الى أحد أصفار المسائرة يساوي ω_0 . فعند إعطاء هيئة القطب - الصفر فإن تردد الرنين يمكن الحصول عليه بطريقة تخطيطية مجردة . حيث نرسم قوساً بأستعمال نقطة الأصل على مستوى الـ s كمرکز وامراره خلال أحد الأصفار . وإن تقاطع هذا القوس ومحور $j\omega$ الموجب يعين النقطة $s = j\omega_0$. فمن الواضح بأن ω_0 أكبر قليلاً من تردد الرنين الطبيعي ω_n ولكن نسبة احدهما للآخر تقترب من الواحد كلما زادت النسبة بين ω_d الى α .

بعد ذلك دعنا نختبر اتساع استجابة التردد للفولتية $V(s)$ الموضحة في الشكل 1 - 14 لدى تغير التردد للدالة المرغمة . فعندما نفترض اتساعاً ثابتاً لمصدر تيار جيبي فاستجابة الفولتية تتناسب مع ممانعة الدخل . هذه الاستجابة يمكن الحصول عليها من الخط البياني للقطب - الصفر للممانعة $Z(s)$ المبينة في الشكل 2 - 14 (ب) . فالاستجابة من الواضح أنها تبدأ من الصفر وتصل أقصى قيمة قريباً من تردد الرنين ثم تهبط مرة أخرى الى الصفر عندما تصبح ω مالا نهاية . إن استجابة التردد مرسومة في الشكل 3 - 14 . فالقيمة القصوى للاستجابة موضحة بقيمة R من المرات بقدر قيمة اتساع تيار المصدر وبتطبيق القيمة القصوى لممانعة الدائرة R وأكثر من هذا فان أقصى استجابة مبينة تحدث بالضبط في تردد الرنين ω_0 . وإن الترددين ω_1 و ω_2 واللذين سيستخدمان فيما بعد كمقياس لعرض منحنى الاستجابة مبينان بالشكل ايضاً . دعنا نبين أولاً بأن أقصى قيمة للممانعة هي R وأن هذه تحدث عند الرنين .

وإن المسائرة المشار اليها في (ا) لها موصلية ثابتة وتقبلية تصل الى قيمتها الصغرى (الصفر) عند الرنين . وإن قيمة المسائرة الصغرى على أية حال تحدث عند الرنين وتساوي $1/R$. لذا فان قيمة أقصى ممانعة هي R وتحدث عند الرنين .

وعند تردد الرنين تكون الفولتية عبر دائرة رنين التوازي للشكل 1 - 14 ببساطة IR ونرى بأن تيار المصدر I يسري خلال المقاومة الا أن هناك تياراً يظهر ايضاً في كل من L و C . فللاول $I_{L,0} = IR/j\omega_0 L$ بينما تيار المتسعة عند الرنين هو $I_{C,0} = j\omega_0 CRI$ وبما انه في حالة الرنين $1/\omega_0 C = \omega_0 L$ لذا .



الشكل 3 - 14 اتساع استجابة الفولتية لدائرة رنين توازن مبينة كدالة للتردد

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 C R I \quad \text{وأن (5)}$$

وأن القيمة القصوى للاستجابة والتردد الذي تحدث به لا يمكن ايجادها بهذه السهولة دائماً. ففي دوائر الرنين الأقل قياسية ربما نجد من الضروري التعبير عن قيمة الاستجابة بشكل تحليلي عادة كالجذر التربيعي لمجموع مربع الجزء الحقيقي ومربع الجزء الخيالي. كما يجب أن تفاضل هذا التعبير بالنسبة للتردد فلدى مساواة التفاضل للصفر والحمل نجد التردد عند الاستجابة القصوى. وأخيراً يمكننا تعويض هذا التردد في تعبير القيمة للحصول على أقصى اتساع للاستجابة. وإن هذه الطريقة ربما تستخدم لهذه الحالة لأغراض التمرين ولكن كما شاهدنا بان ذلك غير ضروري.

ويجب التأكيد بأنه على الرغم من أن إرتفاع منحنى الاستجابة للشكل 3 - 14 يعتمد على قيمة R فقط لحد ذي اتساع ثابت فإن عرض المنحنى أو إنحدار جانبيه يعتمد على قيمتي العنصرين الآخرين أيضاً. وسوف نربط بين « عرض منحنى الاستجابة » وقيمته تعرف بدقة أكثر وهي عرض الحزمة. وسوف يكون من المفيد التعبير عن هذه العلاقة بدلالة كمية متغيرة مهمة جداً ألا وهي عامل النوعية Q .

وسوف نجد بأن حدة منحنى الاستجابة لأي دائرة رنين توجد بواسطة القيمة القصوى للطاقة الممكن تخزينها في الدائرة بالمقارنة مع الطاقة الضائعة خلال فترة كاملة للاستجابة. ونعرف Q بانها.

الطاقة القصوى المخزونة

$$Q = 2\pi \frac{\text{مجموع الطاقة الضائعة في دورة}}{\text{مجموع الطاقة الضائعة في دورة}} \quad (6)$$

وان ثابت التناسب 2π مشمول في المعادلة لكي يتم تبسيط تعريف لـ Q أكثر فائدة والذي سنحصل عليه الآن وبما أن الطاقة يمكن أن تخزن فقط في المحث والمتسعة ويمكن أن تفقد فقط في المقاوم ، نستطيع التعبير عن Q بدلالة الطاقة الآنية العائدة الى كل من العنصرين المتفاعلين ومعدل القدرة المبدة في المقاوم .

$$Q = 2\pi \frac{[w_L(t) + w_C(t)]_{\max}}{P_R T}$$

والآن دعنا نطبق هذا التعريف على دائرة RLC المتوازية للشكل 1 - 14 فسنجد قيمة Q عند تردد الرنين . ان هذه القيمة لـ Q تعرف بـ Q_0 ونختار الدالة

$$i(t) = I_m \cos \omega_0 t$$

للتيار ونحصل على استجابة الفولتية المناظرة في حالة الرنين

$$v(t) = Ri(t) = RI_m \cos \omega_0 t$$

ثم إن الطاقة المخزونة في المتسعة هي

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t$$

والطاقة الآنية المخزونة في المحث تصبح

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

لذا

ومجموع الطاقة الآنية المخزونة تكون ثابتة

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

وهذه القيمة الثابتة يجب أن تكون هي أيضاً قيمة قصوى . ولأجل ايجاد الطاقة المفقودة في المقاوم لفترة واحدة نأخذ معدل القدرة الممتصة من قبل المقاوم .

$$P_R T = \frac{1}{2f_0} I_m^2 R$$

ثم نضرب في زمن فترة واحدة لنحصل على

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{L} \int_0^t v dt \right)^2$$

$$w_C(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

وعليه نجد ان عامل الجودة عند الرنين

$$Q_0 = 2\pi \frac{I_m^2 R^2 C / 2}{I_m^2 R / 2f_0}$$

أو أن

$$Q_0 = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC \quad (7)$$

هذه المعادلة « وكذلك التعبير في (8) أدناه » تستخدم فقط لدائرة RLC البسيطة للشكل 1 - 14 ويمكن الحصول على تعابير مكافئة لـ Q_0 والتي غالباً ماتكون مفيدة بتعويض بسيط :

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{X_{L0}} = \frac{R}{X_{C0}} \quad (8)$$

ومن الظاهر أن Q_0 هي ثابت بدون ابعاد والذي هو دالة لجميع عناصر الدائرة الثلاثة في دائرة الرنين المتوازية . وإن فكرة عامل النوعية على أيه حال ليست محدودة بالدوائر الكهربائية أو حتى بالنظم الكهربائية فهي مفيدة لوصف أي خاصية رنين . فعلى سبيل المثال دعنا نأخذ ارتداد كرة لعبة الكولف . فلو فرضنا أن الوزن W وتركنا الكرة من الارتفاع h_1 فوق سطح أفقي صلب جداً (بدون ضياع) فان الكرة تعود الى ارتفاع أقل من السابق h_2 . فالطاقة المخزونة مبدئياً هي Wh_1 والطاقة المفقودة لفترة واحدة هي $W(h_1 - h_2)$. وبذا تكون Q_0

$$Q_0 = 2\pi \frac{h_1 W}{(h_1 - h_2) W} = \frac{2\pi h_1}{h_1 - h_2}$$

ان كرة الكولف المثالية ستعود الى وضعها الاول ويكون Q_0 فيها مالانهاية . والقيمة النموذجية هي 35 . يجب ان يلاحظ بأن Q في هذا المثال الميكانيكي قد حسب من الاستجابة الطبيعية وليس من الاستجابة المرغمة . ان Q لدائرة كهربائية يمكن ان تحسب من معرفة الاستجابة الطبيعية كما موضح في (10) و (11) أدناه . والترجمة الأخرى لـ Q يمكن الحصول عليها عندما نراقب تيارى المحث والمتسعة في حالة الرنين كما هما معطيان في (5)

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 C R I = jQ_0 I \quad (9)$$

لاحظ بان كلا منهما هو Q_0 مضروباً في قيمة تيار المصدر وأن بينهما فرق زاوية طور مقداره 180° فاذا سلطنا 2 mA في حالة تردد الرنين الى دائرة رنين متوازية فيها Q_0 تساوي 50 نجد أن التيار في المقاوم 2 mA و 100 mA في كل من المحث والمتسعة . وإن دائرة رنين متوازية يمكن أن تتصرف كمضخم تيار ولكن ليس كمضخم قدرة وذلك لأنها شبكة غير فعالة .

دعنا الآن نترجم المقادير المتغيرة المتعلقة بدائرة رنين متوازية . فالتغيرات الثلاثة α و ω_d و ω_0 عرضت مبكراً كثيراً لعلاقتها بالاستجابة الطبيعية . والرنين بالتعريف هو أساساً يلزم الاستجابة المرغمة وذلك لأنها تعرف بدلالة ممانعة الدخل المقاومة النقية . ومن مفهوم حالة الاستقرار الجيبية . وإن أهم متغيرين لدائرة الرنين ربما يكونان تردد الرنين ω_0 وعامل النوعية Q_0 . وإن كلا من معامل المضاءة الأسى وتردد الرنين الطبيعي يعبر عنهما بدلالة ω_0 و Q_0

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0/\omega_0 C)C} \quad \text{أو}$$

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \quad \text{أو أن (10)}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \quad \text{الدوائر (11)}$$

وكمرجع مستقبلي من المساعد ملاحظة علاقة اضافة أخرى تشمل ω_0 و Q_0 معامل التربيع الذي يظهر في بسط العلاقة (4)

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}$$

ويمكن أن يكتب بدلالة α و ω_0

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

ففي مجال نظرية النظم ونظرية السيطرة الذاتية جرى التقليد لكتابة هذا العامل بشكل مختلف قليلاً حيث يستخدم فيه المتغير الخالي من الأبعاد ζ (زيتا) (zeta) والذي يدعى بعامل المضاءة .

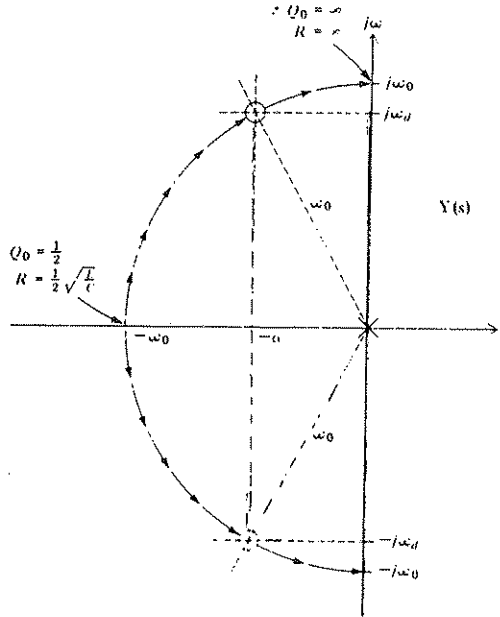
$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

وبمقارنة هذه المعادلات يكون بمقدورنا تنسيب ζ الى المتغيرات الاخرى

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \quad (12)$$

دعنا الآن نترجم Q_0 بدلالة مواقع القطب - الصفر للمسايرة $Y(s)$ لدائرة RLC المتوازية فسوف نحفظ ω_0 ثابتة . ويمكن عمل ذلك على سبيل المثال بتغيير R بينما تبقى L و C ثابتة فكلما زادت Q_0 فإن العلاقة بين α و Q_0 و ω_0 تشير الى أن الصفرين يجب ان يتحركا قريباً من محور $j\omega$ كما تبين العلاقة بين ω_d و ω_0 و Q_0 بأن الأصفر يجب ان يتحرك بأن واحد بعيداً عن المحور σ . وأن الطبيعة المضبوطة للحركة تصبح اوضح عندما نتذكر بأن النقطة التي فيها $s = j\omega_0$ يمكن أن تعين على محور $j\omega$ برسم قوس مركزه نقطة الاصل خلال أحد الأصفرار وفوق محور

$j\omega$ الموجب طالما ان ω_0 تبقى ثابتة فان نصف القطر يجب ان يكون ثابتاً والاصفار يجب أن تتحرك على طول هذا القوس باتجاه محور $j\omega$ الموجب كلما زادت Q_0 . ان الصفرين موضحان على الشكل 4-14 وتبين الاسهم الممر الذي يسلكانه كلما زادت R . حينما تصبح R مالا نهاية فان Q_0 تصبح مالا نهاية ايضاً وان الصفرين يجب ان يوجدوا عندما $s = \pm j\omega_0$ على محور $j\omega$. وكلما قلت R فان الصفرين يتحركان باتجاه محور σ على طول محل هندسي دائري ويتحدان ليكونا صفرأ مضاعفاً على محور σ عند $s = -\omega_0$ حينما $R = \frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ او $Q_0 = \frac{1}{2}$. هذه الحالة يمكن تذكرها كتلك في المضاءلة الحرجة حيث $\alpha = \omega_0$ و $\omega_d = 0$. اما القيم الأقل لـ R والقيمة الاقل لـ Q_0 فتسبب ابتعاد الاصفار وتحركها بالاتجاهات المتعاكسة على محور σ السالب ولكن هذه القيم الواطئة لـ Q_0 هي بالحقيقة ليست نموذجية لدوائر الرنين ولا نحتاج الى الخوض اكثر من ذلك بعدها سنستعمل الخاصية $Q_0 \geq 5$ لنصف دائرة ذات قيم لـ Q عالية. فحينما $Q_0 = 5$ تكون الاصفار واقعة على $s = -0.1\omega_0 \pm j0.995\omega_0$ فان ω_d و ω_0 تختلفان بأقل من نصف الواحد بالمائة.



الشكل 4-14 صفرأ المسابرة $Y(s)$ عند $s = -\alpha \pm j\omega_d$ يكونان محلاً هندسياً لنصف دائرة كلما زادت R من $\frac{1}{2}\sqrt{L/C}$ الى اللانهاية \times

تمارين

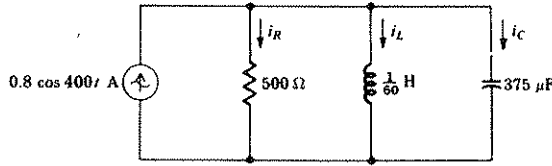
1 - 14 دائرة رنين متوازية تحوي العناصر $R = 2 \text{ k}\Omega$ و $C = 0.05 \mu\text{F}$ و $L = 12.5 \text{ mH}$ أوجد (أ) ω_0 (ب) α (ج) ω_d (د) Q_0 (هـ) ζ .
الاجوبة 4; 0.125; 39.7 krad/s; 40 krad/s; 5000 s⁻¹;

2 - 14 عين الترددات الحرجة الثلاثة اللازمة لدائرة وتبين التوازي التي فيها
 $L = 0.2 \text{ H}$ و $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$. $Q_0 = 20$

الاجوبة 0; $-0.25 \pm j9.997 \text{ s}^{-1}$

3 - 14 في دائرة الشكل 5 - 14 احسب (أ) $i_R(t)$ (ب) $i_L(t)$ (ج) $i_C(t)$

الاجوبة $0.8 \cos 400t$; $-60 \sin 400t$; $60 \sin 400t \text{ A}$



الشكل 5 - 14 انظر المسألة 3 - 14

3 - 14 تفاصيل أكثر عن رنين التوازي

MORE ABOUT PARALLEL RESONANCE

سنستمر بمناقشتنا لرنين التوازي بتعريف ترددات نصف القدرة وعرض الحزمة ومن ثم سنتعمل هذين المفهومين للحصول على جدول الاستجابة التقريبية لدوائر ذات Q عالية .

إن « عرض » منحنى الاستجابة في حالة الرنين كما هو مبين في الشكل 3 - 14 يمكن الآن أن يعرف بصورة أوضح ويربط بـ Q_0 . دعنا أولاً نعرف ترددي نصف القدرة ω_1 و ω_2 بأنهما الترددان اللذان فيهما قيمة مسايرة الدخل لدائرة رنين التوازي أكبر من القيمة في تردد الرنين بالعامل $\sqrt{2}$. وبما أن منحنى الاستجابة للشكل 3 - 14 يستعرض الفولتية الناتجة عبر دائرة التوازي بواسطة

مصدر تيار جيبي كدالة للتردد فان ترددات نصف القدرة ايضاً تعين تلك النقاط التي تكون فيها استجابة الفولتية $1/\sqrt{2}$ أو 0.707 من القيمة القصوى . كما تستخدم نصف القدرة السفلى و ω_2 على أنها تردد نصف القدرة العلوي . وهذه التسميات نشأت من الحقيقة التي فيها الفولتية هي 0.707 من فولتية الرنين وتكافىء مربع فولتية يساوي نصف فولتية الرنين المربعة .
وان عرض الحزمة (نصف القدرة) لدائرة الرنين تعرف بأنها الفرق بين هذين الترددين لنصف القدرة .

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (13)$$

كما ننظر الى عرض الحزمة على أنه « عرض » منحنى الاستجابة ولو أن المنحنى حقيقة يمتد من $\omega = 0$ الى $\omega = \infty$. وبدقة أكثر فان عرض الحزمة لنصف القدرة يقاس بجزء منحنى الاستجابة الذي يساوي 0.707 بالمائة من القيمة القصوى أو أكبر منه .

والآن دعنا نعبر عن عرض الحزمة B بدلالة Q_0 وتردد الرنين . ولأجل عمل ذلك نعبر أولاً عن مسايرة دائرة RLC المتوازية

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \\ Y &= \frac{1}{R} + j \frac{1}{R} \left(\frac{\omega \omega_0 CR}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega \omega_0 L} \right) \quad \text{بدلالة} \\ Y &= \frac{1}{R} \left[1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \quad \text{او} \quad (14) \end{aligned}$$

نلاحظ مرة اخرى بأن قيمة المسايرة في حالة الرنين هي $1/R$ وكما نلاحظ بأن قيمة المسايرة $\sqrt{2}/R$ يمكن أن تحدث فقط عندما يختار التردد بحيث أن الجزء الخيالي للقيمة بين القوسين له قيمة واحدة . لذا

$$Q_0 \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 1 \quad \text{and} \quad Q_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1 \quad \text{وان}$$

وبالحل نحصل على

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} - \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (15)$$

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} + \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (16)$$

ولو أن هذه التعابير غير سهلة الاستخدام فإن الفرق بينها يكون معادلة بسيطة جداً لعرض الحزمة

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (17)$$

وبضرب المعادلتين (15) و (16) ببعضهما ربما يتضح بأن ω_0 هي بالضبط تساوي المعدل الهندسي لترددى نصف القدرة .

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2$$

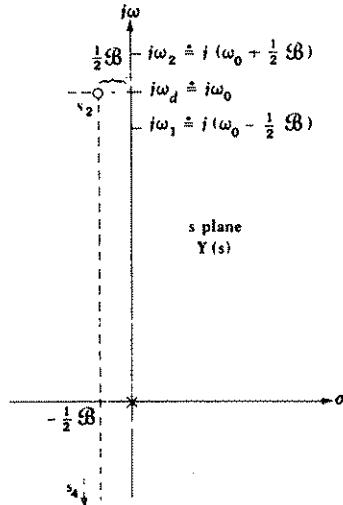
$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

أو

فالدوائر التي لها قيم عالية لـ Q_0 لها عرض حزمة أضيق أي أن منحنى الاستجابة يكون حاداً فأما أن يكون لها اختيار تردد أوسع أو (عامل) جودة عال .

وإن العديد من دوائر الرنين تصمم بشكل متعمد بحيث يكون فيها Q_0 كبيرة لأجل الاستفادة من عرض الحزمة الضيق بهذا يكون انتقاء التردد عالياً . وحينما تكون Q_0 أكبر من 5 من الممكن عمل بعض التقريبات المفيدة في التعابير لترددات نصف القدرة السفلي والعلوي وفي التعابير العامة للاستجابة قريباً من حدود الرنين . دعنا ندع الدائرة بأنها عالية Q إذا كانت Q_0 تساوي 5 أو أكبر من 5 .

إن هيئة القطب - الصفر لـ $Y(s)$ لدائرة RLC المتوازية والتي لها Q_0 تساوي تقريباً 5 تكون كما هو مبين في الشكل 6 - 14 . وبما أن



الشكل 6 - 14 وضعية القطب - الصفر لـ $Y(s)$ لدائرة RLC المتوازية الصفران يقمان بالضبط $\frac{1}{2}B$ rad/s (أو زاوية نصف قطريه / ثانية إلى يسار محور $j\omega$ وما يقرب من $j\omega_0$ rad/s (أو نبيير / ثانية) من محور σ . وإن ترددى نصف القدرة العلوي والسفلي مفصولان بالضبط بمقدار B rad/s . ويمد كل منهما بمقدار $\frac{1}{2}B$ rad/s عن تردد الرنين وتردد الرنين الطبيعي

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} \quad \text{لذا}$$

ان موقعي الصفرين يمكن تقريبهما

$$s_{2,4} = -\frac{1}{2}\beta \pm j\omega_0$$

هذا بالإضافة الى أن موقعي ترددي نصف القدرة (على محور $j\omega$ الموجب) يمكن أيضاً حسابهما بصيغتهما الجيتامية التقريبية .

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right] = \omega_0 \left(1 \mp \frac{1}{2Q_0} \right)$$

أو

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \mp \frac{1}{2}\beta \quad (18)$$

ففي دائرة ذات Q عالية يقع كل تردد نصف القدرة تقريباً على بعد نصف عرض الحزمة من تردد الرنين وهذا موضح في الشكل 6 - 14 .
وأن العلاقات التقريبية لـ ω_1 و ω_2 في (18) ربما تضاف الى بعضها البعض لتبين بأن ω_0 هي تقريباً تساوي المتوسط الحسابي لـ ω_1 و ω_2 في الدوائر ذات الـ Q العالية .

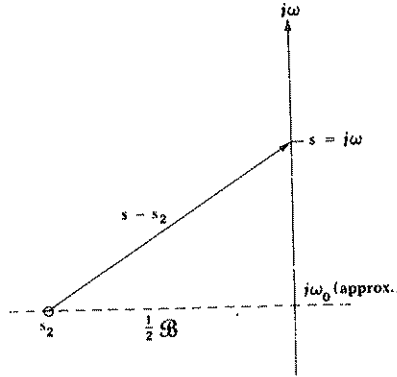
$$\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

والآن دعنا ننظر الى نقطة فحص تقع فوق $j\omega_0$ بقليل على محور $j\omega$ فلأجل حساب المسيرة الممنوحة من قبل شبكة RLC المتوازية عند هذا التردد ننشئ المتجهات الثلاثة من الترددات الحرجة الى نقطة الفحص . فاذا كانت نقطة الفحص قريبة من $j\omega_0$ فان المتجه من القطب هو تقريباً $j\omega_0$ والمتجه من الصفر السفلي هو تقريباً $j2\omega_0$. وان المسيرة تعطى بصورة تقريبية .

$$Y(s) = C \frac{(j2\omega_0)(s - s_2)}{j\omega_0} = 2C(s - s_2) \quad (19)$$

حيث أن ثابت الضرب C يحسب من (4) ولأجل حساب التقريب المفيد للمتجه $(s - s_2)$ دعنا نعتبر المنظار المكبر لجزء من المستوى s بما يجاور الصفر s_2 (الشكل 7 - 14) . فبدالات الاحداثيات المتعامدة نرى ان

$$s - s_2 = \frac{1}{2}\beta + j(\omega - \omega_0)$$



الشكل 7 - 14 جزء مكبر من تركيبة القطب - الصفر لـ $Y(s)$ لدائرة RLC المتوازية ذات Q عالية .

حيث أن هذا التعبير يكون دقيقاً إذا استعويض عن ω_0 بـ ω_n . والآن نعوض هذه المعادلة في القيمة التقريبية لـ $Y(s)$ اعلاه ونخرج $1/2B$ خارج القوس

$$Y(s) = 2C(1/2B) \left(1 + j \frac{\omega - \omega_0}{1/2B} \right)$$

أو

$$Y(s) = \frac{1}{R} \left(1 + j \frac{\omega - \omega_0}{1/2B} \right) \quad (20)$$

فالجاءة $(\omega - \omega_0)/(1/2B)$ ربما يترجم على انه « عدد أنصاف عرض الحزمة بعيداً عن الرنين » ومختصرها N . لذا

$$Y(s) = \frac{1}{R} (1 + jN) \quad (21)$$

حيث

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{1/2B} \quad (\text{عدد نصف عرض الحزمة بعيداً عن الرنين}) \quad (22)$$

فعند تردد نصف القدرة العلوي $\omega_2 = \omega_0 + 1/2B$ ، $N = +1$ وتكون فوق الرنين بمقدار نصف عرض الحزمة . ولتردد نصف القدرة السفلي $\omega_1 = \omega_0 - 1/2B$ بحيث أن $N = -1$ يجعلنا في موقع بنصف عرض الموجة أسفل الرنين .

المعادلة (21) هي أسهل لنا من العلاقات الدقيقة التي شاهدناها سابقاً . وأنها تبين القيمة المطلقة للمسايرة وهي

$$|Y(j\omega)| = \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} \quad (23)$$

بينما زاوية $Y(j\omega)$ تعطى بمقلوب ظل

$$\text{ang } Y(j\omega) = \tan^{-1} N \quad (24)$$

وكمثال لاستخدام هذه التقريبات دعنا نحسب القيمة التقريبية لمسيرة شبكة RLC المتوازية التي فيها $R = 40 \text{ k}\Omega$ و $L = 1 \text{ H}$ و $C = 1/64 \text{ }\mu\text{F}$. نجد أن $Q_0 = 5$. دعنا نقيم $\omega_0 = 8 \text{ krad/s}$ و $\mathcal{B} = 1.6 \text{ krad/s}$ وأن $\frac{1}{2}\mathcal{B} = 0.8 \text{ krad/s}$. دعنا نقيم المسيرة في

$$N = \frac{8.2 - 8}{0.8} = 0.25 \quad \text{لذا}$$

وبهذا نرى أننا نعمل على 0.25 نصف عرض حزمة الرنين. بعدها نحسب

$$\text{ang } Y \approx \tan^{-1} 0.25 = 14.04^\circ$$

وأن

$$|Y| = 25 \sqrt{1 + (0.25)^2} \approx 25.77 \text{ }\mu\text{U}$$

وأن الحساب الدقيق للمسيرة يبين بأن

$$Y(j8200) = 25.75 / 13.87^\circ \text{ }\mu\text{U}$$

وإن الطريقة التقريبية على أية حال تؤدي الى قيم المسيرة وزاويتها التي هي قريبة جداً من الصحة لهذا المثال.

إن غرضنا هو استخدام هذه التقريبات لدوائر عالية الـ Q قريباً من الرنين. وقد اتفقنا على أننا سنفرض أن « الـ Q العالي » تكون عندما $Q_0 \geq 5$ ولكن كيف يكون القريب قريباً؟ يمكن أن تبين بان الخطأ في القيمة أو الطور لا يزيد على 5 بالمائة إذا كانت $Q_0 \geq 5$ و $0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0$. ولو أن هذه الحزمة الضيقة للترددات يمكن أن تكون صغيرة لدرجة المنع ولكن تكون عادة أكثر من كافية لتحتوي مدى الترددات التي تهمننا أكثر من غيرها فمثلاً راديو البيت عادة يحوي دائرة توليف لتردد الرنين 455 kHz بعرض حزمة نصف القدرة تساوي 10 kHz. هذه الدائرة يجب ان تكون قيمة Q_0 لها تساوي 45.5 وترددات نصف القدرة تقريباً 450 و 460 kHz. وتقريبنا على أية حال صحيح من 409.5 الى 500.5 kHz (مع خطأ اقل من 5 بالمائة) المدى الذي يغطي ضرورياً جميع أجزاء القمم لمنحنى الاستجابة فقط من بعد « ذبول » منحنى الاستجابة تعمل التقريبات التي تؤول الى الخطأ الكبير بدون سبب.

دعنا نلخص تغطيتنا لدائرة رنين التوازي باعادة الخلاصات المختلفة التي توصلنا اليها. فان تردد الرنين ω_0 هو التردد الذي به يصبح الجزء الخيالي من المسيرة صفراً أو أن زاوية المسيرة تصبح صفراً. لذا $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. وأما رقم استحقاق الدائرة

Q_0 فيعرف على أنه 2π من المرات بقدر نسبة الطاقة القصوى المخزونة في الدائرة الى الطاقة الضائعة في كل دورة في الدائرة . من هذا التعريف نجد أن $Q_0 = \omega_0 RC$.
وأما ترددنا نصف القدرة ω_1 و ω_2 فيعرفان بالترددات التي بها استجابة الفولتية 70.7 بالمائة من الاستجابة القصوى نفسها . وان التعبيرين الدقيقين والتقريبين (Q_0 العالية) عند هذين الترددين هما

$$\omega_{1,2} = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_0} \right] \approx \omega_0 \mp \frac{1}{2}B$$

حيث B هي الفرق بين ترددات نصف القدرة العليا والسفلى وأن عرض الحزمة لنصف القدرة يعطى بالعلاقة .

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0}$$

ومسايرة الادخال يمكن التعبير عنها بشكل تقريبي لدوائر Q العالية .

$$Y = \frac{1}{R} (1 + jN) = \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} \cdot \underline{\tan^{-1} N} \quad \text{حيث}$$

$$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$$

هذا والتقريب صحيح للترددات التي لا تختلف عن تردد الرنين بأكثر من واحد من عشرة من تردد الرنين .

تمارين

4 - 14 أستعمل (15) و (16) و (18) لحساب القيم الدقيقة والتقريبية لترددى نصف القدرة للدائرة الموصوفة في التمرين 1 - 14 .

الأجوبة $35; 35.31; 45; 45.31 \text{ krad/s}$

5 - 14 أستخدم تقريبات Q العالية لحساب $|Y|$ وزاوية Y للدائرة الموصوفة في التمرين 2 - 14 عندما ω تساوي (أ) 9.1 rad/s ، (ب) 9.95 rad/s (ج)

10.102 rad/s

الأجوبة $25.50; -11.31^\circ; 27.00; 22.20^\circ; 93.41; -74.5^\circ \text{ mU}$

6 - 14 احسب الأجوبة الدقيقة للتمرين 5 - 14

الأجوبة $25.50; -11.34^\circ; 26.98; 22.09^\circ; 97.70; -75.2^\circ \text{ mU}$

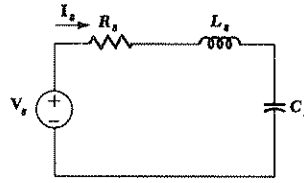
7 - 14 في دائرة الشكل 1 - 14 $C = 470 \text{ pF}$ ، $R = 25 \text{ k}\Omega$ ، $L = 110 \mu\text{H}$ ، $I = 0.5 \text{ mA}$ ،

احسب القيم التقريبية لـ $|V|$ في حالة الرنين $\pm 5 \text{ kHz}$ و $\pm 10 \text{ kHz}$ من الرنين .

الأجوبة $7.01; 7.01; 10.06; 10.06; 12.50 \text{ V}$

4 - 14 رنين التوالي SERIES RESONANCE

من المفيد التعرف على دائرة رنين التوالي ولو أننا من المحتمل أن نجد استعمالاً أقل لدائرة الرنين المتوالي مما يكون عليه الحال في دائرة RLC المتوازية لندرس الدائرة المبينة في الشكل 8 - 14 . ويجب الملاحظة بأن عناصر الدائرة المختلفة أعطيت التوصيف السفلي بالحرف s (دليل التوالي series) وذلك في الوقت الحاضر لأجل منع ارباكها مع عناصر التوازي لدى مقارنة الدوائر .



الشكل 8 - 14 دائرة رنين التوالي

وان مناقشتنا لرنين التوالي استغرقت فقرتين طويلتين . ونستطيع الآن إعطاء دائرة RLC المتواليّة بالمعاملة نفسها ولكن من المهارة تجنب تكرار كهذا . ونستعمل الخاصية الثانية . ولأجل التبسيط دعنا نركز على الخلاصات التي ظهرت في المقطع الأخير للفقرة السابقة عن رنين التوالي . فالنتائج المهمة موجودة هناك وأن استعمال نة الثنائية تمكننا من نسخ هذا المقطع لاطهار النتائج المهمة لدائرة RLC المتواليّة .

دعنا نلخص تغطيتنا لدائرة رنين التوالي باعادة المخصصات المهمة . فتردد الرنين ω_{0s} هو التردد الذي فيه يكون الجزء الخيالي من ممانعة الادخال صفراً أو التخييلية الممانعة تصبح صفراً . ثم $\omega_{0s} = 1/\sqrt{L_s C_s}$. يعرف رقم الاستحقاق Q_{0s} بأنه 2π من المرات بقدر نسبة الطاقة القصوى المخزونه في الدائرة الى الطاقة الضائعة لكل دورة في الدائرة . من هذا التعريف نجد أن $Q_{0s} = \omega_{0s} L_s / R_s$. إن ترددي نصف القدرة ω_{1s} و ω_{2s} يعرفان على أنهما الترددان اللذان فيهما قيمة الممانعة هي $\sqrt{2}$ من المرات بقدر قيمة الممانعة الصغرى . وهذه هي أيضاً الترددات التي تكون فيها استجابة التيار 70.7 بالمائة من الاستجابة القصوى . وان التعبيرين الدقيقين والتقريبين (لـ Q_{0s} العالية) لهذين الترددين هما ،

$$\omega_{1,2s} = \omega_{0s} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_{0s}} \right)^2} \mp \frac{1}{2Q_{0s}} \right] = \omega_{0s} \mp \frac{1}{2} \beta_s$$

حيث أن β_s هو الفرق بين ترددات نصف القدرة العليا والسفلى. وأن عرض الحزمة هذا يعطى بالعلاقة

$$\beta_s = \omega_{2s} - \omega_{1s} = \frac{\omega_{0s}}{Q_{0s}}$$

وممانعة الادخال يمكن أن يعبر عنها بشكل تقريبي لدوائر Q_s العالية حيث

$$Z_s = R_s(1 + jN_s) = R_s \sqrt{1 + N_s^2} \angle \tan^{-1} N_s$$

$$N_s = \frac{\omega - \omega_{0s}}{\frac{1}{2}\beta_s}$$

وهذا التقريب صحيح للترددات التي لا تختلف عن تردد الرنين بأكثر من عشر تردد الرنين.

أن دائرة الرنين المتواليه تتصف بالممانعة الواطئة في حالة الرنين بينما دائرة رنين التوازي تكون ممانعة رنين عالية. وأن الدائرة الأخيرة تكوّن تيارات محث وتيارات سعة في حالة الرنين والتي لها اتساعات Q_0 من المرات بقدر تيار المصدر وأن دائرة الرنين المتواليه تكون فولتيات محث وفولتيات سعة أكبر من فولتية المصدر بالعامل Q_0 . لذا فأن دائرة التوالي تكوّن تضخيم فولتية في حالة الرنين. من هذه النقطة فصاعداً سوف لانميز دوائر رنين التوالي باستخدام التوصيف السفلي

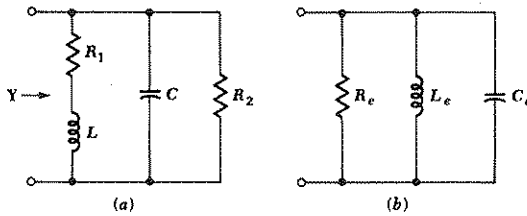
تمرينان

8 - 14 دائرة رنين توالي متكونة من المتسعة $0.8\text{-}\mu\text{F}$ والمحاثه 50-mH والمقاوم $20\text{-}\Omega$ احسب (أ) ω_0 (ب) Q_0 (ج) β (د) ω_1 (هـ) ω_2 (أجوبة (تقريباً) 5200 rad/s ، تقريباً 4800 rad/s ، 400 rad/s ، 5000 rad/s ، 12.5)

9 - 14 احسب قيم دقيقة نوعاً ما لاتساع تيار المصدر وفولتية المتسعة لدائرة التمرين 8 - 14 عندما تُغذى بالمصدر (أ) $100 \cos 5000t \text{ V}$ (ب) $100 \cos 5300t \text{ V}$ (ج) $100 \cos 4980t \text{ V}$

الأجوبة (A, V) $5, 1250; 2.77, 654; 4.98, 1249$

إن دوائر RLC المتوازية والمتوالية للفترتين السابقتين تمثل دوائر رنين مثالية هي ليست أكثر من تمثيلات تقريبية لدائرة حقيقية ومن الممكن تكوينها بدمج سلك ملفوف ومقاوم كربوني ومتسعة التناولوم على التوازي أو التوالي . وإن درجة الدقة التي ينطبق بها النموذج المثالي مع الدائرة الحقيقية يعتمد على مدى التردد المستعمل وعلى قيمة Q للدائرة والمواد المصنوعة منها العناصر وحجم العناصر وعوامل أخرى كثيرة متعددة . والآن ندرس أساليب حساب أحسن نموذج لدائرة حقيقية معطاة وذلك يتطلب بعض المعلومات مثل نظرية المجال الكهرومغناطيسي وخواص المواد أما الآن فنحن مهتمون في مسائل تقليل النموذج الأكثر تعقيداً الى نموذج أو نموذجين من النماذج التي ألمنا بها .



الشكل 9 - 14 (أ) نموذج مفيد لشبكة فيزيائية تحتوي على محث حقيقي ومتسعة ومقاوم على التوازي .
(ب) شبكة يمكن أن تكون مكافئة ل (أ) على مدى حزمة تردد ضيقة

وإن الشبكة المبينة في الشكل 9 - 14 (أ) هي نوعاً ما نموذج دقيق لربط التوازي لمحث حقيقي ومتسعة ومقاوم . وإن المقاوم R_1 يمثل الفقد المقاومي وفقد اللب وفقد الاشعاع للملف الحقيقي .

أن الفقدان في العازل الكهربائي ضمن المتسعة الحقيقية داخلية في الحساب بالمقاوم R_2 وكذلك لمقاومة المقاوم الحقيقي في دائرة RLC المعطاة . لهذا النموذج . لاتوجد طريقة لدمج العناصر وانتاج نموذج أبسط يساوي النموذج الاصيل لجميع الترددات . وسوف نبين على أية حال بان المكافئ الاسط يمكن تكوينه والذي يكون منطبقاً لحزمة ترددات تكون كافية لكي تشغل جميع الترددات التي تهمننا .
ان المكافئ سوف يأخذ شكل الشبكة المبينة في الشكل 9 - 14 (ب) .

وقبل أن نتعلم كيف تطور الشبكة الى الشبكة المكافئة دعنا نعتبر الدائرة المعطاة في الشكل 9 - 14 (أ). وان التردد نصف القطري في حالة الرنين لهذه الشبكة هو ليس $1/\sqrt{LC}$ على الرغم من أنه اذا كانت R_1 صغيرة مافيه الكفاية فإنه يكون مقارباً لهذه القيمة. وبذا لا يتغير تعريف الرنين ويمكن أن نحسب تردد الرنين بجعل الجزء الخيالي لمسايرة الدخل تساوي صفراً.

$$\text{Im}[Y(j\omega)] = \text{Im}\left(\frac{1}{R_2} + j\omega C + \frac{1}{R_1 + j\omega L}\right) = 0 \quad \text{لذا}$$

$$C = \frac{L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{L}\right)^2}$$

وان

نلاحظ بأن ω_0 هي أقل من $1/\sqrt{LC}$ ولكن القيم القليلة للنسبة R_1/L تنتج فرقاً بين ω_0 و $1/\sqrt{LC}$.

إن القيمة القصوى لممانعة أذخال تستحق الاعتبار أيضاً. فهي ليست R_2 ولا تحدث عند ω_0 (أو عند $\omega = 1/\sqrt{LC}$) وسوف لانذكر برهان هذه التعابير لأن التعابير ستصبح معقدة جبرياً أما الأفكار النظرية فهي نفسها ويمكن تطبيقها مباشرة. دعنا نجرب مثلاً عددياً. فنختار القيم البسيطة $R_1 = 2 \Omega$ و $L = 1 \text{ H}$ و

$$C = \frac{1}{8} \text{ F} \quad \text{و} \quad R_2 = 3 \Omega \quad \text{ونجد تردد الرنين} \quad \omega_0 = 2 \text{ rad/s}$$

$$Z(j2) = 1.714 \Omega \quad \text{ممانعة الادخال في حالة الرنين هي}$$

$$\text{عند تردد الرنين اذا كانت } R_1 \text{ صفراً}$$

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = 2.83 \text{ rad/s}$$

وممانعة الادخال هي

$$Z(j2.83) = 1.947 / -13.26^\circ \Omega$$

على أية حال فإن التردد الذي يحدث فيه أقصى قيمة للتردد ويرمز له بـ ω_m وجد أن:

$$\omega_m = 3.26 \text{ rad/s}$$

والممانعة التي لها أقصى قيمة هي

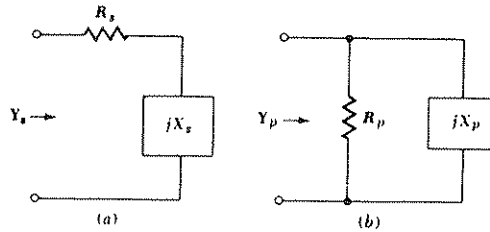
$$Z(j3.26) = 1.980 / -21.4^\circ \Omega$$

وان قيمة الممانعة في حالة الرنين وأقصى قيمة تفرق بـ 13 بالمائة تقريباً. ولو أنه من الصحيح بأن مثل هذا خطأ ربما يمكن اهماله أحياناً في الحياة العملية ولكنها كبيرة جداً لدى اهمالها في الامتحان في الصف. وما سيلبي في هذه الفقرة

سيبين بأن قيمة Q لمزيج المحث والمقاوم عند التردد 2 rad/s هو واحد وهذه القيمة الواطئة هي سبب فرق الـ 13 بالمائة .

ولأجل تحويل الدائرة المعطاة في الشكل 9 - 14 (أ) الى المكافئ كما في الشكل 9 - 14 (ب) يجب أن نناقش Q لمزيج التوازي أو المتوازي البسيط لمقاوم ومحث (محاثة أو متسعة) نعتبر أولاً دائرة التوالي المبينة في الشكل 10 - 14 (أ) . فإن Q لهذه الشبكة تعرف أيضاً بأنها 2π من الممرات بقدر نسبة الطاقة القصوى المخزونة الى الطاقة الضائعة في كل دورة ولكن Q يمكن تقييمها في أي تردد نختاره نحن . وبكلام آخر فإن Q هي دالة لـ ω ، ومن الصحيح بأننا سنختار لايجاد قيمتها التردد الذي هو على ما يظهر تردد الرنين لشبكة فيها ذراع التوالي لوحده . وهذا التردد على أية حال غير معلوم الى أن نحصل على دائرة أكثر كمالاً . والقارئ المتبع يمكنه أن يبين بأن Q لذراع التوالي هذا هو $|X_s|/R_s$ بينما Q لشبكة التوازي للشكل 10 - 14 (ب) هي $R_p/|X_p|$.

دعنا الآن نستمر بالتفاصيل الضرورية لايجاد قيم R_p و X_p بحيث أن شبكة التوازي للشكل 10 - 14 ب تكافئ شبكة التوالي للشكل 10 - 14 (أ) لتردد واحد معين فتساوي Y_s و Y_p .



الشكل 10 - 14 (أ) شبكة توالي تحتوي على مقاوم R_s ومفاعله حثية أو سعوية X_s يمكن أن تحول الى (ب) شبكة توازي بحيث أن $Y_s = Y_p$ عند تردد محدد . التحول المكسبي ممكن أيضاً .

$$\text{ونحصل } Y_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} = Y_p = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_p}$$

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

وبقسمه هذين التعبيرين نجد أن

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s}$$

ويتبع ذلك بأن قيم Q لشبكات التوالي والتوازي يجب أن تكون متساوية

$$Q_p = Q_s = Q$$

ويمكن تبسيط معادلات التحويل كما يأتي :

$$R_p = R_s(1 + Q^2) \quad (25)$$

$$X_p = X_s \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \quad (26)$$

ومن الظاهر بأن R_s و X_s يمكن ايجادها أيضاً اذا كانت قيمتا R_p و X_p أعطيتا فالتحويل في أي اتجاه يمكن أدائه .

فإذا كانت $Q \geq 5$ نحصل على خطأ بسيط باستخدام علاقات التقريب

$$R_p \approx Q^2 R_s \quad (27)$$

$$X_p \approx X_s \quad (C_p \approx C_s \text{ or } L_p \approx L_s) \quad (28)$$

وكمثال سنأخذ مزيج التوالي للمحث 100-mH والمقاوم $5\text{-}\Omega$. وسوف نقوم بالتحويل عند التردد 1000 rad/s والقيمة المختارة هي تقريباً تردد الرنين للشبكة (غير الميينة) والذي فيها ذراع التوالي هذا هو جزء منها . نجد أن $Q = 20$ و $X_s = 100\ \Omega$ وبما أن Q عالية مافيه الكفاية نستعمل (27) و (28) لنحصل على

$$R_p \approx Q^2 R_s = 2000\ \Omega \quad L_p \approx L_s = 100\ \text{mH}$$

الخلاصة وهي أن المحث 100-mH على التوالي مع المقاوم $5\text{-}\Omega$ يكون بالضرورة ممانعة الأذخال نفسها التي يكونها المحث 100-mH على التوازي مع المقاوم $2000\text{-}\Omega$ عند التردد 1000 rad/s . ولأجل تدقيق دقة التكافؤ دعنا نجد ممانعة أذخال لكل شبكة عند التردد 1000 rad/s فنسجد

$$Z_s(j1000) = 5 + j100 = 100.1/87.1^\circ$$

$$Z_p(j1000) = \frac{2000(j100)}{2000 + j100} = 99.9/87.1^\circ$$

والخلاصة هي أن التقريب كان دقيقاً تماماً عند تردد التحويل ودرجة الدقة عند التردد 900 rad/s كانت أيضاً جيدة نسبياً لأنه .

$$Z_s(j900) = 90.1/86.8^\circ$$

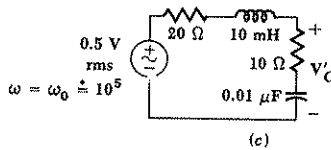
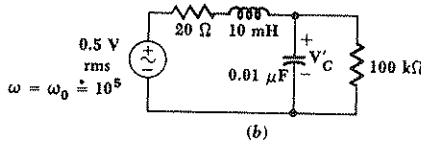
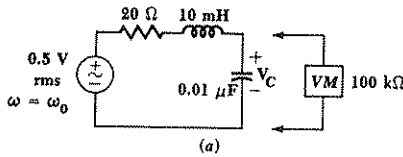
$$Z_p(j900) = 89.9/87.4^\circ$$

وإذا كان هذا المحث والمقاوم المتوالي مستعملين لجزء من دائرة RLC المتوالية التي فيها تردد الرنين 1000 rad/s لذا فإن عرض الحزمة عند نصف القدرة يكون

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1000}{20} = 50$$

وإن التردد 900 rad/s سيمثل التردد الذي كان أربع مرات بقدر نصف الحزمة للرنين. لذا فإن الشبكات المكافئة التي قيمناها أعلاه كانت مناسبة لإنتاج جميع الأجزاء القممى لمنحنى الاستجابة.

وكمثال آخر لاستبدال دائرة رنين أكثر تعقيداً بمكافئ RLC المتوالية أو المتوازية دعنا نأخذ مسألة في المعدات الألكترونية. فشبكة RLC البسيطة في الشكل 11 - 14 (أ) مغذاة بمصدر الفولتية الجيبي عند تردد الرنين. وإن القيمة التأثيرية لفولتية المصدر هي



الشكل 10 - 14 (أ) دائرة رنين توالي فيها فولتية المتسعة مقاسة بفولتميتر غير مثالي (ب) تأثير الفولتميتر ادخل في الدائرة فقرأ V_C فولت (ج) دائرة رنين توال تم الحصول عليها عند الاستعاضة عن شبكة RC المتوازية في (ب) بشبكة RC توال مكافئة لها عند 10^5 rad/s .

لفولتية المصدر هي 0.5 V وربع في قياس القيمة التأثيرية للفولتية عبر المتسعة بفولتميتر الكتروني (VM) مقاومته الداخلية $100,000 \Omega$. أي أن التمثيل المكافئ للفولتميتر هو فولتميتر مثالي على التوازي مع المقاوم $100,000-\Omega$

وقبل ربط الفولتميتر نجد أن الرنين هو 10^6 rad/s وهو $Q_0 = 50$ والتيار 25 mA وقيمة (ج . م . ت) لفولتية المتسعة هي 25 V . وكما هو مؤشر في نهاية الفقرة 4 - 14 هذه الفولتية هي Q_0 من المرات بقدر الفولتية المسلطة . فإذا كان الفولتميتر مثالياً فسوف يقرأ 25 V عندما يربط عبر المتسعة . على أية حال حينما يربط الفولتميتر الحقيقي تنتج الدائرة المبينة في الشكل 11 - 14 (ب) ولأجل الحصول على دائرة RLC متوالية من الضروري الآن استبدال شبكة RC المتوازية بشبكة RC المتوالية . دعنا نفترض بأن Q لشبكة RC هذه كانت عالية مافيه الكفاية بحيث أن مكافئ المتسعة المتوالية ستكون نفسها المتسعة المتوازية المعطاة . لقد فعلنا هذا لأجل تقريب تردد الرنين لدائرة RLC المتوازية . لذا إذا كانت دائرة RLC المتوالية تحوي متسعة $0.01\text{-}\mu\text{F}$ أيضاً فأن تردد الرنين يبقى 10^6 rad/s . ونحتاج أن نعلم هذه القيمة لتردد الرنين لأجل حساب Q لشبكة RC المتوازية أي :

$$Q = \frac{R_p}{|X_p|} = \omega R_p C_p = 10^6 (10^6) (10^{-8}) = 100$$

وبما أن هذه القيمة هي أكبر من 5 فأن الحلقة المفرغة لفرضياتنا قد تحققت وأن مكافئ شبكة RC المتوالية تحوي المتسعة .

$$C_s = 0.01 \mu\text{F}$$

والمقاوم

$$R_s = \frac{R_p}{Q^2} = 10 \Omega$$

لذا فالدائرة المكافئة هي المبينة في الشكل 11 - 14 (ج) . وأن قيمة Q في حالة الرنين لهذه الدائرة هي الآن فقط 33.3 . ولذا فأن الفولتية عبر المتسعة في الدائرة للشكل 11 - 14 (ج) هي $16\% V$ ولكننا نحتاج ايجاد $|V_c|$ والفولتية عبر مزيج RC المتوالية فنحصل على

$$|V_c| = \frac{0.5}{30} |10 - j1000| = 16.7 \text{ V}$$

وفولتية المتسعة و $|V_c|$ بالضرورة متساويتان وذلك لأن الفولتية عبر المقاوم $10\text{-}\Omega$ صغيرة نوعاً ما .

الخلاصة الأخيرة هي أن جهاز الفولتميتر الجيد ظاهرياً يجب أن يسبب تأثيراً شديداً على الاستجابة لدائرة الرنين عالية الـ Q ويمكن أن يحدث تأثيراً مشابهاً عندما يدخل الى دائرة جهاز اميتر غير مثالي نلخص هذه الفقرة بالحكاية الفنية التالية :

يحكى أن هناك طالباً يدعى أحمد* وأستاذ يعرف بالأسم دكتور حسن . في مختبر ما بعد الظهر أعطى الدكتور حسن الى الطالب أحمد ثلاثة عناصر لدائرة عملية هي مقاوم ومحث ومتسعة قيمها الرقمية 2Ω و 20 mH و $1\mu\text{F}$ على الترتيب وسأله أن يربط مصدر فولتية متغير التردد الى مزيج ربط التوالي لهذه العناصر وأن يقيس الفولتية عبر المقاوم كدالة للتردد ثم يحسب القيم العديدة لتردد الرنين و Q في حالة الرنين وعرض الحزمة عند نصف القدرة . وكذلك سئل الطالب التنبؤ عن النتائج قبل عمل القياسات .

وان أحمد الذي لم يكن من البارزين في صفه عمل صورة ذهنية للدائرة المكافئة لهذه المسألة كما هو مبين في الشكل 12 - 14 (أ) ومن ثم قام بحساب

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0 L}{R} = 7.07$$

$$\mathcal{B} = \frac{f_0}{Q_0} = 159 \text{ Hz}$$

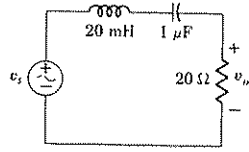
بعدها عمل الطالب أحمد القياسات التي طلبها منه الدكتور حسن فحسب القيم العددية وقارنها مع القيم التي تنبأ بها وأحس بشعور يأس من دراسة الهندسة وفكر في الانتقال الى كلية أخرى حيث كانت النتائج

$$f_0 = 1000 \text{ Hz}$$

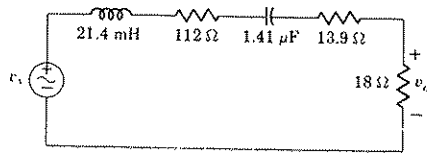
$$Q_0 = 0.625$$

$$\mathcal{B} = 1600 \text{ Hz}$$

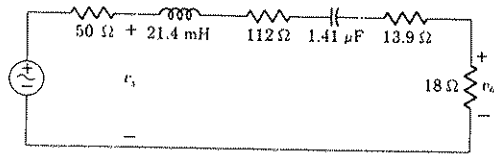
* استخدم المؤلفان اسم Pat والدكتور Noe



(a)



(b)



(c)

الشكل 12 - 14 (أ) نموذج أولي لمحث ذي 20-mH ومتسعة 1- μ F ومقاوم 20- Ω على التوالي مع مولد الفولتية : (ب) نموذج محسن أكثر دقة في قيمه ، استخدم وقد أدخلت المفايد في المحث والمتسعة (ج) النموذج النهائي يحوي مقاومة الاخراج لمصدر الفولتية

ولو أن أحمد كان يعلم بأن رداءة هذه القيم لا يمكن أن تميز على أنها « ضمن الدقة الهندسية » أو بسبب أخطاء المقياس ولكنه سلم هذه النتائج بأسى الى الاستاذ .

وقد تذكر أخطاء سابقة كثيرة لتبرير النتائج وبعضها كان مصطنع ذاتياً ولكن دكتور حسن تبسم مغتبطاً ولفت انتباه أحمد الى مقياس Q (أو قنطرة الممانعة) الموجودة في معظم المختبرات واقترح عليه استخدامها لمعرفة تصرف عناصر الدائرة العملية حقيقة عند تردد مناسب قريب من الرنين مثلاً . وبعمله هذا اكتشف أحمد بأن المقاوم يقرأ 18Ω والمحث كان 21.4 mH و Q بينما المتسعة كانت سعتها $1.41 \mu F$ وعامل التبدد (مقلوب Q) يساوي 0.123 . لذا ومع الأمل والشعور بالمعنوية العالية علل أحمد أن النموذج الأحسن لمحث عملي سيكون 21.4 mH على التوالي مع $\omega L/Q = 112 \Omega$ بينما النموذج الأكثر ملاءمة للمتسعة ستكون $1.41 \mu F$ على التوالي مع $1/\omega CQ = 13.9 \Omega$ وباستعمال هذه القيم

حضر أحمد نموذج الدائرة المحورة المبينة في الشكل 12 - 14 ب وحسب القيم المتوقعة الجديدة

$$f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{21.4 \times 10^{-3} \times 1.41 \times 10^{-6}}} = 916 \text{ Hz}$$

$$Q_0 = \frac{2\pi \times 916 \times 21.4 \times 10^{-3}}{143.9} = 0.856$$

$$\mathcal{B} = \frac{916}{0.856} = 1070 \text{ Hz}$$

وبما أن النتائج كانت أكثر قرباً الى القيم المقاسة فإن أحمد كان أكثر سعادة وحيث أن الدكتور حسن أحرص على التفاصيل أظهر بعض الشكوك حول الفروقات بين القيم المتوقعة والمقاسة لكل من Q_0 و \mathcal{B} وعرض الحزمة . وسأل الدكتور حسن « هل أعطيت أي اعتبار الى ممانعة الاخراج لمصدر الفولتية ؟ » أجاب أحمد « كلا لحد الآن » ثم عاد الى منضدة المختبر .

وتبين بأن ممانعة الاخراج مدار السؤال كانت 50Ω لذا أضاف أحمد القيمة الى مخطط الدائرة كالمبين في الشكل 12 - 14 ج وباستعمال قيمة المقاومة المكافئة الجديدة 193.9Ω تحسنت قيمة Q_0 و \mathcal{B} وأصبحت

$$Q_0 = 0.635$$

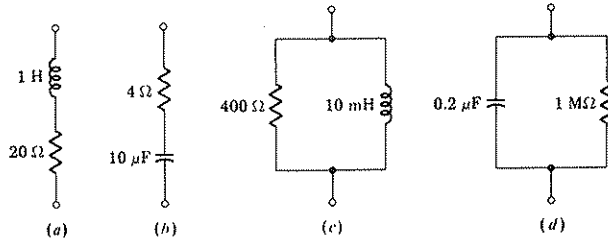
$$\mathcal{B} = 1442 \text{ Hz}$$

ولاتفاق جميع القيم النظرية والمختبرية الى مدى 10 بالمائة . أحس أحمد بالمتعة من دراسة الهندسة الكهربائية . ووضع الدكتور حسن يده على رأس أحمد دليل الرضا وبالتالي كأن أحمد تعلم :

وأنت تستخدم أدوات حقيقية
راقب النموذج الذي تختاره
فكر قبل أن تجري أية حسابات
تذكر الممانعات وأرقام الاستحقاق

تمارين

10 - 14 عند التردد 1000 rad/s أوجد مكافئ التوازي كل من الشبكات في الأشكال 13 - 14 (أ) و (ب) ومكافئ التوالي لـ ج و د .



الشكل 13 - 14 أنظر التمرين 10 - 14

11 - 14 أوجد مكافئ Q عند التردد $\omega = 10^5 \text{ rad/s}$ (أ) المتسعة 400-pF على التوالي مع المقاوم 100- Ω (ب) المقاوم 5-M Ω على التوازي مع شبكة الفرع أ (ج) المقاوم 200- Ω على التوالي مع شبكة الفرع ب
الأجوبة 58.8; 111.1; 250

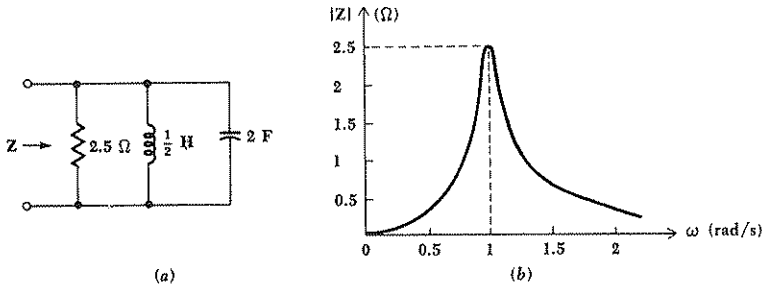
12 - 14 دائرة RLC المتوازية تحوي المقاوم 120-k Ω والمحث 20-mH والمتسعة 5000-pF أوجد Q_0 (أ) للدائرة المعطاة (ب) بعد إضافة مقاوم 50- Ω على التوالي مع المحث (ج) بعد إضافة المقاوم 50- Ω على التوالي مع المحث والمقاوم 20- Ω على التوالي مع المتسعة .

الأجوبة 19.35; 24; 60

6 - 14 المعايرة :

بعض الأمثلة والمسائل التي نحلها تشمل الدوائر التي تحوي قيم لعناصر غير فعالة تتراوح من عدة أوملت وعدة هنريات وعدة فرادات . والتردد المسلط كان عدة دورات . هذه القيم العددية بصورة خاصة استعملت لأنها المستعملة في الحياة العملية ولكن بسبب المعاملات الخسائية والتي كانت أسهل بكثير عن أستعمال الأس 10 على طول الحسابات . وإن طريقة التعبير المشروحة في هذه الفقرة تساعدنا على تحليل الشبكات التي تحوي عناصر بالحجم المستخدم عملياً وبتعبير قيم العناصر يفسح لنا المجال للتعامل بالحسابات العددية الأكثر ملاءمة . وسوف نعتبر كلاً من تعبير القيمة والتردد .

دعنا نختار دائرة الرنين المتوازية المبينة في الشكل 14 - 14 (أ) كمثال فالقيم غير العملية للعثور تؤدي الى منحنى الاستجابة المختلف تماماً المرسوم في الشكل 14 - 14 (ب) قيمة الممانعة القصوى هي 2.5Ω وتردد الرنين هو 1 rad/s و $Q_0=5$ وعرض الحزمة 0.2 rad/s . هذه القيم العديدة تشبه الى حد كبير تمثيل دائرة ميكانيكية بدائرة كهربائية أكثر مما عليه الحال لأي أداة كهربائية . فلدينا أرقام مناسبة والتي بها يمكن إجراء الحسابات بسهولة ولكن تكوين الدائرة سيكون صعباً في هذه الحالة .



الشكل 14 - 14 دائرة رنين توازي استخدمت في المثال لتبين تعبير القيمة والتردد (ب) قيمة ممانعة الإدخال مبينة كدالة للتردد

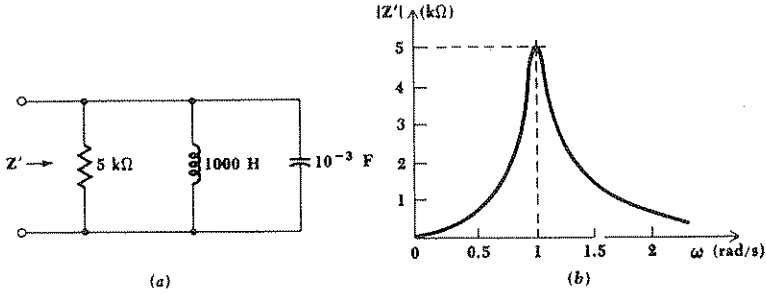
دعنا نفترض بأن هدفنا هو معايرة هذه الشبكة بطريقة بحيث تكون قيمة الممانعة القصوى عند تردد الرنين $5 \times 10^6 \text{ rad/s}$ أو 796 kHz وبكلام آخر ربما نستعمل منحنى الاستجابة نفسه في الشكل 14 - 14 (ب) اذا وضعف كل عدد في المحور الأفقي بالعامل 2000 وضعف كل عدد في المحور العمودي بالعامل 5×10^6 وسوف نعامل هذه المسألة كمسألتين : (1) تعبير القيمة بالعامل 2000 و (2) تعبير التردد بالعامل 5×10^6 .

وتُعرف معايرة القيمة بأنه الطريقة التي بها تزداد ممانعة شبكة ذات نهايتين بالعامل K_m مع بقاء التردد ثابتاً . فالعامل K_m هو حقيقي وموجب وربما يكون أكبر أو أصغر من الواحد وسوف نفهم من التعبير الاقصر « تعبير الشبكة بالقيمة بالعامل 2 » على أن الممانعة للشبكة الجديدة هي ضعف ماهي عليه للشبكة القديمة لأي تردد . دعنا الآن نحسب كيف نعبّر كل نوع من العناصر غير الفعالة . فلزيادة

ممانعة الادخال للشبكة بالعامل K_m يكفي زيادة ممانعة كل عنصر في الشبكة بالعامل نفسه . لذا فالمقاوم R يجب أن يستبدل بالمقاوم $K_m R$ وكل محث يجب أن يظهر ممانعة تكون K_m من المرات أكبر عند أي تردد . ولأجل زيادة الممانعة sL بالعامل K_m عند بقاء s ثابتة فيجب استبدال المحث بالمحث $K_m L$. وبشكل مشابه كل متسعة C أن تستبدل بالمتسعة C/K_m . و خلاصة الكلام هذه التغييرات ستنتج شبكة معيرة بالقيمة بالعامل K_m حيث

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow K_m R \\ L \rightarrow K_m L \\ C \rightarrow \frac{C}{K_m} \end{array} \right\} \text{معايرة القيمة}$$

وعند تعيير كل عنصر من عناصر الشبكة للشكل 14 - 14 أ بالقيمة بالعامل 2000 تنتج الشبكة المبينة في الشكل 15 - 14 (أ) . وإن منحني الاستجابة المئين في الشكل 15 - 14 (ب) يوضح عدم وجود تغيير عن الاستجابة المرسومة سابقاً عدا تغيير تدريج المحور الأفقي .



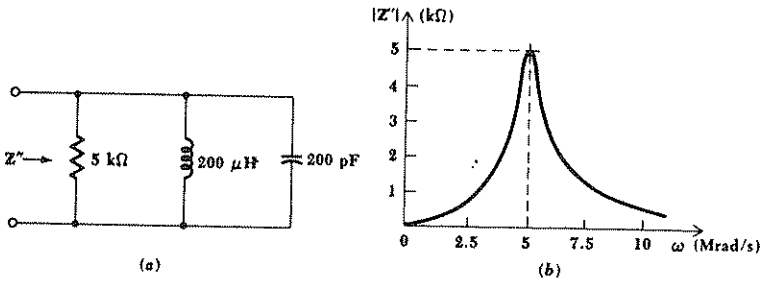
الشكل 15 - 14 (أ) شبكة الشكل 14 - 14 (أ) بعد أن عبرت بالقيمة بعامل K_m مقداره 2000 (ب) منحني الاستجابة المائد لها

دعنا نأخذ الشبكة الجديدة ونقوم بمعيارتها نسبة للتردد . تعرف معايرة التردد بأنها الطريقة التي بها نحصل على أي ممانعة تزداد بالعامل K_r . ومرة أخرى سنستعمل التعبير الأقصر « تعابير الشبكة بالتردد بالعامل 2 » يدل على أن الممانعة نفسها يمكن الحصول عليها بضعف التردد . وتنجز معايرة تردد كل عنصر غير فعال ترددياً . ومن الظاهر بأن المقاومة لا تتأثر بذلك فالممانعة لأي محث هي sL ، وإذا

حصلنا على الممانعة نفسها بتردد أكبر K_r من المرات فان المحث L يجب أن يستبدل
 بأخر محاثته L/K_r . وبصورة مشابهة تستبدل المتسعة C بأخرى سعتها C/K_r
 لذا اذا عيرنا شبكة ترددياً بالعامل K_r فالتغيرات الضرورية في كل عنصر غير فعال
 هي

$$\left. \begin{array}{l} R \rightarrow R \\ L \rightarrow \frac{L}{K_r} \\ C \rightarrow \frac{C}{K_r} \end{array} \right\} \text{تغيير التردد}$$

عند تغيير كل عنصر بالتردد بالعامل 5×10^6 في شبكة الشكل 15 - 14 (أ)
 والمعايرة بالقيمة نحصل على شبكة الشكل 16 - 14 (أ) . ومنحنى الاستجابة
 العائد لها مبين في الشكل 16 - 14 (ب)



الشكل 16 - 14 (أ) شبكة الشكل 15 - 14 (أ) بعد ان عيرت بالتردد بعامل $K_r = 5 \times 10^6$ (ب) . منحنى
 الاستجابة العائد لها

إن عناصر الدائرة في الشبكة الأخيرة لها قيم يمكن تحقيقها بسهولة في الدوائر
 الحقيقية والشبكة يمكن فعلاً بناءها وفحصها . ويتبع ذلك اذا كانت الشبكة الأصلية
 للشكل 14 - 14 (أ) بالفعل تناظر نظاماً ميكانيكياً في حالة رنين يمكن معايرة
 هذا النظير بكل من القيمة والتردد لأجل تحقيق الشبكة الممكن انشاؤها في المختبر .
 ويمكن اجراء الفحوصات التي تكون غالية أو غير سهلة الانجاز على النظام
 الميكانيكي النظام الكهربائي المعيار نفسه ومن ثم فان النتائج يجب ان « تحل
 معايرتها » وتحول الى وحدات ميكانيكية لأكمال التحليل .

وان تأثير معايرة القيمة أو التردد على تركيبة الاقطاب والأصفار للمناعة ليس بالصعب انجازه ولكن حساب ذلك التأثير يفسح المجال لإعادة معنى الفرض من مخطط الأقطاب والأصفار على مستوى s والتي تكون اسس أحد التمارين أدناه .
فالمناعة المعطاة كدالة لـ s يمكن أيضاً تعييرها بالقيمة أو التردد ويمكن عمل ذلك بدون معرفة العناصر المحددة التي تتكون منها الشبكة ذات النهايتين . ولأجل تعيير $Z(s)$ بالقيمة فان تعريف معايرة القيمة يبين بأنه من الضروري فقط ضرب $Z(s)$ بـ K_m لأجل الحصول على الممانعة المعايرة بالقيمة . لذا فممانعة دائرة الرنين المتوازية المبينة في الشكل 14 - 14 (أ) هي :

$$Z(s) = \frac{s}{2s^2 + 0.4s + 2}$$

أو

$$Z(s) = 0.5 \frac{s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

فالممانعة $Z'(s)$ للشبكة المعيرة بالقيمة هي $Z'(s) = K_m Z(s)$

$$Z'(s) = 1000 \frac{s}{(s + 0.1 + j0.995)(s + 0.1 - j0.995)}$$

إذا عبرت $Z'(s)$ بالتردد بالعامل 5×10^6 فان كلاً من $Z'(s)$ و $Z''(s)$ تكونان قيماً متماثلة للممانعة إذا حسبت $Z''(s)$ عند التردد الذي يعادل K_f من المرات بقدر التردد الذي تحسب عنده $Z'(s)$. وبعد اجراء بعض النشاطات الذهنية باعتناء فان هذه الخلاصة يمكن أن توجز في علامة الدالة كالاتي :

$$Z''(s) = Z' \left(\frac{s}{K_f} \right)$$

لاحظ بأننا نحصل على $Z''(s)$ باستبدال كل s في $Z'(s)$ بـ s/K_f . والتعبير التحليلي للممانعة الشبكة المبينة في الشكل 16 - 14 (أ) يجب أن تكون

$$Z''(s) = 1000 \frac{s/(5 \times 10^6)}{[s/(5 \times 10^6) + 0.1 + j0.995][s/(5 \times 10^6) + 0.1 - j0.995]}$$

أو

$$Z''(s) = 5 \times 10^9 \frac{s}{(s + 0.5 \times 10^6 + j4.975 \times 10^6)(s + 0.5 \times 10^6 - j4.975 \times 10^6)}$$

ولو أن المعايرة هي الطريقة التي تطبق عادة على العناصر غير الفعالة الا أن المصادر المعتمدة يمكن هي الأخرى معايرتها بالقيمة والتردد . نفرض بان اخراج اي مصدر معطى بالعلاقة $k_x v_x$ أو $k_y i_y$ حيث k_x لها أبعاد المسيرة لمصدر التيار المعتمد وهي بدون ابعاد لمصدر الفولتية المعتمد . بينما له ابعاد المقاومة لمصدر الفولتية المعتمد وبدون وحدات لمصدر التيار المعتمد . فاذا عبرت الشبكة للمصدر

المعتمد بالقيمة بـ K_m من الضروري بعد ذلك معاملة k_x او k_v كأنهما أنواع من العناصر المتفقة بوحداتها. أي أنه إذا كانت k_x (أو k_v) بدون وحدات فتترك بدون تغيير وإذا كانت ذات وحدات مسايرة فتنقسم على K_m وإذا كانت ممانعة فتضرب بـ K_m . وأما معايرة التردد فلا تتأثر بالمصادر المعتمدة.

تمارين

12 - 14 دائرة رنين متوالية عرض حزمته 100 rad/s $Q_n = 20$ ومتسعتها $50 \mu\text{F}$. أوجد تردد الرنين الجديد وقيمة المحاثة إذا عبرت الدائرة (أ) بالقيمة بالعامل 5 (ب) بالتردد بالعامل (ج) بالقيمة والتردد بالعاملين 5.
الاجوبة (krad/s, mH) 2, 25; 10, 1; 10, 5

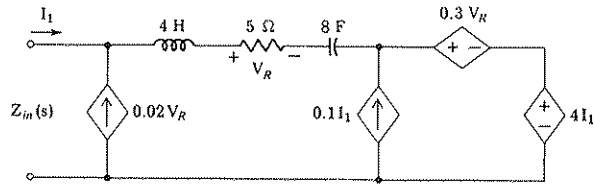
14 - 14 دائرة رنين معيرة تحوي على مقاوم $4\text{-k}\Omega$ ومحث 0.1-H ومتسعة $0.3\text{-}\mu\text{F}$. أوجد K_r و K_m إذا كانت الدائرة الأصلية تحوي (أ) مقاوم $10\text{-}\Omega$ ومحث 1-H (ب) مقاوم $10\text{-}\Omega$ ومتسعة 5-F (ج) محث 1-H ومتسعة 5-F .
الاجوبة 400, 4000; 400, 41,700; 1291, 12,910

15 - 14 خاصيتان للرسم البياني للأقطاب والأصفار لدالة انتقالية $H(s)$ هي قطب عند $s = -2 + j5$ وقيمة في نقطة الأصل تساوي 30. عبرت الشبكة التي تعود لها الدالة الانتقالية بـ $K_m = 15$ و $K_r = 12$. عين موقع القطب والقيمة عند $s = 0$ إذا كانت $H(s)$ تساوي (أ) V_2/I_1 (ب) I_2/V_1 (ج) I_2/I_1 (د) V_2/V_1
الاجوبة $-24 + j60, 2; -24 + j60, 30; -24 + j60, 30; -24 + j60, 450$

16 - 14 الشبكة المبينة في الشكل 17 - 14 مطلوب تعييرها بـ $K_m = 2$ و $K_r = 5$

أوجد قيم المتغيرات لجميع العناصر السبعة وكذلك $Z_{in}(s)$ للشبكة المعيرة

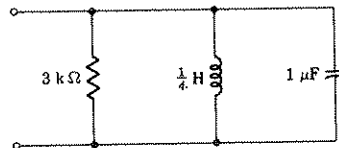
الاجوبة $10 \Omega; 1.6 \text{ H}; 0.8 \text{ F}; 0.01V_R; 0.1I_1; 0.3V_R; 8I_1; \frac{1}{9}(202 + 16s + 12.5/s)$



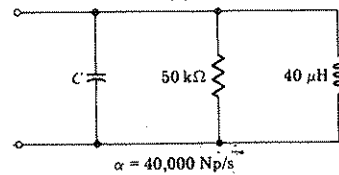
الشكل 17 - 14 انظر التمرين 16 - 14

مسائل

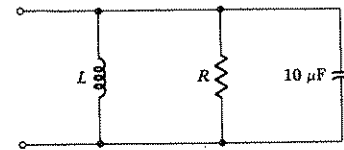
- 1 □ أوجد ω_0 و Q_0 لدائرة رنين التوازي والتي فيها (أ) $C = \frac{1}{4} \mu\text{F}$ و $L = \frac{1}{72} \text{H}$ و $R = 20 \text{k}\Omega$ و $\alpha = 1000 \text{s}^{-1}$ (ب) $C = 5000 \text{pF}$ و $\alpha = 600 \text{rad/s}$ $\zeta = 0.04$ $\alpha = 50 \text{s}^{-1}$ (ج)
- 2 احسب ω_0 و Q_0 نكل من الشبكات الميينة في الشكل 18 - 14



(a)



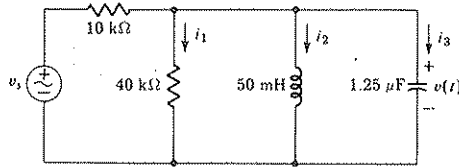
(b)



الشكل 18 - 14 انظر المسألة 2

3 أوجد Q_0 لـ (أ) مفتاح الكسيلوفون xylophone الذي يتذبذب بتردد 256 Hz وضعية المنتصف هي C اذا هبط اتساع التذبذب الى نصف قيمته الاصلية في ثلاث ثوانٍ (ب) الارض باستخدام الحقيقة المعروفة وهي أن طاقتها الدورانية الحركية تتباطأ بمقدار اثنين من 10^{13} في كل يوم (أي دورة) .

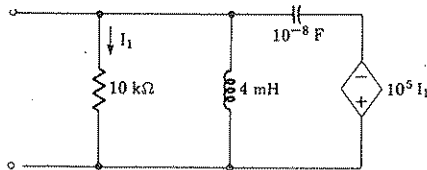
4 □ افرض أن $v_s = 100 \cos \omega_0 t$ V في الدائرة المبينة في الشكل 19 - 14 (أ)
أوجد دائرة RLC المتوازية ثم احسب ω_0 و Q_0 و $v(t)$ (ب) أوجد $i_1(t)$ و $i_2(t)$ و $i_3(t)$ (ج) احسب معدل فقدان القدرة في المقاوم $10\text{-k}\Omega$ والطاقة القصوى المخزونة في المحث .



الشكل 19 - 14 أنظر المسألة 4

5 يطلب تكوين RLC المتوازية بحيث يمكن تنظيم التسعة المتغيرة لتغيير تردد الرنين لحزمة محطة إذاعة نوع A.M. من 535 الى 1605 kHz . القيمة العظمى لـ Q_0 هي 50 . اذا كانت R تساوي $30\text{ k}\Omega$ عين L و C_{max} و C_{min} .

6 احصل على تعبير لمسيرة الادخال للشبكة المبينة في الشكل 20 - 14 ثم احسب ω_0 و Q_0

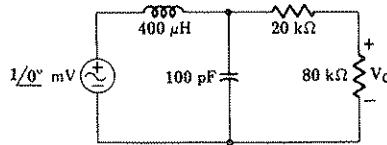


الشكل 20 - 14 أنظر المسألة 6

7 □ أوجد تردد لشبكة مكونة من مزيج توازي لمحث 0.2-H ومقاوم $25\text{-}\Omega$ ومزيج توالى لمتسعة $500\text{-}\mu\text{F}$ ومقاوم $10\text{-}\Omega$.
 8 دائرة رنين متوازية تحوي $C = \frac{1}{4}\mu\text{F}$ و $L = 4\text{ H}$ ماهي قيمة R لأجل أن يكون (أ) $Q_0 = 100$ (ب) $\beta = 40\text{ rad/s}$ (ج) $\omega_1 = 984\text{ rad/s}$ (د) $\omega_0 = 1100\text{ rad/s}$

9 (أ) دائرة رنين متوازية تحوي $R = 60\text{ k}\Omega$ و $L = 5\text{ mH}$ و $C = 50\text{ pF}$. احسب Q_0 و f_0 وعرض الحزمة بالهرتز (ب) عين قيم العناصر لدائرة RLC متوازية بحيث أن $\omega_0 = 10^6\text{ rad/s}$ (ب) $\beta = 2500\text{ rad/s}$.
 المسيرة عند الرنين قيمتها $25\text{ }\mu\text{V}$.

10 □ أوجد (أ) ω_0 (ب) Q_0 (ج) β (د) ω_1 (هـ) ω_2 (و) V_0 عند ω_0 للدائرة المبينة في الشكل 21 - 14

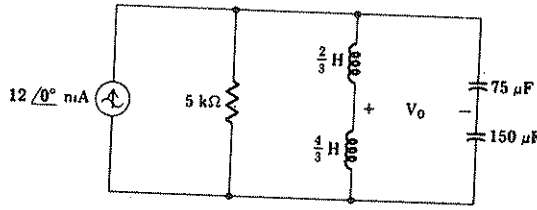


الشكل 21 - 14 أنظر المسألة 10

11 مصدر التيار $5\cos\omega t\text{ mA}$ والمقاوم $50\text{-k}\Omega$ والمتسعة 100-pF والمحث $400\text{-}\mu\text{H}$ كلها على التوازي . استخدم الطريقة الدقيقة والتقريبية لحساب الفولتية الطورية عبر المتسعة عندما $f = 750\text{ kHz}$.

12 □ دائرة RLC المتوازية استعملت في مضخمة $r-f$ والمطلوب أن تكون قيمة ممانعتها عند الرنين $5\text{ k}\Omega$ حيث $\omega_0 = 10^7\text{ rad/s}$ وممانعة مقدارها $3\text{ k}\Omega$ عند تردد 5 kHz أقل من الرنين . عين R و L و C

13 ارسم تخطيطاً لمنحنى $|V_0|$ بدلالة ω للدائرة المبينة في الشكل 22 - 14

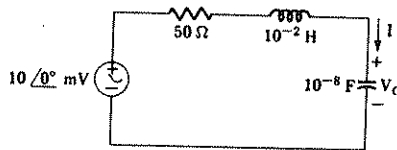


الشكل 22 - 14 أنظر المسألة 13

14 (أ) صمم دائرة RLC متوازية والتي ستكون في حالة رنين عند $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$ وعرض حزماتها 0.1 rad/s وتكون اتساع فولتية مقداره 12 V عند الرنين كما أن اتساع تيار المتسعة عند الرنين هو 10 A (ب) ارسم مخطط $|V_c|$ بدلالة ω حيث $4.8 \leq \omega \leq 5.2 \text{ rad/s}$

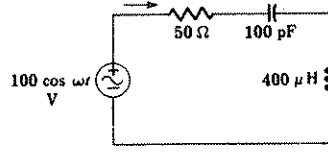
15 صمم شبكة رنين متوازية ممانعة ادخالها تحوي قطباً عند $s = -200 + j4000 \text{ s}^{-1}$ وقيمة الممانعة فيها معدل زيادة مع التردد قيمته $\omega = 3800 \text{ rad/s}$ عند $1 \Omega / (\text{rad/s})$

16 لدائرة الموضحة في الشكل 23 - 14 أوجد ω_0 و Q_0 و B و ω_1 و ω_2 و $|I|$ عند 98 krad/s و $|V_c|$ عند ω_0



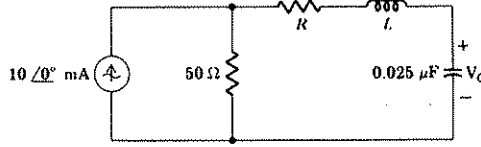
الشكل 23 - 14 أنظر المسألة 16

17 □ في دائرة RLC المتوالية المبينة في الشكل 24 - 14 (أ) عند أي قيمة لـ ω يكون اتساع في أقصى ما يمكن في (ب) بكم من اعداد الـ rad/s يجب ان تزداد ω لتقليل $|I|$ بـ 5 بالمائة (تقريبات Q العالية ستكون كافية).



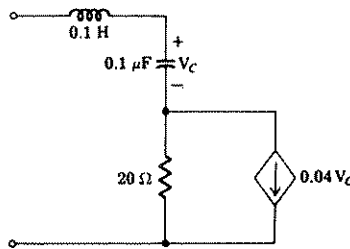
الشكل 24 - 14 أنظر المسألتين 17 و 26

18 دائرة رنين متوالية فيها Q_0 تساوي 2 . مستخدماً ω/ω_0 كمحور أفقي إرسم مخططاً لمنحني $|V_C|/|V_0|$ وكذلك $|V_L|/|V_0|$ على الرسم البياني نفسه .
 19 أوجد قيم R و L في دائرة الشكل 25 - 14 بحيث أن $|V_C|_{max} = 20$ V عند الذبذبة 1000 Hz



الشكل 25 - 14 أنظر المسألة 19

□ 20 أوجد القيم المؤثرة لـ ω_0 و Q_0 لشبكة الشكل 26 - 14

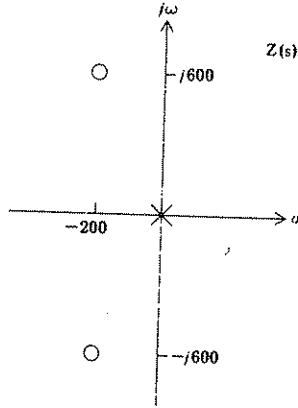


الشكل 26 - 14 أنظر المسألة 20

21 الرسم البياني للأقطاب والأصفار لممانعة الدخل لشبكة معينة معينة في الشكل 27 - 14 ارسم مخطط الدائرة للشبكة فيما لو علم أيضاً (أ)

(ب) $Z(-200) = -1 + j0 \Omega$ (ج) $Z(s) \rightarrow 10^4/s$ حينما $s \rightarrow 0$

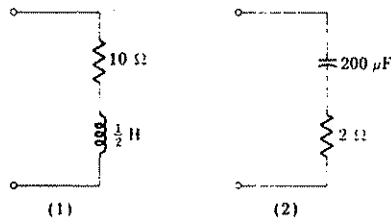
$$\text{Im}[Z(-100 + j500)] = -7 \Omega$$



الشكل 27 - 14 أنظر المسألة 21

22 اوجد الشبكات المكونة من عنصرين والمكافئة لتلك المبينة في الشكل 28 -

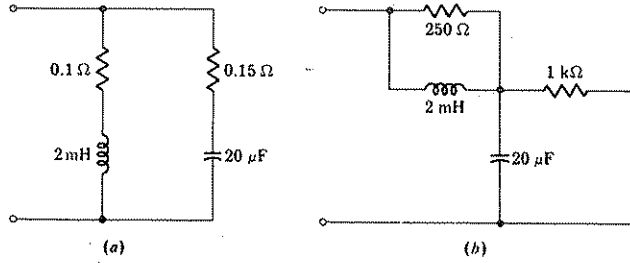
14 عندما تساوي (أ) 40 (ب) 200 (ج) 1000 rad/s



الشكل 28 - 14 أنظر المسألة 22

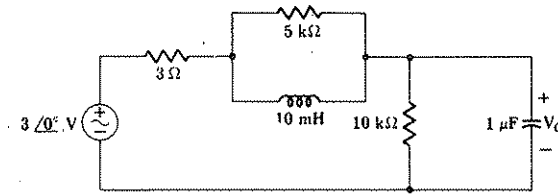
23 احسب القيم الدقيقة نوعاً ما لـ ω_0 و Q_0 لشبكات الرنين المبينة في

الشكلين 29 - 14 أ و ب



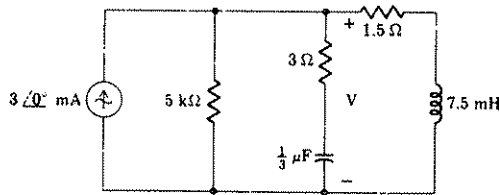
الشكل 29 - 14 أنظر المسألة 23

24 (أ) ارسم مخطط $|V_c|$ بدلالة ω للدائرة الميئة في الشكل 30 - 14 (ب) عين الاقطاب لممانعة الادخال للشبكة بشكلها الاصيل وكذلك لمكافئها التقريبي (ج) أعد بالنسبة للاصفار.



الشكل 30 - 14 أنظر المسألة 24

25 ارسم $|V|$ بدلالة ω للدائرة المعطاة في الشكل 31 - 14 . أستعمل مدى التردد الممتد من 2 krad/s أكثر وأقل من تردد الرنين .



الشكل 31 - 14 أنظر المسألة 25

26 عين العناصر غير الفعالة الثلاثة في دائرة الشكل 24 - 14 بحيث أن الدائرة المعبرة (أ) تحوي متسعة I-F ومحثاً I-H (ب) في حالة رنين عند 4000 Hz وتحوي المحث 10-mH

27 شبكة رنين عامة متوازية فيها $R = 1 \Omega$ و $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ (أ) احسب التعابير الدقيقة لـ L و C بدلالة Q_0 . (ب) احصل على التعابير الدقيقة لـ L و C بدلالة Q_0 (ج) عَيِّر النتائج لـ (أ) لايجاد L و C لشبكة فيها $R = K_m$ و $\omega_0 = K_f \text{ rad/s}$

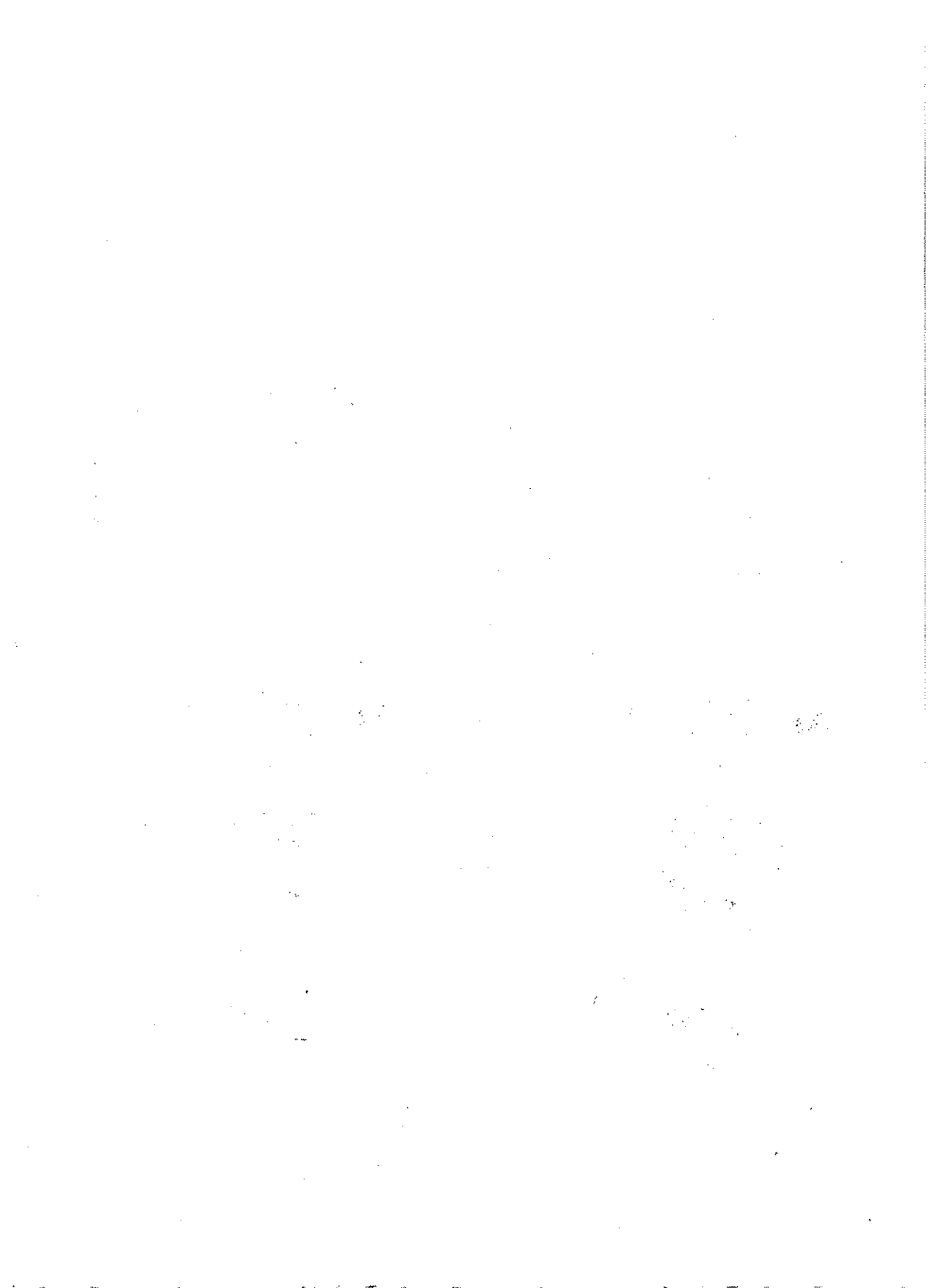
28 شبكة رنين متوالية غيرت بالقيمة بـ K_m وبالتردد بـ K_f . عَيِّن العامل الذي به تختلف كل من هذه المتغيرات (أ) ω_0 (ب) Q_0 (ج) Q_1 (د) ω_1 (هـ) ω_2 (و) α (ز) ω_d (ح) ζ (ط) Z_{in} عند الرنين.

□ 29 شبكة RLC المتوالية ممانعتها $10 + j40 \Omega$ عند $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ، بعد أن عَيِّرَت بالقيمة والتردد بالعامل نفسه وجدت بان ممانعتها $30 - j180 \Omega$ عند $\omega = 50 \text{ rad/s}$ احسب العناصر في الشبكة الاصلية .

الجزء الخامس

الشبكات ذات المنفذين

TwoPart Networks



الفصل الخامس عشر

الشبكات ذات الدوائر المتقارنة مغناطيسياً

Magnetically Coupled Circuits

15.1 مقدمة INTRODUCTION

سبق وأن قدمنا في فصل سابق من هذا الكتاب المبحث كعنصر من عناصر الدائرة ، وعرفناه بدلالة الفولتية المسلطة عليه وسرعة تغير التيار الذي يمر فيه مع الزمن . لقد كان تعريفنا محدداً بما يعرف بالمحثة الذاتية على الرغم من أننا أطلقنا عليها المحثة بصورة عامة . والآن نريد أن نعرف خاصية محثة الاقتران *Mutual inductance* والتي تصاحب وجود ملفين أو أكثر قريباً من بعضهما فيزيائياً . وليس هناك عنصر في الدائرة يدعى محث الاقتران والأكثر من ذلك أن خاصية محثة الاقتران ليست خاصية تصاحب زوجاً من الأطراف ولكنها يجب أن تعرف بدلاً من ذلك بالرجوع الى زوجين من الأطراف .

تنتج خاصية محثة التقارن من وجود التدفق المغناطيسي المعروف حينما يوصل ملفان مع بعضهما . ويمكن تعريفها بدلالة التدفق المغناطيسي المعروف كما عرفنا المحثة الذاتية لملف منفرد بدلالة التدفق المغناطيسي أيضاً . الا أنه قد اتفقنا على توجيه أنظارنا الى مفاهيم الدوائر وأن كميات كالتدفق المغناطيسي ووصلية التدفق تذكر فقط بصورة عابرة . أن من غير الممكن تعريف هذه الكميات بسهولة او بصورة مضبوطة في هذه المرحلة . لذلك علينا قبول هذه التعاريف كمفاهيم وذلك لأنها مفيدة في تثبيت أساسيات ضرورية وإن الاداة الفيزيائية التي يعتمد تشغيلها كلياً على المحثة التبادلية هي المحول . وإن انظمة القدرة ذات ال 60 هيرتز تستخدم محولات ذات حجوم تتراوح بين أبعاد غرفة الجلوس الى ابعاد سلة المهملات . تستخدم المحولات لتغيير قيمة الفولتية بزيادتها لرفع كفاءة النقل او تقليلها لزيادة

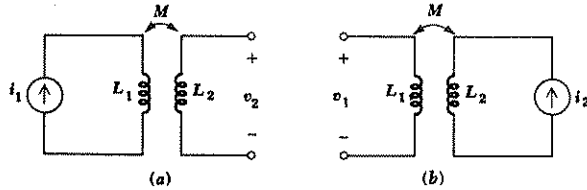
سلامة التشغيل في البيوت أو في الأجهزة الكهربائية الصناعية . وتحتوي معظم أجهزة الراديو على محول واحد أو أكثر وكذلك أجهزة استقبال التلفزيون وفي الأجهزة الصوتية وفي التلفزيونات والسيارات والقطارات الكهربائية .
 علينا أولاً تعريف المحاثّة التبادلية ودراسة الطرق التي يمكن ادخال تأثيراتها في معادلات الدوائر . وسنصل أخيراً الى دراسة الخواص المهمة للمحولات الخطية والتقريب الجيد المهم للمحول ذي اللب الحديدي المعروف بالمحول المثالي .

15.2 المحاثّة التبادلية MUTUAL INDUCTANCE

عندما عرفنا المحاثّة كان ذلك باستخدام العلاقة بين فولتية الاطراف والتيار

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

وقد عرفنا أن الأسس الفيزيائية لمثل هذه الخواص التي تربط الفولتية والتيار تعتمد على (1) حاصل ضرب التدفق المغناطيسي والتيار ، علماً بأن التدفق يتناسب مع التيار في المحثات الخطية (2) إنتاج الفولتية بواسطة مجال مغناطيسي متغير مع الزمن حيث تتناسب الفولتية مع سرعة تغير المجال المغناطيسي أو التدفق المغناطيسي مع الزمن لذلك فإن التناسب بين الفولتية وسرعة تغير التيار تبدو واضحة .



الشكل 15.1 (أ) ينتج التيار i_1 في L_1 فولتية دائرة مفتوحة v_2 في L_2 (ب) ينتج التيار i_2 في L_2 فولتية دائرة مفتوحة v_1 في L_1

ان المحاثة التبادلية تنتج من الاستمرار بالمناقشة السابقة . فالتيار الذي يسري في ملف يولد تدفقاً مغناطيسياً حول الملف وكذلك حول الملف الثاني الموجود في الحيز نفسه . إن التدفق المتغير مع الزمن والمحيط بالملف الثاني ينتج فولتية عبر طرفي الملف الثاني . وهذه الفولتية تتناسب مع سرعة تغير التيار المار في الملف الأول مع الزمن . يبين الشكل 15.1 أ نموذجاً للملفين L_1 و L_2 قريبين من بعضهما لحد أن التدفق الناتج من التيار $i_1(t)$ و المار خلال L_1 يولد فولتية دائرة مفتوحة $v_2(t)$ عبر طرفي L_2 . لذلك وبدون الاهتمام بالاتجاه الجبري للعلامة يمكن تعريف معامل المحاثة التبادلية أو المحاثة التبادلية M_{21} على أنها

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (1)$$

وان تسلسل الرموز السفلية المستعملة في M_{21} يشير الى ان إستجابة الفولتية نتجت في L_2 من مصدر تيار في L_1 ، واذا عكس النظام كما هو مؤشر في الشكل 1.15 ب ونتجت استجابة فولتية في L_2 من مصدر تيار في L_1 فاننا نحصل على :

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (2)$$

ان استخدام معاملين للمحاثة التبادلية غير ضروري ، الا أننا سنستخدم علاقات الطاقة بعد قليل للبرهنة على أن M_{12} و M_{21} متساويان ، لذلك فان $M_{12} = M_{21} = M$. وان وجود التقارن التبادلي بين ملفين يشار له بسهم ذي رأسين كالمبين في الشكل 1.15 أ و ب .

تقاس المحاثة التبادلية بالهنري وهي كالقواومة والمحاثة والسعة تكون دائماً موجبة 1 . الا أن الفولتية $M di/dt$ يمكن أن تظهر كمية موجبة أو سالبة بالطريقة نفسها التي تظهر بها $v = -Ri$ على أنها كمية مفيدة . والمحث هو عنصر ذو طرفين ، ويمكن أن نستخدم الإشارة غير الفعالة المتعارف عليها لغرض اختبار الإشارة الصحيحة للفولتية $L di/dt$ ، $j\omega LI$ أو sLI . اذا دخل التيار الطرف الذي تقع فيه الفولتية المرجعية الموجبة ، فان الإشارة الموجبة يجب أن تستخدم . الا أن المحاثة التبادلية لا يمكن أن تعامل بالطريقة نفسها نظراً لوجود أربعة أطراف في هذه الحالة . إن اختيار الإشارة الصحيحة قد تم باستخدام أحد احتمالات متعددة أحدها هو اصطلاح النقط "dot convention" أو

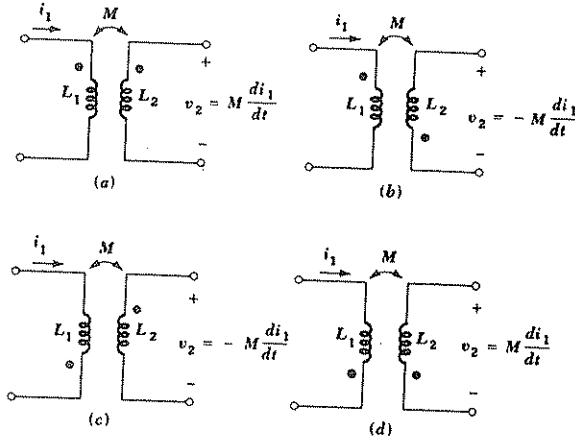
1 إن المحاثة التبادلية مقبولة عالمياً على أنها موجبة . وان من المناسب بالأخص السماح بأن تحمل اشارتها عند شمول ثلاثة ملفات أو أكثر وكل منها ذو فعل متداخل مع الملفين الآخرين . وسنركز انتباهنا الآن على الحالة الأهم ، ألا وهي حالة وجود ملفين فقط .

تطوير اصطلاح النقط والذي يحوي استخدام انواع متعددة من رموز خاصة أو بواسطة اختبار الطرق الخاصة التي يلف بها الملف . في هذا الكتاب سنستخدم اصطلاح النقط بصورة تامة وسنمر فقط على التركيب الفيزياوي للملفات . إن استخدام الرموز الخاصة الاخرى لاضرورة له عندما يقترن ملفان فقط .

وان اصطلاح النقط يتم باستخدام نقطتين كبيرتين توضعان على واحد من طرفي كل من الملفين المترين تبادلياً . نجد اشارة فولتية الاقتران كما يأتي :

إن التيار الذي يدخل أحد طرفي الملفين ينتج فولتية دائرة مفتوحة بين طرفي الملف الثاني يمكن الاحساس بها بالاتجاه المبين باتجاه الفولتية المرجعية الموجبة في الطرف المنقط من الملف الثاني .“

لذلك ففي الشكل 2.15 أ يدخل التيار i_1 الطرف المنقط للملف الأول منتجاً موجبة في الطرف المنقط للملف الثاني وبذلك ينتج $v_2 = M di_1/dt$. ولقد سبق أن وجدنا أن غالباً ما يكون من غير الممكن اختيار الفولتيات او التيارات خلال دائرة ما بحيث يتم التقيد باتجاه واصطلاح الاشارة غير الفعالة . وينطبق الوضع نفسه في التقارن المتبادل ، فمثلاً قد يكون أكثر مناسباً أن نرسم للفولتية v_2 بفولتية مرجعية موجبة في الطرف غير المنقط كما في الشكل 2.15 ب . لذلك تكون $v_2 = -M di_1/dt$. وإن التيارين اللذين يدخلان الطرفين المنقطين لا يكونان دائماً متوفرين كما في الشكلين 2.15 جـ و 2.15 د . وإن مثل هذا التيار يجهز فولتية موجبة في الطرف غير المنقط من الملف الثاني .



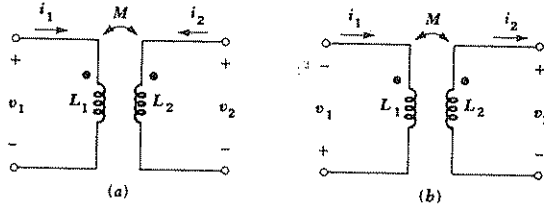
الشكل 2 - 15 ينتج التيار الذي يدخل الطرف المنقط لأحد الملفين فولتية يتحسس بها انها موجبة عند الطرف المنقط للملف الثاني . التيار الذي يدخل الطرف غير المنقط لأحد الملفين ينتج فولتية يتحسس بها انها موجبة عند الطرف غير المنقط للملف الثاني .

لقد ناقشنا فيما سبق حالة وجود فولتية تقارن عبر طرفي الملف مفتوح الدائرة . وعلى العموم فان تياراً محسوس القيمة سيمر في الدائرة في كل من الملفين كما تنتج فولتية تقارن في كل من الملفين بسبب التيار المار في الملف الآخر . « وان فولتية التقارن توجد مستقلة عن اي من فولتيتي الحث الذاتي » وبكلمة أخرى فان الفولتية عبر طرفي الملف L_1 تتكون من مقدارين $L_1 di_1/dt$ و $M di_2/dt$ ، كل منهما يحمل إشارة تعتمد على اتجاه التيار وعلى تحسس الفولتية المفترضة وعلى وضع النقطتين . في الجزء من الدائرة المرسومة في الشكل 15.3 (أ) يظهر التياران i_1 و i_2 كل منهما بصورة اعتباطية يفترض أن يدخل من الطرف المنقط . لذلك فان الفولتية عبر L_1 تتكون من جزءين

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

كما ان الفولتية عبر الملف L_2

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$



الشكل 3 - 15 (أ) نظراً لأن الزوج i_1 و i_2 وكذلك الزوج v_1 و v_2 يوفيان باصطلاح الاشارات غير الفعالة فان الفولتيتان المنتجتان ذاتياً كلاهما موجبتان . نظراً لأن i_1 و i_2 كل منهما يدخل النهايتين المنقطتين . وحيث أن v_1 و v_2 تتحسنان على أنهما موجبتان عند النهايتين المنقطتين . لذا فان فولتيتي الحث المتبادل موجبتان ايضاً (ب) نظراً لأن الزوج v_1 و v_2 والزوج i_1 و i_2 يتحسنان وفق الاصطلاح الموجب للاشارات . لذا فان فولتيتي الحث الذاتي كلاهما موجبتان . حيث ان i_1 يدخل النهاية المنقطة و v_1 تتحسس على أنها موجبة عند النهاية المنقطة . لذا فان الحد المتبادلي لـ v_2 موجب . ونظراً لأن i_2 يدخل النهاية غير المنقطة و v_2 تتحسس على أنها موجبة عند النهاية غير المنقطة فان حد التبادل لـ v_1 موجب أيضاً .

في الشكل 15.3 (ب) لم يتم اختيار التيارات والفولتيتات لغرض أن تكون كافة حدود الفولتيتين v_1 و v_2 موجبتين . ومن النظر الى الاشارات الموجبة لكل من i_1 و v_1 يتضح أن اصطلاح اتخاذ الاشارة غير الفعالة passive لم يتم انطباقه ولذلك فان اشارة $L_1 di_1/dt$ يجب أن تكون سالبة . إن حد الاقتران لـ v_2 تعطى اشارته بملاحظة اتجاه اشارة كل من i_1 و v_2 . نظراً لأن i_1 يدخل الطرف المنقط كما تكون v_2 موجبة في الطرف المنقط . لذلك فان اشارة $M di_1/dt$ تكون موجبة وأخيراً فان i_2 يدخل الطرف غير المنقط لـ L_2 كما تكون v_1 موجبة في الطرف غير المنقط لـ L_1 . لذلك فان جزء الاقتران في v_1 وهو $M di_2/dt$ يجب ان يكون موجباً فنحصل على :

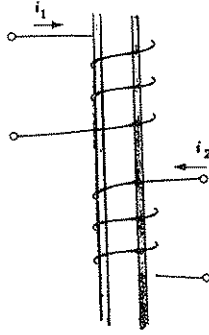
$$v_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad v_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

ان الافتراضات نفسها تؤدي الى اختيارات متطابقة بالاشارة عندما تكون الاشارة بتردد مركب s

$$V_1 = -j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad V_2 = -j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1$$

او حين يكون التردد حقيقياً

$$V_1 = -sL_1 I_1 + sM I_2 \quad V_2 = -sL_2 I_2 + sM I_1$$



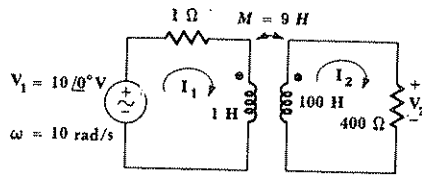
الشكل 4 - 15 البنية الفيزيائية للمفئين مفترضين تبادلياً. من أخذ اتجاه التدفق المغناطيسي (الفيض المغناطيسي) flux الناتج من كل من الملفين بنظر الاعتبار يتضح أن النقطتين يمكن أن توضحا على النهايتين العلويتين لكل من الملفين أو على النهايتين السفليتين لكل منهما .

وقبل تطبيق اصطلاح النقط في تحليل مثال رقمي يمكن أن نحصل على فهم كامل لرموز النقط بالرجوع الى الأسس الفيزيائية لهذا الاصطلاح . وان معنى النقط يترجم الآن بدلالة التدفق المغناطيسي . إن الملفين موضحان ملفوفين على شكل اسطواني في الشكل 4 - 15 وأن اتجاه كل من الملفين يكون بديهيأ . دعنا نفرض أن التيار موجباً ويزداد مع الزمن . وأن التدفق المغناطيسي الذي ينتجه i_1 في الشكل يكون باتجاه بحيث يمكن ايجاده وفق قاعدة اليد اليمنى . فحين تلف أصابع اليد اليمنى حول الملف بحيث تشير الأصابع الى اتجاه سريان التيار فان الابهام يشير الى اتجاه التدفق داخل الملف . لذلك فان i_1 ينتج تدفقاً متجهاً نحو الأسفل نظراً لأن i_1 يزداد مع الزمن وأن التدفق الذي يتناسب مع i_1 يزداد مع الزمن أيضاً . لنعد الآن الى الملف الثاني دعنا نفكر ايضاً في i_2 على أنه موجب وأنه بازدیاد . وان تطبيق قاعدة اليد اليمنى يبين أن i_2 ينتج أيضاً تدفقاً مغناطيسياً متجهاً نحو الأسفل و بازدیاد . وبكلمة أخرى فان التيارين i_1 و i_2 ينتجان تدفقين إضافيين . ان الفولتية عبر طرفي أي ملف تنتج من سرعة تغير وصلية تدفق الملف مع الزمن . وان الفولتية بين طرفي الملف الاول لذلك تكون أكبر حينما يكون i_2 سارياً عما تكون عليه الحالة حينما يكون i_2 صفراً . لذلك فان i_2 يحث فولتية في الملف الأول تكون باتجاه الفولتية المحثثة ذاتياً نفسها في الملف . وتعرف اشارة الفولتية المحثثة ذاتياً من اصطلاح الاشارة غير الفعالة ومن ثم يمكن ايجاد فولتية الاقتران .

ان اصطلاح النقط يساعدنا على اختزال الوضع الفيزيائي للملفات بالاستعاضة عنه بنقطتين توضع كل منهما على أحد طرفي الملفين بحيث انه اذا دخل التياران الطرفين المنقطين فانهما ينتجان تدفقين اضافيين *additive* من ذلك يتضح ان هناك على الدوام امكانية وجود موقعين للنقطتين نظراً لأن كلا النقطتين يمكن دائماً أن يغيرا موقعهما للنهائيتين الآخرين وبالعادة - ينتجا تدفقين يجمعان لبعضهما .

لذلك فان الطريقة الاخرى لاختيار الاشارتين الصحيحتين لحدود التقارن تحتوي على ملاحظة فيما اذا كان التياران يدخلان الطرفين المنقطين أم لا . لذا فان اشارة فولتية التقارن في كل ملف تكون فعلاً مطابقة لاشارة الفولتية المحتثة في الملف نفسه . وان النتيجة تحدث اذا غادر كل من التيارين الطرفين المنقطين . الا انه اذا لم يحدث أي من هذه الظروف فان طرح التدفقين يحدث وتكون اشارة فولتية التقارن في كل ملف بعكس اشارة الفولتية المحتثة ذاتياً في الملف نفسه .

في المثال 15.3 ب لا يدخل التياران كلا الملفين في النهائيتين المنقطتين أو النهائيتين غير المنقطتين . كما ان اشارة حدي الاقتران يجب ان تكون معاكسة لاشارات حدي الحث الذاتي . وان اصطلاح الاشارة غير الفعالة يشير الى أن كلاً من فولتية الحث الذاتي تحملان اشارتين سالبتين . لذلك فان كلاً من فولتية الاقتران تكون موجبتين . وهذا يتفق مع المجموعة السابقة للمعادلات التي حصلنا عليها لهذه الدائرة . وان أي من الطريقتين يمكن استخدامها ليجاد الاشارات الموجبة للحدود $M di/dt$



الشكل 5 - 15 دائرة تحتوي على معادلة تبادلية تطلب فيها نسبة الفولتيتين V_2/V_1

لنحاول تطبيق هذه الطرق على تحليل الدائرة المبينة في الشكل 15.5 . المطلوب هو إيجاد نسبة فولتية الاخراج عبر المقاوم $400-\Omega$ الى فولتية المصدر . وان هناك تيارى شبيكتين مصطلح عليهما ومن ثم يجب تطبيق قانون كرشوف للفولتية بعد ذلك لكل من الشبيكتين ففي الشبكة اليسرى يمكن الحصول على اشارة حد التقارن مثلاً من تطبيق اصطلاح النقط مباشرة . نظراً لأن I_2 يغادر الطرف المنقط للملف L_2 فان الفولتية عبر الملف L_1 يجب أن تحوي اشارة موجبة في الطرف غير المنقط . لذلك :

$$I_1(1 + j10) - j90I_2 = 10$$

ومن المناسب ان نبين طريقة اخرى لايجاد اشارة الاقتران في الشبكة المثالية . نظراً لأن I_1 يدخل الطرف المنقط حينما يغادر I_2 الطرف المنقط لذلك فان حد الاقتران في كل شبكة يجب أن تحوي على اشارة معاكسة لاشارة حد المحاطة الذاتية . لذلك يمكننا كتابة :

$$I_2(400 + j1000) - j90I_1 = 0$$

يمكن حل المعادلتين باستعمال المحددات determinants (أو ربما بطريقة حذف I_1).

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + j10 & 10 \\ -j90 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + j10 & -j90 \\ -j90 & 400 + j1000 \end{vmatrix}}$$

$$I_2 = 0.1724 \angle -16.7^\circ$$

و
ولذلك
أو

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{400(0.1724 \angle -16.7^\circ)}{10}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 6.90 \angle -16.7^\circ$$

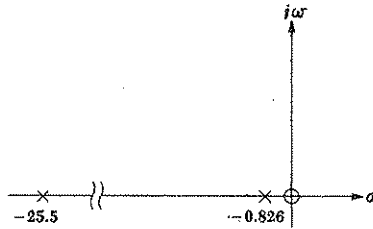
ان فولتية الاخراج أكبر بالقيمة من فولتية الادخال . لذلك فانه بالامكان الحصول على كسب بالفولتية بواسطة ارتباط التقارن كما هو الحال في دائرة الرنين . الا أن كسب الفولتية المتوفر في هذه الدائرة يوجد هنا على امتداد عريض من الترددات . ففي دائرة رنين ذات Q عالية تتناسب مدى فولتية الوضعية مع قيمة Q وتحديث فقط على مدى التردد الذي يتناسب عكسياً مع Q . دعنا نر انه كان بالامكان توضيح هذه النقطة أكثر بالرجوع الى المستوى المركب يمكننا ايجاد لهذه الدائرة خاصة $I_2(s)$

$$I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 1+s & V_1 \\ -9s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+s & -9s \\ -9s & 400+100s \end{vmatrix}} = \frac{9sV_1}{19s^2 + 500s + 400}$$

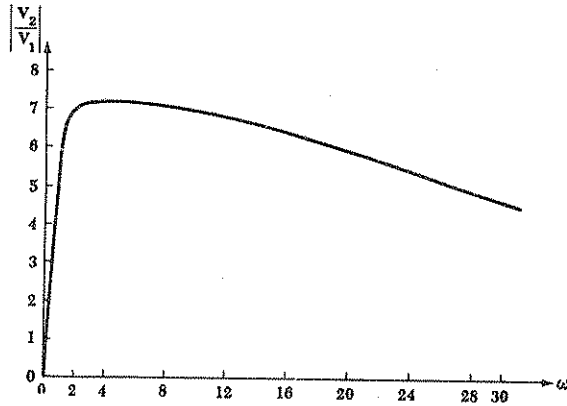
ومن ثم نجد نسبة فولتية الخرج الى فولتية الدخل كدالة لـ s

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{3600s}{19s^2 + 500s + 400} = 189.5 \frac{s}{(s + 0.826)(s + 25.5)}$$

ان مخطط القطب - الصفر للدالة التحويلية مبين في الشكل 15.6 . وان موقع القطب في $s = -25.5$ مشوه لكي يظهر كلا القطبين . وان نسبة المسافة بين القطبين عن نقطة الأصل تقرب من 1 : 30 . ومن ملاحظة هذا المخطط يتبين أن الدالة التحويلية تساوي صفرأ في التردد صفر ، ولكنها فور ازدياد ω فوق الصفر ، مثلاً حينما تساوي 1 أو 2 ، فان نسبة المسافتين عن الصفرين والقطبين القريبين من نقطة الاصل تساوي واحد . لذلك فان كسب الفولتية يتأثر فقط بمسافة القطب على محور σ السالب ، وهذه المسافة لاتزداد بصورة محسوسة حتى تقترب ω من 15 أو 20 .



الشكل 6 - 15 مخطط الأصفار والأقطاب للدالة التحويلية V_2/V_1 للدائرة المبينة في الشكل 5 - 15 . الأقطاب مفيدة لتبيين أن اتساع الدالة التحويلية كبير نسبياً من ω تساوي 1 أو 2 الى ω تساوي 15 أو 20



الشكل 7 - 15 كسب الفولتية $|V_2/V_1|$ للدائرة المبينة في الشكل 5 - 15 قدر رسم كدالة ω . كسب الفولتية أكبر من 5 من حوالي $\omega = 0.75$ إلى $\omega = 28$.

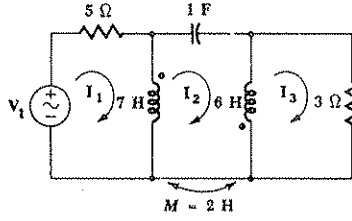
ان هذه الاستنتاجات المبدئية يمكن التأكد منها من منحني الاستجابة في الشكل 7 - 15 والذي يبين ان قيمة كسب الفولتية أكبر من 0.707 من القيمة العظمى بين الفولتية . ويجب أن لا يفسر كسب الفولتية كأنه كسب قدرة . عند $\omega = 10$ ، فان كسب الفولتية يساوي 6.90 ولكن مصدر الفولتية المثالي يحوي فولتية مقدارها 10 فولتا تسلم قدرة كلية مقدارها 8.07 W يصل منها 5.94 W الى الـ $400\text{-}\Omega$ ان نسبة قدرة الخرج الى قدرة المصدر والتي تعرف بأنها كسب القدرة تساوي 0.737 .

لنأخذ باختصار مثلاً آخر كالموضح في الشكل 8 - 15 تحوي هذه الدائرة ثلاث شبكات وتبين في الدائرة التيارات الثلاثة مؤثرة فيها . وبتطبيق قانون كرشوف الثاني للشبيكة الأولى يتم التأكد من أن اشارة حد الاقتران تبقى موجبة وذلك باختيار $(I_3 - I_2)$ على أنه التيار المار خلال الملف الثاني .
لذلك ،

$$5I_1 + 7s(I_1 - I_2) + 2s(I_3 - I_2) = V_1$$

$$(5 + 7s)I_1 - 9sI_2 + 2sI_3 = V_1$$

او (3)



الشكل 8 - 15 دائرة ذات ثلاث شبكات وفيها اقتران تبادلي . يمكن أن تحلل بسهولة كبيرة بطريقة الشبكات او الدارات .

تتطلب الشبكة الثانية حدين للمحاثة الذاتية وحدين لمحاثة الاقتران . لذلك يجب كتابة المعادلات بعناية . نحصل على

$$7s(I_2 - I_1) + 2s(I_2 - I_3) + \frac{1}{s}I_2 + 6s(I_2 - I_3) + 2s(I_2 - I_1) = 0 \quad \text{أو}$$

$$-9sI_1 + \left(17s + \frac{1}{s}\right)I_2 - 8sI_3 = 0 \quad (4)$$

واخيراً للشبكة الثالثة

$$6s(I_3 - I_2) + 2s(I_1 - I_2) + 3I_3 = 0 \quad \text{أو}$$

$$2sI_1 - 8sI_2 + (3 + 6s)I_3 = 0 \quad (5)$$

ويمكن حل المعادلات 3 الى 5 بأية طريقة معروفة

تمارين

1 - 15 في الدائرة المبينة في الشكل 9 - 15 . دعنا نأخذ $i_1 = 3e^{-200t}$ A و

$$i_2 = 1.8e^{-200t}$$

أوجد (أ) v_2 (ب) v_1 (ج) v_s

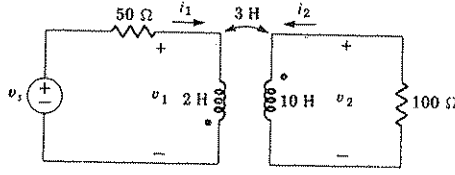
$$\text{الجواب } -180e^{-200t}; -12e^{-200t}; 138e^{-200t} \text{ V}$$

2 - 15 افرض أن $v_s = 100 \cos 50t$ V في الدائرة المبينة في الشكل 9 - 15 ثم

$$\text{أوجد (أ) } i_1(t) \text{ (ب) } i_2(t)$$

الجواب

$$0.361 \cos(50t - 32.7^\circ); 1.225 \cos(50t - 44.0^\circ) \text{ A}$$



الشكل 9 - 15 انظر التمارين 1 - 15 الى 15.3

3 - 15 أوجد I_2/I_1 كدالة لـ s للدائرة المبينة في الشكل 9.15 ثم أوجد قيمة s التي لها I_2/I_1 تساوي (أ) 0 (ب) ∞ (ج) $j1$
 الجواب $s^{-1} -9.17 + j2.75$; -10 ; 0

15.3 اعتبارات الطاقة ENERGY CONSIDERATIONS

دعنا الآن ندرس الطاقة المخزونة في زوج من المحاثات المتقارنة سوية وستكون النتائج ذات فوائد متعددة . وسنحاول أولاً تبرير فرضيتنا بأن $M_{12} = M_{21}$ ، ثم بعد ذلك يمكننا إيجاد أقصى قيمة للمحاثات المتبادلة بين محثين معلومين . وأخيراً سنحاول أن نرسي لأنفسنا الأسس التي يمكن منها استنتاج الظروف الابتدائية في الدوائر المتقارنة مغناطيسياً على الرغم من اننا سنتعرض للحالات البسيطة فقط .

يبين الشكل 3 - 15 (أ) ملفين متقارنين مع تأشيريات التيارات والفولتيات ونقطتي التطبية . دعنا نحاول ان نبرهن ان قاعدة الاستبدال Reciprocity نافذة في هذه الحالة . أو أن $M_{12} = M_{21}$ ولتنفيذ ذلك سنبدأ بافتراض أن كافة الفولتيات والتيارات تساوي صفراً وبذا نبدأ بطاقة ابتدائية مقدارها صفراً في الشبكة . ولنفتح أولاً زوج الأطراف الأيمن ، فنبدأ بزيادة التيار من الصفر الى قيمة ثابتة I_1 . ستكون القدرة الداخلة للشبكة من اليسار في أي لحظة .

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1$$

والتي تدخل من الجهة اليمنى

$$v_2 i_2 = 0$$

حيث ان $i_2 = 0$

ان الطاقة المخزونة ضمن الشبكة عندما $i_1 = I_1$ تساوي :

$$\int_0^{I_1} v_1 i_1 dt = \int_0^{I_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

وباقاء i_1 ثابتاً $i_1 = I_1$ وبفرض أن i_2 تتغير من الصفر الى قيمة ثابتة I_2 . تساوي الطاقة المستلمة من المصدر الأيمن :

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2 dt = \int_0^{I_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

على الرغم من ان قيمة i_1 تبقى ثابتة فان المصدر الايسر يجهز طاقة الى الشبكة خلال فترة زمنية تساوي

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1 dt &= \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1 dt \\ &= M_{12} I_1 \int_0^{I_2} di_2 \\ &= M_{12} I_1 I_2 \end{aligned}$$

وتكون الطاقة المخزونة في الشبكة حين يصل كل من i_1 و i_2 قيمة ثابتة :

$$W_{total} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

والان يمكننا ايجاد التيارات النهائية في الشبكة بافتراض ان التيارات تصل اقيامها النهائية بعكس التسلسل أي ان زيادة i_2 من الصفر الى I_2 ثم بقاء i_2 ثابتاً بينما يزداد من الصفر الى I_1 . اذا حسبت الطاقة الكلية المخزونة لهذه التجربة تكون النتيجة :

$$W_{total} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2$$

والفرق الوحيد هو استبدال الحاثتين المتبادلتين M_{12} و M_{21} احدهما محل الأخرى . بينما بقيت الظروف الابتدائية والنهائية للشبكة على ماهي عليه . الا ان قيمتي الطاقة المخزونة يجب أن تبقى ثابتتين .

لذا

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

وكذلك
(6)

اذا دخل التيار الطرف المؤشر بنقطة عندما يفادر الاخر الطرف المؤشر بنقطة . وكانت اشارة حد الطاقة المتبادلة معكوسة

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad (7)$$

على الرغم من أن (6) و (7) قد اشتقتا باعتبار القيمتين النهائييتين للتيارين كثابتين ، إلا أنه من الواضح أن هذين الثابتين يمكن أن يأخذا أي قيمة ويمثل تعبیر الطاقة مقدار الطاقة المخزونة الصحيح حينما تكون القيم الآنية لـ i_1 و i_2 هي I_1 و I_2 على الترتيب . وبكلمة أخرى يمكن استخدام الحروف الصغيرة أيضاً

$$w(t) = \frac{1}{2}L_1[i_1(t)]^2 + \frac{1}{2}L_2[i_2(t)]^2 \pm M[i_1(t)][i_2(t)] \quad (8)$$

ان الفرضية الوحيدة التي تستند اليها المعادلة (8) تعتمد الى إرساء الأساس المنطقي لمستوى مرجع الطاقة صفر حينما يكون كلا التيارين صفرأ . يمكن الآن استخدام (8) لتحديد الحد الاعلى لقيمة M . نظراً لأن $w(t)$ تمثل الطاقة المخزونة داخل الشبكة غير الفعالة ، فانها لا يمكن ان تكون سالبة لقيم i_1 و i_2 و L_1 و L_2 أو M لنفرض أولاً ان i_1 و i_2 اما أن يكون كلاهما موجبين أو كلاهما سالبين فيكون حاصل الضرب موجباً في كلا الحالتين من المعادلة (8) فان الحالة الوحيدة التي تكون فيها القدرة سالبة هي :

$$w = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2$$

والتي يمكن أن تكتب باكمال المربع :

$$w = \frac{1}{2}(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2)^2 + \sqrt{L_1L_2}i_1i_2 - Mi_1i_2$$

والان فان الطاقة لا يمكن أن تكون سالبة . لذا لا يمكن ان يكون الطرف الأيمن سالباً . الا أن الحد الأول يمكن أن يكون صغيراً لحد الصفر . لذا لا يمكن أن يكون مجموع الحدين الأخيرين سالباً . لذا

$$\begin{aligned} \sqrt{L_1L_2} &\geq M \\ M &\leq \sqrt{L_1L_2} \end{aligned} \quad (9) \quad \text{أو}$$

لذلك هناك حد أعلى ممكن لاتساع المحائة التبادلية والتي لا يمكن أن تزيد عن المعدل الهندسي لمحائة ملفين بينهما محائة تبادلية . وعلى الرغم من أننا اشتقنا المتباينة اعتماداً على فرضية أن i_1 و i_2 لهما الاشارة الجبرية نفسها فان اجراءات محائة يمكن تنفيذها اذا كانت الاشارتان متعاكستين مع ضرورة اختيار الاشارة الموجبة للمعادلة (8) .

كما انه كان بالإمكان تبين صحة المعادلة (9) من الفرضيات الفيزياوية للتقارن المغناطيسي . اذا ماتصورنا أن i_2 صفر وأن i_1 يكون التدفق المغناطيسي الذي يتشابهك مع كل من L_1 و L_2 . فان من الواضح ان التدفق الذي يتشابهك مع L_1

لا يمكن أن يزيد على التدفق الذي يتشابك مع L_2 والذي يمثل التدفق الكلي .
 لذلك فإنه يوجد حد أعلى لمقدار المحاثية التبادلية الممكنة بين محثين معلومين . فمثلاً
 إذا كان $L_1 = 1 \text{ H}$ و $L_2 = 10 \text{ H}$ فإن $M \leq 3.16 \text{ H}$
 أن درجة وصول M لنهايتها العظمى توصف بدقة بواسطة معامل الاقتران .
 ويعرف معامل الاقتران k بما يأتي

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (10)$$

ومن الواضح أن

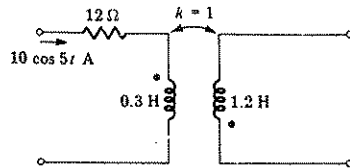
$$0 \leq k \leq 1$$

ويمكن الحصول على قيم k القريبة من الواحد من الملفات القريبة من بعضها والتي تلف بحيث تتجه لتجهيز تدفق مغناطيسي مشترك أو التي تجهز بمسار مشترك خلال مادة تخدم لتركيز التدفق المغناطيسي (مادة ذات انفاذية عالية) يقال عن الملفات التي لها عامل اقتران كبير بانها شديدة الاقتران .

تمرينان

4 - 15 بالرجوع الى زوج المحثين المبينين في الشكل 3 - 15 (أ) اختر
 $i_1 = 2i_2 = 4 \cos(100t - 60^\circ) \text{ A}$ و $k = 0.5$ و $L_2 = 3.2 \text{ H}$ و $L_1 = 5 \text{ H}$ ثم
 اوجد عندما $t = 0$ (أ) v_1 و (ب) v_2 (ج) الطاقة الكلية المخزونة في النظام .
 الجواب $J \ 15.6$; $V \ 2078$; $V \ 1247$

5 - 15 اوجد الطاقة الكلية المخزونة في الشبكة المبينة في الشكل 10 - 15 عندما
 $t = 0$ إذا كان المحث ذا 1.2-H (أ) مفتوح الدائرة : (ب) مقصر الدائرة (ج)
 مربوط عبر مقاوم ذي $7\text{-}\Omega$
 الجواب $J \ 15$; 4.98 ; 0

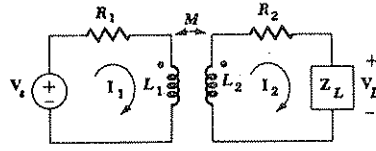


الشكل 10 - 15 انظر التمرين 5 - 15

نحن الآن على استعداد لتطبيق معرفتنا للتقارن لكي نصف تحليلياً تصرف أداتين عمليتين محددين كل من هاتين الأداةين يمكن أن تمثل بنموذج يحتوي على معائة تبادلية . وكل منهما هو « محول » والذي سنعرفه بأنه شبكة تحتوي على ملفين أو أكثر قد أحدث بينهما بشكل متعمد تقارن مغناطيسي . في هذا الجزء سوف ندرس المحول الخطي والذي هو أحد الامثلة الممتازة للمحول الخطي العملي المستخدم في الترددات الراديوية أو الترددات العالية . وفي الجزء التالي سوف ندرس المحول المثالي والذي هو تمثيل للمحول الواقعي بعد أن تم تقريبه لكي يكون مثالياً وأحادي الاقتران وكان له مصنوعاً من مادة مغناطيسية ، في العادة تكون شبكية من الحديد .

في الشكل 11 - 15 رسم مكافئ محول ويتبين فيه تيارا الشبكتين هما الشبيكة الأولى والتي تكون في العادة مربوطة الى المصدر بالابتدائي بينما الشبيكة الثانية في العادة تحتوي على الحمل بالثانوي . كما أن المحثين L_1 و L_2 منسوين الى الابتدائي والثانوي من المحول على الترتيب . سوف نفترض ان المحول خطي ويتبع ذلك عدم استخدام مادة مغناطيسية تتسبب في انتاج تدفق مغناطيسي عن لفائف الابتدائي لكي يقطع لفائف الثانوي . ومن الصعب الحصول على معامل اقتران أكثر من أعشار قليلة بدون استخدام مثل هذه المادة المغناطيسية . تمثل المقاومتان في الشكل مقاومتي السلكين المكونين للملفين الابتدائي والثانوي وكذلك لأي فقود أخرى .

في كثير من التطبيقات يستخدم المحول الخطي بحيث يكون ثانوية بتوليف tuned أو برنين resonance . كما يشغل أبتدائيه بطروف رنين أيضاً وذلك باستبدال مصدر الفولتية المثالي بمصدر تيار على التوازي مع مقاومة كبيرة ومتسعة . وان تحليل دائرة التوليف المنفردة او المزدوجة هذه يتضمن عمليات رياضية طويلة وسوف لانطرق الى ذلك الان . إلا أنه من المناسب الاشارة هنا الى ان استجابة الثانوي تتصف بمنحنى الرنين المعروف لمعامل اقتران صغير نسبياً . الا انه بزيادة عامل الاقتران يصبح بالأمكان السيطرة على شكل منحنى الاستجابة بمقدار أكبر . وان منحنيات الاستجابة المحتوية على قيم مسطحة أكثر وعلى هبوط اسرع على كل من الطرفين يمكن الحصول عليه بدائرة توليف مزدوجة .



الشكل 11 - 15 محول خطي يحتوي على مصدر في الدائرة الابتدائية وحمل في الدائرة الثانوية. كما احتوى الابتدائي والثانوي على مقاومة أيضاً.

لنأخذ ممانعة الإدخال التي تظهر بين طرفي دائرة الابتدائي، إن معادلتني الشبكتين كما يأتي :

$$V_s = I_1(R_1 + sL_1) - I_2sM \quad (11)$$

$$0 = -I_1sM + I_2(R_2 + sL_2 + Z_L) \quad (12)$$

ويمكن أن نبسط بتعريف

$$Z_{11} = R_1 + sL_1 \quad Z_{22} = R_2 + sL_2 + Z_L \quad \text{ومن ثم}$$

$$V_s = I_1Z_{11} - I_2sM \quad (13)$$

$$0 = -I_1sM + I_2Z_{22} \quad (14)$$

وبحل المعادلة الثانية لـ I_2 وتعويض ذلك في المعادلة الأولى نتمكن من إيجاد ممانعة الدخل

$$Z_{in} = \frac{V_s}{I_1} = Z_{11} - \frac{s^2M^2}{Z_{22}} \quad (15)$$

وقبل اجراء عمليات أخرى على هذه المقادير يمكننا الوصول الى عدة استنتاجات مثيرة من الآن. وهذه النتيجة بالدرجة الأولى لاتعتمد على موقع النقطتين لأي من الملفين، حيث أنه اذا حركت أي من النقطتين الى النهاية الأخرى من الملف فان النتيجة تغير اشارة كل حد يحتوي على M في المعادلات (11) الى (14). وهذا التأثير نفسه يمكن الحصول عليه باستبدال M بـ $(-M)$ ، ومثل هذا التغيير لايمكن أن يؤثر على ممانعة الدخل كما يتبين من (15). وكما يمكننا ان نلاحظ أيضاً في (15) أن ممانعة الدخل ببساطة هي Z_{11} اذا انقص الاقتران الى الصفر. وعند ازدياد الاقتران على الصفر تختلف Z_{11} عن الصفر بمقدار يساوي $-s^2M^2/Z_{22}$ والذي يدعى « بالممانعة المنعكسة » *reflected impedance*. يمكن ملاحظة التغير بدقة أكثر بفرض

$$Z_{in}(j\omega) = Z_{11}(j\omega) + \frac{\omega^2M^2}{R_{22} + jX_{22}}$$

وباجراء التنسيب وللممانعة المنعكسة

$$Z_{in} = Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} + \frac{-j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$$

وحيث أن $\omega^2 M^2 R_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$ يجب أن تكون موجبة فمن الواضح أن وجود الثانوي يزيد من الفقد في دائرة الابتدائي . وبكلمة أخرى فان وجود الثانوي يمكن أن يؤخذ بنظر الاعتبار في دائرة الابتدائي بزيادة قيمة R_1 . هذا اضافة الى أن المفاعلة التي يعكسها الثانوي الى دائرة الابتدائي لها اشارة بعكس اشارة X_{22} والتي هي المفاعلة المحصلة حول دارة الثانوي . والمفاعلة X_{22} هي مجموع ωL_2 و X_L يجب أن تكون موجبة للاحمال الحثية وموجبة أو سالبة للاحمال السعوية بالاعتماد على مقدار الحمل المفاعلي .

دعنا ندرس تأثيرات هذه المفاعلة المنعكسة والمقاومة المنعكسة بأخذ حالة خاصة فيها الثانوي والابتدائي عبارة عن دائرتي رنين توال متطابقتين . لذا فان $L_1 = L_2 = L$ و $R_1 = R_2 = R$. كما تنتج ممانعة الحمل Z_L من متسعة C مطابقة لمتسعة توضع على التوالي مع دائرة الابتدائي . وان تردد رنين التوالي لأي من دائرتي الابتدائي أو الثانوي بمفردها هي $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ وعند تردد الرنين هذا تكون ممانعة الثانوي الصافية صفراً وممانعة الابتدائي الصافية صفراً ولا يكون هناك مفاعلة منعكسة في الابتدائي من الثانوي . لذا تكون ممانعة الدخل مقاومة نقية اي أن ظروف الرنين موجودة . عند تردد اعلى بقليل . ممانعتا الابتدائي والثانوي كلاهما حثيان . لذا تكون المفاعلة المنعكسة سعوية . اذا كان الاقتران المغناطيسي كبيراً لحد كاف فان ممانعة الادخال تصبح مرة اخرى مقاومة نقية أي حدوث ظرف رنين مرة أخرى ولكن عند تردد اعلى بقليل من ω_0 . ان ظروفاً مشابهة تحدث عند تردد اقل بقليل من ω_0 . إن كل دائرة لوحدها سعوية بينما المفاعلة المنعكسة حثية ويمكن ان يحدث حذف مرة أخرى . وعلى الرغم من اننا نقرب من الوصول الى الاستنتاجات . فانه يظهر ان حالات الرنين الثلاث المتجاورة هذه . كل منها تشبه حالة رنين توال . وربما تسمح بتيار ابتدائي كبير نسبياً لكي يسري من مصدر الفولتية . ويجهز تيار الابتدائي بدوره فولتية محتثة في دائرة الثانوي ثم تياراً ثانوياً كبيراً . ويوجد التيار الثانوي على امتداد حزمة من الترددات تمتد من فوق بقليل ثم يتم الحصول على أقصى استجابة على امتداد مدى أوسع للترددات مما يمكن الحصول عليه في دوائر الرنين البسيطة . وان منحنى استجابة كهذا مزغوب فيه بالطبع اذا كان المصدر الابتدائي عبارة عن اشارة مخابرة تحتوي على طاقة موزعة على امتداد حزمة

الترددات بدل ان تكون مركزة في تردد واحد . توجد مثل هذه الاشارات في راديو التضمين الاتساعي AM والتضمين الترددي FM والتلفزيون والقياس عن بعد telemetry والرادار radar وكل أنظمة الاتصالات الأخرى .

من المناسب أحياناً الاستعاضة عن المحول بشبكة مكافئة بهيئة π أو T . اذا فصلنا مقاومتي الابتدائي والثانوي من المحول . بقي المحثان المقترنان تبادلياً فقط كما هو مبين في الشكل 12 - 15 . لاحظ أن الطرفين السفليين للمحول مربوطان مع بعضهما ليكونا شبكة ذات ثلاثة أطراف . نجري ذلك نظراً لأن كلاً من شبكتينا المكافئتين هما شبكتان كل منهما بثلاثة أطراف . والمعادلات التفاضلية التي تصف هذه الدائرة هي مرة أخرى .

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (16) \quad \text{وكذلك}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (17)$$

ان هيئة المعادلتين معروفة ويمكن ترجمتها بسهولة بدلالة التحليل الشبكي . دعنا نختار دوراناً باتجاه عقارب الساعة لـ i_2 وبعكس عقارب الساعة لـ i_1 لكي يكون كل من i_1 و i_2 معرفتين بتيارات الشكل 12 - 15 . وان الحدين $M di_1/dt$ في (16) و $M di_2/dt$ في (17) يبينان أن الشبكتين يجب ان تحتويا على محاثّة ذاتية مشتركة هي M . ونظراً لأن المحاثّة الكلية حول الشبكة اليسرى هي L_1 فان محاثّة مقدارها $L_1 - M$ يجب ان تدخل في الشبكة الأولى دون الشبكة الثانية . وبصورة مشابهة فان محاثّة ذاتية مقدارها $L_2 - M$ يجب إدخالها في الشبكة الثانية دون الأولى . يبين الشكل 13 - 15 الشبكة المكافئة الناتجة . إن التكافؤ مضمون بتطابق الزوجين من المعادلات التي تربط v_1 و i_1 و v_2 و i_2 في الشبكتين إذا وضعت أي من النقطتين على ملفي المحولين المعطيين على النهاية المعاكسة من ملفين فان اشارة حدود الاقتران في (16) و (17) ستكون سالبة . وهذا كافيء الاستعاضة عن بـ وتؤدي هذه الاستعاضة في الشبكة المبينة في الشكل 13 - 15 الى المكافئ الصحيح في هذه الحالة .

وان المحاثات في مكافئ T كلها محاثات ذاتية ولا يوجد أي محاثّة تبادلية . من الممكن الحصول على قيم سالبة للدائرة المكافئة ولكن هذا غير مهم اذا كان هدفنا التحليل رياضياً فقط لايمكن تركيب الدائرة المكافئة عملياً بأي شكل من الاشكال اذا احتوت على محاثّة سالبة . الا أن هناك حالات حينما تعطي اساليب synthesizing الشبكة دالة تحويلية معينة تؤدي الى دوائر محتوية على شبكة ذات

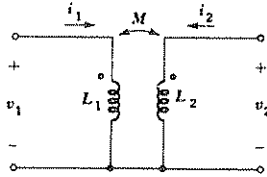
محاثات سالبة فعند ذلك يمكن تحقيق مثل هذه الدوائر عملياً باستخدام محول خطي. وإن شبكة π المكافئة لا يمكن الحصول عليها بسهولة فهي أكثر تعقيداً ولا تستخدم بكثرة. وسنطورها بحل (17) لـ di_2/dt وتعويض النتائج في (16).

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad \text{أو}$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2$$

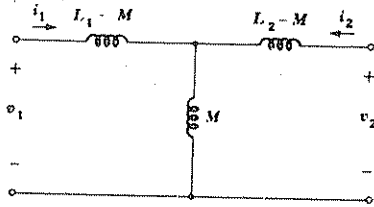
إذا كاملنا الآن من 0 الى t نحصل على :

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (18)$$



الشكل 12 - 15 محول معروف يمكن ان يستماض عنه بالشبكة المكافئة المطاة في الشكل 13 - 15 و 14 -

15



الشكل 13 - 15 المكافئ τ للمحول المبين في الشكل 12 - 15

وبطريقة مشابهة نحصل على

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (19)$$

يمكن ترجمة المعادلتين (18) و (19) كزوج من معادلتين عقديتين ويجب وضع مصدر تيار خطوة في كل عقدة لغرض تجهيز الظروف الابتدائية المناسبة. وإن

عاطلي الضرب لكل تكامل بالطبع هما معكوسا بعض المحثات المكافئة . لذا فان المعامل الثاني في (18)، $M/(L_1L_2 - M^2)$ هو $1/L_B$ او أنه معكوس المحثة الممتدة بين العقدين 1 و 2 كما مبين في شبكة π المكافئة المبينة في الشكل 14 - 15. وان المعامل الاول في (18) : $L_2/(L_1L_2 - M^2)$ هو $1/L_A$ لذا

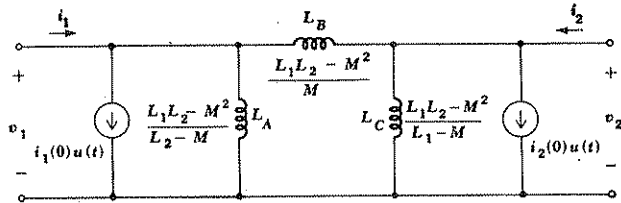
$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1L_2 - M^2} - \frac{M}{L_1L_2 - M^2}$$

$$L_A = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_2 - M}$$

$$L_C = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1 - M}$$

ولا يوجد أي إقتران مغناطيسي بين المحاثات في الدائرة المكافئة والتيارات الابتدائية في المحاثات الثلاثة كلها اصفار .

ويمكننا التعويض عن عملية عكس النقاط في المحول المعطى فقط بتغيير اشارات M في الشبكة المكافئة . كما أن مثل ما وجدنا في T المكافئة فان المحاثات السالبة ربما تظهر في الشبكة المكافئة .



الشكل 14 - 15 الشبكة π المكافئة للمحول المبين في الشكل 12 - 15

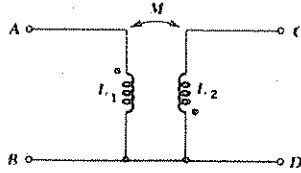
تمارين

6 - 15 قيم العناصر في محول خطي هي $k_1 = 2 \Omega$ و $L_1 = 50 \text{ mH}$ و $M = 60 \text{ mH}$ و $R_2 = 10 \Omega$ و $L_2 = 150 \text{ mH}$ استخدم المحول كعنصر ذي نهايتين في دائرة رنين توال ذات $\omega_0 = 2000 \text{ rad/s}$ أوجد Q للمحثة المكافئة اذا كان الطرفان المستخدمان هما (أ) الطرفان الابتدائيان وكان الثانوي مفتوح الدائرة (ب) الطرفان الثانويان وكان الابتدائي مفتوح الدائرة (ج) الطرفان الابتدائيان وكان الثانوي مقصور الدائرة .

الجواب 14.47; 30; 50

7 - 15 المحاثات الثلاثة المكونة لمكافئ T في المحول المبين في الشكل 15 - 15 اقيامها 2 - و 5 و 10 H . أوجد (أ) نسبة L_1/L_2 أو L_2/L_1 أيهما اصغر (ب) معامل الأقران

الجواب 0.375; 0.408



الشكل 15 - 15 انظر التمرين 7 - 15

8 - 15 اذا كانت $L_1 = 20$ و $L_2 = 100$ و $M = 40$ mH في محول خطي خال من المقدم ، ارسم مكافئ T له لكلا وضعيتي النقاط ، ثم أوجد قيم المحاثات الأربعة المكافئة التي تشاهد عند طرفي الابتدائي مع قصر دائرة الثانوي وربطه على التوازي مع الابتدائي .

الجواب 2; 4; 4; 10 mH

5 - 15 المحول المثالي THE IDEAL TRANSFORMER

المحول المثالي هو تقريب مفيد للمحول المتقارن باحكام جداً والذي يكون معامل الأقران فيه قريباً جداً من الواحد . كما تكون فيه مفاعلتا الابتدائي والثانوي الحثيتان كبيرتين جداً بالمقارنة مع الممانعات الطرفية . وان هذه الخواص يتم الأقتراب منها جداً بالمحولات المصممة جيداً ذات اللب الحديدي على مدى معقول من الترددات لممانعات طرفية بمدى معقول . وان التحليل التقريبي للدائرة المحتوية على محول ذي لب حديدي يمكن أن يتم ببساطة باستبدال ذلك المحول بمحول مثالي . ويمكن تصور المحول المثالي كنموذج من الدرجة الأولى للمحول ذي اللب الحديدي .

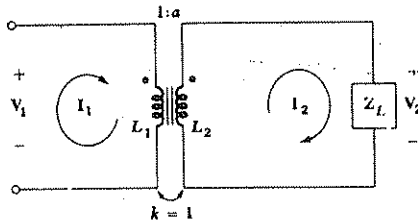
يبرز مفهوم واحد جديد في المحول المثالي ألا وهو نسبة اللفات *turns ratio* التي يرمز لها بالحرف *a* . وتناسب المحائة الذاتية للملف الابتدائي أو الملف الثانوي مع مربع عدد لفات السلك المكون للملف . وتنطبق هذه العلاقة فقط اذا كان التدفق المتكون من التيار الذي يسري في الملف يقطع كل اللفات . ولتطوير هذه النتيجة بشكل منطقي من الضروري استخدام مفهوم المجال المغناطيسي والذي هو موضوع لا يقع ضمن مناقشتنا لتحليل الدوائر . إلا أن مناقشة نوعية ربما تكون كافية . اذا مر تيار *I* خلال ملف ذي *N* من اللفات فان التدفق المغناطيسي المتكون يعادل *N* من المرات بقدر ذلك المتكون من ملف ذي لفة واحدة . واذا تصورنا أن هذه الـ *N* من اللفات متطابقة فان التدفق كله يقطع كل اللفات . وعند تغير التيار والتدفق مع الزمن فان الفولتية المحتثة في كل لفة تكون *N* من المرات بقدر تلك الناتجة من ملف ذي لفة واحدة . وأخيراً فان الفولتية المحتثة في ملف ذي *N* من اللفات يجب أن تكون *N²* من المرات بقدر الفولتية الناتجة عن لفة واحدة . لذا يظهر التناسب بين المحائة ومربع عدد اللفات وينتج من ذلك .

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = a^2$$

حيث

$$a = \frac{N_2}{N_1}$$

يبين الشكل 16 - 15 محولاً مثالياً ربط حمل الى ثانويه . وان الطبيعة الخطية للمحول توضح بعدد من المفاهيم كاستخدام خطين عمودين بين الملفين للاشارة الى وجود الدقائق الحديدية في بعض المحولات ذات اللب الحديدي واستخدام قيمة معامل اقتران يساوي واحداً ووجود الاشارة 1 الى *a* التي تشير الى أن النسبة بين اللفات هي *N₁* الى *N₂* دعنا نحلل هذا المحول في حالة وضع الاستقرار الجيبي لغرض ترجمة فرضياتنا بمفهوم سهل . معادلتا الشيكيتين هما :



الشكل 16 - 15 محول مثالي مربوط الى ممانعة حمل عام

$$V_1 = I_1 j\omega L_1 - I_2 j\omega M \quad (20)$$

$$0 = -I_1 j\omega M + I_2 (Z_L + j\omega L_2) \quad (21)$$

نجد أولاً ممانعة الدخل لمحول مثالي . على الرغم من أننا سنفرض أن المحاثة الذاتية لكل ملف ستصبح لانتهائية فان ممانعة الدخل ستبقى محدودة . بحل (21) لـ I_2 وتعويضها في (20) نحصل على :

$$V_1 = I_1 j\omega L_1 + I_1 \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2} \quad \text{وكذلك}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{Z_L + j\omega L_2}$$

وحيث ان $k = 1$ و $M^2 = L_1 L_2$ فان

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_1 L_2}{Z_L + j\omega L_2}$$

والآن لنفرض أن كلاً من L_1 و L_2 يقتربان من اللانهاية . الا ان النسبة بينهما تبقى محدودة حيث تتحدد بنسبة عدد اللفات . لذا

وكذلك

$$L_2 = a^2 L_1$$

$$Z_{in} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 a^2 L_1^2}{Z_L + j\omega a^2 L_1}$$

والآن اذا فرضنا أن L_1 تصبح لانتهائية فان كلا الحدين على الطرف الأيمن من المقدار أعلاه يصبحان لانتهائين وتصبح النتيجة غير موجودة in-determinate ومن الضروري أولاً دمج هذين الحدين :

$$Z_{in} = \frac{j\omega L_1 Z_L - \omega^2 a^2 L_1^2 + \omega^2 a^2 L_1^2}{Z_L + j\omega a^2 L_1} \quad (22)$$

$$Z_{in} = \frac{j\omega L_1 Z_L}{Z_L + j\omega a^2 L_1} \quad (23)$$

والآن حينما تصبح L_1 لانتهائية يتضح أن Z_{in} تصبح

$$Z_{in} = \frac{Z_L}{a^2} \quad (24)$$

لقيمة محدودة من Z_L

لهذه النتيجة بعض العواقب الحسنة . وعلى الأقل فان أحد هذه العواقب يبدو وكأنه يناقض خواص المحول الخطي : وبالطبع يجب أن لا يناقضها نظراً لأن المحول الخطي يمثل حالة أكثر عموماً . ان ممانعة ادخال المحول المثالي هي ممانعة تتناسب مع ممانعة الحمل وثابت التناسب هو مقلوب مربع عدد اللفات وبكلمة

اخرى اذا كانت ممانعة الحمل سعوية فان ممانعة الدخل تكون سعوية . الا أن في المحول الخطي تعاني الممانعة المنعكسة تغيراً في الاشارة في جزئها المفاعلي حيث يعطي الحمل السعوي تأثيراً حثياً الى ممانعة الدخل . إن توضيح ذلك يتم بالانتباه الى أن Z_L/a^2 هي ليست الممانعة المنعكسة وعلى الرغم من أنها تدعى احياناً بذلك بشكل غير دقيق . وأن الممانعة المنعكسة الفعلية لانهائية في المحول المثالي وبعكس ذلك لا يمكنها أن تحذف الممانعة اللانهائية لمحاثة الابتدائي . ويحدث هذا الحذف في بسط (22) . تمثل الممانعة Z_L/a^2 حداً صغيراً يعادل الكمية التي لا يحدث بها حذف دقيق . وإن الممانعات المنعكسة الصحيحة في المحول المثالي تغير اشارتها في جزئها المفاعلي حينما تصبح محاثتا الابتدائي والثانوي لانهائيتين . الا أن تأثير اللانهائية على مفاعلة الملف الابتدائي والمفاعلة المنعكسة اللانهائية السالبة للملف الثانوي ويحذف أحدهما الآخر ..

وان الخاصية المهمة الأولى للمحول المثالي هي امكانيته لتغيير مقدار ممانعة أو تغيير مستوى ممانعة . وإن محولاً مثالياً يحوي 100 لفة في الابتدائي و 10000 لفة في الثانوي وله نسبة لفات تعادل 100 / 10000 أو 100 . وإن الممانعة التي تستبدل عبر الثانوي تظهر على طرفي الابتدائي بمقدار مخفض بعامل هو 100^2 او 10000 . فالمقاوم الذي مقداره $20,000-\Omega$ يظهر كأنه $2-\Omega$ والمحث الذي مقداره 200-mH يظهر وكأنه $20-\mu H$ والمتسعة 100-pF تظهر وكأنها $1-\mu F$. وإذا استبدل ملف الابتدائي والثانوي احدهما مكان الآخر فان $a = 0.01$. وعندها فان ممانعة الحمل تظهر أكبر من ذلك بالمقدار . عملياً لا تحدث هذه الزيادة بالمقدار دائماً حيث علينا ان نتذكر حينما ننظر الى آخر خطوة في اشتقاقنا فقد اعتبرنا ان L_1 تصبح لانهائية في (23) وكان من الواجب علينا ان نهمل Z_L حينما نقارنها مع $j\omega L_2$. وحيث ان L_2 لا يمكن ان تكون لانهائية فمن البديهي أن نموذج المحول المثالي سوف يبدأ بالفشل لممانعات حمل كبيرة .

ان مثلاً عملياً على استخدام المحول ذي اللب الحديدي كجهاز لتغيير مستوى الممانعة هو في خرج مضخم القدرة السموعة الذي يجب أن يربط الى السماعة speaker . لغرض الوصول الى تحويل اقصى قدرة ممكنة . نعلم ان مقاومة الحمل يجب ان تساوي المقاومة الداخلية للمصدر . وحيث ان ممانعة السماعة (تفترض غالباً على أنها مقاومة ذات عدة اومات بينها مضخم القدرة له مقاومة داخلية ذات عدة الآف من الاومات . لذا يستخدم محول مثالي فيه $N_2 < N_1$. فمثلاً اذا كانت الممانعة الداخلية للمضخم هي $4000-\Omega$ وممانعة السماعة $8-\Omega$. لذا يطلب :

$$Z_n = 4000 = \frac{Z_L}{a^2} = \frac{8}{a^2}$$

$$a = \frac{1}{22.4}$$

او
لذا فان

$$\frac{N_1}{N_2} = 22.4$$

كما ان هناك علاقة بسيطة بين تيارى الابتدائى والثانوى I_1 و I_2 للمحول المثالى

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{Z_L + j\omega L_2}$$

فمن

ندع L_2 تصبح لانهاية

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{j\omega M}{j\omega L_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$$

او

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{1}{a}$$

(25)

وان النسبة بين تيارى الابتدائى والثانوى هي نسبة عدد اللفات . واذا كان لدينا

$N_2 > N_1$ فان $a > 1$ ويتضح ان كلما مر تيار اكبر في اللفات كلما كان عدد

اللفات اقل... او بكلمة اخرى $N_1 I_1 = N_2 I_2$

يجب أن يلاحظ أن نسبة التيار هي نسبة اللفات باشارة سالبة اذا انعكس أي من

التيارين أو اذا تغيرت أي من النقطتين . وفي المثال السابق الذي أخذنا فيه محولاً

مثالياً لتغير مستوى الممانعة لكي توائم بكفاءة سماعه مع مضخم انتجت قيمة ج .

م . ت . للتيار 50 mA بتردد 1000 Hz في الابتدائى تيار مقدار ج . م . ت . له في

الثانوى تعادل 1.12 A بتردد 1000 Hz . القدرة المجهزة الى السماعه كانت

$1.12^2(8)$ أو 10 W والقدرة المجهزة الى المحول من مضخم القدرة كانت

4000(0.05)² أو 10 W . وهذه النتيجة مطمئنة نظراً لأن المحول المثالى لا يحوي على

جهاز فعال يعطى قدرة ولا أية مقاومة تستهلك قدرة .

ونظراً لأن القدرة المجهزة الى المحول المثالى تساوي القدرة المجهزة الى الحمل

بينما يرتبط التياران الابتدائى والثانوى بنسبة عدد اللفات من البديهي أن ترتبط

فولتيتا الابتدائى والثانوى بنسبة اللفات ايضاً . واذا عرفنا فولتية الثانوى او فولتية

الحمل :

$$V_2 = I_2 Z_L$$

وفولتية الابتدائى على أنها الفولتية عبر L_1 فان

$$V_1 = I_1 Z_{in} = I_1 \frac{Z_L}{a^2}$$

نسبة الفولتيتين هي

$$\frac{V_2}{V_1} = a^2 \frac{I_2}{I_1}$$

أو

$$\frac{V_2}{V_1} = a = \frac{N_2}{N_1} \quad (26)$$

نسبة الثانوي الى الابتدائي تساوي نسبة اللفات . وهذه النسبة يمكن أن تكون سالبة اذا عكست أي من الفولتيتين أو غير موقع أي من النقطتين .

وبدمج نسبتي الفولتية والتيار (25) و (26)

$$V_2 I_2 = V_1 I_1$$

كما نرى أن الفولت أمبير المعقدة للابتدائي والثانوي متساوية . وإن اتساع حاصل الضرب هذا يحدد عادة على أنه أكبر قيمة على محول القدرة مسموح بها . وإذا كانت زاوية طور الحمل هي θ :

$$Z_L = |Z_L|/\theta$$

ومن ثم فإن V_2 تسبق I_2 بزاوية مقدارها θ . هذا بالإضافة الى أن ممانعة الدخل هي Z_L/a^2 ومن ثم فإن V_1 تسبق I_1 أيضاً بالزاوية θ نفسها .

وإذا فرضنا أن الفولتية والتيار تمثلان قيم ج . م . ت . فإن $|V_2| |I_2| \cos \theta$ يجب أن تساوي $|V_1| |I_1| \cos \theta$ وكل القدرة المجهزة الى طرفي الابتدائي تصلان الحمل دون أن يستهلك شيء الى المحول المثالي . وإن خواص المحول المثالي التي حصلنا عليها قد وجدت من التحليل في حيز التردد . وهي صحيحة بالتأكيد في الحالة الجيبية المستقرة ولكن ليس هناك سبب يدعو للاعتقاد بأنها صحيحة للاستجابة كلها . وتنطبق بالحقيقة بصورة عامة . وإن إيضاح صحة هذه العبارة اسهل بكثير من تحليل حيز التردد الذي ابتهينا منه توأ . إلا أن تحليلنا قد خدم الاشارة الى الطبيعة الحقيقية للتقريب الذي يجب ان يتم نموذج أدق لمحول حقيقي للحصول على المحول المثالي . فمثلاً وجدنا أن ممانعة لفات الثانوي يجب ان تكون أكبر بكثير من ممانعة أي حمل يربط الى الثانوي . لذا فقد حصل شعور بظروف العمل التي يتوقف المحول عن التصرف كمحول مثالي .

دعنا نجد كيف ترتبط كميات حيز الزمن v_1 و v_2 في المحول المثالي . وبالرجوع الى الدائرة المبينة في الشكل 12 - 15 والمعادلتين (16) و (17) اللتين تصفان ذلك الشكل ، يمكننا حل المعادلة الثانية لـ di_2/dt وتعويضها في المعادلة الاولى

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt}$$

إلا أن الأقران مقداراه واحده $M^2 = L_1 L_2$ ومن ثم

$$v_1 = \frac{M}{L_2} v_2 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} v_2 = \frac{1}{a} v_2$$

لذا نجد أن العلاقة بين الفولتيتين الابتدائية تنطبق على استجابة حيز الزمن الكاملة .

ان تعبيراً يربط التيارين الابتدائي والثانوي في حيز الزمن يمكن الحصول عليه بسهولة بقسمة (16) على L_1

$$\frac{v_1}{L_1} = \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{L_1} \frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} + a \frac{di_2}{dt}$$

ومن ثم باستخدام إحدى الفرضيات المميزة للمحول المثالي L_1 يجب أن تكون لانهائية . اذا فرضنا أن v_1 ليست لانهائية . فإن :

$$\frac{di_1}{dt} = -a \frac{di_2}{dt}$$

وبالتكامل

$$i_1 = -ai_2 + A$$

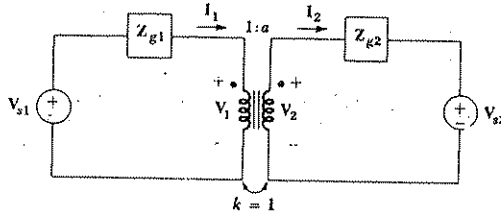
حيث A هو ثابت التناسب الذي لا يتغير مع الزمن . لذا نهمل اي تيار مستمر في الملفين ونركز انتباهنا على الجزء المتغير مع الزمن من الاستجابة فقط : $i_1 = -ai_2$ الاشارة السالبة بطبيعة الحال ناتجة عن وضع النقطتين واختيار اتجاهات التيار في الشكل 12 - 15 .

لذا فاننا نحصل على علاقات الفولتية والتيار نفسها في حيز الزمن كما حصلنا سابقاً في حيز التردد سابقاً على فرض اهمال مركبة التيار المستمر . وان نتائج حيز الزمن أكثر عموماً لكنه تم الحصول عليها بعملية تحوي معلومات أقل

وان خواص المحول المثالي التي أنشأناها يمكن الاستفادة منها لتبسيط الدوائر التي تظهر فيها المحولات . دعنا نفترض لغرض الايضاح ان كل شيء الى يسار طرفي الابتدائي قد استعويض عنه بمكافئ ثفنن كما هي الحالة للشبكة الى يمين طرفي الثانوي . لذا نأخذ الدائرة المبينة في الشكل 17 - 15 . نفترض أن الاثارة كانت عند تردد مركب ما .

ويمكن استخدام نظرية ثفنن أو نورتن للحصول على دائرة مكافئة لاتحوي على محول . فمثلاً دعنا نجد مكافئ ثفنن للشبكة الى يسار طرفي الثانوي . بفتح الثانوي $I_2 = 0$ يكون $I_1 = 0$ (تذكر ان L_1 غير متناهية) . ولا تظهر أية فولتية عبر Z_{01} ومن ثم $V_1 = V_{s1}$ وكذلك $V_{2oc} = aV_{s1}$. يمكن الحصول على ممانعة ثفنن بقتل V_{s1} واستخدام مربع عدد اللفات مع أخذ الحيطه لاستخدام مقلوب نسبة عدد اللفات نظراً لأننا ننظر من خلال طرفي الثانوي . لذا فان $Z_{in2} = Z_{01}a^2$ وكتحقيق على مكافئنا دعنا نحسب تيار دائرة قصر الثانوي I_{2sc} . حينما يكون الثانوي مقصور الدائرة فان مولد الابتدائي يجابه ممانعة مقدارها Z_{01} ومن ثم يكون $I_1 = V_{s1}/Z_{01}$. لذا

فان نسبة فولتية الدائرة المفتوحة الى تيار دائرة القصر هي $I_{2sc} = V_{s1}/aZ_{01}$. وان نسبة فولتية الدائرة المفتوحة الى تيار دائرة القصر هي a^2Z_{01} كما يجب ان تكون . يتضح مكافىء ثفنن للمحول ولدائرة الابتدائي في الشكل 8 - 15 .

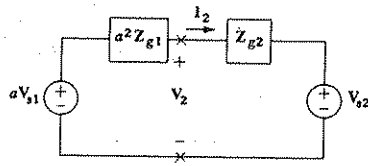


الشكل 17 - 15 الشبكتان المربوطتان الى اطراف الابتدائي والثانوي قد استعويض عنها بمكافىء ثفنن لهما .

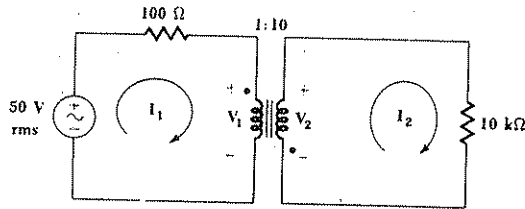
لذا فان كل فولتية ابتدائية يمكن أن تضرب بنسبة عدد اللفات وكل تيار ابتدائي يقسم على نسبة عدد اللفات وكل ممانعة ابتدائي تضرب بمربع نسبة عدد اللفات . وتعوض هذه الفولتيات والتيارات والممانعات عن الفولتيات والتيارات والممانعات اضافة للمحول . واذا استبدلت النقطتان فان المكافىء يمكن الحصول عليه باستخدام نسبة عدد اللفات باشارة سالبة .

يبين تحليل مشابه للمحول وللشبكة الثانوية أن كل شيء الى يمين طرفي الثانوي يمكن أن يستعاض عنه بشبكة متطابقة بدون المحول . وكل فولتية تقسم على a وكل تيار يضرب في a وكل ممانعة تقسم على a^2 . وان عكس أي من الملفين يقابل استخدام نسبة عدد لفات مقدارها $-a$.

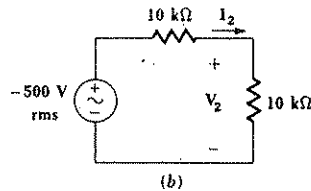
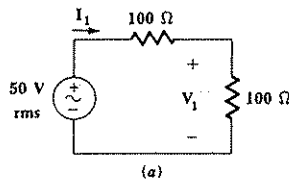
كمثال بسيط لتطبيق الدوائر المكافئة هذه . لناخذ الدائرة المبينة في الشكل 19 - 15 . افرض أن $a = 10$ ممانعة الادخال هي $10000 / 100$ أو 100Ω . لنا فان $V_1 = 25 \text{ V}$ و $I_1 = 0.25 \text{ A}$ ويعطي المصدر 12.5 W منها 6.25 W تستهلك في المقاومة الداخلية للمصدر ويعطي 6.25 W الى الحمل وهذه هي ظروف أقصى قدرة الى الحمل . واذا حذفنا دائرة الثانوي والمحول المثالي باستخدام مكافىء ثفنن نحصل



الشكل 18 - 15 مكافئ ثفنن للشبكة الى يسار طرفي الثانوي في الشكل 17 - 15 وقد استخدم لتبسيط الدائرة



الشكل 19 - 15 دائرة بسيطة يوائم فيها حمل مقاومي ممانعة المصدر بواسطة محول مثالي



الشكل 20 - 15 دائرة الشكل 19 - 15 بسطت بالاستعاضة عن (أ) المحول ودائرة الثانوي بمكافئ ثفنن (ب) المحول ودائرة الأبتدائي بمكافئ ثفنن لها .

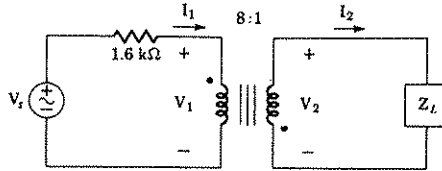
على الدائرة المبسطة في الشكل 20 - 15 (أ). ومن ثم يكون الحصول على التيار الابتدائي والفولتية الابتدائية بديهي إذا استبدلت الشبكة الى يسار طرفي الثانوي بمكافئ ثفنن لها نحصل على دائرة أبسط كالمبينه في الشكل 20 - 15 (ب). ان وجود الاشارة السالبة على المصدر المكافئ يجب التأكد منه. يمكن الحصول على مكافئ نورتن المقابل بسهولة.

تمارين :-

9 - 15 في الشكل 21 - 15، افرض ان $I_2 = 100 \angle 0^\circ \text{ mA}$ ج م ت. و $Z_L = 6 + j8 \Omega$ احسب (أ) V_2 (ب) V_1 (ج) V_s القدرة المستهلكة في (د) Z_L (هـ) مقاوم مقداره $1.6 \text{ k}\Omega$

الجواب

$$1/53.1^\circ \text{ V rms}; 8/-126.9^\circ \text{ V rms}; 25.6/-165.5^\circ \text{ V rms}; \\ 60 \text{ mW}, 250 \text{ mW}$$



الشكل 21 - 15 أنظر التمارين 9 - 15 الى 11 - 15

10 - 15 افرض ان $I_1 = 0.1 \angle 0^\circ \text{ A}$ ج م ت. و $V_s = 8 \angle 40^\circ \text{ kV}$ في الدائرة المبينة في الشكل 21 - 15. أوجد (أ) V_1 (ب) V_2 (ج) P_L

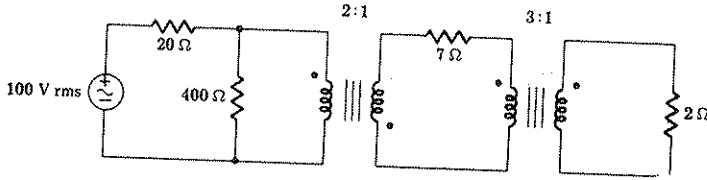
الجواب

$$985/-139.3^\circ \text{ V rms}; 7880/40.7^\circ \text{ V rms}; 597 \text{ W}$$

11 - 15 افرض ان Z_L في الشكل 21 - 15 تساوي $50 + j100 \Omega$ بينما $V_s = 20 \angle 0^\circ \text{ V}$ ج م ت. أوجد دائرة مكافئ ثفنن كما ترى من (أ) يمين "V₁" (ب) يسار "V₂"

$$\text{الجواب } 0 \text{ V}, 3.2 + j6.4 \text{ k}\Omega; 2.5/180^\circ \text{ V rms}, 25 \Omega$$

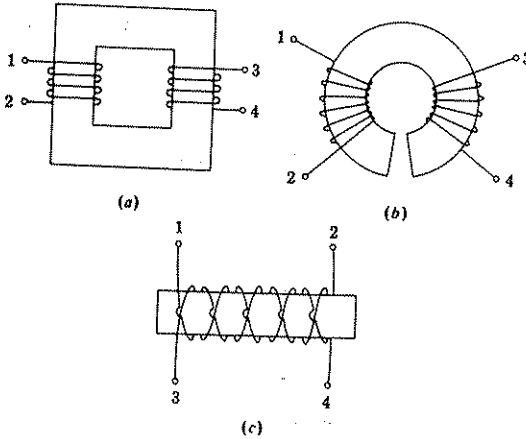
12 - 15 أوجد معدل القدرة المجهزة الى أي من المقاومات في دائرة الشكل 22 - 15
 الجواب W 16; 17.92; 20; 46.08



الشكل 22 - 15 أنظر التمرين 12 - 15

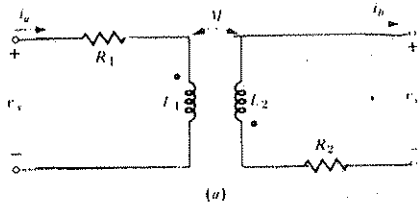
مسائل :-

□ 15 - 23 البنية الفيزيائية لثلاثة أزواج من الملفات المتقارنة مبينة في الشكل 23 - 15 .
 هات موقعين مختلفين ممكنين للنقطتين على كل زوج الملفين .

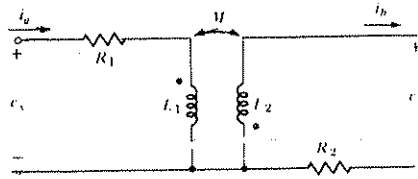


الشكل 23 - 15 أنظر السؤال 1

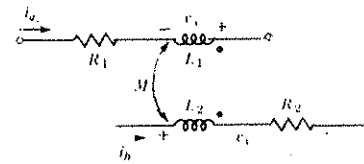
2 أوجد v_x و v_y بدلالة i_a و i_b لكل دائرة مبينة في الشكل 24 - 15



(a)



(b)

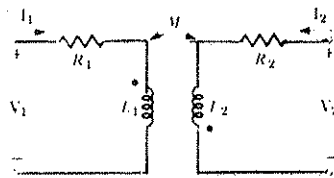


(c)

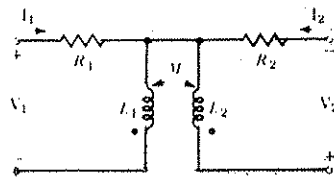
الشكل 24 - 15 أنظر السؤال 2

3 أوجد $V_1(s)$ و $V_2(s)$ بدلالة $I_1(s)$ و $I_2(s)$ لكل دائرة من دوائر الشكل 25 -

15



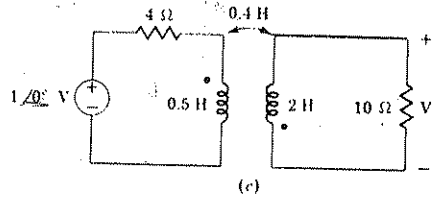
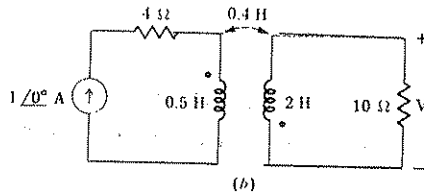
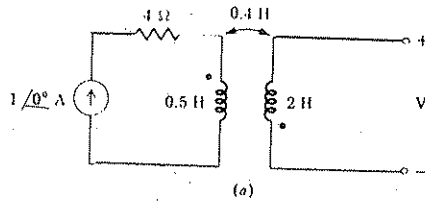
(a)



(b)

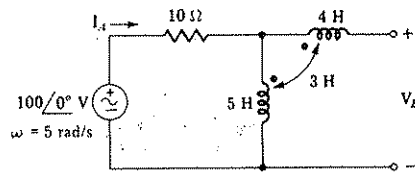
الشكل 25 - 15 أنظر السؤال 3

4) أوجد $V(s)$ لكل شبكة مبنية في الشكل 26 - 15



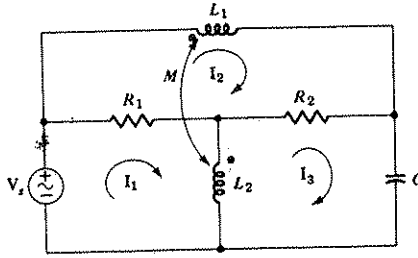
الشكل 26 - 15 انظر السؤال 4

5 (أ) أوجد I_1 و V_B للدائرة المبينة في الشكل 27 - 15 (ب) أعد إذا ربط المقاوم $6\text{-}\Omega$ بين الطرفين اللذين على الجهة اليمنى.



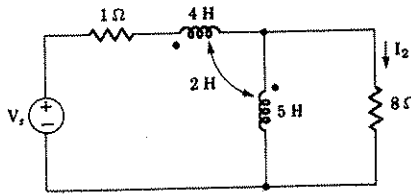
الشكل 27 - 15 أنظر السؤال 5

6 أكتب منظومة كافية من معادلات غير معقدة للدائرة المبينة في الشكل 28 - 15. استخدم متغيرات حيز التردد I_1 و I_2 و I_3 واجمع الحدود في المعادلات ولكن دون حلها.



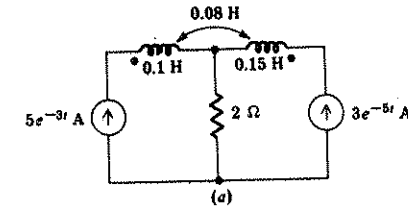
الشكل 28 - 15 انظر السؤال 6

7□ إذا كانت $V_s = 100\angle 0^\circ$ V في الدائرة المبينة في الشكل 29 - 15 ، أوجد $I_2(s)$

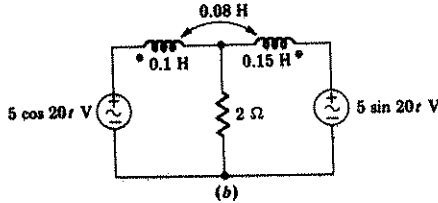


الشكل 29 - 15 انظر المسألة 7

8 أوجد القدرة المجهزة من كل مصدر حينما $t = 0$ في الدائرة المبينة في (أ)
الشكل 30 - 15 (أ) (ب) الشكل 30 - 15 (ب)



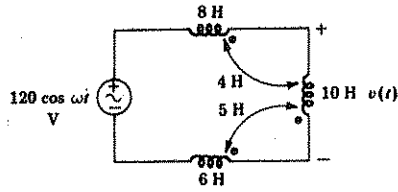
(a)



(b)

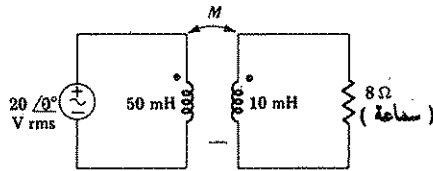
الشكل 30 - 15 انظر السؤال 8

9 من الممكن ترتيب ملفات فيزيائياً بطريقة بحيث يكون هناك اقتران متبادل بين A و B وكذلك بين B و C ولكن لا يوجد اقتران بين A و C . تتضح هذه الوضعية في الشكل 31 - 15 . أوجد $v(t)$



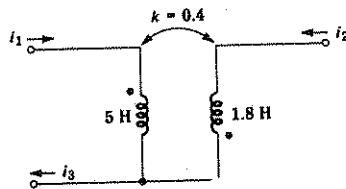
الشكل 31 - 15 انظر السؤال 9

10 □ بالرجوع الى الشكل 32 - 15 ما قيمة M التي تسبب اعطاء قدرة متوسطة مقدارها 5 W الى سماعة مقاومتها 8Ω عند تردد $\omega = 1$ krad/s ؟



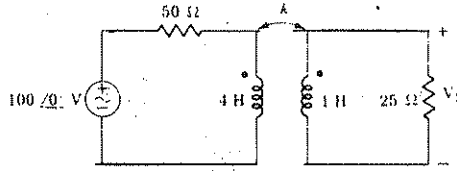
الشكل 32 - 15 أنظر السؤال 10

11 - للملفين المقترنين المبينين في الشكل 15 - 33 ، أفرض أن $i_3(t) = 6e^{-0.2t}$ A و $i_1(t) = 4e^{-0.1t}$ A أوجد (أ) M (ب) $i_2(t)$ (ج) القدرة الكلية المخزونة في النظام عند $t = 0$



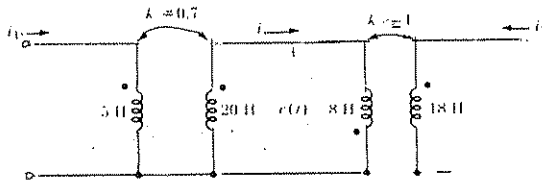
الشكل 33 - 15 انظر السؤال 11

12 - إذا كانت $\omega = 100$ rad/s في الدائرة المبينة في الشكل 34 - 15 ، احسب V_2 دالة لـ k ثم ارسم $|V_2|$ مع k .



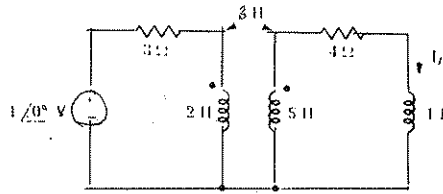
الشكل 34 - 15 انظر السؤال 12

13) افرض أن $i_1 = 5 \sin 40t$ A و $i_2 = 2 \sin 40t$ A في الشكل 35 - 15 . أوجد $i_1(t)$ و $i_2(t)$. هل ان اتجاه سريان القدرة المتوسطة الى اليمين أو الى اليسار في وسط الدائرة ؟



الشكل 35 - 15 انظر السؤال 13

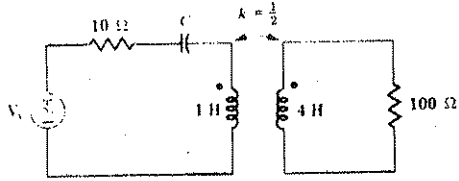
14 - للدائرة المبينة في الشكل 36 - 15 (أ) أوجد $I_L(s)$. (ب) اشر الى الترددات الخارجة لـ $I_L(s)$ على مستوى s . (ج) ارسم $|I_L(j\omega)|$ مع التردد .



الشكل 36 - 15 انظر السؤال 14

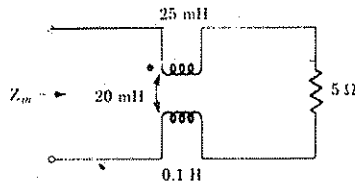
15 - ملفان متقارنان تبادلياً لهما $L_{e1} = 2$ mH و $L_{e2} = 0.08$ mH و $k = 1$ ولهما حمل $Z_L = 2 + j10 \Omega$ قد ربط عبر L_2 . أوجد Z_{in} على طرفي L_1 اذا كانت $\omega = 250$ krad/s .

16) اذا كانت الدائرة المبينة في الشكل 37 - 15 برنين توازي عند تردد $\omega_n = 1$ krad/s . أوجد C و Q_0 .



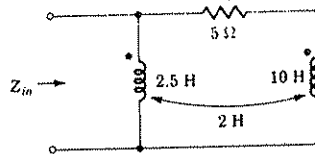
الشكل 37 - 15 انظر السؤال 16

17 أوجد ممانعة دخل الشبكة الميينة في الشكل 38 - 15 عند $\omega = 200 \text{ rad/s}$ اذا استبدلت النقطة على الملف الاسفل الى (أ) الطرف الأيسر (ب) الطرف الأيمن (ج) اعد أ و ب اذا ربط المقاوم $10\text{-}\Omega$ بين طرف الدخل الاعلى وأسفل المقاوم $5\text{-}\Omega$.



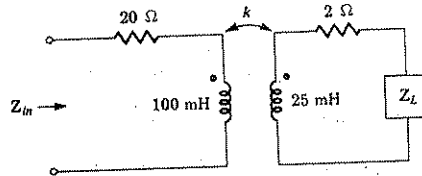
الشكل 38 - 15 انظر السؤال 17

18 أوجد $Z_{in}(s)$ للشبكة الميينة في الشكل 39 - 15



الشكل 39 - 15 أنظر السؤال 18

19□ قيمتا محاثتي محول معين هما $L_1 = 6\text{ H}$ و $L_2 = 1\text{ H}$ و $M = 2\text{ H}$. أوجد قيم محاثات الإدخال المختلفة الثمانية التي يمكن الحصول عليها بإجراء ربط مختلف للملفات بضمنها ربط التوالي والتوازي مع انهاءها بدائرة مفتوحة ودائرة قصر .



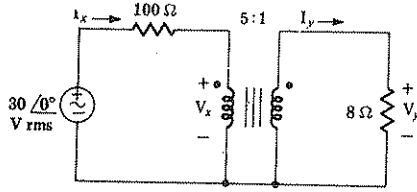
الشكل 40 - 15 انظر السؤال 19

20 في الشكل 40 - 15 ، افرض أن Z_L هي متسعة $4\text{-}\mu\text{F}$ ممانعتها $25\text{-}j\Omega$ ثم احسب Z_{in} حينما k تساوي (أ) صفراً (ب) 0.5 (ج) 1

21 محول خطي يحتوي على محثين متقارنين تبادلياً ، كل منهما مهمل المقاومة . اشر الى طرفي الابتدائي بـ A و B والثانوي بـ C و D . يحمل الطرفان B و C نقطتين . واذا كان الثانوي مفتوح الدائرة كانت $L_{in,AB} = 3\text{ H}$ واذا كان الثانوي مقصور الدائرة كانت $L_{in,CD} = 10\text{ H}$ واذا كان الابتدائي مفتوح الدائرة كانت $L_{in,AB} = 2.9\text{ H}$ أوجد L_{AB} و L_{CD} و M .

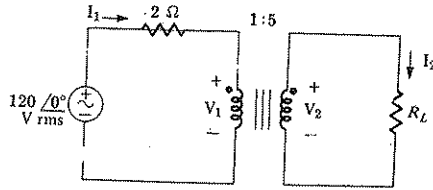
22□ عند ربط ملفين متقارنين تبادلياً على التوالي كانت محاثتهما المكافئة 90 mH . اذا عكس ربط أحد الملفين كانت محاثته التوالي المكافئة 30 mH . واذا علم أن محاثته أحد الملفين هي 20 mH ، أوجد معامل الأقران .

23 للدائرة المبينة في الشكل 41 - 15 أوجد قيم (أ) I_1 ، (ب) V_1 ، (ج) V_2 ، (د) I_2 ، (هـ) القدرة المتوسطة المجهزة للمقاوم $8\text{-}\Omega$ (و) أعد (هـ) اذا ربط مقاوم مقداره $84\text{-}\Omega$ بين الزاوية اليسرى العليا من الدائرة والزاوية العليا اليمنى .



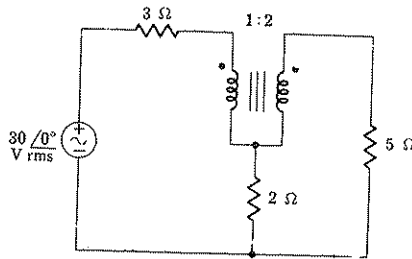
الشكل 41 - 15 انظر السؤال 23

24 (أ) ماقيمة R_L في الدائرة المبينة في الشكل 42 - 15 التي تستهلك أقصى قدرة متوسطة (ب) ماقيمة هذه القدرة (ج) اذا كانت $R_L = 20 \Omega$ أوجد I_1 و I_2 و V_1 و V_2 .



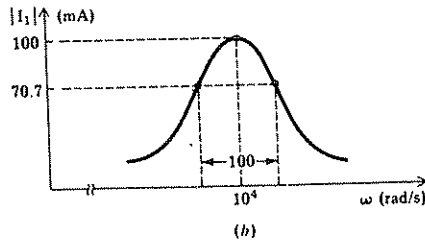
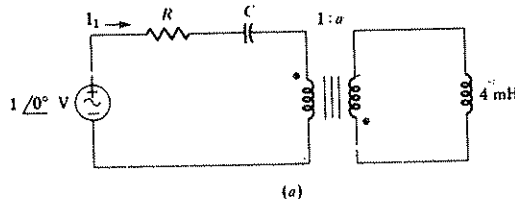
الشكل 42 - 15 انظر السؤال 24

25 □ أوجد القدرة المتوسطة المجهزة الى كل مقاوم في الدائرة المبينة في الشكل 43 - 15



الشكل 43 - 15 انظر السؤال 25

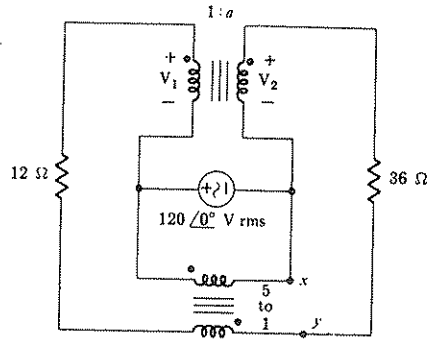
26 حدد R و C و a للدائرة المبينة في الشكل 43 - 15 أ بحيث نحصل على منحنى الاستجابة ل $|I_1|$ في 15 - 44 ب .



الشكل 44 - 15 انظر السؤال 26

27 وضح كيف يمكن استخدام محولين مثاليين لمواءمة مولد ممانعة خرجة $4000 + j0 \Omega$ الى حمل يحتوي على $8 - j\Omega$ وسماعة $10 - \Omega$ بحيث أن السماعة $10 - \Omega$ تستلم ضعف القدرة المتوسطة التي تستلمها السماعة $8 - \Omega$. ارسم مخطط دائرة مناسبة وحدد نسبة عدد اللفات المطلوبة .

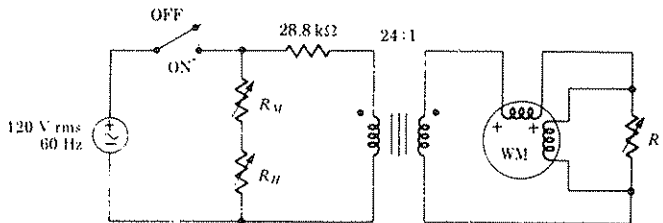
28□ (أ) في الدائرة المبينة في الشكل 45 - 15 . أوجد نسبة عدد اللفات a والقدرة المتوسطة المجهزة لكل من المقاومين . (ب) اذا لم يكن هناك فولتية بين النقطتين x و y . أوجد V_1 و V_2



الشكل 45 - 15 انظر السؤال 28

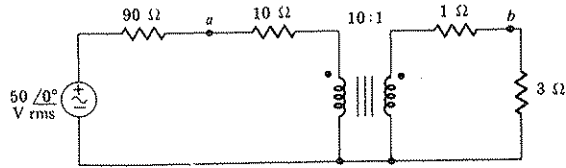
29 محول مكتوب عليه 2300/230 V, 25 kVA يعمل بفولتيتي ابتدائي وثانوي متوسطين قيمتا ج. م. ت. لهما 2300 V و 230 V على التعاقب ويمكنه تجهيز 25 kVA من ملفه الثانوي. اذا جهز هذا المحول من فولتية 2300 V ج. م. ت. وربط الى ثانوية حمل احتاج الى 8 kW بعامل قدره مقداره واحد و 12 kVA بعامل قدرة متخلف مقداره 0.75 (أ) مامقدار التيار الابتدائي (ب) كم كيلوواط يمكن أن يجهز حملاً يعمل بعامل قدرة متخلف مقداره 0.9.

30 ماكينة معلنة للبيع وقد كتب عليها أنها تكشف ذكاء الافراد. وجد أن محطط دائرتها كما هو مبين في الشكل 46 - 15. توضح التعليمات للمستخدم أن يضع R_H مساوية لطوله ($\Omega = \text{cm}$) و R_M الى كتلته ($\Omega = \text{kg}$) و R_I الى عمره (سنة = Ω) ومن ثم حينما تشتغل فان الواطميتير يقرأ ذكاءه I.Q. حيث (I.Q. = mW). (أ) أوجد ذكاءك (ب) ماهي مميزات الشخص الذي له أكبر ذكاء ممكن.



الشكل 46 - 15 انظر المسألة 30

31 □ يطلب ربط مقاوم بين النقطتين a و b في الشكل 47 - 15
 (أ) مأكسى قدرة يمكن أن تجهز لهذا المقاوم وما يجب أن تكون قيمة المقاوم
 (ب) أعد للحالة حينما توضع النقطة على الطرف الأسفل من الملف الثانوي .



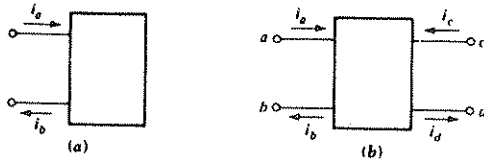
الشكل 47 - 15 أنظر السؤال 31

الفصل السادس عشر

الشبكات ذات المنفذين

1 - 16 مقدمة INTRODUCTION

لدى تعريف المحائة التبادلية واستعمالها في الفصل السابق لم نجد بدأ من دراسة الخصائص المتعلقة بزوجين من النهايات . فالشبكة العامة التي لها زوجان من النهايات الأول ربما يؤشر « بنهايتي الدخل » ("input terminals") والآخر يؤشر « بنهايتي الخرج » ("output terminals,") وهي أساس البناء للمنظومات الألكترونية ومنظومات المواصلات ومنظومات السيطرة الذاتية ومنظومات النقل والتوزيع او أية منظومات أخرى تدخل فيها الإشارة الكهربائية أو الطاقة الكهربائية نهايتي الدخل الموجودة في الشبكة وتغادر عبر نهايتي الخرج . ويمكن أن تربط نهايتنا الخرج بنهايتي دخل شبكة أخرى . فزوج النهايات الذي تدخل منه الإشارة أو تغادر الشبكة تدعى بالمنفذ (port) والشبكة التي تحوي زوجاً واحداً من النهايات تدعى شبكة ذات منفذ واحد أو ببساطة منفذ واحد . وعندما يظهر في الشبكة أكثر من زوج من النهايات تعرف الشبكة بالشبكة المتعددة المنافذ . وشبكة المنفذ الواحد مبينة في الشكل 1 - 16 (أ) وشبكة المنفذين التي يتركز عليها هذا الفصل مبينة في الشكل 1 - 16 (ب) . التيار في الطرفين المكونين لكل منفذ



الشكل 1 - 16 (أ) شبكة ذات منفذ واحد (ب) شبكة ذات منفذين .

ويجب ان يتساويا ويتبع هذا ان $i_a = i_b$ $i_c = i_d$ في المنفذين الميينين في الشكل 16 - 1 (ب) . والمصادر والأحمال يجب ربطها مباشرة عبر نهايتي المنفذ لدى استعمال الطرق المتبعة في هذا الفصل . فعلى سبيل المثال لا يمكن ربط أي عنصر بين النهايتين a و c للشبكة ذات المنفذين الميينة في الشكل 16 - 1 (ب) وإذا تم حل دائرة كهذه فأن معادلات الشبيكات أو المعادلات العقدية يجب أن تكتب .

وان الطرق الخاصة للتحليل والتي طورت للشبيكات ذات المنفذين أو ببساطة للمنفذين تؤكد على علامات التيارات والفولتيات في نهايتي الشبيكات وتحجب الطبيعة الخاصة للتيارات والفولتيات داخل الشبكة . وان دراستنا المتقدمة يجب أن تساعد على تعريفنا على عدد من المتغيرات الوسيطة parameters المهمة واستعمالها لتبسيط تحليل الشبيكات ذات المنفذين وتصنيفه .

2 - 16 شبكات المنفذ الواحد ONE-PORT NETWORKS

يمكن الحصول على بعض الدراسات التقديمية للشبيكات ذات المنفذ الواحد او المنفذين بشكل أفضل باستعمال توصيف الشبكة العام وتسميات الاختصار للمحددات المقدمة في الملحق 1 . لذا فلو كتبنا مجموعة معادلات الشبيكات

$$\begin{aligned} Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \dots + Z_{1N}I_N &= V_1 \\ Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \dots + Z_{2N}I_N &= V_2 \\ Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 + \dots + Z_{3N}I_N &= V_3 \\ \dots & \\ Z_{N1}I_1 + Z_{N2}I_2 + Z_{N3}I_3 + \dots + Z_{NN}I_N &= V_N \end{aligned} \quad (1)$$

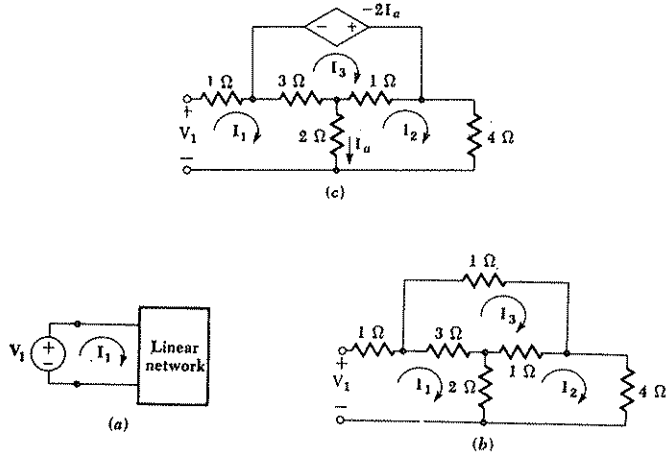
وعليه فان معاملات كل تيار . ستكون الممانعة $Z_{ij}(s)$ ومحددة الدائرة أو محددة المعاملات هي

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \dots & Z_{NN} \end{vmatrix} \quad (2)$$

حيث انه قد فرض وجود N من الشبكات وتظهر التيارات في ترتيب التوصيف نفسه في كل معادلة كما أن مرتبة المعادلة هي مرتبة التيارات نفسها . وسوف نفرض أيضاً تطبيق قانون الفولتية لكرشوف بحيث أن إشارة كل من الحدود Z_{ij} ($i \neq j$) أو الحد التبادلي ربما تكون موجبة أو سالبة وذلك يعتمد على الاتجاهات المرجعية المعطاة لـ I_j و I_i .

وإن إستعمال أقل توصيف (الملحق 1) يساعد على التعبير عن ممانعة الإدخال أو ممانعة نقطة السوق driving-point في نهايتي شبكة المنفذ الواحد للتعبير عنها بدقة أكثر .

ويمكن تطبيق النتائج على شبكة المنفذين فيما لو ربط أحد المنفذين بممانعة غير فعالة بضمنها الدائرة المفتوحة أو دائرة القصر .
ولنفترض شبكة المنفذ الواحد المبينة في الشكل 2 - 16 (أ) التي تتكون كلياً من :



الشكل 2 - 16 (أ) مصدر فولتية مثالي V_1 مربوط الى شبكة ذات منفذ واحد لاتحوي مصدراً غير معتمد
(ب) شبكة ذات منفذ واحد استخدمت كمثال (ج) شبكة ذات منفذ واحد تحوي مصدراً معتمداً استخدم كمثال

عناصر غير فعالة ومصادر معتمدة وكذلك بافتراض الخاصية الخطية . ولقد ربط المصدر المثالي V_1 الى المنفذ وعرف المصدر بأنه التيار في الشبكة 1 . وبالطريقة المعروفة يكون :

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1N} \\ 0 & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2N} \\ 0 & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & Z_{N2} & Z_{N3} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}}$$

وبدقة أكثر

$$I_1 = \frac{V_1 \Delta_{11}}{\Delta_Z}$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} \quad (3)$$

وللشبكة المقاومة ذات المنفذ الواحد المبينة في الشكل 2 - 16 (ب)

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 109 \quad \begin{array}{l} \text{وأن} \\ \text{لذا} \end{array}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 34$$

$$Z_{in} = \frac{109}{34} = 3.21 \quad \Omega \quad \text{لذا}$$

ولدى تغيير الدائرة بضم مصدر معتمد كما في الشكل 2 - 16 (ج) فإن المعادلات الشبكية الثلاثة تكتب كالآتي .

$$6I_1 - 2I_2 - 3I_3 = V_1$$

$$-2I_1 + 7I_2 - I_3 = 0$$

$$-3I_1 - I_2 + 4I_3 = -2I_0 = -2(I_1 - I_2)$$

وان

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 7 & -1 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 93$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 25$$

بينما

$$Z_{in} = \frac{93}{25} = 3.72 \Omega$$

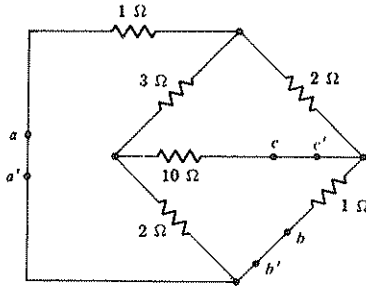
وعليه

والمسألان 4 و 5 في نهاية الفصل تعطيان صورة مبسطة عن الشبكات ذات المنفذ الواحد التي يمكن بناؤها باستعمال مضخمات التشغيل operational amplifiers بحيث يمكن الحصول على مقاومات سالبة من الشبكات التي عناصر الدائرة غير الفعالة فيها مقاومة فقط والمحثات يمكن تشبيها بالمقاومات أو المتسعات فقط .

تمارين

16 - 1 أوجد ممانعة الدخل للشبكة المبينة في الشكل 16 - 3 فيما لو حورت الى شبكة ذات منفذ واحد بفتحها عند النهايات (أ) 'aa' (ب) 'bb' (ج) 'cc'

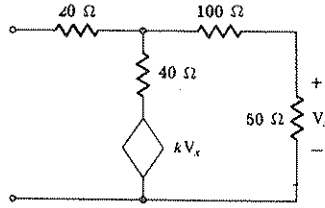
الأجوبة: $3.37; 2.87; 11.87 \Omega$



الشكل 3 - 16 أنظر التمرين 1 - 16 .

2 - 16 أوجد مقاومة الإدخال التي تظهرها شبكة المنفذ الواحد في الشكل 4 - 16 فيما لو كان المصدر المعتمد (أ) مصدر فولتية إشارته الموجبة للأسفل (ب) مصدر تيار إتجاه السهم للأسفل .

الأجوبة : $(980 + 100k)/(19 + 5k)$; $(1000k + 170)/(50k + 1)$



الشكل 4 - 16 أنظر للتمرين 2 - 16 .

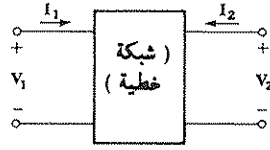
3 - 16 متغيرات المسايرة ADMITTANCE PARAMETERS

لنعد الى الشبكات ذات المنفذين ونتدارس خصائصها سفترضين بكل ما سنتعامل به من شبكات بأنها متكونة من عناصر خطية ولا تحوي مصادر غير معتمدة بينما نسمح باستخدام المصادر المعتمدة كما سنضع شروطاً أخرى لبعض الحالات الخاصة الأخرى من الشبكات .

الشبكة ذات المنفذين هي كالمبينة في الشكل 5 - 16 . فالفولتية والتيار عند نهايتي الدخل هي V_1 و I_1 واما V_2 و I_2 فتخصص لمنفذ الخرج . إن إتجاه I_1 و I_2 عادة ينتخب الى داخل الشبكة عند الأطراف العليا (وخارجة من الشبكة عند الاطراف السفلى) . وبما أن الشبكة خطية ولا تحوي مصادر غير معتمدة بداخلها فانه يمكن اعتبار أن I_1 ناتج من تراكب مكونتين إحداها متنسبة مر قبل V_1 والأخرى من قبل V_2 . وعند تطبيق الفكرة نفسها على I_2 فإننا يمكن أن نبدأ بمجموعة المعادلات .

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (4)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (5)$$



الشكل 5 - 16 شبكة عامة ذات منفذين عينت فيها فولتيات النهاية والتيارات .

تتكون الشبكة ذات المنفذين من عناصر خطية بضمنها المصادر المعتمدة وئلا تحوي أي مصدر غير معتمد حيث أن حروف الـ y بتوصيفاتها المختلفة هي ثوابت التناسب ليس الا . أو أنها معاملات غير معروفة في الوقت الحاضر . وتدعى بالمتغيرات الوسيطة وتُعرف بالمعادلتين (4) و (5) . وإن الطريقة الأكثر فائدة وشمولاً لربط المعنى الفيزيائي الى المتغيرات الوسيطة y تتضح من خلال التأمل المباشر لـ (4) و (5) . فعلى سبيل المثال لو اخذنا (4) وفرضنا أن V_2 صفراً فاننا نرى أن y_{11} يجب أن تعرف بالنسبة I_1 الى V_1 . وعليه نصف y_{11} بانها المسايرة مقاسة عند نهايتي الدخل عند جعل نهايتي الخرج دائرة قصر ($V_2 = 0$) . وبما انه لاداعي للسؤال عن أي من النهايات كان في حالة قصر ، فإن أحسن وصف لـ y_{11} هو مسايرة الدخل لدائرة القصر *short-circuit input admittance* . الا انه يمكننا وصف y_{11} على أنها مقلوب ممانعة الدخل مقاسة عندما تقصر الدائرة عند نهايتي الخرج . ومع هذا فإن وضعها على أنها مسايرة من الواضح هو الطريق الأقصر ، علماً بأنه ليس المهم هو تسمية المتغير وانما الظروف الممكن تطبيقها على (4) او (5) وبالتالي على الشبكة ويعطى ذلك معنى أدق حينما تحدد الشروط وعندما يُمكن ذلك إيجاد المتغيرات مباشرة من تحليل الدائرة (أو بتجربة تجري على الدائرة الحقيقية) وإن أي من المتغيرات يمكن أن توصف على انها نسبة التيار الى الفولتية حينما $V_1 = 0$ لنهايتنا الأذخال مقصورتا الدائرة (أو حينما $V_2 = 0$ لنهايتنا الأخرج مقصورتا الدائرة)

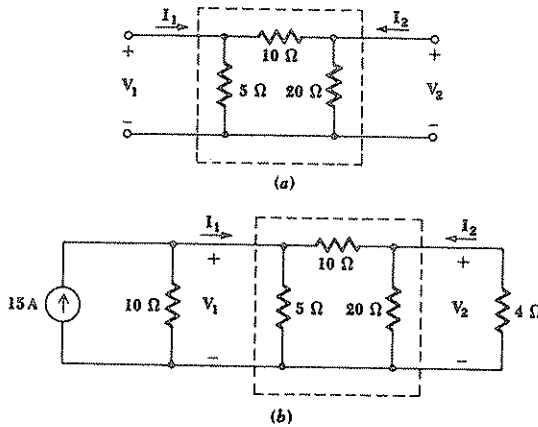
$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (6)$$

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (7)$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \quad (8)$$

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \quad (9)$$

وبسبب ان كل متغير هو مسايرة يمكن الحصول عليها بقص دائرة الادخال أو الأخراج فأن المتغيرات تعرف على أنها (متغيرات المسايرة لدائرة القصر) وأما تسمية القيمة الخاصة لـ y_{11} فهي مسايرة الدخل لدائرة القصر و y_{22} مسايرة الخرج لدائرة القصر و y_{12} و y_{21} هي مسايرات انتقالية *transfer admittances* لدائرة القصر. في الدائرة المقاومة ذات المنفذين المبينة في الشكل 6 - 16 (أ) قيم المتغيرات يمكن إيجادها بسهولة بتطبيق المعادلات (6) الى (9) والتي حصلنا عليها مباشرة من المعادلات المعرفة (4) و (5) فلايجاد y_{11} نقصر الخرج ونجد نسبة I_1 الى V_1 . ويمكن عمل ذلك بافتراض ان $V_1 = 1 V$ وعندها $y_{11} = I_1$ وبملاحظة الشكل 6 - 16 (أ) يظهر أن الفولتية $1 V$ مسلطة على نهايتي الدخل عندما تقصر نهايتي الاخراج ،



الشكل 6 - 16 (أ) شبكة مقاومة ذات منفذين (ب) شبكة مقاومة ذات منفذين منتبهة بشبكة معينة ذات منفذ واحد .

سوف تسبب تيار إدخال قيمته $(1/5 + 1/10)$ أو $0.3 A$. لذا
 $y_{11} = 0.3 \text{ U}$

ولأجل إيجاد y_{12} نقصر نهايتي الدخل ونسلط الفولتية $1 V$ على نهايتي الخرج .
 فتيار الدخل الذي يسري خلال دورة القصر هو $-1/10 A$.

$$y_{12} = -0.1 \text{ U} \quad \text{لذا}$$

$$y_{21} = -0.1 \text{ U} \quad y_{22} = 0.15 \text{ U} \quad \text{ويطبق مشابهة}$$

فتكون معادلات وصف هذه الشبكة ذات المنفذين بدلالة متغيرات المسائرة كالاتي ،

$$I_1 = 0.3V_1 - 0.1V_2 \quad (10)$$

$$I_2 = -0.1V_1 + 0.15V_2 \quad (11)$$

ولأجل معرفة فوائد معادلات مثل هذه سوف نقوم بوضع شبكة تربط الى كل من المنفذين والمثال البسيط في الشكل 6 - 16 (ب) يبين مصدر تيار عام مربوط الى منفذ الدخل وحمل مقاومي الى منفذ الخرج . ويجب أن تكون هناك علاقة بين V_1 و I_1 عند منفذ الدخل بسبب وجود شبكة معينة . وهذه العلاقة يمكن إيجادها كلياً من الدائرة الخارجية . فلو طبقنا قانون التيار لكرشوف (أو كتبنا معادلة العقدة المنفردة) عند الأدخال .

$$I_1 = 15 - 0.1V_1$$

وعند الأخراج يؤول قانون أوم الى

$$I_2 = -0.25V_2$$

وبتعويض I_1 و I_2 المعرفة في (10) و (11) ، نجد

$$15 = 0.4V_1 - 0.1V_2$$

$$0 = -0.1V_1 + 0.4V_2$$

ومنها نحصل على

$$V_1 = 40 \text{ V} \quad V_2 = 10 \text{ V}$$

وتستخرج تيارات الدخل والخرج بسهولة أيضاً .

$$I_1 = 11 \text{ A} \quad I_2 = -2.5 \text{ A}$$

وبذا أصبحت خواص النهايات الكاملة للدائرة المقاومة ذات المنفذين معروفة . وإن فوائد تحليل الشبكات ذات المنفذين لا تظهر بمثال بسيط كهذا ولكن تظهر لدى إيجاد متغيرات المسائرة مرة واحدة لشبكات أكثر تعقيداً . فإن إداء هذه الشبكات يمكن الحصول عليه بسهولة من حالات النهايات المختلفة ويصبح من الضروري عمل علاقة لـ V_1 و I_1 عند نهايتي الدخل و V_2 و I_2 عند نهايتي الخرج . وفي المثال السابق وجدت y_{12} و y_{21} وكانت -0.1 U . وليس من الصعب تبين أن هذه المساواة يمكن الحصول عليها أيضاً إذا كانت الممانعات العامة Z_A و Z_B و Z_C موجودة في شبكة الـ π هذه . وعلى أية حال فإنه من الأصعب الحصول على الظروف الخاصة الضرورية لأجل أن تكون $y_{12} = y_{21}$. ولكن استعمال المحددات يساعد بعض الشيء . دعنا نرى إذا كانت العلاقات (6) الى (9) يمكن التعبير عنها بدلالة محددات الممانعة وأجزائها . وبما أن إهتمامنا هو بالشبكات ذات المنفذين

وليس بالشبكات المتصلة بنهاياتها فسوف نفرض أن V_1 و V_2 تمثل بمصادر فولتية مثالية . تطبق المعادلة (6) بفرض أن $V_2 = 0$ (أي أن الخرج مقصور) وتوجد مسaire الدخلى . فالشبكة الآن هي ذات منفذ واحد قد وجدت ممانعة الدخلى لشبكة ذات منفذ واحد فى الفقرة السابقة . نختار الشبكة 1 لتشغل نهايات الدخلى ونفرض أن I_1 هو تيار الشبكة تلك ونميز $(-I_2)$ على أنه تيار الشبكة 2 ونشير الى تيارات الشبكات المتبقية بأي طريقة مناسبة . لذا

$$Z_{in}|_{V_2=0} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}}$$

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \quad \text{وعليه فان (12) وبشكل مشابه فان}$$

$$y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \quad \text{(13)}$$

ولأجل إيجاد y_{12} نفترض أن $V_1 = 0$ ونجد I_1 كدالة لـ V_2 ونجد بأن I_1 يعطى بالتناسب

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ -V_2 & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ 0 & Z_{32} & \cdots & Z_{3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = - \frac{(-V_2)\Delta_{21}}{\Delta_Z} \quad \text{لذا}$$

$$y_{12} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \quad \text{وان (14)}$$

وبشكل مشابه يمكننا أن نبين أن

$$y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} \quad \text{(15)}$$

وان تساوي y_{12} و y_{21} مشروط بتساوي المحددات Δ_Z و Δ_{12} و Δ_{21} وهذه المحددات هي

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3N} \\ Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{N4} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix} \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & Z_{24} & \cdots & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{33} & Z_{34} & \cdots & Z_{3N} \\ Z_{41} & Z_{43} & Z_{44} & \cdots & Z_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N3} & Z_{N4} & \cdots & Z_{NN} \end{vmatrix}$$

وان تساويهما مبين اولاً بتبادل الأسطر الافقية مع الأعمدة لأحد المحددات Δ_{21} مثلاً .

وهذه العملية يمكن الرجوع الى إثباتها في أحد كتب الجبر الجامعية بفرض أن كل ممانعة تبادلية مثل Z_{ij} تستبدل بـ Z_{ji} لذا يمكننا وضع

$$Z_{12} = Z_{21} \quad Z_{23} = Z_{32}$$

الى آخره

هذا التساوي لـ Z_{ij} و Z_{ji} واضح بالتأكيد لثلاثة عناصر غير فعالة هي المقاومة والمتسعة والمحاثة وكذلك هو صحيح للمحاثات التبادلية كما برهنا في الفصل السابق على أية حال فهو غير صحيح لكل نوع من المكونات التي ربما نضمها داخل الشبكة ذات المنفذين . وبخاصة فإنه غير صحيح بصورة عامة للمصدر المعتمد وكذلك للجايريتر gyator وهو النموذج المستعمل لمعدات تأثير هال Hall-effect ولقطاعات توجيه الموجات الحاوية على الحديد . ولدى ضيق للموجات نصف القطرية فان الجايريتر يهتت تغيراً زاوياً إضافياً مقداره 180° للأشارة المارة من الخارج الى الداخل وفوق ذلك للأشارة بالأتجاه الأمامي ولذا $y_{12} = -y_{21}$. وان أكثر انواع العناصر شيوعاً التي تؤدي الى عدم مساواة Z_{ij} و Z_{ji} وهي العناصر اللاخطية .

وتدعى الأداة التي فيها $Z_{ij} = Z_{ji}$ بالعنصر ثنائي الأتجاه *bilateral* والدائرة التي تحوي عناصر ثنائية الأتجاه فقط تدعى بالدائرة ثنائية الأتجاه . ولذا فقد بينا خاصية هامة لشبكة ذات منفذين والثنائية الأتجاه التي فيها

$$y_{12} = y_{21}$$

وهذه الخاصية تجسم بالنص الاتي كما في النظرية العكسية *reciprocity theorem* في أي شبكة ثنائية الأتجاه خطية غير فعالة إذا كان مصدر الفولتية المنفرد v_r في الفرع x وينتج إستجابة التيار I_r في الفرع y فان رفع مصدر الفولتية من الفرع ووضع في الفرع y سينتج إستجابة التيار I_r في الفرع x

والطريقة البسيطة لاعادة نص النظرية هو القول بأن تبادل مصدر الفولتية المثالي ومقياس التيار في أي دائرة ثنائية الاتجاه الخطية سوف لن يغير قراءة مقياس التيار.

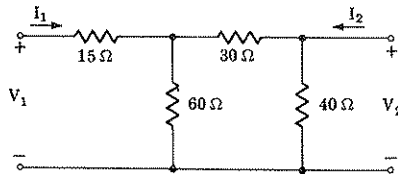
وإذا كنا نتعامل مع محددات المسيرة للدائرة وبرهنا على أن المحددات الصغرى Δ_{21} و Δ_{12} لمحدد المسيرة Δ_v كانت متساوية، عندها نحصل على النظرية العكسية بشكلها المتماثل:

في أي شبكة ثنائية الاتجاه خطية، إذا كان مصدر التيار المنفرد I_x بين العقدتين x و x' منتجاً استجابة الفولتية V_v بين العقدتين v و v' فإن رفع مصدر التيار من العقدتين x و x' ووضعه في بين العقدتين v و v' سينتج استجابة الفولتية V_x بين العقدتين x و x' .

وبكلام آخر فإن تبادل مصدر التيار المثالي ومقياس الفولتية المثالي في أية دائرة ثنائية الاتجاه خطية وغير فعالة سوف لا يغير قراءة مقياس الفولتية. وإن الشبكات ذات المنفذين الحاوية على مصادر معتمدة سوف تنال شيئاً من التركيز في الفقرة التالية.

تمارين

3- 16 بتسليط المصادر 1-7 المناسبة ودوائر القصر في الدائرة المقاومة المبينة في الشكل 7- 16 احسب (أ) y_{11} (ب) y_{12} (ج) y_{21} (د) y_{22} .
الأجوبة: $-19.05; -19.05; 28.6; 48.8 \text{ mU}$



الشكل 7- 16 أنظر للتمرين 3- 16 و 7- 16

4- 16 في دائرة الشكل 7- 16 افرض أن I_1 و I_2 يمثلان مصدرا تيار مثاليين.

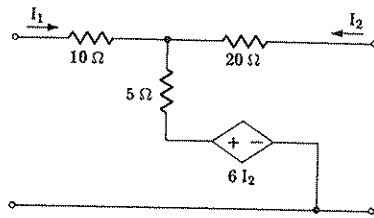
أشر فولتية العقدة V_1 على الإدخال و V_2 على الأخراج و V_x من العقدة الوسطية الى عقدة المرجع المشتركة . ثم أعد ترتيب هذه المعادلات كما في (4) و (5) بحيث يمكن قراءة المتغيرات الأربعة كلها مباشرة من المعادلات .

الأجوبة : $19.05; -19.05; 28.6; 48.8 \text{ mV}$

5 - 16 أوجد المتغيرات الأربعة للمسايرة للشبكة ذات المنفذين المبينة في الشكل

8 - 16

الأجوبة : $-26.8; -12.20; 36.6; 75.6 \text{ mV}$



الشكل 8 - 16 أنظر التمرين 5 - 16

4 - 16 بعض الشبكات المكافئة SOME EQUIVALENT NETWORKS

في تحليل الدوائر الالكترونية عادة من الضروري استبدال الأداة الفعالة (وربما دائرتها غير الفعالة الملازمة لها) بشبكة مكافئة ذات منفذين تحوي ثلاثة أو أربعة ممانعات فقط . وإن المكافئ يصلح فقط لاتساعات إشارة صغيرة وتردد إشارة واحد أو ربما لترددات محددة المدى . وإن المكافئ هو أيضاً تقريب خطي لدائرة غير خطية . على أية حال إذا واجهنا شبكة تحوي عدداً من المقاومات والمتسعات والمحثات مع ترانزستور رقم 2N3903 عندها لانستطيع تحليل الدائرة بأحد الأساليب التي درسناها سابقاً . فالترانزستور يجب أن يستبدل أولاً بنموذج خطي . والمتغيرات y تهيء أحد هذه النماذج بشكل الشبكة ذات المنفذين والمستعملة غالباً في ترددات

عالية . وسيظهر النموذج الخطي الآخر للترانزستور في الفقرة 6 - 16 .

إن المعادلتين الأساسيتين اللتين تعرفان متغيرات مسايرة دائرة القصر

$$I_1 = y_{11}V_1 + y_{12}V_2 \quad (16)$$

$$I_2 = y_{21}V_1 + y_{22}V_2 \quad (17)$$

واللتان لهما هيئة معادلتى العقدة المكتوبتين من الدائرة الحاوية على عقدتين غير مرجعيتين وان احتساب مكافئ الدائرة سيؤدي الى (16) و (17) وقد عملتا أكثر تعقيداً بعدم المساواة وبصورة عامة لـ y_{12} و y_{21} والتي تساعد على تكرار استخدام الأساليب غير المباشرة لأجل الحصول على المعادلتين اللتين تمتلكان مكافئين متبادلين متساويين . دعنا نضف ونطرح $y_{12}V_1$ (الحد الذي نريد استعماله لكي نرى تأثير وجوده في المعادلة الثانية اعلاه) في الجهة اليمنى لـ (17)

$$I_2 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 + (y_{21} - y_{12})V_1 \quad (18)$$

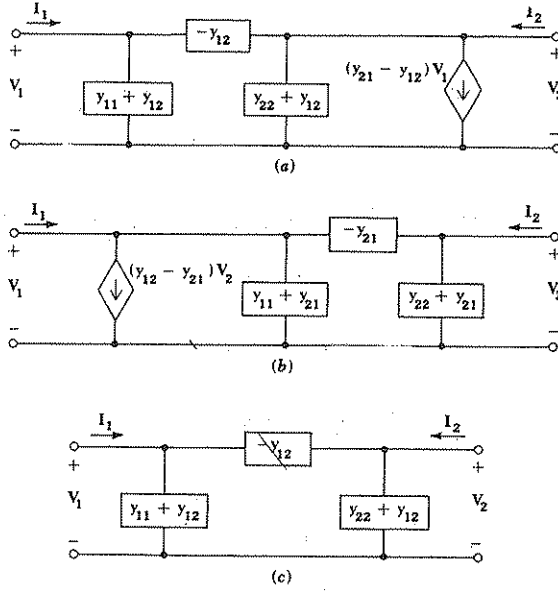
$$I_2 - (y_{21} - y_{12})V_1 = y_{12}V_1 + y_{22}V_2 \quad (19) \text{ او}$$

فالجهة اليمنى لـ (16) و (19) تبين الآن التناظر المناسب لدائرة ذات جانبيين والجهة اليسرى لـ (19) ربما تترجم على أنها المجموع الجبري لمصدري تيار، أحدهما مصدر غير معتمد I_2 يدخل العقدة 2 والآخر مصدر معتمد $(y_{21} - y_{12})V_1$ يغادر العقدة 2 .

لنقرأ الآن الشبكة المكافئة من (16) و (19) فنجهز أولاً عقدة مرجع ثم عقدة تؤثر بـ V_1 والأخرى بـ V_2 ومن (16) يتكون التيار I_1 الذي يسري نحو العقدة 1

ونجهز مسارية تبادلية $(-y_{12})$ بين العقدتين 1 و 2 ونجهز مسارية $(y_{11} + y_{12})$ بين العقدة 1 وعقدة المرجع . ومع $V_2 = 0$ فان نسبة I_1 الى V_1 تصبح y_{11} كما يجب أن تكون . والآن وبأخذ (19) بنظر الاعتبار نجعل التيار I_2 يسري نحو العقدة الثانية ونعمل على جعل التيار $(y_{21} - y_{12})V_1$ يغادر العقدة ونلاحظ بأن المسارية المناسبة $(-y_{12})$ تظهر بين العقدتين ونكمل الدائرة بوضع المسارية $(y_{22} + y_{12})$ من العقدة 2 الى عقدة المرجع وتتضح الدائرة الكاملة في الشكل 9 - 16 (أ) .

ويمكن الحصول على الشكل الآخر لشبكة مكافئة بطرح اضافة $y_{21}V_2$ في (16) وهذه الدائرة المكافئة مبينة في الشكل 9 - 16 (ب) .



الشكل 9 - 16 (أ) و (ب) شبكتان ذواتا منفذين تكافئان أية شبكة ذات منفذين خطية المصدر المعتمد في (أ) يعتمد على V_1 والذي في (ب) يعتمد على V_2 . (ج) الكافئ لشبكة ثنائية الاتجاه .

وإذا كانت شبكة المنفذين ثنائية الاتجاه فان $y_{12} = y_{21}$ وأي من المكافئات يختزل الى الشبكة البسيطة فالمصدر المعتمد يختفي ويبين الشكل 9 - 16 (ج) الكافئ الناتج هذا لشبكة ثنائية الاتجاه ذات المنفذين .

وهناك استعمالات متعددة لهذه الدوائر المكافئة . في المرتبة الاولى فأننا نجحنا في تبين أن يكون هناك مكافئ لأية شبكة معقدة خطية ذات منفذين . ولا يهم عدد العقد او الشبكات المحتواة ضمن الشبكة . فالمكافئ سوف لا يصبح أكثر من التعقيد الموجود في دوائر الشكل 9 - 16 . وأحد هذه يمكن أن يكون أبسط للاستعمال من الدائرة المعطاة .

والشبكة ذات النهايات الثلاث المبينة في الشكل 10 - 16 (أ) غالباً ماتدعى بأنها ممانعات ربط الدلتا Δ بينما في الشكل 10 - 16 (ب) تدعى بالربط النجمي Y .

ويمكن أن تستبدل احدهما بالأخرى فيما اذا تحققت هناك علاقة خاصة بين الممانعات وهذه العلاقات يمكن استنتاجها باستعمال المتغيرات y ، حيث نجد

$$y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_1 + Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)}$$

$$y_{12} = y_{21} = -\frac{1}{Z_B} = \frac{-Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}$$

$$y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_2 + Z_1 Z_3 / (Z_1 + Z_3)}$$

وهذه المعادلات يمكن حلها لـ Z_A و Z_B و Z_C بدلالة Z_1 و Z_2 و Z_3

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (20)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (21)$$

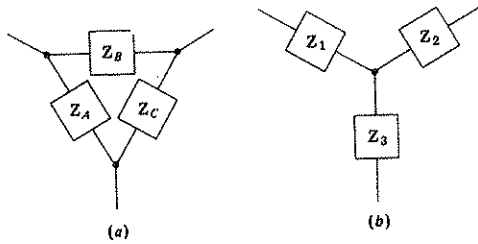
$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (22)$$

وكما في العلاقات المعاكسة فإن

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (23)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (24)$$

$$Z_3 = \frac{Z_C Z_A}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (25)$$



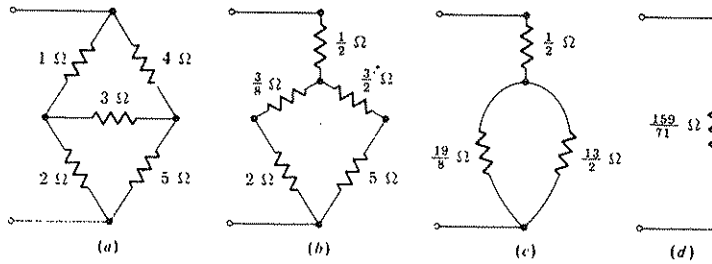
الشكل 10 - 16 شبكة Δ ذات ثلاث نهايات (أ) وكذلك شبكة ذات النهايات الثلاث في (ب) متكافئتان اذا حققت الممانعات الست ظروف التحويل $Y-\Delta$ (or $\pi-T$) المعادلات (20) الى (25).

هذه المعادلات تمكننا من التحويل بين شبكتي Y و Δ المتكافئتين . والطريقة تعرف بتحويل $Y-\Delta$ (أو التحويل $\pi-T$) اذا رسمت الشبكتان بهيئتي هذين الحرفين (ولدى الانتقال من Y الى Δ (20) الى (22) أولاً نجد قيمة البسط المشترك كمجموع حاصل ضرب الممانعات في الـ Y مأخوذة كل اثنتين على حدة .

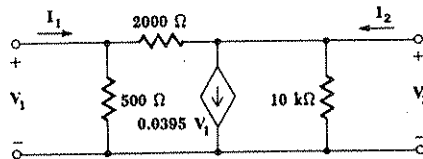
وكل ممانعة في Δ تحسب بقسمة البسط على ممانعة العنصر في Y الذي لا يحوي عقدة مشتركة مع عنصر Δ المطلوب وبالعكس لو أعطينا Δ فأنا نجمع أولاً الممانعات الثلاث حول Δ ثم نقسم حاصل ضرب الممانعتين في Δ اللتين تشتركان في عقدة مع عنصر Y المطلوب على ذلك المجموع .

هذه التحويلات غالباً ما تستعمل لتبسيط الشبكات غير الفعالة وبصورة خاصة المقاومة منها . لذا فإن ممانعة الدخل للدائرة في الشكل 11 - 16 (أ) وجدت بأنها $159/71 \Omega$ بعد إجراء سلسلة التحويلات المشار إليها .

وكمثال لأستعمال الدائرة المكافئة مع مولد معتمد . لناخذ الشبكة ذات المنفذين المبينة في الشكل 12 - 16 . هذه الدائرة يمكن أن تعتبر المكافئ الخطي التقريبي لدائرة ترانزستور والتي فيها نهاية الباعث emitter في العقدة السفلى ونهاية القاعدة base هي عقدة الدخل العليا ونهاية الجامع collector هي عقدة الخرج العليا والمقاوم $2000\text{-}\Omega$ ربط بين الجامع والقاعدة لبعض التطبيقات الخاصة



الشكل 16 - 11 (أ) شبكة مقاومة معطاة يطلب إيجاد الدخل فيها (ب) ربطا لدلتا العلوي استبدل بمكافئة Y (ج) و (د) ربط التوالي والتوازي يعطيه مقاومة الدخل المكافئة $159/71 \Omega$



الشكل 16 - 12 دائرة خطية مكافئة لترانزستور بحالة مشترك الباعث بتغذية عكسية مقاومة بين الجامع والقاعدة . وتستعمل كمثال ذي منفذين .

لجعل تحليل الدائرة أكثر صعوبة هناك طريقتان يمكن أن نفكر بهما لهذه الدائرة . فلو تصورناها كأنها كانت بشكل مكافئ الدائرة المبين في الشكل 9 - 16 (أ) ، عندها يمكننا حساب قيم المتغيرات y في الحال . وإذا كان التصور غير واضح فإن المتغيرات y يمكن حسابها لشبكة ذات منفذين بتطبيق العلاقات (6) إلى (9) . وربما نتجنب أي استعمال لطرق تحليل الشبكة ذات المنفذين ونكتب المعادلات مباشرة للدائرة كما هي . ولدى مقارنة الشبكة مع الدائرة المكافئة فإننا نحصل على

$$y_{12} = -1/2000 = -0.5 \text{ mU}$$

وعليه فإن

$$y_{11} = 1/500 - (-1/2000) = 2.5 \text{ mU}$$

ومن ثم

$$y_{22} = 1/10,000 - (-1/2000) = 0.6 \text{ mU}$$

وأن

$$y_{21} = 0.0395 + (-1/2000) = 39 \text{ mU}$$

المعادلات التالية يجب أن تنطبق

$$I_1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \text{ mA} \quad (26)$$

$$I_2 = 39V_1 + 0.6V_2 \text{ mA} \quad (27)$$

حيث نستعمل الآن وحدات mA و mU و kΩ و V . ونستفيد من استعمال هاتين المعادلتين بتحليل أداء هذه الشبكة ذات المنفذين عندما نجهزها بمصدر تيار $1/0^\circ \text{ mA}$ يربط إلى نهايتي الإدخال وربط حمل 2-mU ($0.5\text{-k}\Omega$) إلى نهايتي الخرج . وإن الشبكة المتصلة بالنهايتين تعطي معلومات خاصة تربط I_1 مع V_1 و I_2 مع V_2

$$I_1 = 1 \quad I_2 = -2V_2$$

بالتعويض في (26) و (27) نحصل على المعادلات التي تكون العلاقة بين

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 0 = 39V_1 + 2.6V_2 \quad V_2 \text{ و } V_1$$

$$V_1 = 0.1 \text{ V} \quad V_2 = -1.5 \text{ V}$$

$$I_1 = 1 \text{ mA} \quad I_2 = 3 \text{ mA}$$

من هذه النتائج يمكن حساب كسب الفولتية voltage gain

$$G_v = \frac{V_2}{V_1} = -15$$

وكسب التيار

$$G_i = \frac{I_2}{I_1} = 3$$

ولو فرضنا أن في جهة الدخل مصدراً جيبياً فإن كسب القدرة

$$G_p = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{-\frac{1}{2}V_2I_2^*}{\frac{1}{2}V_1I_1^*} = 45$$

والجهاز يمكن أن يكون مضخم فولتية أو تيار أو قدرة . ذلك لأن كل واحد من هذه الأكساب أكثر من الواحد ولو رفعت المقاومة $2\text{-k}\Omega$ فإن كسب القدرة سيعصد الى

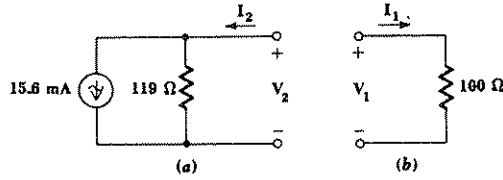
. 354

وان ممانعات الدخل والخرج للمضخم تكون مهمة لأجل فحص القدرة المنتقلة الممكن الحصول عليها من الشبكة ذات المنفذين المجاورة واليها . إن ممانعة الدخل هي نسبة فولتية الأذخال الى التيار .

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 0.1 \text{ k}\Omega$$

وهذه هي الممانعة التي تظهر لمصدر التيار عند ربط الحمل $500\text{-}\Omega$ الى الخرج (على أن يقصر الخرج . وممانعة الدخل يجب أن تكون $1/y_{11}$ أو $400\text{-}\Omega$) . ويجب ملاحظة أن ممانعة الدخل لا يمكن حسابها باستبدال كل مصدر بممانعته الداخلية ومن ثم تدمج المقاومات او المحثات . وفي الدائرة المعطاة تعطي هذه الطريقة القيمة $416\text{-}\Omega$. الخطأ طبعاً يأتي من معاملة المصدر المعتمد كمصدر غير معتمد . ولو فكرنا في ممانعة دخل تساوي عددياً فولتية الدخل الناتجة بتيار الدخل 1 A فإن تطبيق مصدر 1-A ينتج فولتية دخل V_1 وان شدة المصدر المعتمد $(0.0395V_1)$ لا يمكن أن تكون صفراً وسوف نتذكر بأننا حينما نحصل على ممانعة مكافئ ثيفنن لدائرة تحوي مصدراً معتمداً مع مصدر غير معتمد أو أكثر فيجب أن نستبدل المصادر غير المعتمدة بدوائر قصر أو دوائر مفتوحة ولكن المصدر المعتمد يجب أن لا يقتل . وبطبيعة الحال إذا كانت الفولتية أو التيار التي يعتمد عليها المصدر المعتمد سوف يكون نفسه غير فعال واحياناً تبسط الدائرة بتمييز حدث كهذا .

وان ممانعة الخرج هي فقط تسمية أخرى للممانعة ثيفنن تظهر في الدائرة المكافئة لثيفنن لذلك الجزء من الشبكة الذي يقابل الحمل . وفي دائرتنا التي منها فرضنا أنها تعمل بمصدر تيار مقداره 1mA فإننا أستبدلنا هذا المصدر بدائرة مفتوحة وتركنا المصدر المعتمد وحيداً وفتشنا عن ممانعة الدخل المنظورة من اليسار من نهايتي الخرج . هذه الممانعة يمكن أن توجد بطرق عدة (ليس في أحدها دمج



الشكل 13 - 16 (أ) مكافئ نورتن لشبكة الشكل 12 - 16 الى اليسار من نهايتي الخرج مع $I_1 = 1\angle 0^\circ \text{ mA}$
 (ب) مكافئ ثيفنن لذلك الجزء من الشبكة الى اليمين من نهايتي الدخل إذا كان $I_2 = -2V_2 \text{ mA}$.

كل الممانعات على التوالي أو التوازي (فلو سلطنا أعلى نهايتي الخرج وحسبنا فأنا
 نضع المتطلبات على (26) و (27) ونحصل على

$$0 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 1 = 39V_1 + 0.6V_2$$

وعند الحل

$$V_2 = 0.119 \text{ V}$$

لذا فإن

$$Z_{out} = 0.119 \text{ k}\Omega$$

من الممكن استخدام طريقة بديلة بأيجاد فولتية خرج الدائرة المفتوحة وكذلك
 تيار خرج الدائرة المقصورة وتكون النسبة بينهما ممانعة ثيفنن أو Z_{out} . ولتيار
 دخل $I_1 = 1 \text{ mA}$ ولحمل مقصور الدائرة ($V_2 = 0$) نجد أن

$$I_1 = 1 = 2.5V_1 - 0 \quad I_2 = 39V_1 + 0 \quad \text{ولذا}$$

$$I_{2sc} = 15.6 \text{ mA}$$

مرة أخرى مع $I_1 = 1 \text{ mA}$ مع فتح دائرة الخرج ($I_2 = 0$) لدينا .

$$1 = 2.5V_1 - 0.5V_2 \quad 0 = 39V_1 + 0.6V_2$$

وأن

$$V_{2oc} = -1.857 \text{ V}$$

. وإن الاتجاهات المفترضة لـ V_2 و I_2 تنتج ممانعة ثيفنن أو ممانعة الخرج .

$$Z_{out} = -\frac{V_{2oc}}{I_{2sc}} = -\frac{-1.857}{15.6} = 0.119 \text{ k}\Omega$$

كالسابق .

والآن لدينا معلومات كافية تساعدنا لرسم مكافئ ثيفنن أو نورتن للشبكة ذات
 المنفذ المبينة في الشكل 12 - 16 (تشتغل بمصدر التيار $1\angle 0^\circ \text{ mA}$ وتنتهي
 بالحمل $500\text{-}\Omega$ ولو أن هذا الانهاء لا يؤثر على خرج الدائرة المكافئة) كما منحت الى

الحمل $500\text{-}\Omega$. وقد رسم مكافئاً ثفنن ونورتن كما يظهران الى مصدر التيار. لذا فأن مكافئ نورتن الظاهر للحمل يجب أن يحوي مصدر تيار يساوي تيار الدائرة المقصورة I_{2sc} على التوازي مع ممانعة الخرج. وهذا المكافئ يبين في الشكل 13 - 16 (أ) فمكافئء ثفنن الذي يظهر لمصدر الدخل $1\angle 0^\circ\text{-mA}$ يجب أن يحوي أساساً ممانعة دخل كما مبين في الشكل 13 - 16 ب .

تمارين

6 - 16 المتغيرات الوسيطة y لشبكة ذات منفذين معينة هي $y_{11} = 2$ و $y_{12} = -0.2$ و $y_{21} = 20$ و $y_{22} = 0.1$ وكلها بوحدة mS . ربط المصدر الذي مقاومته الداخلية $500\ \Omega$ الى نهايتي الدخل والمقاوم $2.5\text{-k}\Omega$ الى نهايتي الخرج .

احسب (أ) G_r (ب) G_i (ج) G_p

الأجوبة : $40; 1.6; 64$

7 - 16 احسب ممانعة الدخل وممانعة الخرج للشبكة ذات المنفذين في التمرين

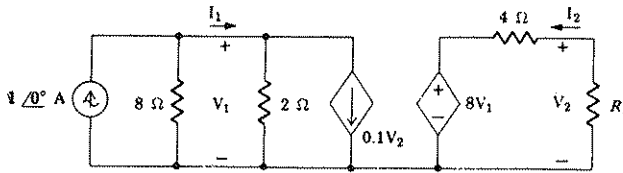
6 - 16

الأجوبة $100; 909\ \Omega$

8 - 16 أوجد المتغيرات الوسيطة الأربعة وممانعة الخرج للشبكة ذات المنفذين في

الشكل 14 - 16

الأجوبة $1.754\ \Omega; 0.5\ \text{V}; 0.25\ \text{V}; 0.1\ \text{V}; -2$

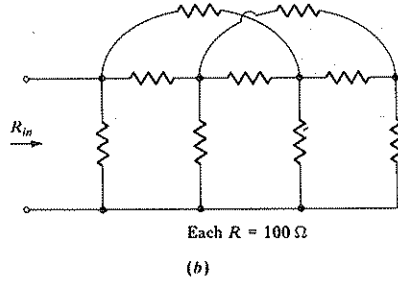
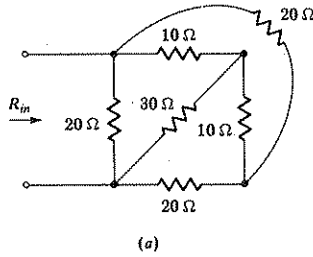


الشكل 14 - 16 أنظر التمرين 8 - 16 .

9 - 16 باستعمال التحويل Y - Δ احسب R_{in} للشبكات ذات المنفذين المبينة في

الشكل 15 - 16 .

الأجوبة : $9.78; 46.7\ \Omega$



الشكل 15 - 16 أنظر التمرين 9 - 16 .

5 - 16 المتغيرات الوسيطة للممانعة IMPEDANCE PARAMETERS

إن مفهوم المتغيرات الوسيطة للشبكة ذات منفذين قدمت بدلالة المتغيرات الوسيطة للمسايرة لدائرة القصر. على أية حال هناك مجموعات أخرى للمتغيرات الوسيطة وكل مجموعة تناسب صنفاً معيناً من الشبكات والتي تعطي تحليلاً سهلاً. وسوف نأخذ بنظر الاعتبار فقط نوعين آخرين من المتغيرات الوسيطة لممانعة الدائرة المفتوحة، والتي هي موضوع هذه الفقرة والمتغيرات الوسيطة الهجينة hybrid parameters والمشروحة في الفقرة الآتية.

نبدأ مرة أخرى بشبكة خطية عامة ذات منفذين لاتحوي أي مصادر معتمدة. فالتيارات والفولتيات تؤثر كالسابق (الشكل 5 - 16) والآن دعنا نعتبر الفولتية V_1 كأنها الاستجابة الناتجة عن مصدرى التيارين I_1 و I_2 ولذا نكتب V_1

$$V_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad (28)$$

ولـ V_2

$$V_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \quad (29)$$

وبطبيعة الحال لدى استعمال المعادلتين ليس من الضروري أن يكون I_1 و I_2 مصدرًا تيار ولا من الضروري أن يكون V_1 و V_2 مصدرى فولتية. وبصورة عامة ربما يكون لدينا أي شبكة تنهي الشبكة ذات النهايتين بأي من النهايات. وكما كتبت المعادلات فإن V_1 و V_2 كميّتان معلومتان أو متغيران وسيطان غير معتمدين وأن I_1 و

I_2 مجهولان أو متغيران معتمدان بالطرق المختلفة التي بها تكتب المعادلتان لعمل علاقة بين الكميات الأربع تعرف المنظومات المختلفة للمتغيرات الوسيطة .
 وإن الوصف الأكثر شمولاً للمتغيرات الوسيطة z تعرف في (28) و (29)
 ونحصل عليه بجعل كل من التيارين صفراً . لذا

$$z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (30)$$

$$z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (31)$$

$$z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad (32)$$

$$z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (33)$$

ولكون التيار صفراً عند فتح دائرة النهاية فإن المتغيرات z وتعرف بمتغيرات الممانعة للدائرة المفتوحة . وترتبط بسهولة مع متغيرات الممانعة لدائرة القصر بحل (28) و (29) ل I_1 و I_2

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & z_{12} \\ V_2 & z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{vmatrix}}$$

$$I_1 = \left(\frac{z_{22}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \right) V_1 + \left(- \frac{z_{12}}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \right) V_2$$

وباستعمال توصيف المصفوفات مع العناية بالتوصيف السفلي ل z ، نفرض أن $\Delta z \neq 0$

$$y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta z} \quad y_{12} = - \frac{\Delta_{21}}{\Delta z} \quad \text{فحصل}$$

$$y_{21} = - \frac{\Delta_{12}}{\Delta z} \quad y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta z} \quad \text{ولايجاد}$$

وبطريقة مشابهة فإن المتغيرات الوسيطة z يمكن أن يعبر عنها بدلالة متغيرات المسارية الوسيطة . وإن التحويل بهذه الطريقة ممكن بين أي من منظومات المتغيرات الوسيطة وأن مجموعة لا بأس بها من المعادلات يمكن الحصول عليها . وسوف لانعتبر بصورة خاصة أي تحويلات أخرى إذا كانت الشبكة ذات المتفذين ثنائية الاتجاه وظهرت الحالة العكسية reciprocity فمن السهل تبيان تساوي z_{21} و z_{12} .

يمكن الحصول على الدوائر المكافئة بملاحظة (28) و (29) فإن تكوينهما يسهل باضافة وطرح $z_{12}I_1$ الى (29) أو $z_{21}I_2$ الى (28) وأن كلاً من هذه 1 ماعدا في المسائل .

الدوائر المكافئة تحوي مصدر فولتية معتمد . ولنترك الاشفاق لهذه المكافئات لأوقات المتعة كوقت الامتحان القادم ونأخذ مثلاً ذا طبيعة أكثر عموماً . هل بإمكاننا تكوين مكافئ ثيفنن العام لشبكة ذات منفذين كما تبدو من نهايتي الخرج ؟ . من الضروري أولاً افتراض صيغة دائرة دخل وسوف نختار مصدر فولتية غير معتمد V_s (الاشارة الموجبة للأعلى) على التوالي مع ممانعة المولد Z_g . لذا

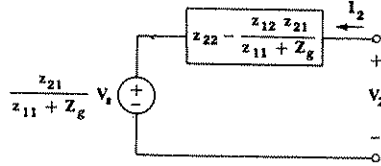
$$V_s = V_1 + I_1 Z_g$$

وبدمج هذه النتيجة مع (28) و (29) ربما نحذف I_1 و V_1 لنحصل على

$$V_2 = \frac{z_{21}}{z_{11} + Z_g} V_s + \left(z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_g} \right) I_2$$

إن دائرة مكافئ ثيفنن يمكن رسمها مباشرة من هذه المعادلة . وقد بينت في الشكل 16 - 16 ويعبر عن ممانعة الخرج بدلالة المتغيرات الوسيطة كالاتي .

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_g}$$



الشكل 16 - 16 مكافئ ثيفنن لشبكة عامة ذات منفذين كما تظهر من نهايتي الخرج معبراً عنها بدلالة المتغيرات الوسيطة لممانعة الدائرة المفتوحة .

إذا كانت ممانعة المولد صفراً نحصل على تعبير أبسط هو

$$Z_{out} = \frac{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}{z_{11}} = \frac{\Delta z}{\Delta_{22}} = \frac{1}{y_{22}} \quad (Z_g = 0)$$

ولهذه الحالة الخاصة فإن مسابرة الخرج مشابهة الى y_{22} كما موضح بالعلاقة الأساس (9) .

وكمثال عددي لنستعمل مجموعة المتغيرات الوسيطة لممانعة ترانزستور يعمل ببعث

$$z_{11} = 10^3 \ \Omega \quad z_{12} = 10 \ \Omega \quad \text{مشترك .}$$

$$z_{21} = -10^6 \ \Omega \quad z_{22} = 10^4 \ \Omega$$

وسوف نأخذ بنظر الاعتبار شبكة ذات منفذين تشتغل بمصدر فولتية جيبي مثالي V_s على التوالي مع المقاوم $500\text{-}\Omega$ ومنتبهة بمقاومة الحمل $10\text{-k}\Omega$. إن المعادلتين اللتين تصفان شبكة ذات منفذين هما

$$V_1 = 10^3 I_1 + 10 I_2 \quad (34)$$

$$V_2 = -10^4 I_1 + 10^4 I_2 \quad (35)$$

والمعادلتان اللتان تصفان شبكتي الدخل والخرج هما

$$V_s = 500 I_1 + V_1 \quad (36)$$

$$V_2 = -10^4 I_2 \quad (37)$$

ومن المعادلات الأربع الأخيرة يمكننا بسهولة الحصول على التعابير لـ V_1 و I_1 و V_2 و I_2 بدلالة V_s

$$V_1 = 0.75 V_s \quad I_1 = \frac{V_s}{2000}$$

$$V_2 = -250 V_s \quad I_2 = \frac{V_s}{40}$$

ومن هذه المعلومات، من البساطة حساب كسب الفولتية.

$$G_V = \frac{V_2}{V_1} = -333$$

وكسب التيار

$$G_I = \frac{I_2}{I_1} = 50$$

وكسب القدرة

$$G_P = \frac{-\frac{1}{2} V_2 I_2^*}{\frac{1}{2} V_1 I_1^*} = 16,700$$

وممانعة الدخل

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = 1500 \quad \Omega$$

كما يمكن الحصول على ممانعة الخرج بالعودة للشكل 16 - 16 حيث

$$Z_{out} = z_{22} - \frac{z_{12} z_{21}}{z_{11} + Z_{\theta_1}} = 16.7 \quad \text{k}\Omega$$

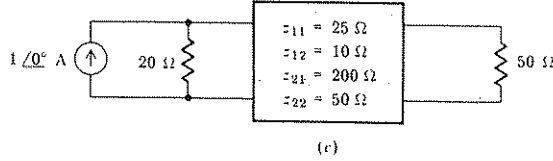
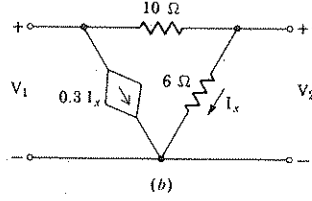
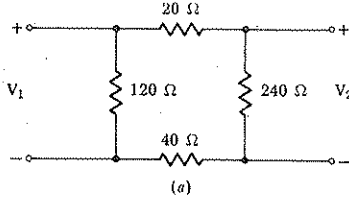
وبموجب التوقعات لنظرية انتقال أقصى قدرة فإن كسب القدرة يصل أقصى قيمة عندما $Z_L = Z_{out} = 16.7 \text{ k}\Omega$ وهذه القيمة القصوى هي 17045.

تمارين

10 - 16 أوجد المتغيرات الوسيطة z الأربعة ذات المنفذين المبينة في الشكل

17 - 16 (أ)

الأجوبة: $68.6; 68.6; 85.7; 102.9 \quad \Omega$



الشكل 17 - 16 (أ) أنظر التمرين 10 - 16 (ب) أنظر التمرين 12 - 16

11 - 16 احسب جميع متغيرات الممانعة الوسيطة للدائرة المفتوحة للشبكة في الشكل 17 - 16 (ب) .

الأجوبة : $2.31; 4.62; 4.62; 12.31 \Omega$

12 - 16 (ج) أوجد (أ) G_V (ب) G_I (ج) G_P (د) Z_{in} (هـ) Z_{out} للمضخم المبين في الشكل 17 - 16

الأجوبة : $-2; 20; 40; 5 \Omega; 5.56 \Omega$

13 - 16 أوجد جميع المتغيرات الوسيطة اذا علم أن $y_{11} = 20$ و $y_{12} = -2$ و

و $y_{21} = 100$ و $y_{22} = 10$ وجميع القيم بالمللي موه .

الأجوبة : $-250; 5; 25; 50 \Omega$

6 - 16 المتغيرات الوسيطة الهجينية HYBRID PARAMETERS

أن أستعمال المتغيرات الوسيطة الهجينية مناسب جداً لدوائر الترانزستور لأن هذه المتغيرات أكثر ملاءمة من ناحية القياس التجريبي للترانزستور. وإن صعوبات القياس مثلاً في المتغيرات الوسيطة لممانعة الدائرة المفتوحة تنشأ عندما يتطلب قياس المتغير الوسيط z_{21} مثلاً .

فالمصدر الجيبي يمكن ربطه بسهولة في نهايتي الدخل ولكن بسبب الممانعة العالية جداً في نهايتي الخرج لدائرة الترانزستور فمن الصعب فتح دائرة نهايتي

الخرج بالإضافة الى تجهيز فولتية الانحياز biasing voltages للتيار المستمر وقياس فولتية الخرج الجيبية وأن قياس تيار دائرة القصر في نهايتي الخرج أبسط كثيراً للأجهزة المستعملة لهذا القياس .

وتعرف المتغيرات الوسيطة الهجينية بكتابة زوج المعادلات التي تربط V_1 و I_1 و V_2 و I_2 اذا كانت V_1 و I_2 المتغيرات غير المعتمدة .

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \quad (38)$$

$$I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \quad (39)$$

وان طبيعة المتغيرات الوسيطة تنجلي بجعل أولاً $V_2 = 0$
 $h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0}$ = ممانعة دخل الدائرة المقصورة

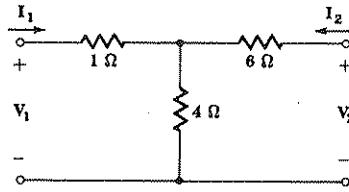
وأن

$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0}$ = كسب التيار الأمامي لدائرة مقصورة
 وبجعل $I_1 = 0$ فإن

$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0}$ = كسب الفولتية العكسي لدائرة مفتوحة

وأن

$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0}$ = مسايرة الخرج لدائرة مفتوحة



الشكل 18 - 16 شبكة ثنائية الاتجاه وجد فيها أن المتغيرات $h_{12} = -h_{21}$

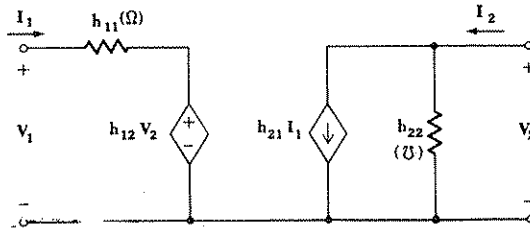
وبما أن المتغيرات تمثل ممانعة ومسايرة وكسب الفولتية وكسب التيار فمن المفهوم الآن سبب تسميتها بمتغيرات وسيطة هجينية .

إن إشارة التوصيف لهذه المتغيرات تبسط عادةً عندما تطبق على الترانزسترات لذا فإن h_{11} و h_{12} و h_{21} و h_{22} تصبح h_i و h_r و h_f و h_o على التعاقب بينما التوصيف يشير الى الدخل العكسي والأمامي والأخراج .

لأجل توضيح السهولة التي تقيم بها هذه المتغيرات لناخذ الدائرة المقاومة ثنائية الاتجاه المبينة في الشكل 16 - 18 فعندما يكون الخرج مقصور الدائرة ($V_2 = 0$) فان تسليط المصدر عند الدخل ($I_1 = 1 \text{ A}$) ينتج فولتية دخل 3.4 V لذا $(V_1 = 3.4 \text{ V})$. لذا $h_{11} = 3.4 \Omega$.

وبهذه الظروف نفسها فان تيار الخرج يستخرج بسهولة بطريقة تقسيم التيار $I_2 = -0.4 \text{ A}$ لذا $h_{21} = -0.4$. والمتغيران الباقيان يمكن الحصول عليهما بفتح دائرة الدخل ($I_1 = 0$) . وبفرض أن فولتية التجهيز 1 V سلطت على نهايتي الخرج ($V_2 = 1 \text{ V}$) . فالاستجابة على نهايتي الدخل تكون 0.4 V اي ($V_1 = 0.4 \text{ V}$) . لذا فان $h_{12} = 0.4$ والتيار المجهز بهذا المصدر عند نهايتي الخرج هو 0.1 A ($I_2 = 0.1 \text{ A}$) . لذا فان $h_{22} = 0.1 \text{ U}$ وهي نتيجة للنظرية العكسية حيث أن $h_{12} = -h_{21}$ لشبكة ثنائية الاتجاه .

الدائرة المبينة 19 - 16 هي ترجمة مباشرة لمعادلتي التعريف (38) و (39) فالأولى تمثل قانون الفولتية لكرشوف حول شبيكة الدخل بينما الثانية يمكن



الشكل 19 - 16 المتغيرات الوسيطة h الأربعة ممثلة بشبكة ذات منفذين والمعادلتان المثلثتان هما

$$V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2, I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2$$

الحصول عليها من قانون التيار لكرشوف عند العقدة العليا للخروج . هذه الدائرة شائعة ايضاً في دوائر الترانزستور . لنفرض قيماً مناسبة لربط الترانزستور حينما يكون الباعث مشتركاً $h_{11} = 1200 \Omega$ و $h_{12} = 2 \times 10^{-4}$ و $h_{21} = 50$ و $h_{22} = 50 \times 10^{-6} \text{ U}$

مولد الفولتية $1 \text{ mV} \angle 0^\circ$ على التوالي مع 800Ω والحمل $5 \text{ k}\Omega$ فللدخل

$$10^{-3} = (1200 + 800)I_1 + 2 \times 10^{-4}V_2$$

$$I_2 = -2 \times 10^{-4}V_2 = 50I_1 + 50 \times 10^{-6}V_2$$

وعند الخرج

وبالحل

$$I_1 = 0.510 \mu A \quad V_1 = 0.592 \text{ mV}$$

$$I_2 = 20.4 \mu A \quad V_2 = -102 \text{ mV}$$

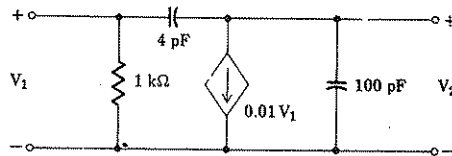
فخلال الترانزستور لدينا تيار مقداره 4 ، وكسب فولتية مقداره 172 - وكسب
قدومه مقداره 6880 وممانعة الادخال للترانزستور هي 1160Ω وباجراء حسابات
خرى يبين ان ممانعة الخرج تساوي $22.2 \text{ k}\Omega$.

تمارين

14 - 16 أوجد المتغيرات الوسيطة الأربعة للشبكات المقاومة الآتية ذات
أمنفذين (أ) المقاوم R ربط من نهاية الدخل العليا الى نهاية الخرج العليا مع دائرة
قصر بين النهايتين السفليتين (ب) دائرة قصر بين النهايتين العلويتين ودائرة قصر
بين النهايتين السفليتين والمقاوم R بين نهايتي الدخل .
الاجوبة : $-1, 0, 1, R; -1, 0, 1, 1/R$

15 - 16 أعطينا المتغيرات الوسيطة z لشبكة ذات نهايتين ثنائية الاتجاه
 $z_{22} = 4 \Omega$ و $z_{21} = 5 \Omega$ و $z_{11} = 8 \Omega$ أوجد المتغيرات الوسيطة h الأربعة .
الاجوبة : $1.75 \Omega; 0.25 \text{ U}; -1.25; 1.25$

16 - 16 أوجد h_{21} و h_{12} للتردد $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ لترانزستور التردد العالي .
دائرته المكافئة مبينة في الشكل 16 - 20 .
الاجوبة : $0.371/68.2^\circ; 9.29/-24.1^\circ$

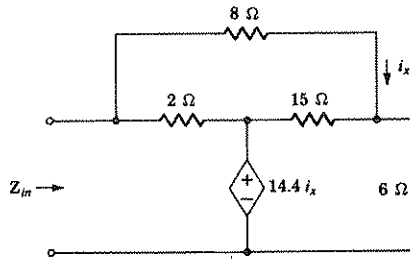


الشكل 20 - 16 أنظر التمرين 16 - 16 .

16 - 17 أوجد ممانعات الدخل والخرج لمضخم فيه $h_{11} = 10 \Omega$ و $h_{12} = 1$ و $h_{21} = 8$ و $h_{22} = 0.8 U$ إذا شغل بمصدر مقاومته الداخلية 3Ω وممنته بحمل يسحب أقصى قدرة من المضخم
 الأجوبة $5.42 \Omega; 1.875 \Omega$

مسائل

□ 1 أوجد Z_{in} كنسبة Δ_z إلى Δ_{11} للشبكة المبينة في الشكل 11.21



الشكل 21 - 16 أنظر المسألة 1

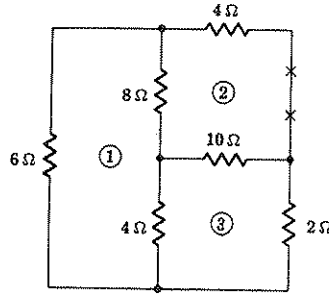
2 دالة الممانعة لشبكة معينة هي

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (\text{القيم بالأوم})$$

كم هي ممانعة الإدخال التي تظهر للمصدر الذي يسלט على الدائرة (أ) فقط في الشبكة 1 ؟

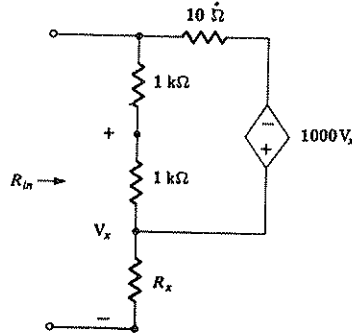
(ب) فقط في الشبكة 2 (ج) في الفرع المشترك للشبكتين أو 2 ؟

3 للشبكة المقاومة التي تظهر في الشكل 16 - 22 . رقم الشبكات كالمبين .
 أوجد (أ) Δ_z (ب) Δ_{11} (ج) Δ_{22} (د) Δ_{12} (هـ) الممانعة التي تجابه مصدر الفولتية المربوط بين xx



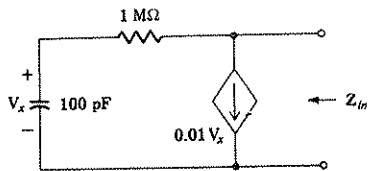
الشكل 22 - 16 أنظر المسألة 3 .

4 □ (أ) أوجد مقاومة ادخال المكافئة R_{in} للشبكة ذات المنفذ الواحد المبينة في الشكل 23 - 16 (ب) احسب R_{in} اذا كانت $R_x = 100, 1000, 10,000 \Omega$ يمكن بناء هذه الدائرة بواسطة الترانزسترات أو مضخمات التشغيل لغرض اعطاء مقاومة سالبة .



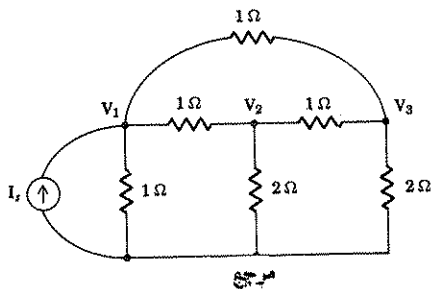
الشكل 23 - 16 انظر المسألة 4 .

5 احسب $Z_{in}(s)$ للشبكة ذات المنفذ الواحد المبين في الشكل 24 - 16 (ب) بين بأن $Z_{in}(s)$ مشابه الى ممانعة الدخل عند الدمج على التوازي للمقاوم $1-M\Omega$ مع دمج التوالي لـ $1/99.99 H$ و $10,000/99.99 \Omega$ عند التردد $\omega = 1 Mrad/s$ (ج) بين بأن الشبكة الأخيرة تقارب الى حد كبير محثاً $10-mH$ قيمة Q له 50 . بما أن الدائرة في الشكل 24 - 16 يمكن تطبيقها عملياً مع المقاومات فيمكن استخدامها لتزويد محثات مكافئة في دوائر متكاملة integrated circuits



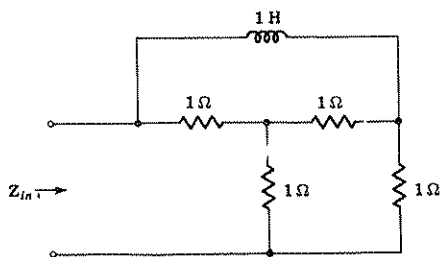
الشكل 24 - 16 انظر المسألة 5 .

6 (أ) باستخدام عقدة المرجع وفولتيات العقد المبينة في الشكل 25 - 16 .
 أكتب معادلات العقدة الثلاث ثم أوجد مسايرة الدخل الممنوحة لمصدر التيار
 $Y_{in} = \Delta_Y \cdot \Delta_{11}(Y)$ (ب) إحص نتائجك باستخدام التحليل الشبكي وبأستخدام
 المحدد Δ_Z ذي 4×4 ثم $Z_{in} = \Delta_Z / \Delta_{11}(Z)$



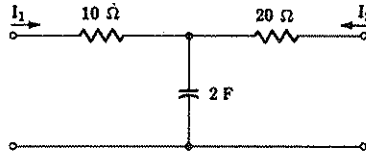
الشكل 25 - 16 أنظر المسألة 6 .

7 □ أوجد جميع الترددات الحرجة لممانعة الدخل $Z_{in}(s)$ للشبكة ذات المنفذ الواحد
 المبينة في الشكل 26 - 16



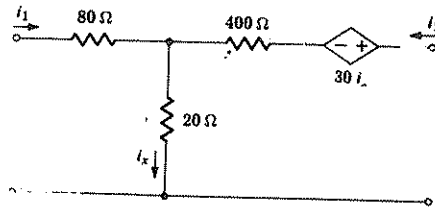
الشكل 26 - 16 أنظر المسألة 7 .

8 أستعمل (6) و (9) من الفقرة 3 - 16 لاجاد المتغيرات الوسيطة v الأربعة للشبكة ذات المنفذين المبينة في الشكل 16 - 27 لدالة s .



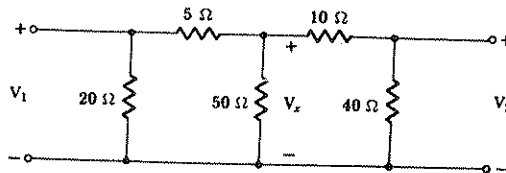
الشكل 16 - 27 أنظر المسألة 8 .

9 (أ) أوجد المتغيرات الوسيطة v الأربعة للشبكة المبينة في الشكل 16 - 28 (ب) ماهي نسبة i_2 الى i_1 اذا ربط المقاوم $100\text{-}\Omega$ عبر نهايتي الخرج ؟



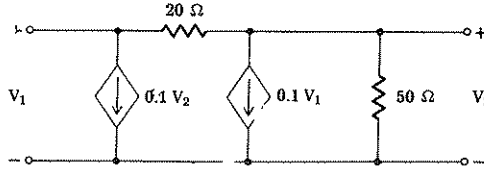
الشكل 16 - 28 أنظر المسألة 9 .

10 □ أوجد المتغيرات الأربعة الوسيطة v للشبكة المبينة في الشكل 16 - 29 بطريقتين (أ) إستعمل (6) الى (9) للفقرة 3 - 16 (ب) أكتب معادلات العقدة الثلاثة بدلالة v_1 و v_2 و v_3 وأختصر v_3 وأكتب المعادلات بالشكل (4) و (5) للفقرة 3 - 16 ثم إقرأ المتغيرات الوسيطة مباشرة من المعادلات .



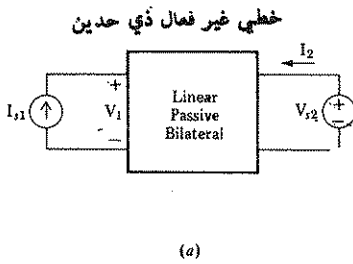
الشكل 16 - 29 أنظر المسألة 10 .

11 بين بأن الشبكة ذات المنفذين للشكل 30 - 16 تنطبق عليها النظر العكسية .



الشكل 30 - 16 أنظر المسألة 11

12 أكمل الجدول المعطى أدناه كجزء من الشكل 31 - 16 .



رقم التجربة	I_{11} (A)	V_1 (V)	I_2 (A)	V_{22} (V)
Experiment # 1	5	20	-1	0
Experiment # 2	0		2	40
Experiment # 3	-3			10
Experiment # 4		50	5	

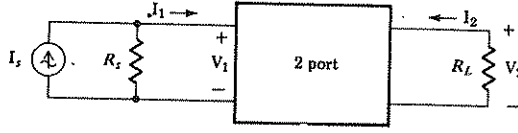
(a)

(b)

الشكل 31 - 16 أنظر المسألة 12 .

13 □ أوجد المتغيرات الوسيطة للشبكة ذات المنفذين التي خصائصها معطاة بالمعادلتين $6v_1 - 3i_1 + 2i_2 = 0$ و $5v_2 = 12i_1 + 2i_2 - 3v_1$ (ب) أوجد القيم الجديدة للمتغيرات الوسيطة بعد إضافة المقاوم 5Ω على التوالي مع موصل واحد عند نهايتي الخرج .

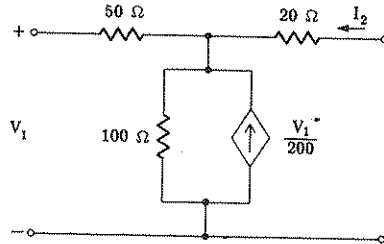
14 الشبكة ذات المنفذين المبينة في الشكل 32 - 16 فيها القيم الآتية $R_s = 200 \Omega$ و $y_{11} = 15 \text{ mU}$ و $y_{12} = -5 \text{ mU}$ و $y_{21} = 100 \text{ mU}$ و $y_{22} = 10 \text{ mU}$ و $R_L = 20 \Omega$ أوجد (أ) مقاومة الدخل V_1/I_1 (ب) كسب التيار I_2/I_1 (ج) مقاومة الخرج التي تظهر لـ R_L .



الشكل 32 - 16 أنظر المسألتين 14 و 15

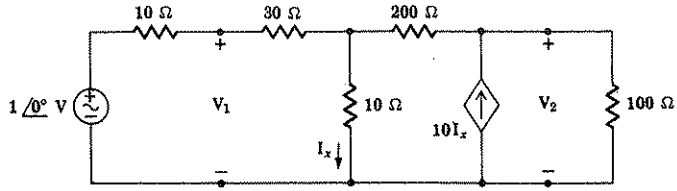
- 15 افرض أن $y_{22} = 0.5 \text{ mU}$ $y_{21} = 24 \text{ mU}$ $y_{12} = -1 \text{ mU}$ $y_{11} = 3 \text{ mU}$ $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ و $R_L = 4 \text{ k}\Omega$ للدائرة المبينة في الشكل 32 - 16 . احسب القيم العددية لـ (أ) كسب الفولتية $G_V = V_2/V_1$ ، كسب التيار I_2/I_1 (ب) كسب التيار I_2/I_s (ج) كسب القدرة $G_P = P_L/P_s$ ممانعة الدخل $Z_{in} = V_1/I_1$ (و) ممانعة الخرج $Z_{out} = V_2/I_2$ عندما $I_s = 0$ و $R_L = \infty$ (ز) كسب الفولتية العكسي $G_{VR} = V_1/V_2$ عندما $I_s = 0$ و $R_L = \infty$

- 16 (أ) احسب المتغيرات الوسيطة y للشبكة المبينة في الشكل 33 - 16 (ب) حدد شبكة ذات منفذين مكافئة تظهر فيها المقاومات (الموجبة) عبر طرفي الدخل والخرج .



الشكل 33 - 16 أنظر المسألة 16

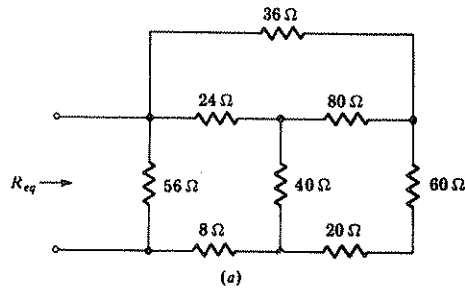
- 17 لدائرة المضخم المبينة في الشكل 34 - 16 أوجد المتغيرات الوسيطة الأربعة ونسبة القدرة الخرج الى الدخل التي تجهز من مصدر فولتية مثالي .
 18 شبكة ذات منفذين فيها $y_{11} = y_{22} = -y_{12} = -y_{21}/2 = 10 \text{ mU}$ أنهيت بالحمل $50\text{-}\Omega$ وغذيت بالفولتية V_s على التوالي مع $20\text{-}\Omega$. احسب شبكات ثيفنن المكافئة التي تواجه بمصدر الفولتية المثالي وكذلك بالحمل المقاومي .



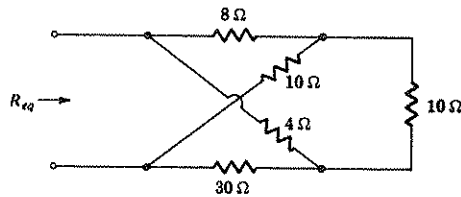
الشكل 34 - 16 أنظر المسألة 17 .

□ 19 (أ) دون الشبكة المقاومية ذات النهايات الثلاث والتي تحقق قيم المتغيرات الوسيطة y الاتية $y_{11} = 60 \text{ mU}$ و $y_{12} = -20 \text{ mU}$ و $y_{21} = -20 \text{ mU}$ و $y_{22} = 120 \text{ mU}$ (ب) إستخدم التحويل $Y-\Delta$ للحصول على شبكة مكافئة أخرى ذات ثلاثة عناصر .

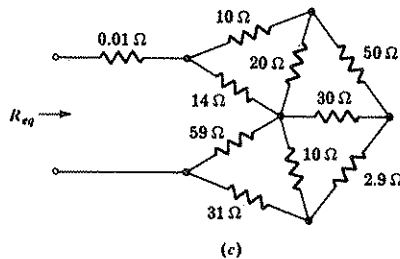
20 إحسب المقاوم المكافئ لكل من الشبكات المبينة في الشكل 35 - 16 .



(a)



(b)

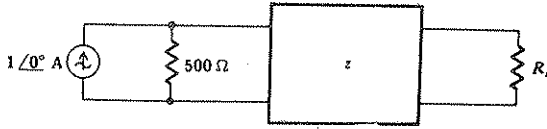


(c)

الشكل 35 - 16 أنظر المسألة 20 .

21 كل من الحافات الثمان لهرم مربع القاعدة يحوي مقاوماً $600\text{-}\Omega$. أي مقاومة نحصل عليها بالقياس بين (أ) الزوايا المتجاورة للقاعدة ؟ (ب) الزوايا المتقابلة نظرياً للقاعدة ؟

22 الكتلة في الشكل 36 - 16 يمكن وصفها بالمتغيرات الوسيطة للممانعة للدائرة المفتوحة الآتية $z_{11} = 100\ \Omega$ و $z_{12} = -500\ \Omega$ و $z_{21} = 1000\ \Omega$ و $z_{22} = 10\ \text{k}\Omega$ (أ) إذا كانت $R_L = 5\ \text{k}\Omega$ ماهي قيمة جذر متوسط التربيع للفولتية عبرها ؟ (ب) أي قيمة لـ R_L تنتج لأقصى قدرة تجهز إلى R_L ؟ (ج) ماهي قيم المتغيرات الوسيطة y لهذه الكتلة ؟

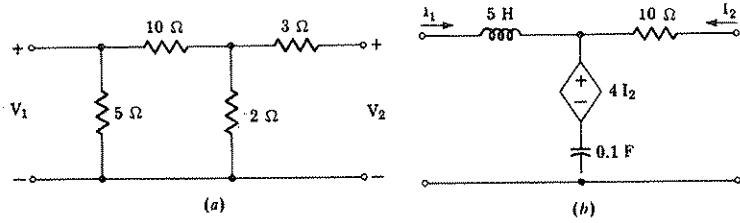


الشكل 36 - 16 انظر المسألة 22 .

23 احسب z_{11} و z_{12} و z_{21} و z_{22} للشبكة ذات المنفذين التي تحقق النتائج الآتية في تجربتين (بالفولت V والأمبير A)
 $V_2 = 66, I_2 = -1, I_1 = 3, V_1 = 17$
 $V_2 = 48, I_2 = 4, I_1 = 1, V_1 = -3,$

24 المتغيرات الوسيطة z لشبكة ذات منفذين هي $z_{11} = 10\ \Omega$ و $z_{12} = -j1\ \Omega$ و $z_{21} = 20\ \Omega$ و $z_{22} = 4 - j3\ \Omega$. أوجد معدل القدرة المجهزة إلى $Z_L = 4 + j3\ \Omega$ المربوط عبر النهاية 2 والمولد $V_s = 100\angle 0^\circ\ \text{V rms}$ مربوط عبر النهاية .

□ 25 (أ) أوجد z_{11} و z_{12} و z_{21} و z_{22} للشبكة في الشكل 37 - 16 (ب) أوجد المتغيرات الوسيطة الأربعة لممانعة الدائرة المفتوحة كدالة لـ s للشبكة الميمنة في الشكل 37 - 16 (ب) .

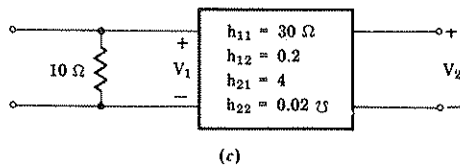
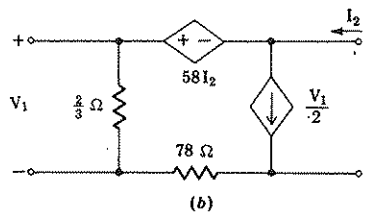
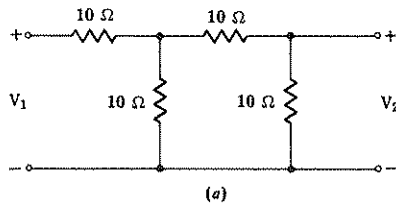


الشكل 3/ - 16 أنظر المسألة 25

26 شبكة ذات منفذين فيها $z_{11} = 8/0^\circ \Omega$ و $z_{12} = 2/0^\circ \Omega$ و $z_{21} = 50/60^\circ \Omega$ و $z_{22} = 5/0^\circ \Omega$ وفيها الحمل $Z_L = 10/-30^\circ \Omega$ وتشغل بالمصدر $100/0^\circ V$ على التوالي مع $2/0^\circ \Omega$ أوجد متوسط القدرة المجهزة الى Z_L ومعدل القدرة المجهزة من قبل مصدر الفولتية المثالي .

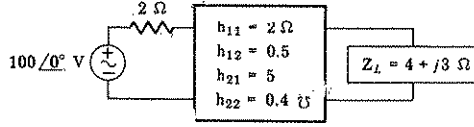
27 أوجد المتغيرات الوسيطة الهجينية لكل من الشبكات المبينة في الشكل 38 -

. 16



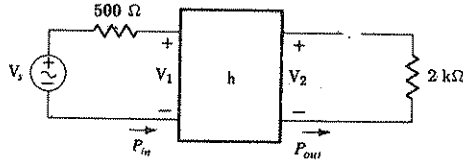
الشكل 38 - 16 أنظر المسألة 27 .

28 صمم شبكة مقاومة ذات منفذين تحوي بالضبط ثلاث مقاومات (موجبة)
 والتي تسبب $h_{11} = 20 \Omega$ ، $h_{12} = 0.1$ و $h_{22} = 10 \text{ m}\Omega$
 □ 29 أوجد معدل القدرة المجهزة الى Z_L في دائرة الشكل 39 - 16 .



الشكل 39 - 16 أنظر المسألة 29 .

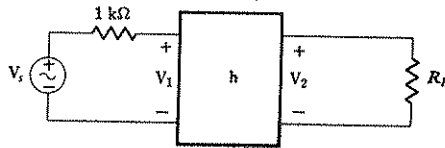
30 قيم المضخم للشكل 40 - 16 هي $h_{11} = 100 \Omega$ و $h_{12} = 1/400$ و
 $h_{22} = 1 \text{ m}\Omega$ و $h_{21} = 20$ أوجد (أ) V_2/V_1 ، (ب) P_{out}/P_{in}



الشكل 40 - 16 أنظر المسألة 30

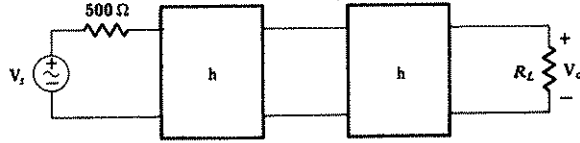
□ 31 الشبكة ذات المنفذين المبينة في الشكل 16 - 41 فيها قيم المتغيرات الوسيطة
 الهجينية الآتية ،

$h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$ و $h_{12} = 0.0015$ و $h_{21} = 100$ و $h_{22} = 100 \mu\Omega$. أفرض أن
 $V_s = 10\angle 0^\circ \text{ mV}$ (أ) أوجد V_2 إذا كانت $R_L = 10 \text{ k}\Omega$ ، (ب) أوجد قيمة R_L التي
 تنتج لأقصى قدرة تجهز الى R_L (ج) ماهي المتغيرات الوسيطة z لهذه الشبكة ذات
 المنفذين .



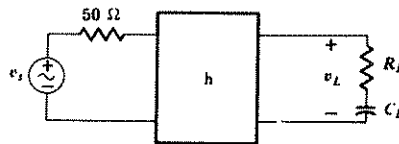
الشكل 41 - 16 أنظر المسألة 31 .

32 المضخم ذو المرحلتين المبين في الشكل 42 - 16. يحوي مرحلتين متشابهتين كل منهما تتصف بـ $h_{11} = 1 \text{ k}\Omega$ و $h_{12} = 0.0015$ و $h_{21} = 100$ و $h_{22} = 100 \mu\text{S}$ (أ) إذا كانت R_L تساوي $10 \text{ k}\Omega$ ، أي قيمة لـ $|V_o|$ تتطلب لإنتاج $|V_o| = 25 \text{ V}$ ؟
 (ب) إذا كانت $R_L = \infty$ و $|V_o| = 100 \mu\text{V}$ ، أوجد $|V_o|$.



الشكل 42 - 16 أنظر المسألة 32 .

33 في الشكل 43 - 16 إيفرض أن $v_s = 2 \cos 10t \text{ mV}$ و $h_{11} = 50 \Omega$ و $h_{12} = 0.003$ و $h_{21} = -0.98$ و $h_{22} = 4 \mu\text{S}$ (أ) إذا كانت $R_L = 40 \text{ k}\Omega$ و $C_L = 10^{-9} \mu\text{F}$ أوجد القيمة التأثيرية لـ v_L (ج م ت) (ب) أي قيم لـ R_L و C_L تنتج أقصى قدرة تجهز الى هذا المزيج .



الشكل 43 - 16 أنظر المسألة 33 .

الجزء السادس

تحليل الشبكة

NETWORK ANALYSIS



الفصل السابع عشر

تحليل متغير الحالة

STATE-VARIABLE ANALYSIS

17.1 مقدمة : INTRODUCTION

حتى هذه النقطة شاهدنا طرقاً عديدة مختلفة يمكن بواسطتها تحليل الدوائر فالدائرة المقاومة جاءت أولاً وكتبنا لها مجموعة من المعادلات أخذت عادةً قالب المعادلات العقدية أو الشبكية . وكذلك وجدنا أيضاً أنه باستطاعتنا اختيار متغيرات فولتية أو تيار آخر إذا كانت أكثر ملاءمة بعد رسم شجرة مناسبة للشبكة . علماً بأن استعمال الشجرة في اختيار متغيرات الدائرة ستظهر مرة أخرى في هذا الفصل .
وبعدها أضفنا محثات وامتعات لشبكاتنا فأنتج ذلك معادلات تحوي تفاضلات وتكاملات بالنسبة للزمن . وفي ماعدا المنظومات من الدرجة الأولى أو الثانية البسيطة كان هناك إما دوائر خالية من المصدر أو دوائر تحوي مصدر dc فقط . ولكننا لم نحاول حل هذه المعادلات . وقد وجدت النتائج التي حصلنا عليها بطرق حيز الزمن time-domain

الدالات المرغمة الجيبية أدت بنا الى أستعمال الطوريات والمعادلات الجبرية للدالة الترددية . وكانت الأساليب التي أستعملناها مع الدوائر المقاومة ممكنة التطبيق ولو أن ظهور الكميات المركبة يجعل استعمالها أكثر تعقيداً في الجزء الأخير من الكتاب هذا وسنبداً النظر في طرق أكثر شمولاً وأكثر قوة لتحليل الدائرة . ونعود الى الدالة الزمنية في هذا الفصل ، كما أننا سنقدم فيه استعمال متغيرات الحالة state variables . ومرة أخرى سوف لانحصل على حلول قطعية للدوائر حتى ذات التعقيد الطفيف . ولكن سنكتب مجموعات المعادلات التي تناسب البرامج المتوفرة للحسابات الرقمية . وهذه المجموعات من المعادلات سوف تكتب لتصف بعض الدوائر التي حللناها فعلاً بطرق أخرى . وسوف نحل المعادلات بعدئذٍ بطرق

وأساليب ستعرض في هذا الفصل . ولدى تعمقنا في الفصل ربما سيظهر لنا بأن الحلول تصبح أكثر تعقداً مما كانت عليه في السابق . وربما سيشرح القارئ بأن الطرق القديمة كانت أفضل ، ولكن يجب علينا التذكر باستمرار بأن هذه الطرق الحديثة لوصف الدوائر بمتغيرات الحالة سوف تسمح لنا بتحليل الدوائر التي درجة التعقيد فيها تجعل الطرق القديمة للحل غير ممكنة قطعاً والصبر لحين إثبات ذلك هو الدليل القاطع .

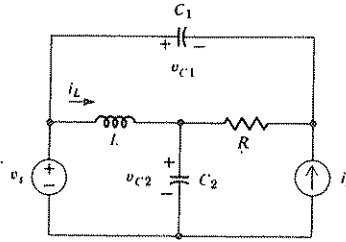
وفي الفصل الثامن عشر سنعود الى الدالة الترددية مرة أخرى ونعتبر الطرائق التي تصف الدالات الدورية بدلالة مكوناتها الجيبية وهذه العملية تعرف بتحليل فورير Fourier . والفصلان الأخيران كرسا لتحويلات فورير وتحويلات لابلاس Laplace . وكل منها يكون حلقة وصل أخرى بين الدالة الزمنية والدالة الترددية .
والآن لمر ماهمية متغيرات الحالة وكيف تستعمل .

17.1 متغيرات الحالة والمعادلات بشكلها الاعتيادي :

STATE VARIABLES AND NORMAL-FORM EQUATIONS

إن تحليل وتغير حيز الحالة 'state-space' كما تدعى في بعض الأحيان هي الطريقة التي يمكن استخدامها على كل من الدوائر الخطية وعلى الدوائر اللاخطية مع بعض التحويلات وكذلك على الدوائر التي تحوي متغيرات تتبدل مع الزمن ، على سبيل المثال المتسعة C والتي مقدارها $50 \cos 20t \text{ pF}$ إلا أن انتباهنا سوف يركز على الدوائر الخطية غير المتغيرة مع الزمن .

وسنعرض بعض الأفكار تحت عنوان متغيرات الحالة لدوائر RLC التي ظهرت لأول مرة على الصفحة 156 حيث أعيد رسمها في الشكل 17.1 وعندما كتبنا معادلات لهذه الدائرة أولاً اخترنا بشكل اعتيادي استعمال التجليل العقدي وكان المتغيران المعتمدان فولتية العقدة للعقدتين الوسطى واليمنى . كما كنا نستطيع إجراء التحليل الشبكي ونستعمل تيارى شبكيتين لمتغيرين . وأخيراً كنا نستطيع رسم شجرة أو . ثم نختار مجموعة فولتيات فروع الشجرة أو تيارات الرباطات كمتغيرات متعددة . وإن كل طريقة تؤدي الى عدد مختلف من المتغيرات على الرغم من أن متغيرين هما العدد المناسب لهذه الدائرة .



الشكل 17.1 دائرة RLC ذات أربعة عقد والتي شاهدها من قبل كشكل 4.16

وإن مجموعة المتغيرات التي سنختارها في تحليل متغير الحالة هي مجموعة هجينية وربما تضم الآن التيارات والفولتيات . وهي تيارات المحث وفولتيات المتسعة . وكل من هذه الكميات ربما تستعمل مباشرة للتعبير عن الطاقة المخزونة في المحث أو المتسعة لأي زمن آني . فهي تصف بمجموعها حالة الطاقة للمنظومة ولهذا السبب تدعى بمتغيرات الحالة .

لنحاول كتابة مجموعة المعادلات لدائرة الشكل 17.1 بدلا من متغيرات الحالة v_{C1} , v_{C2} , i_L كما عرفت على مخطط الدائرة . فالطريقة التي نستعملها سوف توضح أكثر شكليا في الفقرة التالية . ولكن في الحال دعنا نحاول استعمال قانون الفولتية لكرشوف مرة لكل محث وقانون التيار لكرشوف مرة لكل متسعة . متدئين بالمحث . نجعل مجموعة الفولتيات حول الشبكة اليسرى السفلى يساوي صفراً .

$$Li_L + v_{C2} - v_s = 0 \quad (1)$$

مفترضين أن فولتية المصدر v_s و تيار المصدر i_s معلومتين ولذلك نحصل على معادلة واحدة بدلالة متغيرات الحالة المختارة .

وبعدها نأخذ المتسعة C_1 بنظر الاعتبار وبما أن النهاية اليسرى C_1 هي أيضاً نهاية مصدر الفولتية فستصبح جزءاً من العقدة المتراكبة (supernode) . لذا نختار النهاية اليمنى لـ C_1 على أنها العقدة التي نطبق عليها قانون التيار لكرشوف . فالتيار النازل للأسفل خلال فرع المتسعة هو $C_1 v_{C1}$ وتيار المصدر المتجه للأعلى هو i_s والتيار في R يمكن الحصول عليه بملاحظة أن الفولتية غير R والمرجع الموجب اليسار هو $(v_{C2} - v_s + v_{C1})$ فالتيار الأيمن المار في R هو $(v_{C2} - v_s + v_{C1})$ لذا

$$C_1 v'_{c1} + \frac{1}{R} (v_{c2} - v_s + v_{c1}) + i_s = 0 \quad (2)$$

ومرة أخرى أصبح بإمكاننا كتابة المعادلات بدون تقديم أي متغيرات جديدة .
على الرغم من أننا بإمكاننا التعبير عن التيار خلال R مباشرة بدلالة متغيرات
الحالة فيما لو كانت الدائرة أكثر تعقيداً .

وأخيراً نطبق قانون التيار لكشوف على النهاية العليا لـ C_2

$$C_2 v'_{c2} - i_L + \frac{1}{R} (v_{c2} - v_s + v_{c1}) = 0 \quad (3)$$

والمعادلات (1) الى (3) كتبت كلياً بدلالة متغيرات الحالة الثلاثة وقيم
العناصر المعلومة والدالتين المرغمتين الأثنين . فهي لم تكتب بالشكل القياسي الذي
يتطلبه تغير الحالة ، فمعادلات الحالة يقال عنها أنها بالشكل الاعتيادي *normal form*
عندما يكون تفاضل كل متغير من متغيرات الحالة معبراً عنه بالدمج
الخطي لجميع متغيرات الحالة والدالات المرغمة أن ترتيب المعادلات التي تعرف
المشتقات والدرجة التي تظهر بها متغيرات الحالة في كل معادلة يجب أن تكون
نفسها . لنختار الترتيب i_L و v_{c1} و v_{c2} ونكتب
(1) كالآتي :

$$i'_L = -\frac{1}{L} v_{c2} + \frac{1}{L} v_s \quad (4)$$

ثم ان (2) تعاد كتابتها كالآتي :

$$v'_{c1} = -\frac{1}{RC_1} v_{c1} - \frac{1}{RC_1} v_{c2} + \frac{1}{RC_1} v_s - \frac{1}{C_1} i_s \quad (5)$$

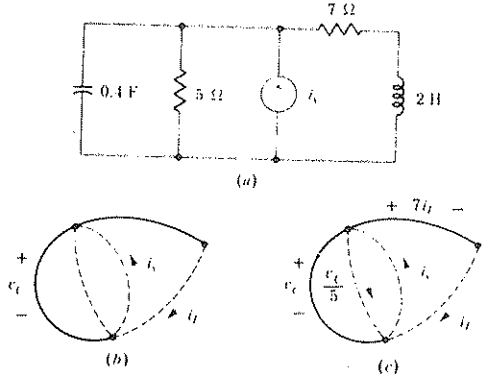
بينما تصبح (3) :

$$v'_{c2} = \frac{1}{C_2} i_L - \frac{1}{RC_2} v_{c1} - \frac{1}{RC_2} v_{c2} + \frac{1}{RC_2} v_s \quad (6)$$

لاحظ بأن هذه المعادلات تعرف بالترتيب i_L و v'_{c1} و v_{c2} نسبة الى الترتيب
المنظر للمتغيرات الى الجهة اليسرى i_L و v_{c1} و v_{c2} وتأتي الدالات المرغمة في
الأخير ويمكن كتابتها بأي ترتيب مناسب .

وكمثال آخر لحساب مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي ننظر للدائرة المبينة في
الشكل 17.2 (أ) . وبما أن هناك متسعة واحدة ومحث واحد فتتوقع متغيري
حالة اثنين هما فولتية المتسعة وتيار المحث . ولتسهيل كتابة معادلات الشكل
الاعتيادي تنشأ شجرة لهذه الدائرة التي تخضع لجميع أحكام إنشاء الشجرة التي
ذكرت أولاً في الفصل الثالث وعلى الصفحة 114 . وبالإضافة يتطلب أن تقع جميع

المتسعات في الشجرة والمحثات في الشجرة المصاحبة cotree. وهذا ممكن اعتيادياً وتؤدي الى الشجرة الاعتيادية a normal tree ففي تلك الحالات الشاذة القليلة حيث لم يكن من الممكن رسم الشجرة الاعتيادية نستعمل طريقة مختلفة قليلاً والتي سوف نأخذها بنظر الاعتبار في نهاية الفقرة 17.3



الشكل 17.2 (أ) دائرة RLC تحتاج الى متغيري حالة اثنين

(ب) شجرة اعتيادية تبين متغيري الحالة i_s و i_l

(ج) التيار في كل رباط والفولتية عبر كل فرع ممبر عنها بدلالة متغيري الحالة .

وبامكاننا هنا وضع C في الشجرة و L و i_s في الشجرة المصاحبة كما مبين في الشكل 17.2 (ب) . وهذه هي الشجرة الاعتيادية الممكنة للدائرة . كميات المصدر

ومتغيرات الحالة موضحة على الشجرة وعلى شجرتها المصاحبة .

بعدها نحسب التيار في كل رباط link والفولتية عبر كل فرع للشجرة بدلالة

متغيرات الحالة . ولدوائر بسيطة كهذه من الممكن عمل هذا بالابتداء بأي مقاوم

فيه التيار أو الفولتية واضحتين . والنتائج مبينة على الشجرة في الشكل 17.2 (ج) .

يمكننا الآن كتابة معادلات الشكل الاعتيادي باستدعاء قانون التيار لكرشوف في

$$0.4v_c' + 0.2v_l - i_s + i_l = 0$$

النهاية العليا للمتسعة .
أو بالشكل الاعتيادي

$$v_c' = -0.5v_l - 2.5i_l + 2.5i_s \quad (7)$$

وحول الدائرة الخارجية لدينا
 $2i_L - v_C + 7i_L = 0$
 أو أن (8)

والمعادلات (7) أو (8) هي معادلات الشكل الاعتيادي المرغوبة. وأن حلها سيعطي جميع المعلومات اللازمة للتحليل الكامل للدائرة المعطاة.

وبالطبع يمكن الحصول على التمايير الصريحة لمتغيرات الحالة فقط اذا كانت الدالة الميمنة معطاة $i_s(t)$. على سبيل المثال سوف يتبين بمدئذ بأنه اذا كانت

$$i_s(t) = 12 + 3.2e^{-2t}u(t) \text{ A} \quad (9)$$

$$v_C(t) = 35 + (10e^{-t} - 12e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t) \text{ V} \quad (10)$$

$$i_L(t) = 5 + (2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t) \text{ A} \quad (11)$$

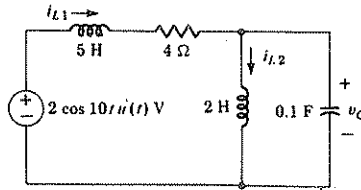
هذه الحلول على أية حال واضحة جداً وسوف نطور الانسلوب للحصول عليها من معادلات الحالة الاعتيادية في الفقرة 7 - 17.

لنر اذا كنا نستطيع ترتيب الطريقة التي كنا نتبمها أولاً للحصول على مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي وهذا هو موضوع الفقرة التالية.

تصريين

17 - 1 أكتب مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي للدائرة المبينة في الشكل 3 - 17 متغيرات الحالة i_{L1} و i_{L2} و v_C

الأجوبة: $i_{L1}' = -0.8i_{L1} - 0.2v_C + 0.4 \cos 10t u(t)$
 $i_{L2}' = 0.5v_C$; $v_C' = 10i_{L1} - 10i_{L2}$



الشكل 8 - 17 رسمت دائرة الشكل 7 - 17 (أ) ثانية بطريقة بحيث تتكون عقدة متراكبة محتوية على مصدر فولتية ليربط الى ماتبقى من الشبكة فقط خلال محتين ومصدر التيار.

17.3 كتابة مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي

WRITING A SET OF NORMAL-FORM EQUATIONS

في المثالين اعلاه كانت الظروف التي حصلنا فيها على معادلات الشكل الاعتيادي تظهر فناً أكثر منها علماً ، ولأجل ادخال نوع من النظام الى عملنا العشوائي دعنا نتبع الطريقة التي استعملناها عندما كنا ندرس التحليل الشبكي والتحليل العقدي وكذلك استعمال الشجرة في التحليل الشبكي والعقدي العام ونكون مجموعة من الخطوات التي تنسق الطريقة . وبعدها سوف نطبق هذه الأحكام على ثلاثة أمثلة جديدة ، كل منها ستكون شاملة أكثر من سابقتها .
وهذه هي الخطوات الست التي سنتبناها :

- 1 . كَوْن الشجرة الاعتيادية . ضع المتسمات ومصادر الفولتية في الشجرة والمحطات ومصادر التيار في الشجرة المصاحبة وضع فولتيات السيطرة في الشجرة وتيارات السيطرة في الشجرة المصاحبة جهد الامكان ، ويمكن أن يكون لدينا أكثر من شجرة . وهناك أنواع معينة من الشبكات لا تسمح لرسم اي شجرة اعتيادية وهذه الاستشارات ستؤخذ بنظر الاعتبار في نهاية هذه الفقرة .
- 2 . عين متغيرات الفولتية والتيار . عين الفولتية (مع مرجع القطبية) لكل متسعة والتيار (مع السهم) لكل محث وهذه متغيرات الحالة . وضع الفولتية عبر فرع شجرة والتيار خلال كل رباط بدلالة فولتيات المصدر وتيارات المصدر ومتغيرات الحالة إذا كان ذلك ممكناً ، والأعين متغير فولتية جديدة أو تيار جديد لذلك الفرع أو الرباط للشجرة المقاومة .
- 3 . أكتب معادلات C استعمل قانون التيار لكرشوف لكتابة معادلة واحدة لكل متسعة . اجعل Cv_i يساوي مجموع تيارات الرباطات التي نحصل عليها بأخذ العقدة (أو العقدة المتراكبة) لأي نهاية من المتسعة . تميز العقدة المتراكبة بأنها مجموعة فروع الشجرة التي ترتبط الى نهاية تلك النهاية من المتسعة لاستحدث متغيراً جديداً .

- 4 . أكتب معادلات L . استعمل قانون الفولتية لكرشوف لكتابة معادلة واحدة لكل محث . اجعل Li_i مساوية الى مجموع فولتيات فروع الشجرة التي نحصل عليها بأخذ المر المنفرد المغلق خلال ذلك الرباط وخلال مجموعة فروع الشجرة على أن لانستحدث متغيراً جديداً .

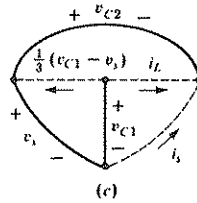
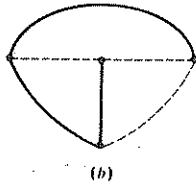
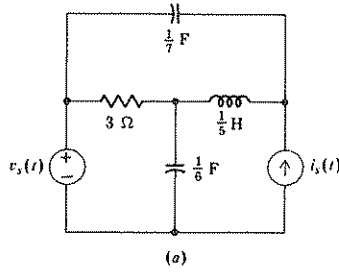
5. أكتب معادلات R (إذا كان ذلك ضرورياً) وإذا عينت متغيرات فولتية جديدة للمقاومات في الخطوة 2، استعمل قانون التيار لكرشوف لجعل v_{R}/R يساوي مجموع تيارات الرباطات. وإذا استخدمت متغيرات تيار جديدة للمقاومات في الخطوة 2، استعمل قانون الفولتية لكرشوف لجعل $i_{R}R$ تساوي مجموع فولتيات فروع الشجرة. حل معادلات المقاومات هذه أنياً لنحصل على تعابير صريحة لكل من v_{R} و i_{R} بدلالة متغيرات الحالة وكميات المصدر.

6. أكتب معادلات الشكل الاعتيادي. عوض التعابير لكل من v_{R} و i_{R} في المعادلات التي حصلت عليها في الخطوات 3 و 4، وبذا تحذف متغيرات المقاومة. ضع المعادلات الناتجة بشكل اعتيادي.

كمثال لاستعمال هذه القواعد خذ دائرة الشكل 4. 17 (أ) حيث تحوي أربع عقد وفيها متسعتان ومحث واحد. ومصدرين غير معتمدين. باتباع الخطوة نرسم الشجرة الاعتيادية. لاحظ بأن هناك شجرة واحدة فقط ممكنة هنا كما مبين في الشكل 17.4 ب وذلك لأن المتسعتين ومصدر الفولتية تكونا في الشجرة كما يجب أن يكون المحث ومصدر التيار في الشجرة المصاحبة.

بعدها نعرف الفولتية عبر المتسعة $1/6-F$ على أنها v_{C1} والفولتية عبر المتسعة $1/7-F$ ب v_{C2} والتيار خلال المحث ب i_L . ومصدر الفولتية موضح عبر فرع الشجرة تلك ومصدر التيار مؤشر على رباطها، وبقي رباط المقاوم وحده بدون تأشير متغير. ومن الواضح أن التيار الذي يشير لليسار خلال ذلك الرباط هو الفولتية $v_{C1} - v_s$ مقسومة على 3Ω . ولذا نجد أنه من غير الضروري تقديم متغير اضافي. هذه الفولتيات لفروع الشجرة وتيارات الرباطات مبينة في الشكل 17.4 (ج).

المعادلات يجب أن تكتب للخطوة 3. فللمتسعة $1/6-F$ نطبق قانون التيار لكرشوف على العقدة الوسطية.



الشكل 17.4 (أ) الدائرة المعطاة يطلب معادلات الشكل الاعتيادي لها (ب) شجرة اعتيادية ممكنة فقط (ج) تأشير فولتيات الفروع وتيارات الرباطات .

$$\frac{v'_{c1}}{6} + i_L + \frac{1}{3}(v_{c1} - v_s) = 0$$

بينما العقدة اليمنى هي أكثر ملاءمة للمتسعة $1/7-F$

$$\frac{v'_{c2}}{7} + i_L + i_s = 0$$

ولدى المضي الى الخطوة 4 نطبق قانون الفولتية لكرشوف على رباط المحث وعلى

$$\frac{i'_L}{5} - v_{c2} + v_s - v_{c1} = 0$$

الشجرة كلها في هذه الحالة .

وبما أنه لا توجد متغيرات جديدة للمقاوم فنترك الخطوة 5 ونرتب المعادلات الثلاث اعلاه ببساطة للحصول على معادلات الشكل الاعتيادي المرغوبة

$$v'_{c1} = -2v_{c1} - 6i_L + 2v_s \quad (12)$$

$$v'_{c2} = -7i_L - 7i_s \quad (13)$$

$$i'_L = 5v_{c1} + 5v_{c2} - 5v_s \quad (14)$$

أصبحت متغيرات الحالة اعتباطياً بالتسلسل v_{c1} و v_{c2} و i_L ولو اخترت بالتسلسل i_L و v_{c1} و v_{c2} بدلاً من ذلك لكانت معادلات الشكل الاعتيادي

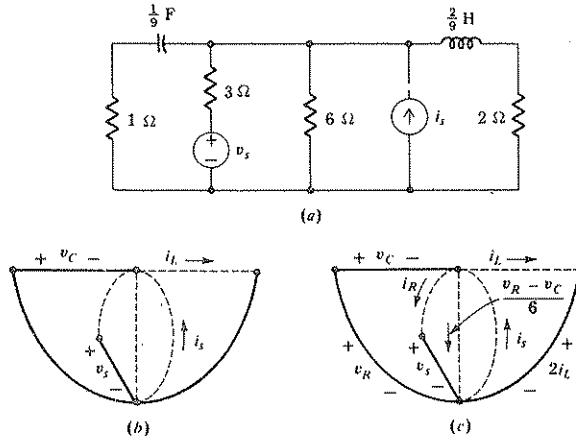
$$i_L = 5v_{C1} + 5v_{C2} - 5v_s$$

$$v_{C1} = -6i_L - 2v_{C1} + 2v_s$$

$$v_{C2} = -7i_L - 7i_s$$

لاحظ بأن ترتيب الحدود على الجهة اليمنى من المعادلات غيرت لتتفق مع ترتيب المعادلات .

والآن لنأخذ بنظر الاعتبار الدائرة في الشكل 17.5 (أ) والتي تحوي عدة مقاومات . هنا أصبح من الضروري عرض متغيرات المقاومة . ويمكننا انشاء عدة أشجار اعتيادية لهذه الشبكة . وغالباً يتطلب ذلك رسم تخطيطي لعدد من الأشجار المختلفة ولتر فيما اذا كانت متغيرات الفولتية والتيار للمقاوم يمكن تجنبها بالاختيار المدروس . فالشجرة التي سنستعملها مبينة في الشكل 17.5 (ب)



الشكل 17.5 (أ) الدائرة المغطاة (ب) واحد من عدد كبير من الاشجار الممكنة (ج) الفولتيات والتيارات مؤشرة .

فد تم تأشير متغيرات الحالة v_C و i_L والدالات المرغمة v_s و i_s على المخطط التوضيحي .

يمكننا أن ندرس هذه الدائرة والشجرة لبضعة دقائق لكي نتوصل الى طريقة لتجنب استحداث أي متغير جديد . ولنفرض جدلاً اننا جهلة ونختار فولتية فرع الشجرة v_R وتيار الرباط i_R للفرع $1-\Omega$ و $3-\Omega$ على التتابع . فالفولتية عبر المقاوم $2-\Omega$

يمكن التعبير عنها بسهولة كـ $2i_L$. بينما التيار النازل خلال المقاوم 6Ω يصبح $(v_R - v_C)/6$ وقد اشرت جميع تيارات الرباطات وفولتيات فروع الشجرة لاحظ الشكل 17.5 (ج) .

معادلة المتسعة يمكن كتابتها الآن

$$\frac{v_C}{9} = i_R + i_L - i_s + \frac{v_R - v_C}{6} \quad (15)$$

وللمحت

$$\frac{2}{9}i_L = -v_C + v_R - 2i_L \quad (16)$$

نبدأ الخطوة 5 بالمقاوم 1Ω . وبما أنها في الشجرة فيجب أن تساوي تيارها الى مجموع تيارات الرباطات . وكلا النهايتين للمتسعة تتجمع في عقدة متراكبة ولدينا

$$\frac{v_R}{1} = i_s - i_R - i_L - \frac{v_R - v_C}{6}$$

المقاوم 3Ω يتبع وفولتيها يمكن كتابتها ،

$$3i_R = -v_C + v_R - v_s$$

المعادلتان الأخيرتان يجب ان تحل الآن أنياً لـ v_R و i_R بدلالة i_L و v_C والدالتان المرغمتان . وبالعمل هذا نجد ان :

$$v_R = \frac{v_C}{3} - \frac{2}{3}i_L + \frac{2}{3}i_s + \frac{2}{9}v_s$$

$$i_R = -\frac{2}{9}v_C - \frac{2}{9}i_L + \frac{2}{9}i_s - \frac{7}{27}v_s$$

واخيراً فان هذه النتائج تعوض في المعادلة (15) و (16) ويمكن الحصول على معادلات الشكل الاعتيادي للشكل 17.5 ،

$$v_C = -3v_C + 6i_L - 2v_s - 6i_s \quad (17)$$

$$i_L = -3v_C - 12i_L + v_s + 3i_s \quad (18)$$

لحد الآن ناقشنا فقط الدوائر التي فيها مصادر الفولتية والتيار هي مصادر غير معتمدة . في هذا الوقت سننظر الى الدوائر التي تحوي مصادر معتمدة . فلو فرضنا على سبيل المثال بأننا أدخلنا مصدر فولتية معتمد على التوالي مع المتسعة $1/7-F$ في الشكل 4 - 17 (أ) كما هو مبين في الشكل 17.6 (أ) . فأن الشجرة الاعتيادية الممكنة الوحيدة مبينة في الشكل 17.6 (ب) . ويمكننا ملاحظة انه كان من غير الممكن وضع التيار المسيطر في رباط . ان فولتيات فروع الشجرة وتيارات الرباطات هي كما مبين في المنحنى الخطي ولا تختلف عن المثال السابق عدا اضافة مصدر الفولتية $18i_s$.

فللمتسعة $1/8-F$ مرة أخرى . نجد أن :

$$\frac{v'_{c1}}{6} + i_L + \frac{1}{3}(v_{c1} - v_s) = 0 \quad (19)$$

مفترضين أن مصدر الفولتية المعتمد يتقلص الى عقدة متراكبة وكذلك نجد أن العلاقة لم تتبدل للمتسعة $1/7-F$.

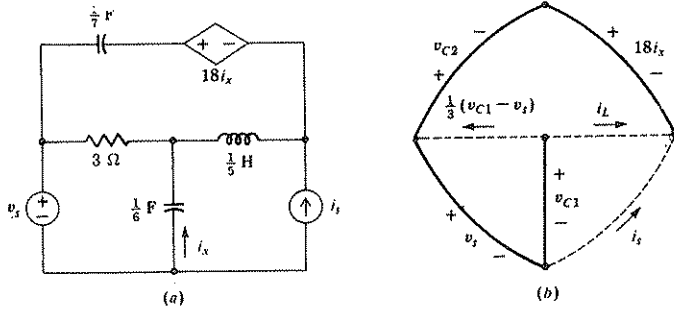
$$\frac{v'_{c2}}{7} + i_L + i_x = 0 \quad (20)$$

نتائجنا السابقة للمحث لم تتبدل على أية حال بسبب اضافة الفرع في الشجرة .

$$\frac{i'_L}{5} - 18i_x - v_{c2} + v_s - v_{c1} = 0$$

وأخيراً يجب أن نكتب معادلة السيطرة التي تعبر عن i_x في بدالة فولتيات فروع الشجرة وتيارات الرباطات وهي :

$$i_x = i_L + \frac{v_{c1} - v_s}{3}$$



الشكل 6 - 17 (أ) دائرة تحتوي على مصدر فولتية معتمد (ب) الشجرة الاعتيادية لهذه الدائرة مع تأشير فولتيات الفروع وتيارات الرباطات .

ولذا فان معادلة المحث تصبح

$$\frac{i'_L}{5} - 18i_x - v_{c1} + 6v_s - v_{c2} + v_s - v_{c1} = 0 \quad (21)$$

وعندما نكتب (19) الى (20) بالشكل الاعتيادي لدينا .

$$v'_{c1} = -2v_{c1} - 6i_L + 2v_s \quad (22)$$

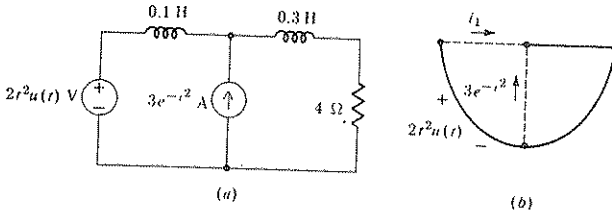
$$v'_{c2} = -7i_L - 7i_x \quad (23)$$

$$i'_L = 35v_{c1} + 5v_{c2} + 90i_L - 35v_s \quad (24)$$

إن طريقة كتابة معادلاتنا يجب أن تحور قليلاً إذا كنا لانستطيع انشاء شجرة اعتيادية في الدائرة . وهناك نوعان من الشبكات التي يحدث فيها ذلك . أحدهما يحوي دارة فيها كل عنصر هو متسعة أو مصدر فولتية . لذا فانه من الصعب جعلها في الشجرة جميعاً . والاخر يحدث اذا كان هناك عقدة أو عقد متراكبة ترتبط الى بقية الدائرة فقط بمحثات او مصادر تيار .

وعندما تحصل أي من الحالتين السابقتين نحاول ترك متسعة خارج الشجرة في الحالة الأولى وحذف المحث من الشجرة المصاحبة في الحالة الأخرى . وبمدها نجابه بمتسعة في رباط والتي يجب أن نعین لها تياراً أو بمحث في الشجرة التي تحتاج الى فولتية . وأن تيار المتسعة يمكن أن يعبر عنه على أنه المتسعة مضروبة بمشتقة الفولتية عبرها بالنسبة للزمن كما تعرف بترتيب فولتيات فروع الشجرة . تعطى فولتية المحث بالمحثة مضروبة في مشتقة التيار الذي يدخل أو يغادر العقدة أو العقدة المتراكبة في أي من نهايتي المحث .

لنأخذ بنظر الاعتبار مثلاً من هذا النوع مبین في الشكل 7 - 17 (أ) . فان العناصر الوحيدة المربوطة الى العقدة الوسطية العليا هي المحثتين ومصدر التيار . لذا يجب أن نضع محثاً واحداً في الشجرة كما موضح بالشكل 7 - 17 (ب) . والدالتان المرغمتان ومتغير الحالة المفرد أي التيار i_1 مبيّنة بالمخطط . لاحظ أن التيار في المحث العلوي الأيمن معروف بدلالة i_1 و $i_2(t)$. لذا لم نستطع تحديد حالات الطاقة للمحثين بصورة مستقلة عن الأخرى . هذا النظام يحتاج الى متغير حالة منفرد i_1 وبطبيعة الحال اذا وضعنا المحث 0.1-H في الشجرة (بدلاً من المحث 0.3-H) فان التيار في المحث الأيمن سيكون تيار متغير الحالة المنفرد .



الشكل 7 - 17 (أ) دائرة لا يمكن رسم الشجرة الاعتيادية لها (ب) شجرة ركبت بحيث ان احد المحثات فيها يجب ان يكون فرعاً

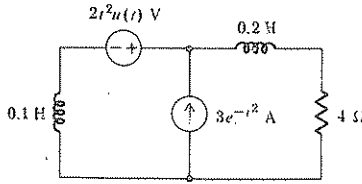
ويجب أن نؤشر فولتيات للفرعين الآخرين الباقيين في الشكل 7 - 17 (ب) .
وبما أن التيار المتجه الى اليمين في المحث 0.3-H هو $i_1 + 3e^{-t^2}$ فالفولتيات عبر
المحث والمقاوم $4-\Omega$ هي $4i_1 - 1.8te^{-t^2}$ وكذلك $0.3d(i_1 + 3e^{-t^2})/dt = 0.3i_1' - 1.8te^{-t^2}$ وعلى التعاقب .

يمكن الحصول على معادلة الشكل الاعتيادي المنفردة بالخطوة 4 في طريقتنا
أو أن $0.1i_1' + 0.3i_1' - 1.8te^{-t^2} + 4i_1 + 12e^{-t^2} - 2t^2u(t) = 0$

$$i_1' = -10i_1 + e^{-t^2}(4.5t + 30) + 5t^2u(t) \quad (25)$$

لاحظ بأن أحد الحدود في الجهة اليمنى من المعادلة يتناسب مع تفاضل دالات
المصدر .

المحثان ومصدر التيار كانا في هذا المثال مربوطين الى عقدة مشتركة .
ولسوائهم تحوي فروعاً أكثر وعقد أكثر فالربط يكون الى العقدة المتراكبة . ولتوضيح
شبكة كهذه يبين الشكل 17.8 ترتيباً مقارباً نوعاً ما لمنصرين يظهران في الشكل
7 - 17 (أ) . لاحظ مرة أخرى بأنه لا يمكن تحديد حالات الطاقة للمحثين



الشكل 8 - 17 - رُسمت دائرة الشكل 7 - 17 (أ) ثانية بطريقة بحيث تتكون عقدة متراكبة محتوية على
مصدر فولتية ليربط الى ماتبقى من الشبكة فقط خلال محثين ومصدر التيار .

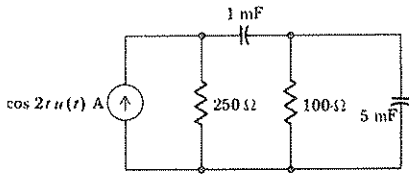
بصورة مستقلة . ولو حدد احدهما وأعطى مصدر التيار فان الآخر يمكن تحديده
أيضاً . وبالطريقة التي بها نحصل على معادلة الشكل الاعتيادي هي نفسها .

ويمكن تمييز دائرة المتسعات ومصادر الفولتية بطريقة مشابهة (مماثلة) وعلى
الطالب أن لا يقلق عند حل مثل هذه المسائل . ويتأكد من محاولة حل التمرين 4 -
17 أدناه .

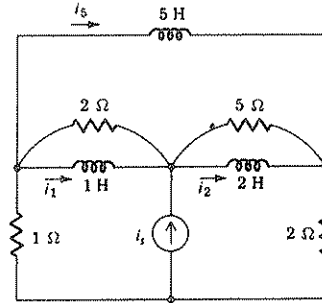
تمارين :

2 - 17 أكتب معادلات الشكل الاعتيادي للدائرة في الشكل 9 - 17 (أ)

$$v'_{c1} = -4v_{c1} - 4v_{c5} + 1000 \cos 2t u(t); v'_{c5} = -0.8v_{c1} - 2.8v_{c5} + 200 \cos 2t u(t) \text{ [استعملين } v_{c1} (+ -) \text{ و } v_{c5} (\pm)] \text{ الاجوبة}$$



(a)



(b)

الشكل 9 - 17 انظر التمرين 2 - 17 (ب) انظر التمرين 17.3

17.3 اكتب معادلات الشكل الاعتيادي للدائرة المبينة في الشكل 17.9 (ب)

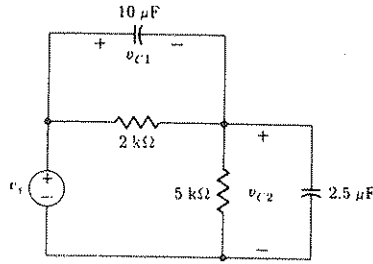
مستعملاً وضعية متغير الحالة i_1 و i_2 و i_3

$$i'_1 = -1.6i_1 + i_2 - 0.6i_3 - 1.4i_s; i'_2 = 0.5i_1 - 1.2i_2 - 0.75i_3 + 0.75i_s; i'_3 = -0.12i_1 - 0.3i_2 - 0.42i_3 + 0.02i_s \text{ الاجوبة}$$

17.4 احصل على معادلة الشكل الاعتيادي للدائرة المبينة في الشكل 17.10 اذا

تغيرت متغيرات الحالة ك (أ) v_{c1} (ب) v_{c2}

$$v'_{c1} = -56v_{c1} + 16v_s + 0.2v'_s; v'_{c2} = -56v_{c2} + 40v_s + 0.8v'_s \text{ الاجوبة}$$



انظر التمرين 17.4

4 - 17 استعمال توصيف المصفوفة

في الأمثلة التي درسناها في الفقرتين السابقتين اختيرت متغيرات الحالة على أن تكون فولتيات متسعة وتيارات محث . ماعدا الحالة الأخيرة حيث لم يكن من الممكن رسم شجرة اعتيادية ولا يمكن سوى اختيار تيار محث واحد فقط كمتغير حالة . وكلما ازداد عدد المحثات والمتسعات في الشبكة كان من الواضح بأن عدد متغيرات الحالة سيزداد . لذا فان الدوائر الأكثر تعقيداً تحتاج الى عدد أكبر من متغيرات الحالة . وكل منها يحوي عدداً أكبر من متغيرات الحالة على الجهة اليمنى . ولا يحتاج حل هذه المجموعة من المعادلات الى الاستعانة بالحاسبة الالكترونية فحسب بل ان الجهد المضني هو كتابة كل المعادلات والتي ربما توقع الكاتب بالخطأ بسهولة .

وفي هذه الفقرة سوف نكون توصيفاً رمزياً مفيداً لكي يقلل من جهد كتابة المعادلات :

لنبين هذه الطريقة بتذكر معادلات الشكل الاعتيادي التي حصلنا عليها من دائرة الشكل 17.6 التي تحوي مصدرين غير معتمدين v_s و i_s وقد أعطيت النتائج في (22) الى (24) للفقرات 3 - 17 .

$$v_{C1} = -2v_{r1} - 6i_L + 2v_s \quad (22)$$

$$v_{C2} = -7i_L - 7i_s \quad (23)$$

$$i_L = 35v_{r1} + 5v_{r2} + 90i_L - 35v_s \quad (24)$$

إن اثنين من متغيرات الحالة هما فولتيات وواحد هو تيار ودالة مصدر واحدة هي فولتية وواحدة هي تيار والوحدات الملازمة للثوابت على الجهة اليمنى من المعادلات وحداتها هي الأوم والموه أو أنها بدون وحدات .

ولأجل تجنب مشاكل التوصيف في حالات أكثر شمولاً سنستعمل الحرف q ليرمز الى متغير الحالة و a الى ثابت الضرب لـ q ويمثل f الدالة المرغمة الكلية التي تظهر على الجهة اليمنى من المعادلة ، لذا فان (22) الى (24) تصبح .

$$q'_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + f_1 \quad (26)$$

$$q'_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + f_2 \quad (27)$$

$$q'_3 = a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + f_3 \quad (28)$$

حيث

$$\begin{array}{llllll} q_1 = v_{c1} & a_{11} = -2 & a_{12} = 0 & a_{13} = -6 & f_1 = 2v_s \\ q_2 = v_{c2} & a_{21} = 0 & a_{22} = 0 & a_{23} = -7 & f_2 = -7i_s \\ q_3 = i_L & a_{31} = 35 & a_{32} = 5 & a_{33} = 90 & f_3 = -35v_s \end{array}$$

ونرجع الآن الى استعمال المصفوفات واستعمال الجبر الخطي لتبسيط معادلاتنا ومن ثم تعميم الطرق 1. كلنا الآن ملمون بالاسلوب الذي يمكن به تمثيل المتجه عن طريق احداثياته المتعامدة . فعلى سبيل المثال عبرنا عن السرعة 5 m/s بالاتجاه 36.9° درجة شمال الشرق كمجموع متجهين احدهما سرعته 4 متر / ثانية باتجاه الشرق والآخر سرعته 3 متر / ثا باتجاه الشمال . والمتجهات هما مركبتان للمتجه ذي البعدين المعطى في اتجاهين في الفراغ . ولدى دراسة المجالات الكهربائية المغناطيسية في الفيزياء مثلنا متجهات الأبعاد الثلاثة بواسطة متجه ذي ثلاثة مركبات بالاتجاهات x و y و z

ويمكن تعريف المتجهات ايضاً لكي يكون لها أكثر من ثلاث مكونات ، وعندها نعمل بما يسمى بالفراغ الفوقي *hyperspace* ذي الأبعاد n . وهذه الفكرة سهلة الفهم حتى ولو كان رسم المتجه ذي n من الأبعاد صعب على قطعة من الورق أو على السبورة . ولنفرض اننا مثلنا جميع متغيرات الحالة q_1 و q_2 و \dots و q_n لمسألة تحليل دائرة بمتجه ذي n من الابعاد والذي سنسميه بمتجه الحالة ونكتبه بالمصفوفة العمودية

1 بعض المعلومات عن المصفوفات تسهل فهم البقية الباقية من هذا الفصل ولكن النقص في هذه المعلومات سوف لا يمنع من الاستمرار بالدراسة ولكن عليك زيادة التأني والتعميق .

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

هذه المصفوفة فيها n من الأسطر الأفقية وفيها عمود واحد. ونصفها بمصفوفة $(n \text{ by } 1)$ تدعى المصفوفة التي لها عمود واحد بمصفوفة العمود أو المتجه. سوف نمثل المصفوفات والمتجهات في هذا الفصل بحروف صغيرة وسميكة لـ \mathbf{q} أو $\mathbf{q}(t)$ ماعدا الشذوذ الوحيد وهو المصفوفة المتماثلة \mathbb{I} المشروحة في الفقرة 17.6. وإن عناصر أي مصفوفة هي كميات غير اتجاهية scalars ويرمز لها بالحروف الايطالية الصغيرة q_1 أو $q_1(t)$ كـ

وإن الفراغ الفوقي ذي الأبعاد n والذي تحون فيه \mathbf{q} معرفة دائما يدعى بفراغ الحالة كذلك نعرف مجموعة الدالات المرغمة f_1 و f_2 و $f_3 \dots f_n$ كمصفوفة $(n \times 1)$ ونسميها بمتجه الدالة المرغمة أو مصفوفة الدالة

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

لنركز انتباهنا الى المعادلات a_{ij} التي ربما تمثل بعناصر المصفوفة المربعة a ($n \text{ by } n$)

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (31)$$

المصفوفة \mathbf{a} توصف بمصفوفة المنظومة.

باستعمال المصفوفات التي عرفناها أعلاه نستطيع دمج هذه النتائج لنحصل على تمثيل مقتضب وموجز لمعادلات الحالة. ولإجراء ذلك نذكر بأن تفاضل الزمن للمصفوفة التي عناصرها دالات للزمن هو مصفوفة جديدة وكل عنصر من عناصرها هو تفاضل العنصر المماثل في المصفوفة الاصلية. أي أن تفاضل قيمة الحالة

هو:

$$\frac{dq(t)}{dt} = q'(t) = \begin{bmatrix} q'_1(t) \\ q'_2(t) \\ \vdots \\ q'_n(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

ويمكن إضافة مصفوقتين كل منهما فيها m من الاسطر و n من الاعمدة عنصر لعنصر بحيث ويمكن أن نكتب

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{11} + d_{11}) & (c_{12} + d_{12}) & (c_{13} + d_{13}) \\ (c_{21} + d_{21}) & (c_{22} + d_{22}) & (c_{23} + d_{23}) \end{bmatrix}$$

كذلك المصفوفات المتوافقة conformable (عدد الأعمدة في الاول يساوي عدد الأسطر في الثاني) يمكن ضربها بالشكل المحدد .

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (c_{11}g_{11} + c_{12}g_{21} + c_{13}g_{31}) & (c_{11}g_{12} + c_{12}g_{22} + c_{13}g_{32}) \\ (c_{21}g_{11} + c_{22}g_{21} + c_{23}g_{31}) & (c_{21}g_{12} + c_{22}g_{22} + c_{23}g_{32}) \end{bmatrix} \quad (33)$$

وعليه فبإمكاننا كتابة المعادلات الثلاث (26) الى (28) كمعادلة مصفوفة واحدة .

$$q' = aq + f \quad (34)$$

وإن الفائدة من هذا التمثيل واضحة لأن المنظومة ذات 100 معادلة في متغيرات الحالة لها بالضبط الشكل نفسه كما في معادلة واحدة وفي متغير حالة واحدة .

للمثال (22) الى (24) يمكن كتابة المصفوفات الأربع في (34) بوضوح كالآتي ،

$$\begin{bmatrix} v'_{c1} \\ v'_{c2} \\ i'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 35 & 5 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{c1} \\ v_{c2} \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2v_s \\ -7i_s \\ -35v_s \end{bmatrix} \quad (35) \text{ اد}$$

وإن كل شخص عدا خبراء المصفوفات المتضلعين يحتاج عدة دقائق لفتح (35) ومن تدقيق النتائج مع (22) الى (24) لتنتج ثلاثة معادلات متماثلة .

ماهي إجراء آتنا بالنسبة الى تحليل متغيرات الحالة ؟

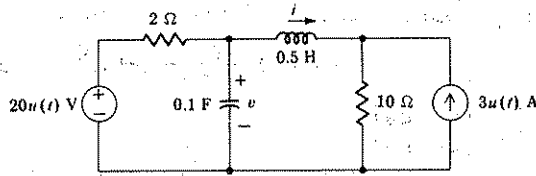
يجب أن يكون بمقدورنا إنشاء شجرة اعتيادية للدائرة المعطاة ونحدد متغيرات الحالة ونضعها بنظام كمتجهات الحالة ونكتب مجموعة معادلات الشكل الأعتيادي واخيراً نحدد مصفوفة المنظومة ومنتجه الدالة المرغمة من المعادلات .

المسألة الأخرى التي تواجهنا هي الحصول على الدالات الواضحة للزمن التي تمثلها متغيرات الحالة .

تمرين

17.5 (أ) باستخدام متجه الحالة $q = \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}$: احسب مصفوفة النظام ومتجه الدالة المرغمة لدائرة الشكل 17.11 (ب) اعد لمتجه الحالة $q = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$

الأجوبة $\begin{bmatrix} -20 & 2 \\ -10 & -5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -60u(t) \\ 100u(t) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -5 & -10 \\ 2 & -20 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 100u(t) \\ -60u(t) \end{bmatrix}$



الشكل 17.11 أنظر التمرين 17.5

17.5 حل معادلات الدرجة الأولى SOLUTION OF THE FIRST-ORDER EQUATION

إن معادلة المصفوفة التي تمثل مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي لمنظومة عامة من الدرجة n حصلنا عليها كما في (34) في الفقرة السابقة وهي معادة هنا للتذكر

$$q' = aq + f \quad (36)$$

مصفوفة المنظومة a تتكون من عناصر ثابتة للدوائر المتغيرة مع الزمن وأن q' و q و f كلها مصفوفة عمودية . نحتاج الى معادلة المصفوفة لغرض الحل لـ q والتي يجب أن توجد عناصرها q_1 و q_2 و ... q_n كدوال للزمن . تذكر أن هذه هي متغيرات الحالة وبمجموعها نستطيع تحديد كل فولتية و تيار في الدائرة المعطاة .

ومن المحتمل أن أسهل طريقة للوصول الى حل هذه المسألة تكون بتذكر الطريقة التي بواسطتها توصلنا الى حل المعادلة (اللامتجهة) من الدرجة الأولى ، كما

شرحناها في الفقرة 4.6 وسوف نعيد الطريقة بسرعة . وبعملنا هذا سوف نبقي في أذهاننا حقيقة أننا بعد هذا سوف نعمم الطريقة الى معادلة مصفوفة .
وإذا احتوت مصفوفة في (36) على سطر واحد وعمود واحد عندها يمكننا كتابة معادلة المصفوفة كالآتي :

$$\begin{aligned} [q_i'(t)] &= [a_{11}][q_i(t)] + [f_i(t)] \\ &= [a_{11}q_i(t)] + [f_i(t)] \\ &= [a_{11}q_i(t) + f_i(t)] \end{aligned}$$

وعليه فلدينا معادلة من الدرجة الأولى

$$q_i'(t) = a_{11}q_i(t) + f_i(t) \quad (37)$$

$$q_i'(t) - a_{11}q_i(t) = f_i(t) \quad (38)$$

المعادلة (38) لها شكل المعادلة (2) في الفقرة 4.6 نفسها . وعليه يمكننا الاستمرار بطريقة مماثلة بضرب كل جهة من جهتي المعادلة بمعامل التكامل e^{-at}

$$e^{-at}q_i'(t) - e^{-at}a_{11}q_i(t) = e^{-at}f_i(t)$$

الجهة اليسرى لهذه المعادلة هي مرة أخرى تفاضل مضبوط ويمكننا كتابة :

$$\frac{d}{dt} [e^{-at}q_i(t)] = e^{-at}f_i(t) \quad (39)$$

الطريقة التي كتبت بها المعاملات المختلفة في (39) تبدو غريبة بعض الشيء لأن الحد الذي هو حاصل ضرب ثابت، دالة زمن يكتب عادة مع ثابت يظهر أولاً ، وتليه بعدها الدالة الزمنية . للكميات اللامتجهة يكون الضرب تبادلياً commutative بحيث إن الترتيب الذي تظهر فيه المعاملات لا يهم ولكن في معادلات المصفوفات التي سوف نتناولها بعد قليل فإن المعاملات التابعة سوف تكون مصفوفات كما ان ضرب المصفوفة غير تبادلي . أي أننا نعلم أن .

بينما

$$\begin{bmatrix} z & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2a + 4c) & (2b + 4d) \\ (6a + 8c) & (6b + 8d) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2a + 6b) & (4a + 8b) \\ (2c + 6d) & (4c + 8d) \end{bmatrix}$$

وعليه نحتاج الى عناية بعدئذ حول الترتيب الذي نكتب به معاملات المصفوفة .

وبالاستمرار مع (39) لنكامل كل جهة بالنسبة الى الزمن من $-\infty$ الى زمن

$$e^{-ms}q_1(t) = \int_{-\infty}^t e^{-ms}f_1(z) dz \quad \text{عام } t \quad (40)$$

حيث z ببساطة متغير مفترض للتكامل . وقد فرضنا أن $e^{-ms}q_1(t)$ يصل الصفر كلما وصلت t الى اللانهاية $-\infty$ والآن نضرب (نضرب مسبقاً اذا كانت هذه معادلة مصفوفة) كل جهة من (40) بالمعامل الأسى e^{ms} لنحصل على

$$q_1(t) = e^{ms} \int_{-\infty}^t e^{-ms}f_1(z) dz \quad (41)$$

والتي هي التعبير المرغوب لمتغير الحالة المجهول المنفرد .

وفي دوائر كثيرة وبصورة خاصة التي تحوي ازراراً يكون تغير حالة الدائرة في زمن معين (غالباً $t=0$) ، ولا نعرف الدالة المرغمة أو معادلة الشكل الاعتيادي قبل تلك اللحظة . لذا ندرس التاريخ الكامل بالتكامل من $-\infty$ الى تلك اللحظة

$$q_1(0) = \int_{-\infty}^0 e^{-ms}f_1(z) dz \quad \text{في } t=0 \text{ وبفرض } t=0 \text{ على فرض أنها } t=0$$

ثم نستعمل القيمة الابتدائية هذه في الحل العام $q_1(t)$

$$q_1(t) = e^{ms}q_1(0) + e^{ms} \int_0^t e^{-ms}f_1(z) dz \quad (42)$$

والتعبير الأخير هنا يبين بأن الدالة الزمنية لمتغير الحالة يمكن ترجمتها كمجموع لحددين . الأول هو الاستجابة التي تنجم اذا كانت الدالة المرغمة صفراً وبلغة تحليل متغير الحالة تدعى استجابة الأدخال صفر . ولهذه الاستجابة شكل الاستجابة الطبيعية على الرغم من أنه ليس لها الاتساع نفسه مثل الحد الذي أسميناه بالاستجابة الطبيعية . أن استجابة دخل صفر هي أيضاً حل لمعادلة الشكل الاعتيادي المتجانسة التي نحصل عليها بفرض أن $f_1(t) = 0$ في (38) . الجزء الثاني للحل يمثل الاستجابة الكاملة اذا كانت $q_1(0)$ صفراً . وتدعى بالاستجابة حالة الصفر . وسنرى في المثال التالي بأن الذي نسميه استجابة مرغمة يظهر كجزء من استجابة حالة الصفر .

لنستعمل (41) و (42) لمثالين من الدرجة الأولى . وأولهما مبين في الشكل 12 - يمكن ايجاد معادلة الشكل الاعتيادي بسهولة

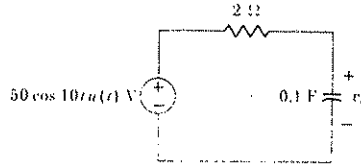
$$v_c' = -5v_c + 250 \cos 10t u(t)$$

لذا $f_1(t) = 250 \cos 10t u(t)$ و $a_{11} = -5$ ويمكننا التعويض مباشرة في (41)

لنحصل على الحل

$$v_c(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^t e^{2z} 250 \cos 10z u(z) dz$$

دالة وحدة الخطوة داخل التكامل يمكن استبدالها بـ $u(t)$ خارج التكامل اذا



12 - 17 دائرة من الدرجة الأولى يجب ايجاد $v_c(t)$ فيها خلال طرق تحليل متغير الحالة

بدل الحد السفلي للتكامل الى الصفر

$$v_c(t) = e^{-2t} u(t) \int_0^t e^{2z} 250 \cos 10z dz$$

بأخذ التكامل ، لدينا ،

$$v_c(t) = e^{-2t} u(t) \left[\frac{250e^{2z}}{5^2 + 10^2} (5 \cos 10z + 10 \sin 10z) \right]_0^t$$

$$v_c(t) = [-10e^{-2t} + 10(\cos 10t + 2 \sin 10t)] u(t) \quad (43)$$

يمكن الحصول على النتيجة نفسها من خلال استعمال (42) . ولأن $v_c(0) = 0$

$$v_c(t) = e^{-2t} v_c(0) + e^{-2t} \int_0^t e^{2z} 250 \cos 10z u(z) dz \quad \text{فلدينا}$$

$$= e^{-2t} u(t) \int_0^t e^{2z} 250 \cos 10z dz$$

وهذا يؤدي الى الحل السابق نفسه . وبطبيعة الحال كذلك نرى أن الحل الكامل هو استجابة حالة الصفر وليس هناك استجابة الدخل صفر . ومن المفيد ملاحظة أنه اذا قمنا بحل هذه المسألة بطرق الفصل السادس . لجعلنا الاستجابة الطبيعية

$$v_{c,n}(t) = Ae^{-2t}$$

وحسينا الاستجابة المرغمة بطرق الدالة الترددية

$$V_{c,r} = \frac{50}{2 - j1} (-j1) = 10 - j20$$

وبحيث أن

$$v_{C,f}(t) = 10 \cos 10t + 20 \sin 10t$$

لذا

$$v_C(t) = Ae^{-5t} + 10(\cos 10t + 2 \sin 10t) \quad (t > 0)$$

يؤدي تطبيق الظروف الابتدائية $v_C(0) = 0$ الى $A = -10$ والتعويض لهذا مرة أخرى مماثل الى (43) . بالنظر الى الاستجابات الجزئية التي حصلنا عليها بالطريقتين

نجد أن

$$v_{C, zero-input} = 0$$

$$v_{C, zero-state} = [-10e^{-5t} + 10(\cos 10t + 2 \sin 10t)]u(t)$$

$$v_{C,n} = -10e^{-5t}$$

$$v_{C,f} = 10(\cos 10t + 2 \sin 10t)$$

والان لنطرح مثلاً يظهر فيه استجابة الدخل صفرأ . فالزر في دائرة الشكل 17 . 13 أعلق في $t = 0$ وتبدل شكل الدائرة في تلك اللحظة . نمثل كل شيء قبل $t = 0$ بالقول بأن $i_L(0) = 4 A$ ونحصل على معادلة الشكل الاعتيادي للدائرة بالهيئة التي بعد $t = 0$ وهي

$$i_L(t) = -4i_L(t) - 24$$

ويجب أن نستعمل (42) لأننا لانملك معادلة الشكل الاعتيادي المنفردة التي تصلح لكل الأزمنة . والنتيجة هي :

$$i_L(t) = e^{-4t}(4) + e^{-4t} \int_0^t e^{4z}(-24) dz \quad \text{أو أن}$$

$$i_L(t) = 4e^{-4t} - 6(1 - e^{-4t}) \quad (t > 0)$$

وبذا وجدت المكونات المتعددة للاستجابة الآن .

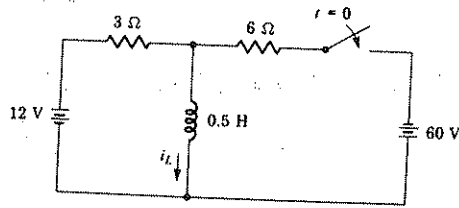
$$i_{L, zero-input} = 4e^{-4t} \quad (t > 0)$$

$$i_{L, zero-state} = -6(1 - e^{-4t}) \quad (t > 0)$$

بينما كانت تؤدي طرق التحليل السابقة الى

$$i_{L,n} = 10e^{-4t} \quad (t > 0)$$

$$i_{L,f} = -6 \quad (t > 0)$$



الشكل 13 . 17 مثال الدرجة الاولى يتغير فيه شكل الدائرة في $t = 0$

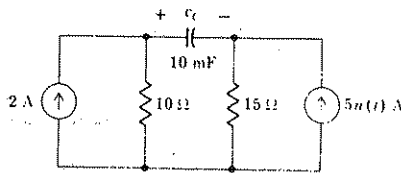
شبكات الدرجة الأولى هذه بالتأكيد لا تحتاج الى استعمال متغيرات الحالة لتحليلها والطريقة التي بها تمكننا من حل معادلة الشكل الاعتيادي المنفردة تمنحنا الألباز اللازمة لمعرفة كيفية الحل للدرجة n وسوف نتبع هذه المحاولة الشيقة في الفقرة التالية

تمرين

6- 17 أكتب معادلة الشكل الاعتيادي لدائرة الشكل 14 . 17 . أوجد $v_c(t)$

للزمن $t > 0$ باستعمال (أ) المعادلة (41) (ب) المعادلة (42)

الاجوبة $V: -55 + 75e^{-t/0.015}$; $V: -55 + 75e^{-t/0.015}$; $V: -4v_c + 80 - 300ut$



الشكل 14.17 أنظر التمرين 6 - 17

6 - 17 حل معادلة المصفوفة THE SOLUTION OF THE MATRIX EQUATION

إن معادلة المصفوفة العامة لمنظومة الدرجة n التي نرغب الآن في حلها معطاة في (34) في الفقرة 4 . 17 .

$$q' = aq + f \quad (34)$$

حيث أن a هي ثوابت المصفوفة المربعة (n by n) . أما المصفوفات الثلاثة الأخرى كلها فمصفوفات عمودية (n by 1) تتكون من الدالات الزمنية بصورة عامة . في هذا الفصل سنحصل على حل المصفوفة لهذه المعادلة وفي الفقرة التالية سوف نترجم نتائجنا ونتعلم كيف نحصل على حل مفيد لـ q .

نبدأ بطرح حاصل ضرب المصفوفة لـ aq من كل جهة من جهتي (34)

$$q' - aq = f \quad (44)$$

متذكرين حالتنا لمعامل التكامل e^{-at} في حالة الدرجة الأولى . لنضرب مسبقاً جهة من (44) في e^{-at}

$$e^{-at}q' - e^{-at}aq = e^{-at}f \quad (45)$$

وإن ظهور المصفوفة كدالة أسية يمكن أن يكون لأول وهلة غريباً ، ولكن الدالة e^{-at} يمكن أن تعرف بدلالة مفكوكها أي بدلالة المتوالية اللانهائية للزمن

$$e^{-at} = 1 - ta + \frac{t^2}{2!} (a)^2 - \frac{t^3}{3!} (a)^3 + \dots \quad (46)$$

نشير إلى I على أنها المصفوفة المتطابقة

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ia = aI = a$$

بحيث أن

وإذن حاصل الضرب $(a)^2$ و $(a)^n$ الخ في (46) يمكن الحصول عليه بتكرار الضرب للمصفوفة a وكل حد مرة أخرى هو مصفوفة $(n \cdot by \cdot n)$. لذا فأن من الظاهر أن e^{-ta} هو مصفوفة مربعة بدرجة نفسها ولكن كلها دالات للزمن بصورة عامة. وبتابع طريقة الدرجة الأولى نريد مرة أخرى أن نبين الآن بأن الجهة اليسرى (45) تساوي تفاضل الزمن $e^{-ta}q$. وبما أن هذا الضرب هو لدالتين زمنيتين.

$$\frac{d}{dt} (e^{-ta}q) = e^{-ta} \frac{d}{dt} (q) + \left[\frac{d}{dt} (e^{-ta}) \right] q \quad \text{لدينا :}$$

يمكن الحصول على تفاضل e^{-ta} بأخذ المتوالية اللانهائية (46) ونجد بأنها معطاة بالتعابير $-ae^{-ta}$ أو $-e^{-ta}a$. لذا

$$\frac{d}{dt} (e^{-ta}q) = e^{-ta}q' - e^{-ta}aq$$

وتتوسط (45) لتصبح

$$\frac{d}{dt} (e^{-ta}q) = e^{-ta}f$$

بالضرب في dt وأخذ التكامل من $-\infty$ إلى t لدينا

$$e^{-ta}q = \int_{-\infty}^t e^{-za} f(z) dz \quad (47)$$

ولأجل الحل لـ q يجب أن نضرب الجهة اليسرى (47) بمقلوب المصفوفة e^{-ta} أي أن المصفوفة b معكوسها b^{-1} بحيث أن $b^{-1}b = bb^{-1} = I$ في هذه الحالة يبين مفكوك المتوالية اللانهائي بأن معكوس e^{-ta} هو e^{ta} أو

$$e^{ta}e^{-ta}q = Iq = q$$

ويمكننا كتابة

$$q = e^{ta} \int_{-\infty}^t e^{-za} f(z) dz \quad (48)$$

وبدالة القيم الابتدائية لمتجه الحالة.

$$q = e^{ta} q(0) + e^{ta} \int_0^t e^{-za} f(z) dz \quad (49)$$

الدالة e^{ta} قيمة مهمة جداً في تحليل فراغ الحالة. وتدعى بمصفوفة الحالة الانتقالية لأنها تصف حالة تغير المنظومة من حالة الصفر إلى حالتها عند الزمن t . والمعادلات (48) و (49) هي معادلات مصفوفات من الدرجة n التي تعود إلى نتائج الدرجة الأولى التي أعطيت الرقمين (41) و (42). على الرغم من أن هذه

التعابير تمثل الحلول لـ \dot{q} فالحقيقة أننا نستطيع التعبير عن e^{ta} و e^{-ta} فقط كمتوالية لانتهائية وهي نقطة ضعف لا يمكن من استخدام هذه النتائج بشكل مؤثر مثل ما يكون عندنا متوالية لانتهائية للزمن t لكل $q(t)$ بينما ربما تجد الحاسبة هذه الطريقة قصيرة بذاكرتها وسرعة حساباتها ، فلدينا شواغل أخرى تستحق الاهتمام بها بدلاً من صرف الوقت للجمع مثلاً وسنحصل على تمثيل أكثر ملائمة لـ e^{-ta} و e^{ta} في الفقرة التالية لذا عليك التريث الآن .

تمرين

7 - 17 إذا كانت $a = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ و $t = 0.1$ s استخدام مفكوك المتوالية اللانتهائية لاجاد (أ) المصفوفة e^{-ta} (ب) المصفوفة e^{ta} (ج) قيمة المحدد e^{-ta} (د) قيمة المحدد e^{ta} (هـ) حاصل ضرب النتيجةين الأخيرتين .

$$\text{الأجوبة } 0.606; 1.649; 1.00; \begin{bmatrix} 1.069 & 0.383 \\ -0.255 & 1.451 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0.8803 & -0.2322 \\ 0.1548 & 0.6481 \end{bmatrix}$$

7 - 17 نظرة أبعد الى مصفوفة الحالة الانتقالية

A FURTHER LOOK AT THE STATE-TRANSITION MATRIX

في هذه الفقرة سنفتش عن تمثيل أكثر ملائمة لـ e^{ta} و e^{-ta} إذا كانت مصفوفة المنظومة a هي مصفوفة مربعة $(n \times n)$ فإن كل من هذه الكميات هي مصفوفة مربعة $(n \times n)$ لدالات زمنية وأن إحدى نتائج النظرية تتبلور بالجبر الخطي المعروف بنظرية كيلبي هاملتن Cayley-Hamilton والتي تبين بأن مصفوفة مثل هذه يمكن التعبير عنها كمتعدد الحدود polynomial من الدرجة $(n - 1)$ في المصفوفة a ، أي أن

$$e^{ta} = u_0 I + u_1 a + u_2 (a)^2 + \dots + u_{n-1} (a)^{n-1} \quad (50)$$

حيث أن كلًا من u_i هي دالة زمنية غير متجهة وما تزال بشكل محدد . والنظرية \geq أيضاً تنص على أن (50) تبقى متساوية إذا استبدلت I بوحدة واحدة و a استبدلت بأي من الجذور غير المتجهة s_i للمعادلة غير المتجهة من الدرجة n .

$$\det(a - sI) = 0 \quad (51)$$

حيث $\det(a - sI)$ توضح بأن محدد المصفوفة $(a - sI)$ وهذه هي الحدود من الدرجة n في s . وسوف نفترض بأن الجذور n كلها مختلفة. وتدعى المعادلة (51) معادلة خصائص المصفوفة a وقيم s التي هي جذور المعادلة تعرف بـ *eigenvalues* a .

وتشبه قيم a الترددات الطبيعية التي تعاملنا معها مؤخراً في الفصل الثالث عشر كأقطاب الدالة الانتقالية المناسبة. أي إذا كان متغير الحالة هو $v_{c1}(t)$. فإن أقطاب $H(s) = V_{c1}(s)/I_s$ أو $V_{c1}(s)/V_s$ هي أيضاً قيم *eigenvalues* لمعادلة الخاصية.

هذه هي الطريقة التي سنتبعها للحصول على شكل أبسط e^{at} :

- 1 عند إعطاء a كـ المصفوفة $(a - sI)$
- 2 جعل محدد المصفوفة المربعة يساوي صفراً.
- 3 حل محصلة متعددة الحدود من الدرجة n للجذور s_1, s_2, \dots, s_n
- 4 أكتب المعادلات غير المتجهة بالشكل

$$e^{at} = u_0 + u_1 s_1 + \dots + u_n s_n^{n-1} \quad (52)$$

- 5 حل لدالات الزمن u_0, u_1, \dots, u_n
- 6 عوض دالات الزمن هذه في (50) للحصول على المصفوفة $(n \times n)$. أي e^{at}
- لتوضيح هذه الطريقة دعنا نستعمل مصفوفة النظام التي تعود الى (7) و (8) في الفقرة 2 - 17 والدائرة المبينة في الشكل 2 - 17 (أ).

$$a = \begin{bmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 0.5 & -3.5 \end{bmatrix}$$

لذا

$$(a - sI) = \begin{bmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 0.5 & -3.5 \end{bmatrix} - s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-0.5 - s) & -2.5 \\ 0.5 & (-3.5 - s) \end{bmatrix}$$

ومفكوك المحدد (2x2) يعطي

$$\det \begin{bmatrix} (-0.5 - s) & -2.5 \\ 0.5 & (-3.5 - s) \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} (-0.5 - s) & -2.5 \\ 0.5 & (-3.5 - s) \end{vmatrix} \\ = (-0.5 - s)(-3.5 - s) + 1.25$$

بحيث أن

$$\det(a - sI) = s^2 + 4s + 3$$

وإن جذور متعدد الحدود هذا هي $s_1 = -1$ و $s_2 = -3$ نعوض كل من هذه القيم في (52) لنحصل على المعادلتين

$$e^{t'} = u_0 - u_1 \quad \text{and} \quad e^{-3t} = u_0 - 3u_1$$

وبالطرح نجد أن

$$u_1 = 0.5e^{t'} - 0.5e^{-3t}$$

ولذا

$$u_0 = 1.5e^{t'} - 0.5e^{-3t}$$

لاحظ بأن كل u_i لها الشكل العام للاستجابة الطبيعية . وعندما توضع هاتان الدالتان في (50)

$$e^{tu} = (1.5e^{t'} - 0.5e^{-3t})\mathbf{1} + (0.5e^{t'} - 0.5e^{-3t}) \begin{bmatrix} -0.5 & -2.5 \\ 0.5 & -3.5 \end{bmatrix}$$

ونستمر بالعملية المبينة لإيجاد التعبير المطلوب e^{tu}

$$e^{tu} = \begin{bmatrix} (1.25e^{t'} - 0.25e^{-3t}) & (-1.25e^{t'} + 1.25e^{-3t}) \\ (0.25e^{t'} - 0.25e^{-3t}) & (-0.25e^{t'} + 1.25e^{-3t}) \end{bmatrix} \quad (53)$$

ومن e^{tu} فإن e^{-tu} تكون باستبدال كل t في (53) بـ $-t$ لاكمال هذا المثال يمكن إيجاد q و f من (7) و (8) و (9)

$$q = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 30 + 8e^{-2t}u(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

وبما أن جزء متجه الدالة المرغمة ظهر لـ $t < 0$ نستطيع كذلك استعمال (48) لإيجاد متجه الحالة

$$q = e^{tu} \int_0^t e^{-tz} f(z) dz \quad (48)$$

نجد بعد ذلك حاصل ضرب المصفوفة $e^{-tz} f(z)$ باستبدال t بـ $-z$ في (53) زمن ثم نعود ونضرب في (54) ومع استبدال z بـ t وبجهد بسيط نجد أن

$$e^{-tz} f = \begin{bmatrix} 37.5e^{t'} - 7.5e^{3t'} + (10e^{t'} - 2e^{3t'})u(z) \\ 7.5e^{t'} - 7.5e^{3t'} + (2e^{t'} - 2e^{3t'})u(z) \end{bmatrix}$$

وبأخذ تكامل الحدين الأولين لكل عنصر من $-\infty$ الى t والحدين الأخيرين من صفر الى t يكون لدينا :

$$\int_0^t e^{-tz} f dz = \begin{bmatrix} 35.5e^{t'} - 2.5e^{3t'} - 10e^{t'} + 12 \\ 5.5e^{t'} - 2.5e^{3t'} - 2e^{t'} + 4 \end{bmatrix} \quad (t > 0)$$

وأخيراً يجب أن نضرب مسبقاً هذه المصفوفة في (53) ونضرب المصفوفة هذه يحوي عدداً كبيراً من ضرب الكميات غير المتجهة كما يحوي الجمع الجبري لدالات زمنية مشابهة . النتيجة هي متجه الحالة المطلوب .

$$q = \begin{bmatrix} 35 + 10e^{-t} - 12e^{-2t} + 2e^{-3t} \\ 5 + 2e^{-t} - 4e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix} \quad (t > 0)$$

وهذه هي التعابير التي أعطيت في (10) و (11) في نهاية الفقرة 2 - 17 . وسنحاول تطبيق هذه الطريقة للحل مرة أخرى في الفقرة التالية للحصول على حل محدد لحالة الدرجة الثانية . وبعدها سيكون لدينا نتائج ممكنة الاستعمال لدوائر الدرجة الأولى والثانية وكذلك يكون لدينا أسلوب « عام » ويمكن أن نطبقه لمسائل من الدرجات الأعلى . وطريقة مثل هذه ممكنة نظرياً ولكن الجهد الذي يلزمها يجعلها جسيمة حالاً . وبدل من ذلك سنستخدم برامج الحاسبة التي تشتغل مباشرة من معادلات الشكل الأعتيادي والقيم الابتدائية لمتغيرات الحالة . وبمعرفة $q(0)$ تحسب $f(0)$ وتحل المعادلات لـ $q'(0)$. بعدها تقرب $q(\Delta t)$ من القيمة الابتدائية والتفاضل $q(\Delta t) \approx q(0) + q'(0) \Delta t$ ولهذه القيمة لـ $q(\Delta t)$ فان معادلات الشكل الأعتيادي تستعمل لتكوين قيمة لـ $q'(\Delta t)$ ثم تتحرك الطريقة بالزيادة الزمنية الجزئية Δt وتؤدي قيم أصغر لـ Δt الى دقة أكثر لـ $q(t)$ في أي زمن $t > 0$. ولكن بزيادة كلفة وقت الحاسبة ومتطلبات التخزين في الحاسبة .

تمرين

17 - 8 اذا علمت أن $f = \begin{bmatrix} 18u(t) \\ 0 \end{bmatrix}$ و $a = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}$ و $q(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

احسب (أ) s_1 (ب) s_2 (ج) u_0 (د) u_1 (هـ) q_1 (و) q_2

الأجوبة $-6; -9; 3e^{-u} - 2e^{-u}; \frac{1}{3}e^{-u} - \frac{1}{3}e^{-u};$
 $(4 + 8e^{-u} - 8e^{-u})u(t); (-1 - 4e^{-u} + 8e^{-u})u(t)$

8 . 17 حل منظومة الدرجة الثانية

SOLUTION OF THE SECOND-ORDER SYSTEM

في هذه الفقرة سوف نستخدم المصفوفة العامة لمنظومة الدرجة للحصول على النتائج غير المتجهة لمنظومة الدرجة الثانية . ان بعض المعلومات الجبرية التي مرت بنا جعلتنا نستوعب المادة أكثر . لذا فسوف لانقوم بوضع كل التفاصيل على الورق لمنظومة الدرجة الثانية لدينا

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ونستعمل هذا الشكل من معادلة الخصائص

$$\det(a - sI) = (a_{11} - s)(a_{22} - s) - a_{12}a_{21} = 0$$

بحل هذا التربيع نجد قيمتين لا يكثر .

$$s_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - \det a} \quad (55) \quad \text{حيث}$$

$$s_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - \det a} \quad (56)$$

$$\det a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (57)$$

وتعوض قيم أيكن بعدئذ بشكل انفرادي في (52) وتؤول المعادلتان :

$$e^{s_1 t} = u_0 + s_1 u_1 \quad \text{وكذلك}$$

$$e^{s_2 t} = u_0 + s_2 u_1$$

وعند حل هاتين المعادلتين لـ $u_0(t)$ و $u_1(t)$ نحصل على

$$u_0(t) = \frac{s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t}}{s_1 - s_2} \quad (58) \quad \text{وأن}$$

$$u_1(t) = \frac{e^{s_1 t} - e^{s_2 t}}{s_1 - s_2} \quad (59)$$

لدينا u_0 و u_1 ويمكن أن نحصل على المصفوفة (2×2) لـ $e^{s t}$ من (50)

$$e^{s t} = u_0 I + u_1 a = \begin{bmatrix} u_0(t) + a_{11}u_1(t) & a_{12}u_1(t) \\ a_{21}u_1(t) & u_0(t) + a_{22}u_1(t) \end{bmatrix} \quad (60)$$

وكذلك نحتاج المصفوفة لـ $e^{-z a}$

$$e^{-z a} = \begin{bmatrix} u_0(-z) + a_{11}u_1(-z) & a_{12}u_1(-z) \\ a_{21}u_1(-z) & u_0(-z) + a_{22}u_1(-z) \end{bmatrix} \quad (61)$$

ولتحضير التكامل نرجي ، ضرب هذه المصفوفة بـ $f(z)$

$$e^{-z a} f(z) = \begin{bmatrix} [u_0(-z) + a_{11}u_1(-z)]f_1(z) + a_{12}u_1(-z)f_2(z) \\ a_{21}u_1(-z)f_1(z) + [u_0(-z) + a_{22}u_1(-z)]f_2(z) \end{bmatrix} \quad (62)$$

إذا استعملنا (48) ليجاد q فيتحتّم علينا اخذ تكامل (62) بين الحدود $-\infty$ و t

$$\int_{-\infty}^t e^{-za} f(z) dz = \left[\int_{-\infty}^t \{ [u_0(-z) + a_{11}u_1(-z)]f_1(z) + a_{12}u_1(-z)f_2(z) \} dz \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^t \{ a_{21}u_1(-z)f_1(z) + [u_0(-z) + a_{22}u_1(-z)]f_2(z) \} dz \right] \quad (63)$$

وهذا هو مصفوفة عمود (2×1) وكل من العنصرين فيه تكامل يحوي مجموع حدود لكل حد شكله أسي (موجود في $u_0(-z)$ أو $[u_1(-z)]$ ودالة مرغمة . وان تكامل من هذا النوع يمكن أن يحسب بشكل مغلق إذا كانت عناصر $f(z)$ ثابتة أو أسية أو جيبيّة أو أسس موجبة صحيحة ل z .
المصفوفة $q(t)$ يمكن الحصول عليها الآن بارجاء ضرب المصفوفة e^{ta} (ذات 2×2) المعطاة بـ (60) بالمصفوفة (2×1) في (63) .

$$q(t) = e^{ta} \int_{-\infty}^t e^{-za} f(z) dz \quad (64)$$

والنتيجة طويلة جداً وتحتاج الى تبسيطات كثيرة قبل الاستخدام الحقيقي لها .
فلنعرف أولاً حدين مفيدين هما

$$k_1 = \frac{s_1 - a_{11}}{a_{12}} \quad (65)$$

$$k_2 = \frac{s_2 - a_{11}}{a_{12}} \quad (66)$$

وبعد تجاوز الأمور الجبرية والتوصل الى الخلاصة .

$$q_1(t) = \frac{e^{s_1 t}}{k_2 - k_1} \int_{-\infty}^t [k_2 f_1(z) - f_2(z)] e^{-s_1 z} dz \\ + \frac{e^{s_2 t}}{k_2 - k_1} \int_{-\infty}^t [f_2(z) - k_1 f_1(z)] e^{-s_2 z} dz \quad (67)$$

$$q_2(t) = \frac{k_1 e^{s_1 t}}{k_2 - k_1} \int_{-\infty}^t [k_2 f_1(z) - f_2(z)] e^{-s_1 z} dz \\ + \frac{k_2 e^{s_2 t}}{k_2 - k_1} \int_{-\infty}^t [f_2(z) - k_1 f_1(z)] e^{-s_2 z} dz \quad (68)$$

على الرغم من أن النتائج المبسطة طويلة لاحظ بأن التكاملين في (68) هما نفسيهما في (67) . كذلك فان كثيراً من الدوائر فيها اثاره بحيث أنه إما $f_1(t)$ أو $f_2(t)$ تساوي صفراً . وهذا يساعد نوعاً ما .

وبدلالة قيم الظروف الابتدائية $q_1(0)$ و $q_2(0)$ فإن الأشكال المأخوذة من قبل $q_1(t)$ و $q_2(t)$ هي حتى أكثر تعقيداً من (67) و (68). وينشأ ذلك من اعتماد q_1 على كل من $q_1(0)$ و $q_2(0)$ ووجود علاقة مشابهة لـ q_2 . وقد أعطيت النتائج لغرض أن يكون الحل كاملاً:

$$q_1(t) = \frac{k_2 q_1(0) - q_2(0)}{k_2 - k_1} e^{s_1 t} - \frac{k_1 q_1(0) - q_2(0)}{k_2 - k_1} e^{s_2 t} + \frac{e^{s_1 t}}{k_2 - k_1} \int_0^t [k_2 f_1(z) - f_2(z)] e^{-s_1 z} dz + \frac{e^{s_2 t}}{k_2 - k_1} \int_0^t [f_2(z) - k_1 f_1(z)] e^{-s_2 z} dz \quad (69)$$

$$q_2(t) = \frac{k_2 q_1(0) - q_2(0)}{k_2 - k_1} k_1 e^{s_1 t} - \frac{k_1 q_1(0) - q_2(0)}{k_2 - k_1} k_2 e^{s_2 t} + \frac{k_1 e^{s_1 t}}{k_2 - k_1} \int_0^t [k_2 f_1(z) - f_2(z)] e^{-s_1 z} dz + \frac{k_2 e^{s_2 t}}{k_2 - k_1} \int_0^t [f_2(z) - k_1 f_1(z)] e^{-s_2 z} dz \quad (70)$$

والمعادلات الأربع الأخيرة لا تحتاج كلها إلى حفظ جملة واحدة. ولنستعمل هذه النتائج على دائرة حللناها سابقاً في الفصل السابع. حيث ظهرت هناك بالشكل 13-7، وسوف نبينها هنا بالشكل 7.15 (أ). الشجرة الاعتيادية مبيّنة في الشكل 7.15 بحيث تتضح عليها الفولتيات والتيارات ونستطيع أن نكتب المعادلتين

$$\frac{1}{27} v \dot{i} = 4u(t) - i_L + 5$$

$$3i \dot{i} = 30[4u(t) - i_L] + v_C$$

ومنها نحصل على معادلات الشكل الاعتيادي بسرعة.

$$v \dot{i} = -27i_L + 108u(t) + 135$$

$$i \dot{i} = \frac{1}{3} v \dot{v}_C - 10i_L + 40u(t)$$

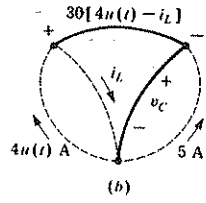
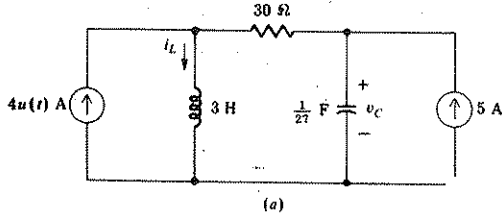
لذا

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & -27 \\ \frac{1}{3} & -10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 108u(t) + 135 \\ 40u(t) \end{bmatrix} \quad \text{ثم نجد:}$$

$$s_{1,2} = \frac{-10}{2} \pm \sqrt{25 - 9} = -1, -9$$

$$k_1 = \frac{-1 - 0}{-27} = \frac{1}{27}$$

$$k_2 = \frac{-9 - 0}{-27} = \frac{1}{3}$$



الشكل 15 . 17 (أ) دائرة من الدرجة الثانية ظهرت بالاصل كشكل 13 . 17 (ب) شجرة اعتيادية موضح عليها متغيرات الفولتية والتيار .

لذا من (67)

$$\begin{aligned} q_1(t) &= \frac{e^{-t}}{9/27} \int_{-\infty}^t \{1/3[108u(z) + 135] - 40u(z)\} e^z dz \\ &+ \frac{e^{-9t}}{9/27} \int_{-\infty}^t \{40u(z) - 1/27[108u(z) + 135]\} e^{9z} dz \\ &= (27/9)e^{-t} \{-4e^z \Big|_0^t + 45e^z \Big|_{-\infty}^t\} + (27/9)e^{-9t} \{(36/9)e^{9z} \Big|_0^t - (5/9)e^{9z} \Big|_{-\infty}^t\} \\ &= (27/9)e^{-t} \{41e^t + 4\} + (27/9)e^{-9t} \{(31/9)e^{9t} - 4\} \\ &= 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}) \end{aligned}$$

وأخيراً

$$v_C(t) = 150 + 13.5(e^{-t} - e^{-9t}) \text{ V } (t > 0)$$

والتي هي النتيجة السابقة نفسها لاحظ أنه لا يتحتم علينا حساب القيم الابتدائية باستعمال (67) أو (68) .

من (68) نجد أيضاً أن

$$i_L(t) = q_2(t) = 1/27 \{ (9/27)e^{-t} \{41e^t + 4\} - 1/3 (27/9)e^{-9t} \{31/9 e^{9t} - 4\} \}$$

وأن

$$i_L(t) = 9 + 0.5e^{-t} - 4.5e^{-9t} \text{ A } (t > 0)$$

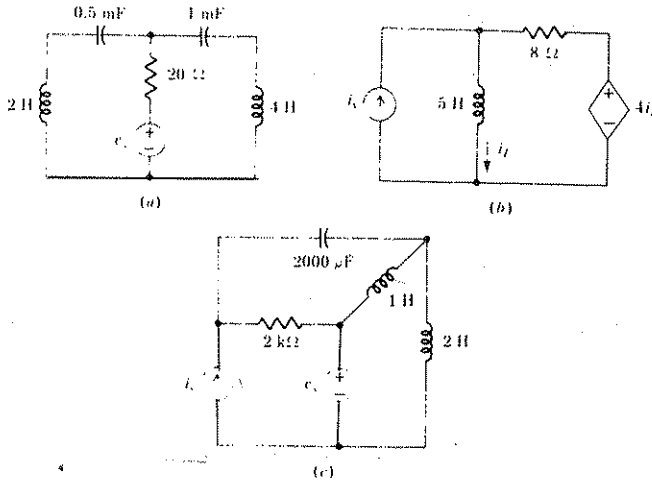
بهذا المثال نكون قد اكملنا تقديمنا لموضوع متغيرات الحالة . ومن الجدير أن نسأل ماذا حققنا . أولاً وربما الأكثر اهمية تعلمنا بعض التعابير والافكار لهذا الفرع من تحليل المنظومة وهذا سيجعل دراسة هذا المجال في المستقبل ذا معنى أكثر إضافة الى المتعة . والتحقيق الثاني هو الحل العام كحالات الدرجة الأولى والثانية . وكانت هذه حلول الدالة الزمنية . وان أي استعمال مقيد نستطيع ان نأخذه (بدون الحاسبة) يعتمد على قابليتنا لانجاز التكاملات الضرورية . فاذا استطعنا اجراء ذلك فانه بإمكاننا أن نحصل على كل من الحل العابر transient وحل حالة الاستقرار للحالات الخاصة للدالات المرغمة . كذلك تعرفنا على استعمال المصفوفات في الدوائر وتحليل المنظومات وهذه هي الأداة التي أصبحت ضرورية بشكل متزايد في أعمال متقدمة أكثر في هذا المجال .

وسوف نوسع قابليتنا لشمول الدالات المرغمة التي تحمل الطبيعة الدورية في الفصل القادم .

تمرين

9 . 17 استعمل (67) و (68) لدائرة الشكل 16 . 17 ثم أوجد (أ) $i_x(t)$ (ب) $v_c(t)$ كلاهما لـ $t > 0$

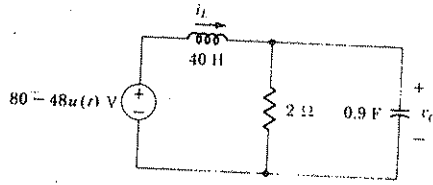
الأجوبة $V: 32 + 54e^{-11s} - 6e^{-12}$ A: $16 + 24.3e^{-11s} - 0.3e^{-12}$



الشكل 16 . 17 أنظر التمرين 9 - 17

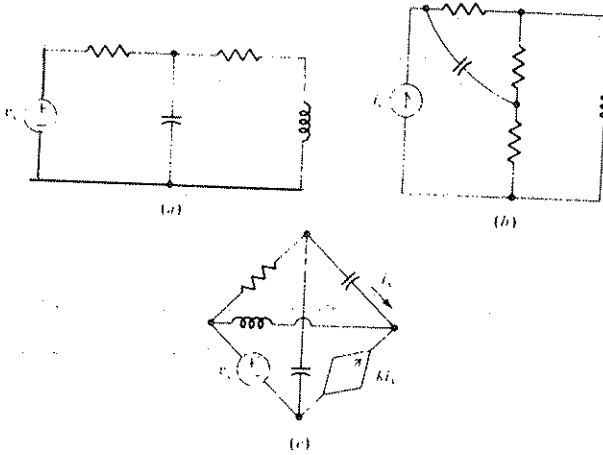
مسائل

- 1 □ إرسم الشجرة الاعتيادية للدائرة المبينة في (أ) الشكل 17.17 «أ» (ب) الشكل 17.17 «ب» (ج) الشكل 17.17 «ج»



الشكل 17.17 أنظر المسألين 1 و 3

- 2 كون جميع الأشجار الممكنة لكل شبكة مبينة في الشكل 17.18



الشكل 17.18 أنظر المسألة 2

- 3 أكتب معادلات الشكل الاعتيادي للدائرة المبينة في (أ) شكل 17.17 «أ» (ب) شكل 17.17 «ب» . (ج) شكل 17.17 «ج»

4 □ أكتب كل من مجموعة المعادلات التالية بشكل اعتيادي باستعمال ترتيب المتغيرات الموضح : (أ) الترتيب v, i $2i - 3v = 4i' - 5v' + f(t)$

$$x_1, x_2, x_3$$

$$(ب) \text{ الترتيب } 3 - v' + i' = 2i - v + g(t)$$

$$x_1' = x_2' - x_3 + \sin 2t ; x_3' - x_2' = x_1' + x_2, x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$$

5 (أ) أكتب المعادلات الثلاث الآتية بشكل اعتيادي مستعملاً الترتيب

$$z' = x + 2z - 2y' \quad y' = x' - 2y, x' = 2x - y + z + t^2 + 1; \quad z, y, x$$

(ب) إذا كانت $x(0) = 1$ و $y(0) = 2$ و $z(0) = 3$ أوجد $x'(0)$ و $y'(0)$ و

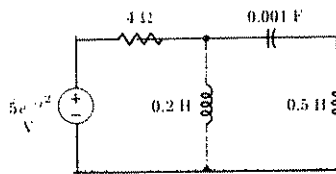
$z'(0)$ (ج) إذا علمت $x'(0)$ و $y'(0)$ و $z(0)$ قدر قيمة $x(0.1)$ و

$y(0.1)$ و $z(0.1)$

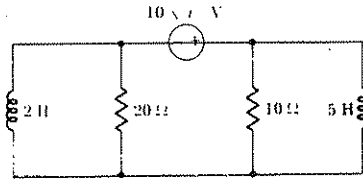
6 أكتب مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي لكل من الدوائر المبينة في الشكل

17.19. بين المتغيرات على مخطط الدائرة وعين الترتيب الذي استعملت به

متغيرات الحالة



(a)

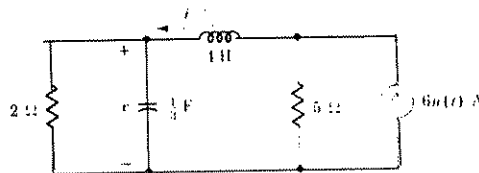


(b)

الشكل 17.19 أنظر المسألة 6 .

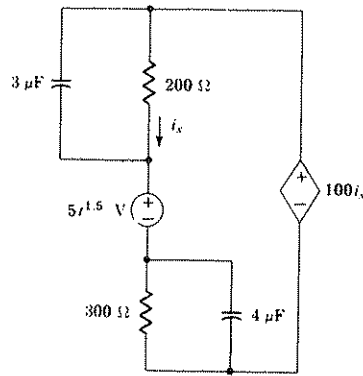
7 □ أوجد منظومة معادلات الشكل الاعتيادي للدائرة المبينة في الشكل 20 - 17 .

افرض أن ترتيب متغيرات الحالة هو v و i .



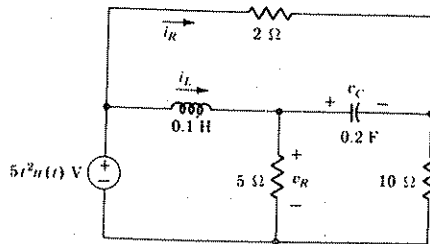
الشكل 17.20 أنظر المسألة 7 .

8 أوجد شجرة مناسبة للدائرة المبينة في الشكل 21 - 17 . اختر متغير الحالة ثم أكتب معادلة الشكل الاعتيادي العائدة له .



الشكل 21 - 17 أنظر المسألة 8

9 للدائرة الموضحة في الشكل 22 - 17 (أ) ارسم شجرة اعتيادية فيها المقاومة 5-Ω جزء من الشجرة (ب) أشر الى متغيرات الحالة v_C و i_L و متغيرات المقاوم v_R و i_H (ج) احسب معادلات الشكل الاعتيادي مع متغيرات الحالة بالترتيب v_C و i_L .



الشكل 22 - 17 أنظر المسألة 9

10 □ أوجد المصفوفة التي تساوي حاصل الضرب الموضح

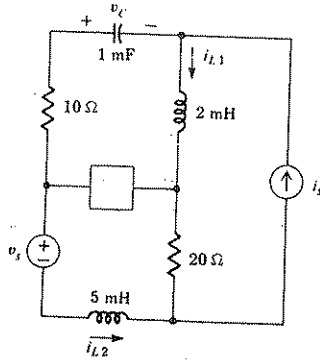
$$(أ) \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} (ب) \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$(ج) \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$11 \text{ إذا كانت } \mathbf{q} = \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ i_{L3} \\ v_C \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ and } \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) \\ -u(t) \end{bmatrix}$$

أكتب معادلات الشكل الاعتيادي

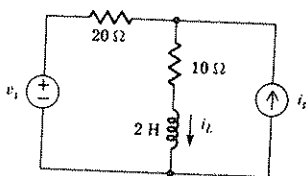
12 باستعمال متجه الحالة $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} v_C \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$ أكتب مصفوفة المنظومة \mathbf{a} ومتجه الدالة المرغمة \mathbf{f} للدائرة المبينة في الشكل 17.23 ، إذا كان العنصر المجهول هو (أ) مقاوم 5Ω أو (ب) بطارية 15 فولت ، النهاية الموجبة على اليمين .



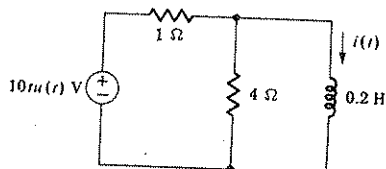
الشكل 23 - 17 أنظر المسألة 12

13 □ أحسب \mathbf{a} و \mathbf{f} ، مستعملاً متجه الحالة المبين ، للدائرة الموضحة في (أ) الشكل 6.27 (للأسفل) (ب) الشكل 31 - 6 : $q_1 = v_C$ ، (ج) الشكل 28 - 17 $q_1 = i_L$ و $q_2 = v_C$ (الموجب للأعلى) (د) الشكل 29 - 17 : $q_2 = i_L$ و $q_1 = v_C$ (الى اليمين)

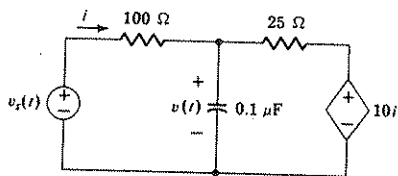
- 14 أوجد تيار المحث $i_L(t)$ في الشكل 17.24 اذا كانت المصادر (أ) $i_s = -6u(t)$ A وأن $v_s = 60$ V (ب) $i_s = 0$ وأن $v_s = 60e^{-100t} [u(t) - u(t - 1)]$ V (ج) $i_s = 4 \cos 5t$ A وأن $v_s = 0$
- 15 أوجد $i(t)$ في دائرة الشكل 17.25 بإساليب متغير الحالة
- 16 أكتب معادلة الشكل للفولتية $v(t)$ في الدائرة المبينة في الشكل 17.26 ثم حلها اذا كانت $v_s(t)$ تساوي (أ) $27u(-t)$ V (ب) $u(t)$ V



الشكل 24 - 17 أنظر المسألة 14

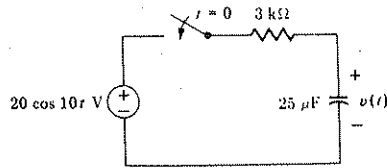


الشكل 25 - 17 أنظر المسألة 15



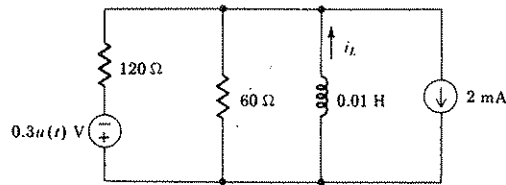
الشكل 26 - 17 أنظر المسألة 16

17 استخدم أساليب متغير الحالة ليجاد $v(t)$ في دائرة الشكل 17.27



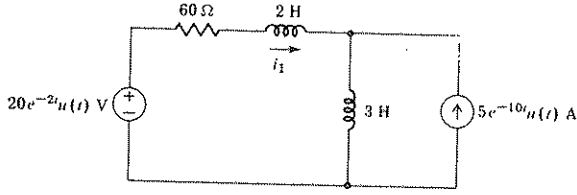
الشكل 27 - 17 أنظر المسألة 17

18 أكتب معادلة الشكل الاعتيادي لدائرة الشكل 28 - 17. عين a_{11} و $f_1(t)$ ثم أوجد $i_L(t)$ لكل الأزمنة.



الشكل 28 - 17 أنظر المسألة 18

19 □ احسب $i_L(t)$ للزمن $t > 0$ في الدائرة المبينة في الشكل 29 - 17



الشكل 29 - 17 أنظر المسألة 19

20 إذا كانت $b = \begin{bmatrix} -0.10 & 0.12 \\ 0.20 & -0.05 \end{bmatrix}$ استعمل مفكوك المتوالية e^b لايجاد e^b و e^{-b} ثم بين بأن حاصل ضربها هو I

21 أوجد قيم أيكن للمصفوفة

$$(a) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}; (c) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}; (d) \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

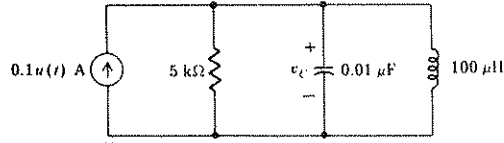
22 أوجد عناصر e^{Aa} بشكل مغلق اذا كانت a تساوي

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}; (b) \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

23 بين بأن أيجاد قيمة e^{Aa} في $t = 0$ يؤدي الى المصفوفة المتماثلة .

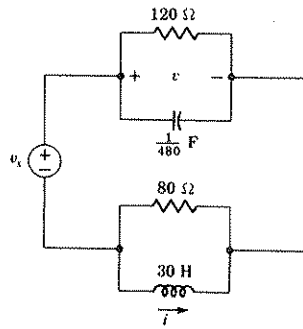
24 استعمل طرق متغير الحالة لايجاد فولتية المتسعة في الشكل 30 - 17 كداله

للمزمن $t > 0$



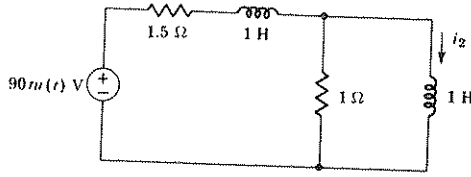
الشكل 30 - 17 أنظر المسألة 24

25- أستعمل $[i]$ للدائرة المبينة في الشكل 17.31 كمتجه الحالة و (أ) أكتب مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي (ب) أوجد (a) (ج) أوجد v إذا كانت $v_s = 100e^{-20t}u(t)$ V. (د) أوجد v إذا كانت $v_s = 100u(t)$ V



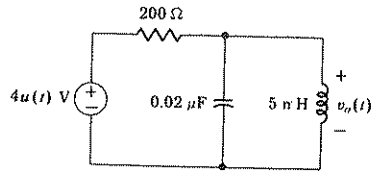
الشكل 31 - 17 أنظر المسألة 25

26- (أ) أوجد $i_2(t)$ للزمن $t > 0$ في الدائرة المبينة في الشكل 32 - 17 (ب) ارسم تخطيط $i_2(t)$ للزمن $0 \leq t \leq 5$ s



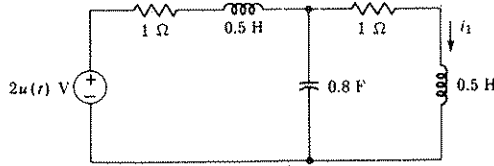
الشكل 32 - 17 أنظر المسألة 26

27- (أ) احصل على معادلتَي الشكل الاعتيادي لدائرة الشكل 33 - 17 ثم استعمل (55) . (56) لحساب الترددين الطبيعيين (ب) ثم احسب الترددين الطبيعيين ولكن استعمل (51) مباشرة هذه المرة (ج) ثبّت ممانعة دخل مناسبة وبيّن بأن اصفارها تحدث عند الترددين الطبيعيين نفسيهما (د) أوجد المعادلتين المناسبيتين في الفصل السابع وبيّن بأنهما يعينان أيضاً الترددين الطبيعيين نفسيهما .



الشكل 33 . 17 أنظر المسألة 27

28- (أ) إرسم شجرة اعتيادية واكتب معادلات الشكل الاعتيادي الثلاث للدائرة المعطاة في الشكل 34 - 17 (ب) أكتب الدالة الانتقالية المناسبة وجد الترددات الطبيعية الثلاثة الملازمة للاستجابة $i_1(t)$ (ج) إذا كان $i_1(t)$ يمثل بـ $i_{10}(t) + i_{11}(t)$ ، جد $i_{11}(t)$ بالعمل في حيز التردد (د) إحسب القيم الابتدائية لمتغيرات الحالة هذه (هـ) إحسب القيم الابتدائية لتفاضل $i_1'(0^+)$ من معادلات الشكل الاعتيادي (و) بأخذ تفاضل كل معادلات الشكل الاعتيادي ، جد قيمة $i_1''(0^+)$ (ح) جد قيم الثوابت التي تظهر في $i_{10}(t)$ ثم جد الاستجابة الكاملة $i_1(t)$.



الشكل 34 - 17 أنظر المسألة 28

الفصل الثامن عشر

تحليل فوريير

FOURIER ANALYSIS

18.1 مقدمة : INTRODUCTION

في هذا الفصل سنستمر بمقدمتنا في تحليل الدوائر بدراسة الدوال الدورية في كل من حيزي domains الزمن والتردد .

وان مناقشة طرق متغيرات الحالة التي مرت في الفصل السابق ليست مطلوبة مسبقاً للاستمرار في الموضوع .

واننا نعلم أن الاستجابة الكاملة لدائرة خطية لدالة قسرية ما تتألف من مجموع استجابة قسرية واستجابة طبيعية . ولقد تمت دراسة الاستجابة الطبيعية مبدئياً في الفصول الخامس والسادس والسابع . الا انه فيما عدا حالات قليلة فقد تمت دراسة دوائر RL و RC و RLC المتوالية والمتوازية . وبعد ذلك فان مفهوم التردد المركب في الفصل الثالث عشر أعطانا طريقة عامة للحصول على الاستجابة الطبيعية حيث اكتشفنا أن بإمكاننا كتابة هيئة الاستجابة الطبيعية بعد تعيين الأقطاب على دالة تحويلية مناسبة للشبكة . ومن ثم وجدنا طريقة عامة وفعالة لايجاد الاستجابة الطبيعية .

ولقد ظهرت في الفصل السابق طريقة أخرى عامة لايجاد الاستجابة الطبيعية (وكذلك الاستجابة القسرية) حيث درسنا وسائل متغيرات الحالة .

دعنا الآن ندرس وضعنا فيما يتعلق بالاستجابة القسرية . إن بإمكاننا إيجاد الاستجابة القسرية في أي دائرة مقاومة خطية بغض النظر عن طبيعة الدالة القسرية . ولكن ذلك لا يمكن اعتباره فتحاً علمياً واضحاً . إذا احتوت الدائرة على عناصر لخزن الطاقة فإنه يمكن إيجاد الاستجابة القسرية لهذه الدوائر وكذلك الدوال القسرية التي يمكننا تطبيق مفهوم الممانعة عليها . أي حينما تكون الدالة القسرية تياراً مستمراً أو أسياً أو جيبياً أو بشكل جيبي متضائل . وإن استخدام طرق متغيرات الحالة يهيئ لنا امكانية إيجاد الاستجابة القسرية (إضافة للاستجابة الطبيعية) لأي نوع من الدوال القسرية إلا أنه من الصعب تطبيقها لإيجاد الحل بشكل مقفل . إن التقريبات في الحاسبة الالكترونية للاستجابة الكاملة هي أمثلة نموذجية لمثل هذه الحلول .

وفي هذا الفصل سندرس الدوال القسرية التي تكون دورية وذات طبيعة دالية والتي توفى بشروط رياضية خاصة والتي هي خاصة لأي دالة يمكن توليدها في المختبر . وإن أي دالة يمكن تمثيلها لعدد لانهائي من دوال جيبية وجيبتامية والتي ترتبط مع بعضها توافقياً harmonically لذلك فيما أن الاستجابة القسرية يمكن إيجادها بسهولة بالتحليل الجيبي للحالة المستقرة . فإن استجابة الشبكة الخطية للدالة القسرية الدورية يمكن إيجادها بتراكب الاستجابات الجزئية .

ويمكن الحصول على فكرة عن صحة تمثيل دالة دورية عامة بمجموع غير متناه من الدوال الجيبية وجيب التمامية بمثال بسيط . لنأخذ دالة جيبتامية ذات تردد نصف قطري ω_0 .

$$v_1(t) = 2 \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

حيث

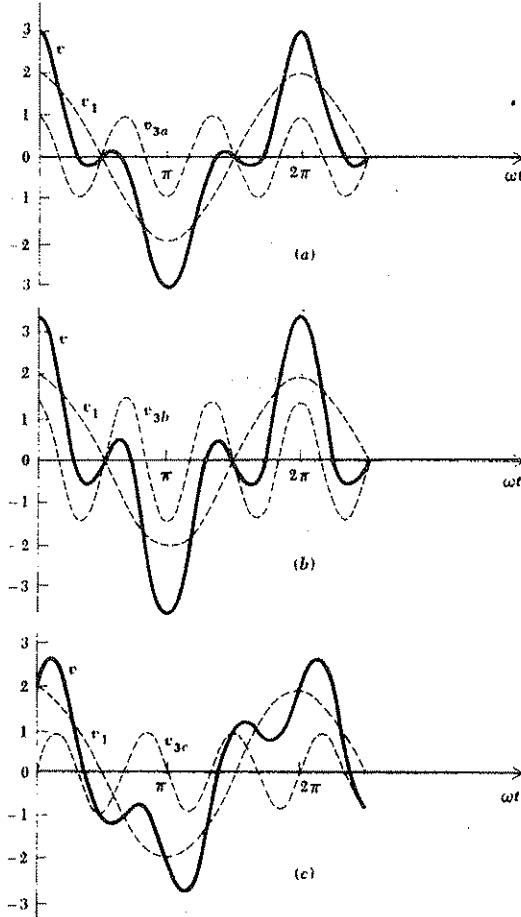
$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ وأن } T \text{ هي الفترة .}$$

إن توافقيات هذه الدالة الجيبية تكون ذات ترددات مقدارها $n\omega_0$. حيث ω_0 هي التردد الأساس و $n = 1, 2, 3, \dots$. إن تردد التوافقية الأولى هو التردد الأساس . بعد ذلك لناخذ فولتية التوافقية الثالثة $v_{3n}(t) = \cos 3\omega_0 t$

يبين الشكل 18.1 (أ) التوافقية الأساس $v_1(t)$ والتوافقية الثالثة $v_{3a}(t)$ ومجموع هاتين الموجتين كدوال للزمن. وإن مما يجب ملاحظته أن المجموع يكون دورياً وبفترة مقدارها $T = 2\pi/\omega_0$

وإن هيئة الدالة الدورية المحصلة تتغير مع تغير طور واتساع التوافقية الثالثة. لذلك فإن الشكل 18.1 (ب) يبين تأثير مزج $v_1(t)$ والتوافقية الثالثة ذات اتساع أكبر قليلاً أي .

$$v_{3a}(t) = 1.5 \cos 3\omega_0 t$$



الشكل 18.1 عدة من العدد غير المتناهي من الموجات المختلفة التي يمكن الحصول عليها بمزج التوافقيتين الأساس والثالثة. إن التوافقية الأساس هي $v_1 = 2 \cos \omega_0 t$ والثالثة هي v_3

$$(a) v_3 = \cos 3\omega_0 t; (b) v_3 = 1.5 \cos 3\omega_0 t; (c) v_3 = \sin 3\omega_0 t$$

بازاحة طور التوافقية الثالثة

$$v_{3\omega}(t) = \sin 3\omega t$$

يتضح المجموع في الشكل 1 - 18 (ج) والذي يأخذ بدوره شكلاً مختلفاً آخر .

وفي كل الأحوال تكون فترة الموجة المحصلة هي نفسها فترة الموجة الأساسية . وإن طبيعة شكل الموجة يعتمد على اتساع كل مركبة من مركبات التوافقية وطورها وسوف نجد أنه من الممكن توليد أشكال الموجات التي تأخذ خواص غير جيبيية تماماً بمزيج مناسب لدوال جيبيية .

والآن وبعد أن أصبحنا ملمين باستخدام المجموع غير المنتاهي من الدوال الجيبية وجيب التمامية لتمثيل الموجات الدورية وسأأخذ التمثيل في الحيز الترددي لموجة غير دورية عامة في الفصل القادم .

2 - 18 الشكل المثلي لتسلسلات فوريير

TRIGONOMETRIC FORM OF THE FOURIER SERIES

لأخذ أولاً الدالة الدورية $f(t)$ المعرفة في الفقرة 11 - 3 بالعلاقة الدالية

$$f(t) = f(t + T)$$

حيث T هي الفترة . سنفترض بعد ذلك أن الدالة $f(t)$ توفى بالمواصفات التالية .

- 1 . إن الدالة $f(t)$ ذات قيمة واحدة في كل مكان . أي أن $f(t)$ تحقق التعريف الرياضي لدالة .
 - 2 . إن التكامل $\int_{t_0}^{t_0+T} |f(t)| dt$ موجود (أي انه ليس لانهائياً) لأية قيمة تختار لـ t_0 .
 - 3 . إن الدالة $f(t)$ تحتوي على عدد محدود من النقاط ذات صفة عدم الاستمرار discontinuity في أي فترة واحدة .
 - 4 . إن الدالة $f(t)$ تحتوي على عدد محدود من نقاط القمة العظمى والصغرى في كل فترة واحدة .
- وسنفترض أن الدالة $f(t)$ تمثل موجة فولتية أو تيار . وإن أي موجة للفولتية أو للتيار يمكن توليدها فعلياً يجب أن توفى بهذه الشروط . وإن هناك دوال رياضية يمكن افتراضها نظرياً والتي ربما لا تحقق هذه الشروط . إلا أننا سوف نفترض أن الشروط الأربعة المدرجة أعلاه تنطبق دائماً .

وإذا اعطينا مثل هذه الدالة الدورية فان نظرية فوريير 1 تنص على أن $f(t)$ يمكن أن تمثل بمتسلسلة لانهائية :

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \end{aligned} \quad (1)$$

حيث أن التردد الأساسي ω_0 يرتبط مع الفترة T بالعلاقة

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

حيث a_0 و a_n و b_n هي ثوابت تعتمد على n وعلى $f(t)$. المعادلة (1) هي الشكل المثلثي لمتسلسلة فوريير لـ $f(t)$ وان عملية إيجاد قيم الثوابت a_0 و a_n و b_n تدعى تحليل فوريير. وان هدفنا هو ليس برهنة هذه النظرية بل هو فقط توضيح طرق التوصل الى تحليل فوريير مع حسابان أن النظرية صحيحة.

وقبل البدء بمناقشة حساب الثوابت التي تظهر في متسلسلة فوريير، علينا أن نجتمع مجموعة من التكاملات المثلثية. وسوف نفترض أن k و n تمثلان أي مجموعة من الأرقام 1، 2، 3، 4، ... في التكاملات التالية. ونستخدم 0 و T كحددين للتكامل ولكن من المفهوم أن أي فسخة طولها فترة كاملة يمكن أخذها كبديل للفترة بين هذين الحدين. وحيث أن متوسط قيمة موجة جيبية على امتداد فترة كاملة تساوي صفرًا، فان :

$$\int_0^T \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^T \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (3)$$

وكذلك من اليسير أيضا أن نبين أن التكاملات المحددة 'definite integral' تساوي صفرًا.

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad (4)$$

$$\int_0^T \sin k\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt = 0 \quad k \neq n \quad (5)$$

$$\int_0^T \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt = 0 \quad k \neq n \quad (6)$$

أما الحالات المستثناة من المعادلتين (5) و (6) فيمكن إيجادها بسهولة . حيث نجد

$$\int_0^T \sin^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (7)$$

$$\int_0^T \cos^2 n\omega_0 t dt = \frac{T}{2} \quad (8)$$

إن حساب الثوابت غير المعروفة يمكن أن يتم فوراً . لنحسب أولاً a_0 . إذا كاملنا كل طرف من متسلسلة فوريير (1) على أمتداد فترة كاملة . نحصل على :

$$\int_0^T f(t) dt = \int_0^T a_0 dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt$$

ولكن كل حد في المجموع هو بشكل المعادلة (2) أو المعادلة (3) . لذا

$$\int_0^T f(t) dt = a_0 T \quad \text{أو} \quad (9)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

وإن هذا الثابت هو ببساطة عبارة عن متوسط قيمة $f(t)$ على امتداد الفترة ولذا نصفها بأنها مركبة التيار المستمر للدالة $f(t)$.

ولايجاد إحدى معاملات جيب التمامية . لنفرض a_k (معامل $\cos k\omega_0 t$) . نضرب أولاً كل طرف من المعادلة (1) بـ $\cos k\omega_0 t$ ثم نكامل كلاً من طرفي المعادلة على امتداد فترة كاملة .

$$\int_0^T f(t) \cos k\omega_0 t dt = \int_0^T a_0 \cos k\omega_0 t dt + \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k\omega_0 t \cos n\omega_0 t dt$$

$$+ \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos k\omega_0 t \sin n\omega_0 t dt$$

من المعادلات (3) و (4) و (6) نلاحظ أن كل حد على الطرف الأيمن من المعادلة يساوي صفرأ فيما عدا واحداً حينما $k = n$. يمكن إيجاد هذا الحد من المعادلة (8) حيث نجد a_k أو a_n :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (10)$$

وان هذه النتيجة تعادل ضعف متوسط حاصل ضرب $f(t) \cos n\omega_0 t$ على امتداد فترة واحدة . وبطريقة مشابهة نحصل على b_k بالضرب في $\sin k\omega_0 t$ ثم أخذ التكامل على امتداد فترة واحدة مع ملاحظة أن كل الحدود على الطرف الأيمن فيما عدا حداً واحداً تساوي صفراً . وبأخذ التكامل الوحيد للمعادلة (7) نحصل على

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (11)$$

والذي هو ضعف القيمة المتوسطة لـ $f(t) \sin n\omega_0 t$ على امتداد فترة واحدة .

إن المعادلات (9) الى (11) تبين لنا أن نحسب قيم a_0 وكل قيم a_n و b_n في متسلسلة فوريير المعطاة بالمعادلة .

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

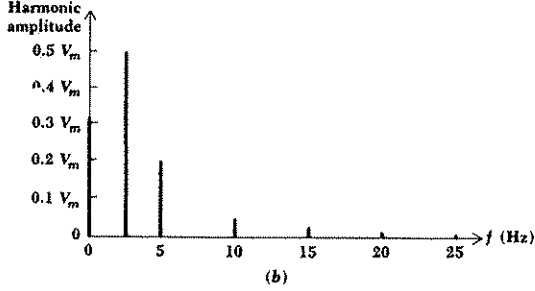
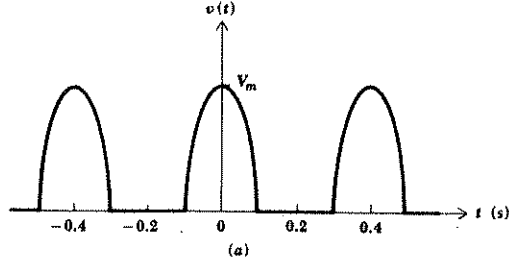
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (9)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (10)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (11)$$

لنأخذ مثلاً عددياً . تمثل الموجة « نصف الجيبية » المبينة في الشكل 18.2 (أ) استجابة فولتية نحصل عليها من دائرة مقوم نصفين الموجة والتي هي دائرة غير خطية واجنبها تحويل فولتية الادخال الجيبية الى فولتية اخراج ذات تيار مستمر (نبضية) .

form in (a).



الشكل 2 - 18

(أ) خرج مقوم نصفى الموجة أعطى فولتية دخل جيبيية . (ب) الطيف الخطي المتقطع لموجة الشكل (أ)

لغرض تمثيل هذه الفولتية بشكل متسلسلة فوريير . علينا أن نجد أولاً الفترة ثم نحاول تمثيل الفولتية التخيطية بشكل دالة تحليلية للزمن . من المنحني يمكن أن

$$T = 0.4 \text{ s}$$

$$f_0 = 2.5 \text{ Hz}$$

$$\omega_0 = 5\pi \text{ rad/s}$$

نر أن الفترة .

ومن ثم

كما أن

وبعد أن وجدنا هذه الكميات الثلاث . يمكننا ايجاد مقدار مناسب لـ $f(t)$ أو $v(t)$ يكون صحيحاً على طول الفترة . إن ايجاد هذه المعادلات هو أصعب جزء في تحليل فوريير بالنسبة للطلبة . ومصدر هذه الصعوبة يكمن أما في عدم إمكانية تلمس المنحني المعطى أو في الإهمال في ايجاد ثوابت ضرب ضمن المقادير الدالية أو في الإهمال في كتابة المقدار كاملاً . في هذا المثال يوحي نص المسألة ان

شكل الدالة هو جيبي ، إتساعه V_m وتردده الزاوي قد وجد بأنه 5π كما أن الجزء الموجب من الموجه جيب التمامية موجود فقط . فأن مقدار الدالة للفترة من $t = 0$ الى $t = 0.4$ تكون :

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & 0 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \\ V_m \cos 5\pi t & 0.3 \leq t \leq 0.4 \end{cases}$$

ومن البديهي أن اختيار الفترة الممتدة من $t = -0.1$ الى $t = 0.3$ يؤدي الى معادلات أقل ومن ثم الى تكاملات أقل :

$$v(t) = \begin{cases} V_m \cos 5\pi t & -0.1 \leq t \leq 0.1 \\ 0 & 0.1 \leq t \leq 0.3 \end{cases} \quad (12)$$

إن هذه الصيغة مجذبة على الرغم من ان كلا الوصفين يعطيان النتيجة الصحيحة نفسها . إن مركبة التردد الصغرى يمكن الحصول عليها بسهولة : وكذلك

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{0.4} \int_{-0.1}^{0.3} v(t) dt \\ &= \frac{1}{0.4} \left[\int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t dt + \int_{0.1}^{0.3} (0) dt \right] \\ a_0 &= \frac{V_m}{\pi} \end{aligned} \quad (13)$$

لاحظ أن التكامل يجب أن يُجزأ الى عدد من التكاملات . كل جزء منها يمتد على جزء من الفترة حيث ان كل تكامل يعود الى أشكال دالية مستخدمة لتمثيل $v(t)$ على امتداد الفترة كاملة .

وان إتساع الحد جيب التمامي هو :

$$a_n = \frac{2}{0.4} \int_{-0.1}^{0.1} V_m \cos 5\pi t \cos 5\pi n t dt$$

وان هيئة الدالة التي نجدها بعد التكامل مختلفة حينما n تساوي واحداً عن أي اختيار لقيمة n . فاذا كانت $n = 1$ نحصل على

$$a_1 = 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos^2 5\pi t dt = \frac{V_m}{2} \quad (14)$$

بينما حينما لاتساوي n واحداً نجد

$$\begin{aligned}
 a_n &= 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \cos 5\pi t \cos 5\pi n t \, dt \\
 &= 5V_m \int_{-0.1}^{0.1} \frac{1}{2} [\cos 5\pi(1+n)t + \cos 5\pi(1-n)t] \, dt \\
 a_n &= \frac{2V_m \cos(\pi n/2)}{\pi(1-n^2)} \quad n \neq 1 \quad (15)
 \end{aligned}$$

إن بعض دقائق التكامل قد تركت للذين يرغبون بإجراء العمليات البسيطة المملة مع انفسهم . ولكن يجب الإشارة الى أن المقدار الذي يعطي a_n حينما $n \neq 1$ يعطي النتيجة الصحيحة لـ $n = 1$ كفاية له .

إن تكاملاً مماثلاً يبين أن كل b_n تساوي صفرأ ومن ثم فإن متسلسلة فوريير لاتحتوي على أي حدود جيبيية . لذا فإن متسلسلة فوريير يمكن الحصول عليها من المعادلات (13) الى (15) .

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \frac{V_m}{\pi} + \frac{V_m}{2} \cos 5\pi t + \frac{2V_m}{3\pi} \cos 10\pi t - \frac{2V_m}{15\pi} \cos 20\pi t \\
 &\quad + \frac{2V_m}{35\pi} \cos 30\pi t - \dots \quad (16)
 \end{aligned}$$

في الشكل 2 - 18 (أ) تتضح $v(t)$ كدالة للزمن . كما أن في المعادلات (12) تمثل $v(t)$ كدالة تحليلية للزمن . إن كلا هذين التمثيلين هما تمثيلان في حيز الزمن . كما أن متسلسلة فوريير لـ $v(t)$ المثلة في المعادلة (16) هي كذلك المقدار في الحيز الزمني ، ولكن بالامكان تحويله الى تمثيل الحيز الترددي . فمثلاً يمكن الأسقاط في المستوى s للنقاط التي تمثل الترددات الموجودة في المعادلة (16) . وإن النتيجة سوف تكون اشارة في تقطة الأصل كما أن التأشيرات التماثلة سوف تكون على الاتجاهين الموجب والسالب للمحور $j\omega$. وإن الطريقة الأكثر شيوعاً في تمثيل هذه المعلومات وكذلك المعلومات التي تبين اتساع مركبة كل تردد تكون بخط الطيف . وإن خط الطيف للمعادلة (16) ممثل في الشكل 2 - 18 ب ، حيث أن اتساع كل مركبة تردد ممثل بطول الخط العمودي الواقع على التردد الذي يعود له . كما أننا نصف هذا الطيف بأنه طيف متقطع $discrete$ نظراً لأن اي فترة تردد محدودة تحتوي فقط على مركبات تردد .

ومما تجدر الإشارة الى التحذير منه ، أن المثال الذي أخذناه توأ لا يحتوي على حدود جيبيية ، لذا فإن اتساع التوافقية n يساوي $|a_n|$. وإذا لم تساو b_n صفرأ فإن اتساع المركبة عند التردد $n\omega_0$ يجب أن يساوي $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. وهذه هي الكمية العامة التي يجب ان نبينها في خط الطيف . وعندما نناقش الشكل المعقد لمتسلسلة فوريير ، سوف نرى ان هذه الكمية يمكن الحصول عليها بسهولة أكثر .

وان متسلسلة فوريير التي وجدناها في هذا المثال لاتحتوي على حدود جيبيية ولا على توافقيات فردية (عدا التردد الأساس) بين الحدود جيب التمامية . ومن الممكن توقع غياب بعض الحدود في متسلسلة فوريير قبل إجراء أي تكاملات وذلك من تفحص التماثل لدالة معطاة مع الزمن . وسنناقش استخدام التماثل في الفقرة القادمة .

تمارين :-

181 موجة دورية $f(t)$ ، توصف كالآتي :

$$f(t) = 5 \quad 0 < t < 0.1; \quad f(t) = -2, \quad 0.1 < t < 0.2; \quad f(t) = 0, \quad 0.2 < t < 0.25; \quad T = 0.25$$

أوجد (أ) a_0 (ب) a_1 (ج) b_n

الجواب 1.2; 1.915; 0.1293

2 - 18 أكتب متسلسلة فوريير للفولتيات الثلاث ذات أشكال الموجات المبينة في

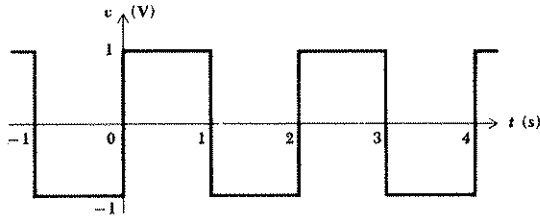
الشكل 3 - 18

$$\frac{4}{\pi} (\sin \pi t + \frac{1}{3} \sin 3\pi t + \frac{1}{5} \sin 5\pi t + \dots);$$

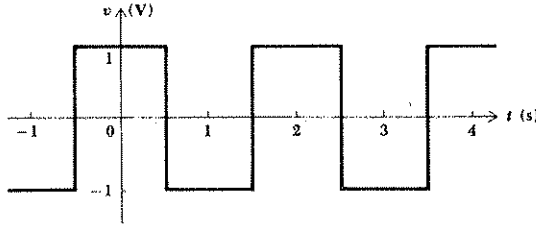
$$\frac{4}{\pi} (\cos \pi t - \frac{1}{3} \cos 3\pi t + \frac{1}{5} \cos 5\pi t - \dots); \quad \text{الجواب}$$

$$\frac{8}{\pi^2} (\sin \pi t - \frac{1}{9} \sin 3\pi t + \frac{1}{25} \sin 5\pi t - \dots) \quad V$$

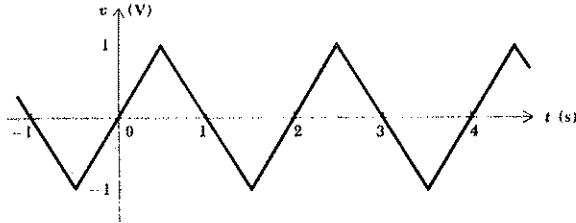
4



(a)



(b)



(c)

الشكل 3 - 18 أنظر التمارين 2 - 18 و 6 - 18

استخدام التماثل - THE USE OF SYMMETRY

إن نوعي التماثل اللذين يمكن تمييزهما بسهولة هما تماثل الدالة الزوجية وتماثل الدالة الفردية أو باختصار التماثل الزوجي والتماثل الفردي . يقال عن دالة $f(t)$ بأن لها خواص زوجية التناظر إذا كانت

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right]$$

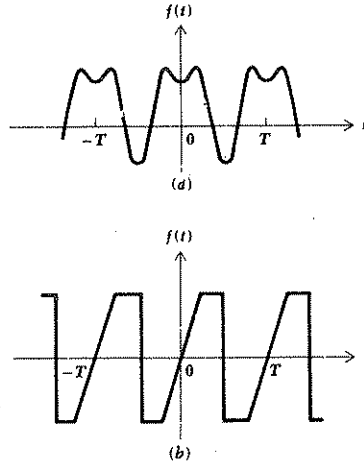
وهذه الدوال مثل t^2 و $\cos 3t$. وفي $(\cos t)$ و $\sin^2 7t$ وثابت مثل C كلها لها خاصية التناظر الزوجي ، حيث انه عند الاستعاضة عن t بـ $(-t)$ لا تتغير قيمة أي من هذه الدوال كما يمكن تمييز مثل هذه الدوال تخطيطياً حيث انه اذا كانت $f(t) = f(-t)$ فان هناك تناظراً يشبه وضع مرآة على امتداد محور $f(t)$. وللدالة الميينة في الشكل 4 - 18 أ خواص تماثلية زوجية . حيث أنه إذا طوينا الشكل على امتداد محور $f(t)$ فان جزئي المنحنى للزمن السالب وللزمن الموجب ينطبقان على بعضهما البعض تماماً .

لنحاول دراسة تأثيرات التناظر الزوجي على متسلسلة فوريير . اذا تصورنا مقداراً يساوي دالة زوجية $f(t)$ يحوي عدداً غير متناه من الدوال الجيبية وجيب التمامية فان من الواضح، أن المجموع غير المتناهي يجب أن يكون دالة زوجية أيضاً . إن الموجة الجيبية هي موجة فردية ولا يمكن لمجموع موجات جيبية ان يولد موجة زوجية غير الصفر (والذي هو زوجي وفرد في الوقت نفسه .) . لذا فان من المسلم به أن متسلسلة فوريير لأية دالة زوجية تحتوي فقط على ثابت وعلى دوال جيب تمامية .

دعنا نوضح بدقة ان $b_n = 0$. ان لدينا

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \left[- \int_{T/2}^0 f(-\tau) \sin(-n\omega_0\tau) d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T} \left[- \int_0^{T/2} f(\tau) \sin n\omega_0\tau d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \right] \end{aligned}$$

دعنا نعوض عن المتغير t في التكامل الأول بـ $-\tau$ أو $\tau = -t$ ونحاول استخدام الحقيقة أن $f(t) = f(-t) = f(\tau)$:



الشكل 4 - 18 (أ) شكل موجة يبين تناظراً زوجياً (ب) شكل موجة يبين تناظراً فردياً .

ولكن الإشارة المستخدمة لتوضيح متغير التكامل لا يمكن أن تؤثر في قيمة التكامل . لذا

$$b_n = 0 \quad (\text{even sym.}) \quad (18)$$

ولا يوجد أي حد جيبي . ولهذا فانه اذا كانت $f(t)$ ذات تناظر زوجي فان $b_n = 0$ وعلى العكس اذا كانت $b_n = 0$ فان $f(t)$ يجب أن تكون ذات تناظر زوجي .

وان اختياراً مشابهاً للمقدار الممثل لـ a_n تؤدي الى تكامل على امتداد نصف فترة من $t = 0$ الى $t = \frac{1}{2}T$ ،

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \quad (\text{even sym.}) \quad (19)$$

ان الحقيقة القائلة بان a_n يمكن الحصول عليها لدالة زوجية بأخذ ضعف التكامل على امتداد نصف المدى تبدو حقيقة منطقية .

ويعرف التناظر الفردي بأنه إذا كانت $f(t)$ تتصف بخاصية التناظر الفردي ،
فإن

$$f(t) = -f(-t) \quad (20)$$

أو بكلمة أخرى إذا استعويض عن t بـ $(-t)$ فإننا نحصل على الدالة المعطاة ولكن
بإشارة سالبة فمثلاً t و $\sin t$ و $t \cos 70t$ و $t \sqrt{1+t^2}$ وكذلك الدوال المرسومة
في الشكل 4 - 18 (ب) كلها دوال فردية ولها تناظر فردي .

وإن الخواص البيانية للتناظر الفردي تتضح إذا أدير جزء الدالة $f(t)$ للزمن
 $t > 0$ حول الاتجاه الموجب لمحور الزمن t فإن الشكل الناتج يدور حول محور
 $f(t)$ وعندها ينطبق المنحنيان أحدهما فوق الآخر . أي إن لدينا الآن تناظراً حول
نقطة الأصل بدلاً من التناظر حول محور $f(t)$. كما كانت الحال في حالة الدوال
الزوجية .

وإن دالة ذات تناظر زوجي لا يمكن أن تحتوي على حد ثابت ولا على حدود
جيب تامة في مقدار فورير . لنحاول برهنة الجزء الثاني من العبارة . إن لدينا

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t \, dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

ولنفرض الآن أن $t = -\tau$ في التكامل الأول

$$a_n = \frac{2}{T} \left[- \int_{T/2}^0 f(-\tau) \cos (-n\omega_0 \tau) \, d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_0^{T/2} f(-\tau) \cos n\omega_0 \tau \, d\tau + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t \, dt \right]$$

ولكن $f(-\tau) = -f(\tau)$ ولذا

$$a_n = 0 \quad (21) \quad (\text{تناظر فردي})$$

وإن برهاناً مشابهاً ولكنه أبسط من ذلك يبين أن

$$a_0 = 0 \quad (\text{تناظر فردي})$$

لذا عند وجود التناظر الفردي فإن $a_n = 0$ و $a_0 = 0$ وعلى العكس إذا كان $a_n = 0$ و $a_0 = 0$ فإن من المحتم وجود تناظر فردي .

يمكن الحصول على قيم b_n ثانية بأخذ التكامل على المدى

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (22) \text{ (تناظر فردي)}$$

إن أمثلة التناظر الفردي والزوجي قد مرت في التمرين 2 - 18 الذي سبق هذه الفقرة . ففي الأجزاء (أ) و (ب) تتضح موجة سريعة ذات الاتساع نفسه والفترة نفسها . إلا أن نقطة أصل الزمن قد اختيرت لاعطاء تناظر فردي في (أ) وتناظر زوجي في (ب) واحتوت المتسلسلة المحصلة فقط على حدود جيبية وجيب تامة على التعاقب .

ومما يستحق الذكر أن النقطة التي يكون عندها $t = 0$ يمكن اختيارها لئلا يعطي تناظراً فردياً ولا جيبياً وعند ذلك يستغرق إيجاد معاملات حدود متسلسلة فوريير ضعف الجهد . وإن متسلسلة فوريير لكل من الموجتين المربعيتين لها خاصية مفيدة أخرى ، فإن كليهما لاتحويان أي توافقيات زوجية (2) . أي أن مركبات التردد الموجودة في المتسلسلة فقط تحوي على ترددات كلها مضاعفات فردية للتردد الأساس وان a_n و b_n كلها صفر حينما n تكون زوجية . وان هذه النتيجة تنتج نوعاً آخر من التناظر يدعى بتناظر نصف الموجة . وسنقول بأن $f(t)$ تحوي تناظراً نصف موجي إذا كانت :

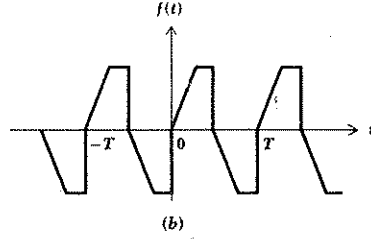
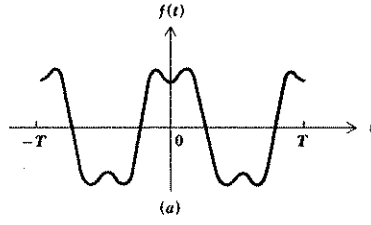
$$f(t) = -f(t - 1/2T)$$

أو المقدار المكافئ

$$f(t) = -f(t + 1/2T)$$

فيما عدا تغيير الإشارة فان كل نصف دورة تشبه النصف المجاور من الدورة . إن التناظر نصف الموجي بخلاف التناظر الفردي والزوجي لايعتمد على اختيار النقطة $t = 0$. لذا فبإمكاننا أن نؤكد أن الموجة المربعة (المبينة في الشكل 3 - 18 (أ) أو (ب) تعطي تناظراً نصف موجي . بينما ليس لأي من أشكال الموجات المبينة في الشكل 4 - 18 أي تناظر نصف موجي . أما الدالتان المتشابهتان لحد ما والمبينتان في الشكل 5 - 18 يمتلكان تناظراً لنصفي الموجة .

2 يجب الانتباه دائماً لئلا يحدث التباس بين دالة زوجية وتوافقية زوجية . أو بين دالة فردية وتوافقية فردية . فمثلاً b_n هو معامل التوافقية الزوجية والذي يساوي صفرأ إذا كانت $f(t)$ دالة زوجية .



الشكل 5 - 18 (أ) شكل موجة مشابه للشكل المبين في الشكل 4 - 18 (أ) لكنه يحتوي تماثل نصفى الموجة
 (ب) شكل موجة مشابه للشكل المبين في الشكل 4 - 18 ب لكنه يحتوي تماثل نصفى الموجة

ومن الممكن أن نبين أن متسلسلة فوريير لأي دالة ذات تناظر نصفى الموجة تحتوي على توافقيات فردية . ولتأخذ المعاملات a_n فان لدينا أيضاً

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^0 f(t) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \right]$$

والتي يمكن تمثيلها بشكل

$$a_n = \frac{2}{T} (I_1 + I_2)$$

وبتعويض المتغير الجديد $\tau = t + 1/2T$ في التكامل

$$I_1 = \int_0^{T/2} f(\tau - 1/2T) \cos n\omega_0(\tau - 1/2T) d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} -f(\tau) \left(\cos n\omega_0\tau \cos \frac{n\omega_0 T}{2} + \sin n\omega_0\tau \sin \frac{n\omega_0 T}{2} \right) d\tau$$

ولكن $\omega_0 T$ تساوي 2π ومن ثم
 ومن ثم

$$\sin \frac{n\omega_0 T}{2} = \sin n\pi = 0$$

$$I_1 = -\cos n\pi \int_0^{T/2} f(\tau) \cos n\omega_0 \tau d\tau$$

وبعد ملاحظة شكل I_2 يمكن كتابة

$$a_n = \frac{2}{T} (1 - \cos n\pi) \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt$$

وإن العامل $(1 - \cos n\pi)$ يشير إلى أن a_n يساوي صفراً إذا كانت n زوجية . ومن ثم

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt && \text{حيث } n \text{ فردي} \\ &= 0 && n \text{ زوجي} \end{aligned} \right\} (23) \text{ تناظر نصف موجي}$$

وبدراسة مشابهة يتضح أن b_n تساوي صفراً أيضاً لكل قيم n الزوجية ولذا فإن

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt && \text{حيث } n \text{ فردية} \\ &= 0 && n \text{ زوجية} \end{aligned} \right\} (24) \text{ تناظر نصف موجي}$$

وهنا يجب ملاحظة أن التناظر نصفى الموجة يمكن أن يتم في الوقت الذي تبين فيه الموجة تناظراً فردياً أو زوجياً . إن شكل الموجة الموسوم في الشكل 5 - 18 (أ) مثلاً يمتلك خاصية تناظر نصفى الموجة وتناظراً زوجياً وعندما يكون شكل الموجة يمتلك خاصية تناظر نصف الموجة وتناظراً زوجياً أو تناظراً فردياً ، يمكن إعادة تركيب شكل الموجة إذا علم جزء منها على مدى ربع فترة فقط . وإن قيمة a_n أو b_n يمكن إيجادها أيضاً بالتكامل على امتداد ربع فترة . لذا

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \cos n\omega_0 t dt && \text{حيث } n \text{ فردية} \\ &= 0 && n \text{ زوجية} \\ b_n &= 0 && \end{aligned} \right\} (25) \text{ تناظر نصف الموجة وزوجي}$$

وكذلك

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 0 && n \text{ فردية} \\ b_n &= \frac{8}{T} \int_0^{T/4} f(t) \sin n\omega_0 t dt && \\ b_n &= 0 && n \text{ زوجية} \end{aligned} \right\} (26) \text{ تناظر نصفى الموجة وفردي}$$

وإن من المفيد دائماً صرف بعض الوقت بالتأكد من تناظر الدالة المطلوب إيجاد متسلسلة فوريير لها .

تمارين :-

3 - 18 إرسم كل دالة مذكورة أدناه . ثم قرر فيما إذا كان هناك تناظر زوجي

أو فردي أو نصفى الموجة مع اعطاء الفترة (أ) $i = 5 \sin \pi |t|, -1 < t < 1$ وإعادة

(ب) إعادة $i = 5t - 2, 2 < t < 6$; $i = 20 - 5t, 2 < t < 6$ وإعادة

(ج) إعادة $i = 0, -1 < t < 1$; $i = 5, 1 < t < 2$; $i = -5, 2 < t < 3$ إعادة

الجواب : نعم . لا . لا . نعم . لا . لا . نعم . نعم .

4 - 18 أوجد متسلسلة فوريير لكل شكل موجة من المذكورة في التمرين 3 - 18

$$\frac{80}{\pi^2} \sum_{n=1, \text{ odd}}^{\infty} \frac{1}{n^2} (-1)^{n-1} \sin \frac{n\pi t}{4}; \text{ الجواب}$$

$$\frac{10}{\pi} - \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos 2n\pi t;$$

$$- \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi t}{2}$$

4 - 18 الاستجابة الكاملة لدوال دورية قسرية

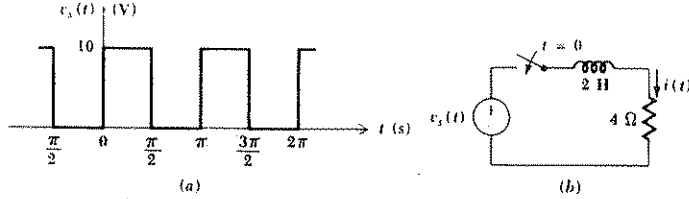
COMPLETE RESPONSE TO PERIODIC FORCING FUNCTIONS

من خلال استخدام متسلسلة فوريير يمكن أن تمثل أي دالة دورية قسرية كمجموع لانهائي لدوال جيبيية . وإن الاستجابة القسرية تمثل هذه الدوال يمكن إيجادها بالطرق المعروفة في تحليل الحالة المستقرة . أما هيئة الاستجابة الطبيعية فيمكن إيجادها من أقطاب شبكة الدالة التحويلية المناسبة كما أن الظروف الابتدائية الموجودة في الشبكة وبضمنها القيم الابتدائية للاستجابة القسرية تسمح باختيار الاستجابة الطبيعية وأخيراً تمكن من إيجاد الاستجابة الكاملة كمجموع للاستجابتين القسرية والطبيعية . ولنحاول توضيح هذه الطريقة العامة بمثال خاص .

وسنحاول تسليط الموجة المربعة الميئة في الشكل 6 - 18 (أ) والتي تحتوي على مركبة تيار مستمر على دائرة RL الميئة في الشكل 6 - 18 (ب) . تسلط الدالة القسرية في اللحظة $t = 0$ والتي هو الاستجابة المطلوبة علماً بأن القيمة الابتدائية

كانت صفراً . وتحوي الدالة القسرية على تردد أساس $\omega_0 = 2$. ومن ثم يمكن كتابة متسلسلة فوريير بالمقارنة مع التمرين 2 - 18 (أ) كما يأتي :

$$v_s(t) = 5 + \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nt}{n}$$



الشكل 6 - 18 (أ) دالة فولتية قسرية ذات شكل موجة مربعة (ب) الدالة القسرية ل (أ) مسلطة على دائرة التوالي هذه عندما $t = 0$ ، ويطلب إيجاد الاستجابة الكلية $i(t)$

وسنجد الاستجابة القسرية للتوافقية n بالعمل في حيز التردد . لذا وكذلك

$$v_{sn}(t) = \frac{20}{\pi n} \sin 2nt$$

$$V_{sn} = \frac{20}{\pi n} (-j1)$$

وإن الممانعة التي تبديها دائرة RL في هذا التردد هي :

$$Z_n = 4 + j(2n)2 = 4 + j4n$$

ولذا فإن مركبة الاستجابة القسرية في هذا التردد هي :

$$I_{sn} = \frac{V_{sn}}{Z_n} = \frac{-j5}{\pi n(1 + jn)}$$

وبتحويل ذلك الى حيز الزمن نحصل على

$$i_{sn}(t) = \frac{5}{\pi n} \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \cos(2nt - 90^\circ - \tan^{-1} n)$$

$$= \frac{5}{\pi(1+n^2)} \left(\frac{\sin 2nt}{n} - \cos 2nt \right)$$

وحيث أن الاستجابة لمركبة التيار المستمر هي بديهاً 1.25 A ، فإن الاستجابة القسرية يمكن تمثيلها بالمجموع :

$$i_r(t) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right]$$

وإن الاستجابة الطبيعية الشائعة لهذه الدائرة البسيطة هي حد أسّي واحد (يصف قطباً منفرداً في الدالة التحويلية $I_r/V_s = 1/(4 + 2s)$)

$$i_n(t) = Ae^{-2t}$$

لذا فالاستجابة الكاملة هي المجموع

$$i(t) = i_r(t) + i_n(t)$$

ونظراً لأن $i(0) = 0$. من الضروري اختيار A بحيث

$$A = -i_r(0)$$

وعلى فرض أن $t = 0$ نجد أن $i_r(0)$ مغطاة بالمعادلة

$$i_r(0) = 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

وعلى الرغم من أن بإمكاننا تمثيل A بدلالة هذا المجموع فإنه من المناسب أكثر من ذلك استخدام القيمة العددية للمجموع . وإن مجموع الحدود الخمسة الأولى $\sum_{n=1}^5 1/(1+n^2)$ يساوي 0.671 ومجموع الحدود العشرة الأولى 0.695 ومجموع الحدود العشرين 0.708 . أما المجموع المضبوط 3 فيبلغ 0.720 مقرباً لثلاثة أرقام . لذا

$$A = -1.25 + \frac{5}{\pi} 0.720 = -0.104$$

$$i(t) = -0.104e^{-2t} + 1.25 + \frac{5}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \left[\frac{\sin 2nt}{n(1+n^2)} - \frac{\cos 2nt}{1+n^2} \right] \quad \text{كذلك}$$

وبإيجاد هذا الحل كان علينا أن نستخدم العديد من المفاهيم العامة التي قدمناها في هذا الفصل والفصل الذي سبقه . أما عدد منها آخر فلم يكن هناك حاجة لاستخدامها بسبب الطبيعة البسيطة لهذه الدائرة الخاصة . إلا أن مواقعها في التحليل العام قد اشير اليه فيما سبق . ولهذا فبإمكاننا النظر الى الحل بهذا المفهوم كأنجاز قيم في دراستنا لتحليل الدوائر . ولكن على الرغم من هذا الشعور بالفخر لهذا الانجاز علينا أن نشير الى أن الاستجابة الكاملة كما وجدت أعلاه بشكل تحليلي ليس لها قيمة كبيرة بحد ذاتها فهي لاتعطي صورة واضحة عن طبيعة الأستجابة . ولهذا فإن

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \text{odd}}}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{4} \tanh \frac{\pi}{2} \quad 3 \quad \text{إن مجموع المتسلسلة يمكن أن يحب بشكل مقفل}$$

مانحتاجه بالفعل هو رسم تخطيطي لـ $i(t)$ دالة للزمن . ويمكن الحصول على ذلك بحسابات متعبة في عدد كاف من اللحظات الزمنية ويمكن أن تكون الحاسبة الألكترونية الرقمية أو الآلة الحاسبة اليدوية القابلة للبرمجة مفيدة كثيراً هنا . وإن المخطط يمكن أن يقرب بإضافة تخطيطية للاستجابة الطبيعية ومركبة التيار المستمر والتوقيات القليلة الأولى وهذه عملية غير مجدية . وبعد كل ما قيل وعمل فإن الحل الأكثر فائدة لهذه المسألة ربما يمكن الحصول عليه باعادة التحليل للحالة الزائلة . وهذا هو شكل الاستجابة الذي يمكن حسابه خلال الفترة من $t = 0$ الى $t = \pi/2$ ثانية . ويكون ارتفاعه أسياً نحو قيمة 2.5 أمبيراً .

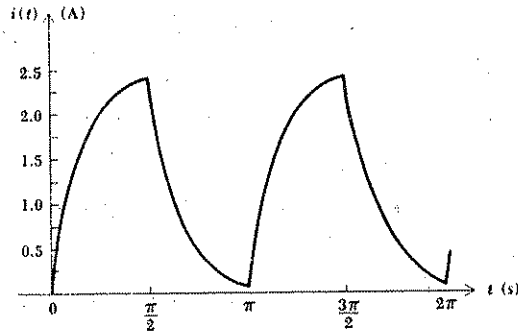
وبعد ايجاد القيمة في نهاية هذه الفترة الأولى يصبح لدينا ظروف ابتدائية للفترة $\pi/2$ ثانية التالية . وإن هذه العملية يمكن اعاتها الى أن يصبح للاستجابة شكل عام ذا طبيعة دورية . وإن هذه الطريقة مناسبة جداً لهذا المثال ونظراً لعدم وجود تغير يذكر في شكل التيار في الفترات المتعاقبة $\pi/2 < t < 3\pi/2$ و $3\pi/2 < t < 5\pi/2$. وإن استجابة التيار الكاملة مرسومة في الشكل 7 - 18 .

تمرين : -

5 - 18 استخدام طريقة الفصل 6 لاجاد قيمة التيار المرسوم في الشكل 7 - 18

في اللحظات t تساوي (أ) $\pi/2$ (ب) π (ج) $3\pi/2$

الجواب A 2.396 ; 2.392 ; 0.1034



الشكل 7 - 18 الجزء الأولي من الاستجابة الكاملة لدائرة الشكل 6 - 18 (ب) الى الدالة القسرية للشكل 6 - 18 (أ)

5 - 18 الصيغة المركبة لمتسلسلة فوريير

COMPLEX FORM OF THE FOURIER SERIES

من خلال ايجاد استجابة التردد وجدنا ان اتساع كل مركبة تردد يعتمد على كل من a_n و b_n . أي أن الحد الجيبي وجيب التمامي كلاهما يشاركان في الاتساع. وان المقدار المضبوط لهذا الاتساع هو $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. ومن الممكن ايجاد الاتساع مباشرة باستخدام صيغة لمتسلسلة فوريير كل حد فيها هو دالة جيتمامية مع زاوية طور. الاتساع وزاوية الطور هما دالتان لـ $f(t)$ و n . ان صيغة مناسبة أكثر من ذلك وأكثر دقة من متسلسلة فوريير السابقة يمكن الحصول عليها اذا رمزنا لكل من الجيوب وجيوب التمام كدوال أسية بثوابت ضرب مركبة. ولنأخذ أولاً الصيغة المثلية لمتسلسلة فوريير.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

ثم نعوض الصيغ الأسية للجيب وجيب التمام. وبعد اعادة الترتيب

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{jn\omega_0 t} \frac{a_n - jb_n}{2} + e^{-jn\omega_0 t} \frac{a_n + jb_n}{2} \right)$$

والآن نعرف الثابت المركب c_n

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

بحيث تعتمد كل من a_n و b_n و c_n على n وعلى $f(t)$. ولنفرض أننا عوضنا عن n بـ $(-n)$. كيف تتغير قيم الثوابت عند ذلك؟ تعرف المعاملات a_n و b_n بالمعادلتين (10) و (11) ويكون من البديهي أن

$$\begin{aligned} a_{-n} &= a_n \\ b_{-n} &= -b_n \end{aligned} \quad \text{ولكن}$$

ومن المعادلة (27) نحصل على

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

لذا

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = c_n^*$$

وكذلك

لذا يمكن صياغة $f(t)$ بشكل

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

أو

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

وأخيراً فبدلاً من مجموع المتسلسلة الثانية على امتداد الأرقام الموجبة من 1 - إلى ∞ لنأخذ المجموع على امتداد الأرقام السالبة من 1 إلى $-\infty$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \quad \text{أو (29)}$$

وبالاتفاق فإن المجموع من $-\infty$ إلى ∞ من المفهوم ان يحتوي حداً فيه $n = 0$ وان المعادلة (29) هي الصيغة المركبة لتسلسلة فوريير لـ $f(t)$ وهي احدى الصيغ المهمة جداً في استخدامها نظراً لبساطتها واختصارها. لنفرض ايجاد المقدار الذي يمكن بواسطته حساب معامل مركب معين c_n نعوض المعادلتين (10) و (11) في (27)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t dt - j \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t dt \quad (27)$$

وباستخدام التكافؤ الأسى للجيب وجيب التمام وتبسيط ذلك :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (30)$$

لذا فان معادلة مختصرة واحدة تعوض عن المعادلتين المطلوبتين بالصيغة المثلية لتسلسلة فوريير. فبدلاً من حساب تكاملين لحساب معاملات فوريير. يمكننا حساب تكامل واحد. هذا بالإضافة الى أن في أغلب الأحيان يكون التكامل أسهل. ومما تجدر الإشارة اليه ان التكامل في المعادلة (30) يحتوي على عامل ضرب $1/T$ بينما التكاملين a_n و b_n وكلاهما يحتويان على العامل $2/T$.

وبتجميع العلاقتين الأساسيتين للصيغة الأسية في متسلسلة فوريير نحصل على :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (29)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (30)$$

ان اتساع مركبة الصيغة الأسية لمتسلسلة فوريير عند $\omega = n\omega_0$ حيث $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ هي $|c_n|$. ويمكننا رسم طيف ترددي متقطع ليعطي $|c_n|$ بدلالة $n\omega_0$ أو nf_0 مع محور سيني يبين قيماً موجبة وسالبة في الوقت نفسه . وعند رسم المخطط نلاحظ التناظر حول نقطة الأصل نظراً لأن (27) و (28) يوضحان أن $|c_n| = |c_{-n}|$.

كما نلاحظ من المعادلتين (29) و (30) أن اتساع المركبة الجيبية عند $\omega = n\omega_0$ حيث $n = 1, 2, 3, \dots$ هو $|c_n| + |c_{-n}| = 2|c_n| = 2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ إما لمركبة التيار المستمر $a_0 = c_0$. لنأخذ مثلاً رقمياً لتوضيح استخدام الصيغة لمتسلسلة فوريير سلسلة في النبضات المستطيلة ذات اتساع V_0 ويستغرق كل منها τ وتعيد نفسها كل T ثانية كما مبين في الشكل 8 - 18 . لذا فالتردد الأساس هو .

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

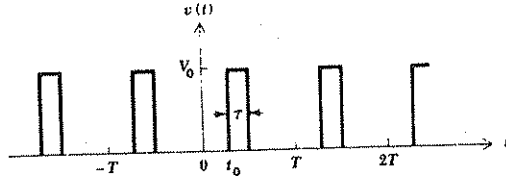
وإن قيمة المعامل المركب يحسب أولاً من المعادلة (30) :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V_0}{T} \int_{t_0}^{t_0+\tau} e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \frac{V_0}{-jn\omega_0 T} (e^{-jn\omega_0(t_0+\tau)} - e^{-jn\omega_0 t_0}) \\ &= \frac{2V_0}{n\omega_0 T} e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)} \sin(\frac{1}{2}n\omega_0\tau) \\ &= \frac{V_0\tau}{T} \frac{\sin(\frac{1}{2}n\omega_0\tau)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau} e^{-jn\omega_0(t_0+\tau/2)} \end{aligned}$$

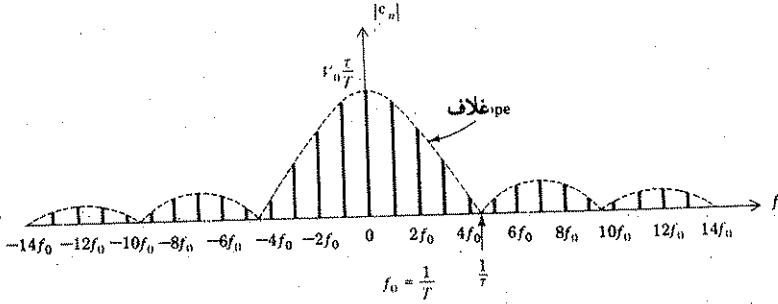
لذا فان اتساع c_n يكون

$$|c_n| = \frac{V_0\tau}{T} \left| \frac{\sin(\frac{1}{2}n\omega_0\tau)}{\frac{1}{2}n\omega_0\tau} \right| \quad (31)$$

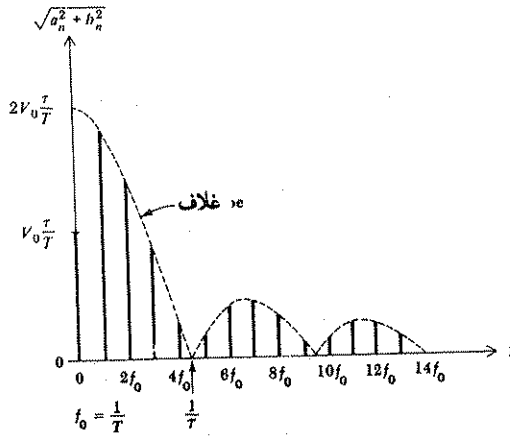
وزاوية c_n هي



(a)



(b)



(c)

الشكل 8 - 18

(أ) سلسلة من نبضات مستطيلة دورية

(ب) الطيف الخطي المتقطع الذي يعود لها لـ $f = nf_0$ حيث $f = nf_0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (ج) مع $f = nf_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ مع $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

$$\text{و ربما يضاف لها 180}) (32) \quad c_n = -n\omega_0 \left(t_0 + \frac{\tau}{2} \right) \text{ زاوية}$$

إن العامل المثلثي في المعادلة (31) يتكرر كثيراً في نظرية الاتصالات الحديثة ويُدعى بدالة العينات *sampling function* . لذا نعرف أن

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

ونظراً للطريقة التي تساعد هذه الدالة في إيجاد اتساع مختلف المركبات الترددية لـ $v(t)$ ، ومن المفيد أن تكشف الخواص المهمة لهذه الدالة . نلاحظ أولاً أن $\text{Sa}(x)$ تساوي صفرًا كلما كانت x مضاعفًا كاملاً لـ π . أي أن ،

$$\text{Sa}(n\pi) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

وحيثما x تساوي صفرًا فإن الدالة غير محدودة ولكنه من السهل أن نبين أن قيمتها عند ذلك تساوي واحدًا .

$$\text{Sa}(0) = 1$$

لذا فإن قيمة $\text{Sa}(x)$ تنقص من الواحد عند $x=0$ إلى الصفر عند $x=\pi$ وبتزايد x من π إلى 2π ، تزداد $|\text{Sa}(x)|$ من الصفر إلى الواحد ثم تتناقص إلى الصفر مرة أخرى . وباستمرار x في الزيادة ، فإن القمم تصبح أصغر فأصغر بسبب أن بسط $\text{Sa}(x)$ لا يمكن أن يزداد عن الواحد وأن المقام يزداد باستمرار .

كما أن $\text{Sa}(x)$ تعطي تناظرًا زوجياً .

والآن لنرسم الطيف الخطي . ونبدأ بأخذ c_n بكتابة (31) بدلالة التردد الأساس

$$|c_n| = \frac{V_0\sigma}{T} \left| \frac{\sin(n\pi f_0\tau)}{n\pi f_0\tau} \right| \quad (33)$$

وإن اتساع أي c_n يمكن الحصول عليه من (33) باستخدام القيم المعروفة لـ τ و $T=1/f_0$ واختيار القيمة المطلوبة لـ n حيث $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ وبدلاً من حساب المعادلة (33) عند هذه الترددات المتقطعة دعنا نرسم غلاف $|c_n|$ بأخذ التردد $n f_0$ كمتغير مستمر أي أن f والتي هي $n f_0$ يمكن أن تأخذ فقط قيماً متقطعة للترددات التوافقية $0, \pm f_0, \pm 2f_0, \pm 3f_0, \dots$ وهكذا ، ولكن يمكننا أن نتصور مؤقتاً أن n هو متغير مستمر . فحينما f تساوي صفرًا فإن $|c_n|$ تساوي $V_0\sigma/T$. وحينما f تزداد إلى $|c_n|$ فإن $1/\tau$ تساوي صفرًا والغلاف المحصل المرسوم بخط متقطع في الشكل 8 - 18 ب . ويمكن بعد ذلك الحصول على الطيف الخطي ببساطة وذلك برسم خطوط عمودية عند كل توافقية كما هو مبين في الرسم التخطيطي ، إن الاتساعات الميئة تعود إلى c_n .

إن الحالة الخاصة المرسومة تنطبق على حالة $\tau/T = 1/(1.5\pi) = 0.212$. ولا يوجد في هذا المثال أي توافقية بالضبط عند ذلك التردد الذي يكون اتساع الغلاف فيه صفراً . إلا ان اختياراً آخر لـ τ أو T يمكن ان ينتج مثل هذا الحدث .

وفي الشكل 8 - 18 ج رسمت المركبة الجيبية كدالة مع التردد . لاحظ أيضاً أن $a_n = c_n$ وأن $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n| + |c_{-n}|$ كانت هذه الملاحظات متعددة واستنتاجات امكنا ملاحظتها حول الطيف الخطي للتعاقب الدوري للنضبات المستطيلة كما بينت في الشكل 8 - 18 ج . أما بالنسبة لغلاف الطيف المتقطع فمن البديهي أن عرض الغلاف يعتمد على τ وليس على T . وبالحقيقة فان شكل الغلاف ليس بدلالة T . ينتج من ذلك ان عرض حزمة bandwidth المرشح filter المصمم لامرار النضبات الدورية ويعتمد على عرض النبضة τ ولكنه لا يعتمد على الفترة ومن تفحص الشكل 8 - 18 ج تبين ان عرض الحزمة المطلوبة تبلغ $1/T$ هيرتز .

إذا ازدادت فترة النبضة T (أو نقص تردد النبضة f_0) فان عرض الحزمة لايتغير لكن عدد خطوط الطيف بين الترددين صفر و $1/T$ هيرتز يزداد ولكن بشكل متقطع . وان اتساع كل خط يتناسب تناسباً عكسياً مع T . وأخيراً فان زحفاً في نقطة الأصل للزمن لا يؤدي الى أي تغيير في خط الطيف . أي أن $|c_n|$ ليست بدلالة لـ t_0 . وان الأطوار النسبية لمركبات التردد لا تتغير مع اختيار t_0

تمرين :

6 - 18 أوجد المقاوم العام c_n في متسلسلة فوريير المركبة لكل من أشكال الموجات الثلاثة المبينة في الشكل 3 - 18 .

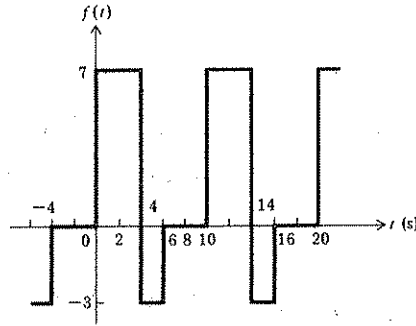
الجواب

$$\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}; -j \frac{1}{n\pi} (1 - \cos n\pi); -j \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

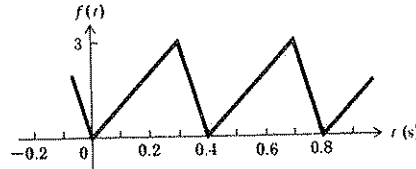
مسائل :-

□ 1 احسب معاملات فوريير التالية للموجة المبينة في الشكل 9 - 18 . (أ) a_n
(ب) b_n (ج) a_0

- 2 اوجد الشكل العام لـ b_n للموجة المبينة في الشكل 10 - 18 كدالة لـ n هل من الأسهل أخذ التكامل على طول الفترة من 0 الى 0.4 أو من -0.1 الى 0.3 .
- 3 افرض أن $f(t) = 20$ على امتداد $0 < t < 3$ ms وتساوي 0 و $3 < t < 7$ ms وتساوي 7 صفراً $7 < t < 10$ ms حيث T تساوي 10 ملي ثانية . احسب (أ) a_n (ب) a_1 (ج) a_1 (د) b_n

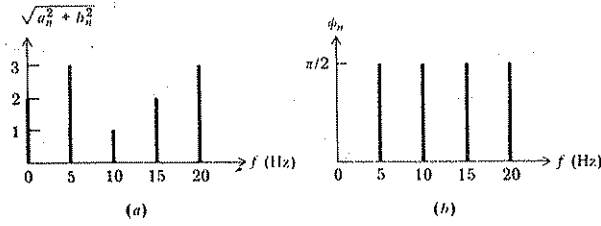


الشكل 9 - 18 أنظر المسألة 1



الشكل 10 - 18 أنظر المسألة 2

- 4 □ بين الشكل 11 - 18 (أ) الطيف الخطي المتقطع لدالة دورية معينة مع الزمن . كما بين 11 - 18 ب الطيف الزاوي العائد له حيث $\phi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n)$. أكتب الصيغة المثلثية لمتسلسلة فوريير لهذه الدالة .

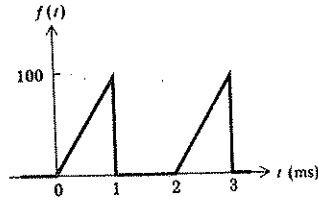


الشكل 11 - 18 أنظر المسألة 4

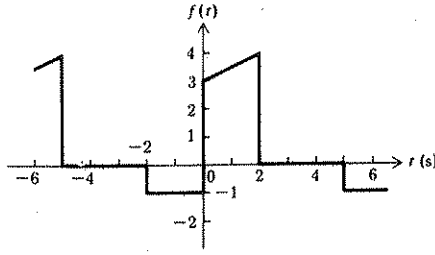
5 أكتب متسلسلة فوريير بصيغتها المثلثية واعط قيمة T لكل من هذه الدوال الدورية مع الزمن حيث $f(t)$ تساوي (أ) $4 \cos^2 10t$ (ب) $3 \sin 2t - 7 \sin 5t$ (ج) $3 \cos 2.7t + 0.8 \sin 1.85t$

6 أوجد a_1 و b_1 لاشكال الموجات المبينة في الشكل 12 - 18 .

7 أوجد القيم التالية للدوال مع الزمن المبينة في الشكل 13 - 18 .
 (أ) الفترة بالثواني (ب) التردد الزاوي الأساس (ج) التردد التوافقي الرابع عشر بالهيرتز (د) قيمة المتوسط (هـ) قيمة ج . م . ت



الشكل 12 - 18 أنظر المسألة 6



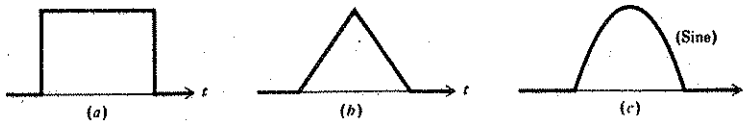
الشكل 13 - 18 أنظر المسألة 7

8 الصيغة المثلثية لمتسلسلة فوريير لدالة دورية مع الزمن تعطى بالعلاقة :

$$f(t) = 4 - 2 \cos 2t + 3 \cos 4t - 5 \cos 6t + 5 \sin 2t - 7 \sin 4t + 2 \sin 6t - 9 \sin 8t$$

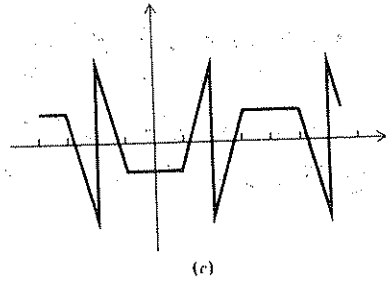
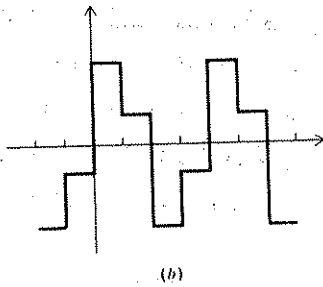
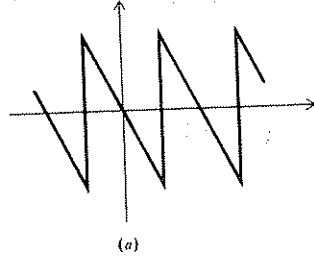
احسب (أ) T + (ب) عرض الحزمة اللازم لاشارة بالهيرتز (ج) القيمة المتوسطة ل $f(t)$ (د) قيمة ج . م . ت ل $f(t)$. (هـ) ارسم الاتساع المتقطع وطيف الطور لهذه الاشارة .

كل من أشكال الموجات الثلاثة المبينة في الشكل 14 - 18 لها اتساع أقصى مقداره A وعرض مقداره τ وهو دوري فترته 2τ . حدد موقع نقطة الأصل في وسط القاعدة في كل حالة ثم أوجد متسلسلة فوريير . ثم ارسم الطيف الخطي وقارن عرض الحزمة المطلوب لكي يحتوي كل مركبات التردد التي تكون باتساع مساو أو أكبر من 1 بالمائة من اتساع أكبر مركبة .



الشكل 41 - 18 أنظر المسألة 9

10 لكل من أشكال الموجات المبينة في الشكل 15 - 18 بين فيما اذا كانت هذه الموجات ذات تناظر زوجي أم لا ، أو فردي أم لا ، أو نصفية الموجة أم لا ، أو مزيجاً من هذه التناظرات .



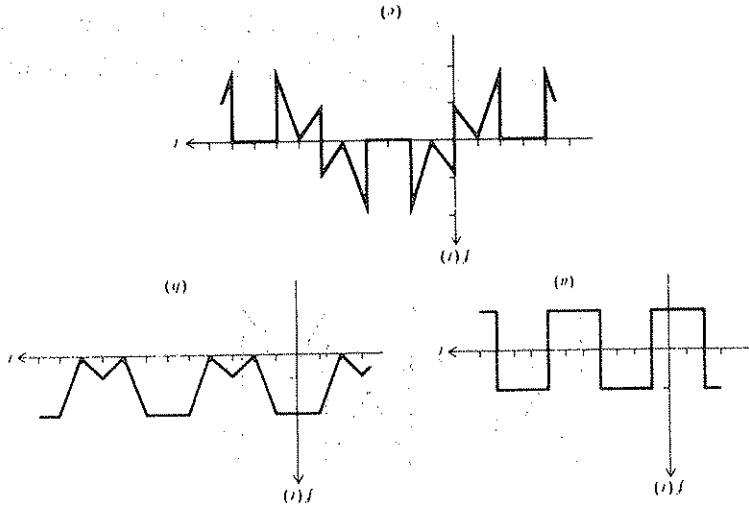
الشكل 15 - 18 أنظر المسألة 10

11 لكل من أشكال الموجات المبينة في الشكل 16 - 18 أجب عن الاسئلة الآتية :

(أ) هل هناك تناظر زوجي ؟ (ب) هل هناك تناظر فردي ؟ (ج) هل هناك تناظر نصفية الموجة ؟

(د) هل أن « a » تساوي صفراً ؟ (هـ) هل أن كل زوجية « a » تساوي صفراً ؟ (و) هل أن كل فردية « a » تساوي صفراً ؟

(ز) هل أن كل زوجية « a » تساوي صفراً ؟ (ح) هل أن كل فردية « a » تساوي صفراً ؟

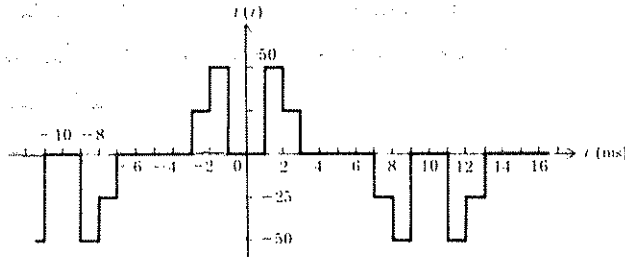


الشكل 16 - 18 أنظر المسألة 11

12 تبين فترة طولها 4 ثانية لفولتية دورية معينة ارتفاعاً خطياً من الصفر الى 2 فولت في 3 ثواني . يليه انخفاض خطي الى الصفر خلال ثانية واحدة . إرسم فترة واحدة كاملة من الموجة مبيناً موقع $t = 0$ ومعطياً قيمة T . إذا كانت الفترة هي أقل قيمة ممكنة لها وكانت الفولتية تعطي (أ) تناظراً زوجياً (ب) تناظراً فردياً (ج) تناظراً نصفى الموجة (د) تناظراً فردياً ونصفى الموجة (هـ) تناظراً زوجياً ونصفى الموجة .

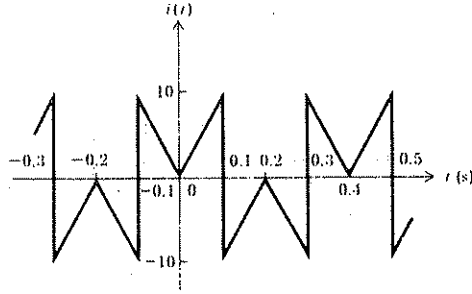
13 أوجد كل من a_n و b_n $1 \leq n \leq 10$ لأشكال الموجات المبينة في الشكل 17 -

18



الشكل 17 - 18 أنظر المسألة 13

14 بعد التأكد من التناظر المبين للموجة في الشكل 18 - 18 ، أكتب متسلسلة فورير المثلثية معطياً القيم الرقمية لكل التوافقيات الى حد الثامنة .

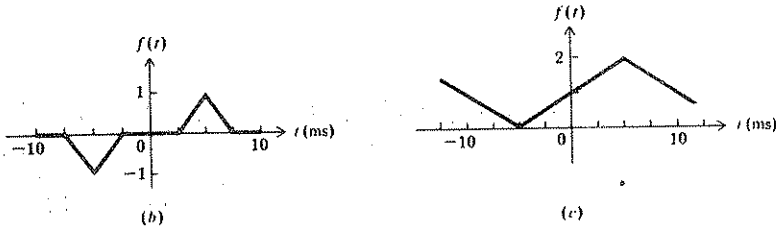
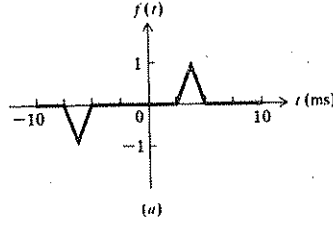


الشكل 18 - 18 أنظر المسألة 14

□ 15 بين أي من « زوجية » و فردية « لكل من أشكال الموجات المبنية في الشكل 18 - 19 و زوجية « و فردية « تساوي صفراً اذا كانت T تساوي 20 ملي ثانية . لاحظ أنه للموجة (ج) من المفيد النظر الى الموجة بدون مركبة تيار مستمر

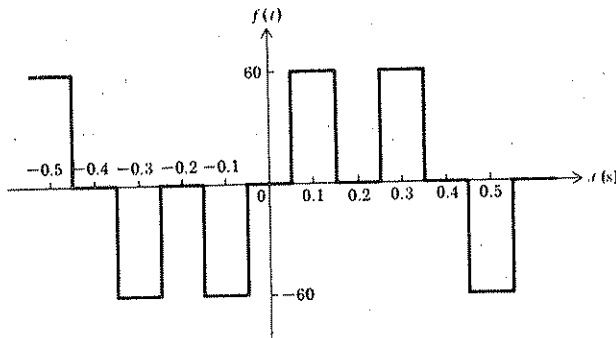
16 دالة مع الزمن غير دورية توصف بما يأتي : $i(t) = 3 - 2t$ $0 < t < 1$ و $i(t) = 0$ لكل قيم t الاخرى .

(أ) ارسم الدالة $f(t)$ والتي تكون دورية وذات $T = 2$ وتحوي تناظراً زوجياً وتساوي $i(t)$ للفترة $0 < t < 1$: (ب) أكتب متسلسلة فورير المثلثية لـ $f(t)$ معطياً كل الحدود لغاية التوافقية الرابعة (ج) أوجد قيم $f(0.5)$ و $f(1.5)$ باستخدام هذه الحدود فقط



الشكل 19 - 18 أنظر المسألة 15

17 (أ) أوجد متسلسلة فوريير المثلثية للموجة الميمنة في الشكل 20 - 18
 (ب) برهن على أن القيمة التأثيرية للمتسلسلة تساوي القيمة التأثيرية للموجة وذلك بحساب قيمة واحدة بدقة وقيمة أخرى تقريبية .



الشكل 20 - 18 أنظر المسألة 17

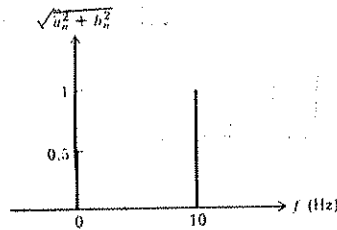
18 مصدر فولتية مثالي ومقاوم 2 أوم ومتسعة 2.5 فراد على التوالي . يجهز المصدر الفولتية المبينة في الشكل 3 - 18 (ب) . أغلق الزر في اللحظة $t = 0$ يطلب إيجاد استجابة فولتية المتسعة .

19 أوجد الاستجابة الكاملة للدائرة المشار إليها في المسألة 18 باعتبار الإدخال كسلسلة من الدوال المناسبة ذات وحدة الخطوة . أوجد الاستجابة وأرسمها للفترة $0 \leq t \leq 3.5s$

- (أ) في حيز تردد التوافقية . إ حسب الاستجابة القسرية لهذه التوافقية .
 (ب) حدد صيغة الدالة في الحيز الأعتيادي .
 (ج) أوجد الاستجابة الكاملة .

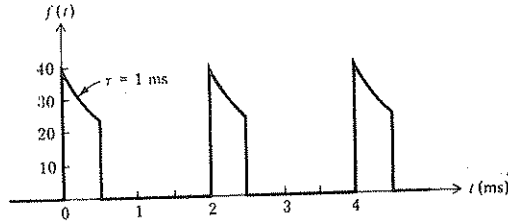
20 □ حينما ضمنت الفولتية الحاملة carrier voltage لمحطة إرسال broadcast station تضميناً اتساعياً amplitude-modulated بواسطة إشارة فولتية مقدارها $v_s = V_s \cos \omega_s t$ كانت الفولتية المحصلة المضمنة AM $v = V_c [1 + (V_s/V_c) \cos \omega_s t] \cos \omega_c t$ لنفرض أن $\omega_c = 1 \text{ Mrad/s}$ وأن $\omega_s = 1 \text{ krad/s}$ وأن $V_c = 50 \text{ V}$ وأن $V_s = 40 \text{ V}$. (أ) أوجد فترة الفولتية المضمنة AM (ب) أوجد متسلسلة فورير للفولتية AM والتي يمكن إيجادها بذلك دون إجراء أي تكامل (ج) أوجد ج . م . ت للفولتية AM ثم قارنها مع ج . م . ت للفولتية الحاملة .

21 دالة دورية $f(t)$ لها الطيف الخطي البسيط جداً المبين في الشكل 21 - 18 . كما أنه من المعروف أيضاً ان $f(t)$ هي دالة زوجية . (أ) أكتب متسلسلة فورير بصيغتها المركبة (ج) ارسم الدالة $f(t)$ مع الزمن .



الشكل 21 - 18 أنظر المسألة 21

- 22 إذا كانت $f(t) = 100$ بين $0 < t < 1$ ms وتساوي 40 بين $1 < t < 2.5$ ms وصفرأ بين $2.5 < t < 10$ ms حيث T تساوي 10 مللي ثانية . أوجد c_{-5} و c_5
- 23 أوجد c_{-2} و a_2 للموجة الدورية ذات الشكل المبين في الشكل 22 - 18

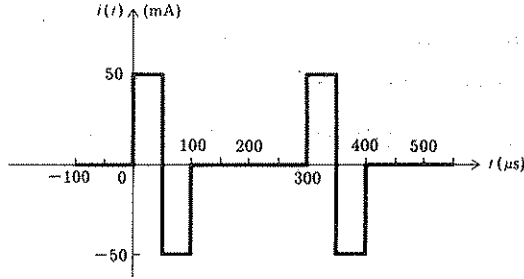


الشكل 22 - 18 أنظر المسألة 23

- 24 لشكل الموجة المبين في الشكل 8 - 18 (أ) . افرض أن $V_0 = 100$ v و $T = 2$ ms و $\tau = 100 \mu s$ و $t_0 = 0$. استخدم العلاقات (31) و (32) و (33) لحساب قيم $|c_n|$ حيث $0 \leq n \leq 5$ ثم ارسم الطيف الخطي المتقطع لـ $|c_n|$ موضحاً كل المركبات التي بين $0 \leq |f| \leq 25$ kHz

- 25 □ معاملات فوريير المركبة لفولتية دورية هي $c_0 = 10$ و $c_1 = 8 - j6$ و $c_2 = 5 + j0$ و $c_3 = 1 + j2$ و $c_4 = 1 + j0$ و $c_n = 0$ لكل $n > 4$
- (أ) احسب قيمة v عند $t = T/4$ (ب) أوجد القدرة المتوسطة المجهزة من قبل هذه الموجة لمقاوم قيمته 5 أوم .

- 26 (أ) أوجد c_n لموجة التيار الدوري المبينة في الشكل 23 - 18 .
- (ب) أدخل هذا التيار على مرشح حزمة إمرار bandpass يمرر كل الترددات بين 14 kHz و 13 kHz بدون توهين attenuation . بينما يرفض كل المركبات خارج هذه الحزمة . سلط اخراج المرشح على متسعة $0.01 - \mu F$ على التوازي مع مقاوم $1 - k\Omega$. مامقدار متوسط القدرة المجهزة للمقاوم ؟

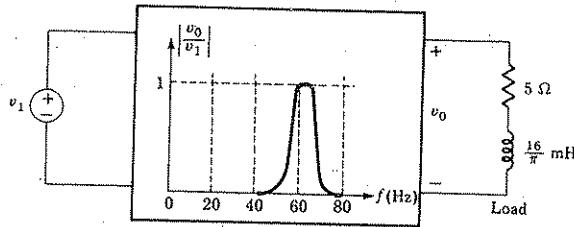


الشكل 23 - 18 أنظر المسألة 26

27 متسلسلة فورير المركبة لفولتية دورية هي

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(0.2)^{|n|} + jn(0.1)^{|n|}] e^{j50\pi n t} \text{ V}$$

- (أ) أوجد c_n حينما $-4 \leq n \leq 4$ (ب) أكتب الصيغة المثلثية لـ $f(t)$ لغاية (بضمنها) التوافقية الرابعة (ج) أوجد القيمة الرقمية لـ $f(t)$ عندما $t = 10 \text{ ms}$ (د) أوجد متوسط القدرة التي تجهزها $v(t)$ لمقاوم قيمته 5 أوم .
- 28 موجة فولتية $v_1(t)$ فترتها 0.08s تعرف بما يأتي : $v_1 = 60 \text{ V}$ حيث $0 < t < 0.01 \text{ s}$ و $v_1 = 0$ حينما $0.01 < t < 0.08 \text{ s}$ (أ) أوجد c_n (ب) الفولتية v_1 سلطت على مصدر في الدائرة المبينة في الشكل 24 - 18 . ماقيمة القدرة المتوسطة المجهزة للعمل ؟



الشكل 24 - 18 أنظر المسألة 28

29 معاملات متسلسلة فورير المركبة لتيار دوري هي :

$$c_n = [1/(n+1)!] + j[n/(n+2)!] \quad \text{حينما } n \geq 0$$

$$c_n = [1/(-n+1)!] + j[n/(-n+2)!] \quad \text{حينما } n < 0$$

- (أ) أوجد c_n حينما $-4 \leq n \leq 4$ (ب) أكتب الصيغة المركبة لمتسلسلة فورير $i(t)$ لغاية التوافقية الرابعة . إفرض أن $\omega_0 = 200\pi \text{ rad/s}$ (ج) أوجد i حينما $t = 2.5 \text{ ms}$ (د) أوجد متوسط القدرة المجهزة من قبل التيار $i(t)$ الى حمل 2 أوم على التوالي مع 1 ملي هنري .

الفصل التاسع عشر

تحويلات فوريير

FOURIER TRANSFORMS

1 - 19 مقدمة INTRODUCTION

نبدأ في هذا الفصل باخذ استخدام طرق التحويل في دراسة تصرف الدوائر الخطية من خلال دراسة تحويلة فوريير. أما تحويلة لابلاس فستكون موضوع الفصل القادم.

وان تحويلتي فوريير ولا بلاس هما العمليتان اللتان تحولان دالة للزمن الى دالة (تحويلة فوريير) أو L (تحويلة لابلاس). إذا أعطينا دالة مناسبة للزمن، فان هناك تحويلة فوريير واحدة وليس هناك غيرها. كما أن هناك ترتيباً مشابهاً لتحويلة لابلاس. هذا بالإضافة الى وجود علاقة واحد - الى - واحد لمعكوس التحويلة. أي أنه إذا أعطينا دالة L أو s لتحويلة لابلاس فان هناك دالة واحدة للزمن لوجود لغيرها تعود لها.

وان تحويلتي فوريير ولا بلاس هما تحويلتان تكامليتان *integral transforms*. وهي خاصة مهمة في دراسة أنواع متعددة من الأنظمة الهندسية وبضمنها الدوائر الكهربائية الخطية. ولم نحتاج لحد الآن الى هاتين التحويليتين، نظراً لأن معظم دوائرنا مع دوالها القسرية ودوال استجابتها بسيطة. لذا فاستخدام هذه التحويلة التكاملية يكون ذا فاعلية أكثر نسبياً على هذه الدوال.

ويمكن تشبيه التحويلة بعملية كسر جوزة من قبل قاطرة قطار. فالنتيجة هي تكسر الجوزة وفقدان اللب أيضاً. الا أننا تقدمنا الآن الى نقطة بحيث أصبحت

دوالنا القسرية معقدة وحتى دوائرها قد أصبحت هي الأخرى كذلك وربما غدت معقدة أكثر من الوسائل التي درسناها لحد الآن . فنحن نريد التمعن في دوال قسرية غير دورية ثم في مرحلة تالية الى دوال قسرية (عشوائية) والى اشارات لا يمكن تمثيلها بتاتا كدوال للزمن . تحقق هذه الرغبة أحياناً باستخدام التحويلة التكاملية التي ندرسها الآن .

2 - 19 تعريف تحويلة فوريير DEFINITION OF THE FOURIER TRANSFORM

لنتقدم الى تعريف تحويلة فوريير بمراجعة طيف سلسه من النبضات الدورية المستطيلة التي درسناها في نهاية الفصل الثامن عشر . ولقد كان ذلك الطيف الخطي متقطعاً وهو ما يجب أن نحصل عليه دائماً لدوال دورية مع الزمن . ولقد كان الطيف متقطعاً نظراً لأنه لم يكن ناعماً أو دالة مستمرة مع الزمن . ولكنه بدل ذلك كان يحوي قيماً لاتساوي صفراً في ترددات معينة فقط .

وان هناك عدداً من الدوال التسرية المهمة . إلا انها ليست دوال دورية للزمن مثل النبضة المستطيلة المنفردة أو دالة الخطوة أو الدالة الانحدارية ramp . او ربما الدالة الغريبة المسماة بدالة الومضة impulse والتي سندرسها ضمن هذا الفصل فيما بعد . ويمكن الحصول على طيف التردد لمثل هذه الدوال غير الدورية ولكن طيفها يكون مستمراً اي بصورة عامة . وان بعض الطاقة يمكن وجودها في أي فترة ترددية غير صفرية مهما كانت صغيرة .

وسنحاول المضي في هذا المفهوم بالبده بدوال دورية . ثم نترك الفترة لتزداد الى اللانهاية . إن خبرتنا بالنبضة المستطيلة الدورية في نهاية الفصل الثامن عشر تشير الى أن الغلاف ينقص اتساعه بدون أن يتغير شكله . كما يمكن الحصول على المزيد من مركبات التردد عند كل فسحة من الترددات . وعندما يصل الى غايته فاننا نتوقع الحصول على غلاف متكون من اتساعات صغيرة متلاشية ومملوءة بمركبات ترددية عددها لانهاية له وبينها فسحات ترددية صغيرة جداً الى حد الثلاثي . وان عدد مركبات التردد بين 0 Hz و 100 Hz مثلاً يبلغ مالانهاية له ولكن اتساع كل منها يقترب من الصفر . ويبدو لأول وهلة . أن طيفاً اتساعه صفراً عبارة محيرة . إلا أننا نعلم أن الطيف الخطي لدالة قسرية دورية يعطي الاتساع لكل مركبة تردد . ولكن مامعنى الطيف المستمر الذي اتساعه صفر لدالة قسرية غير دورية ؟ وان هذا

السؤال سنجيب عنه في الفقرة الآتية . أما الآن فنستمر باستخدام طريقة الغاية التي أشرنا إليها فيما سبق . نبدأ أولاً بالصيغة الأسية لتسلسلة فوريير :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1)$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2)$$

وكذلك

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

$$T \rightarrow \infty$$

ولنفرض الآن ان

ومن ثم فالمعادلة (3) تعطي أن ω_0 يجب أن تصبح متلاشية في الصفر وسنرمز لهذه الغاية بالتفاضلية :

$$\begin{aligned} \omega_0 &\rightarrow d\omega \\ \frac{1}{T} &= \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \end{aligned} \quad (4)$$

وأخيراً فإن تردد أي توافقية مثل $n\omega_0$ يجب أن يعود الآن الى متغير تردد عام يصف الطيف المستمر وبكلمة أخرى فإن n يجب أن تتجه الى اللانهاية كلما اقتربت n من الصفر . ومثل حاصل الضرب هذا محدود أي :

$$n\omega_0 \rightarrow \omega \quad (5)$$

وعند تطبيق عملية الغايات هذه على المعادلة (2) نجد أن c_n يجب أن تقترب من الصفر كما فرضنا سابقاً . وإذا ضربنا طرفي المعادلة (2) بالفترة T ثم باشرنا بعملية الغاية . حصلنا على حل ملموس هو :

$$c_n T \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

وان الطرف الأيمن لهذا المقدار هو دالة ω (وليس لـ t) وسنمثله بـ $F(j\omega)$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6)$$

ولغرض تطبيق عملية الغاية على المعادلة (1) نضرب ونقسم المجموع على T :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n T e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T}$$

كما نستخدم (4) و (5) والكمية الجديدة $F(j\omega)$. وعند الغاية يصبح المجموع تكاملاً .

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (7)$$

تدعى المعادلتان (6) و (7) بزوج تحويلة فوريير . فالدالة $F(j\omega)$ هي تحويلة فوريير لـ $f(t)$ كما أن $f(t)$ هي تحويلة فوريير العكسية لـ $F(j\omega)$.

إن هذا الزوج من علاقات التحويلة مهم جداً وعلينا أن نحفظه عن ظهر قلب ونؤشر عليه بسهم ونبقيه بمخيلتنا مع تصور تام ، من الآن وإلى الأبد 1 . وسنؤكد أهمية هاتين العلاقتين باعادتهما ووضعهما داخل مستطيل كما مبين أدناه .

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f(t) dt \quad (8a)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \quad (8b)$$

وإن سؤالاً من المناسب مناقشته الآن هو : هل يمكن الحصول على تحويلة فوريير لأي دالة مهما كانت ، مثل $f(t)$ وذلك باستخدام هاتين العلاقتين ؟ الجواب عن ذلك بالاجاب لكل فولتية أو تيار يمكن انتاجه عملياً . وإن الشرط الكافي لوجود $F(j\omega)$ هو :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

وهذا الشرط لا لزوم له لأنه نظراً لأن بعض الدوال لاتوفي بهذا الشرط ولكن لها تحويلة فوريير مثال ذلك دالة الخطوة . كما اننا سنرى فيما بعد أن $f(t)$ ليس من الضروري ان تكون دورية لكي يكون لها تحويلة فوريير . حيث أن تمثيل متسلسلة فوريير لدالة دورية مع الزمن هو حالة خاصة من تمثيل تحويلة فوريير العامة .

كما أشرنا سابقاً ، فإن زوج تحويلتي فوريير هما علاقتان لامثيل لهما unique . فلكل دالة مثل $f(t)$ هناك $F(j\omega)$ واحدة معينة . ولكل $F(j\omega)$ هناك $f(t)$ واحدة بعينها .

لنحاول استخدام تحويلة فوريير لايجاد الطيف المستمر لنبضة مستطيلة واحدة . فسنختار النبضة المبينة في الشكل 18.8 (أ) والمعادة في الشكل 19.1 (أ) والتي تقع ضمن $t_0 < t < t_0 + \tau$. ومن ثم :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t_0 < t < t_0 + \tau \\ 0 & t < t_0 \text{ and } t > t_0 + \tau \end{cases}$$

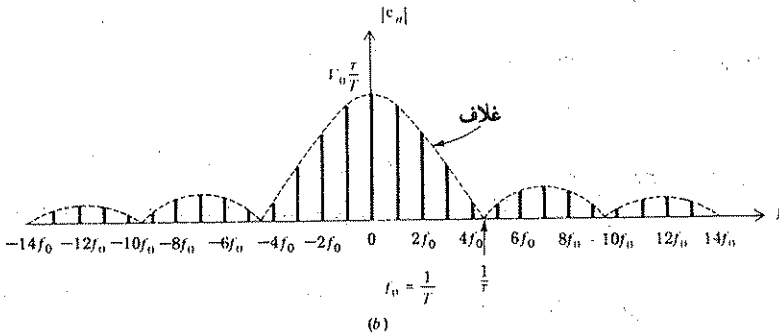
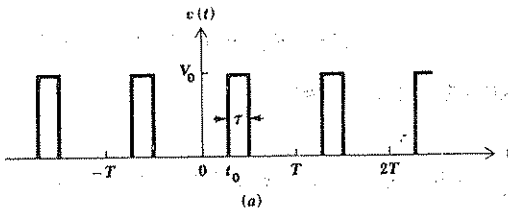
يمكن الحصول على تحويلة فوريير لـ $(f(t))$ من العلاقة (8a)

$$F(j\omega) = \int_{t_0}^{t_0+T} V_0 e^{-j\omega t} dt$$

وهذه يمكن تكاملها وتبسيطها بسهولة

$$F(j\omega) = V_0 T \frac{\sin \frac{1}{2}\omega T}{\frac{1}{2}\omega T} e^{-j\omega(t_0 + T/2)}$$

إن قيمة $F(j\omega)$ تنتج طيف تردد مستمر. وبديهي أن يكون بصيغة دالة العينات. وأن قيمة $F(0)$ هي $V_0 T$. وشكل الطيف مطابق للمنحني المبين بالخط المتقطع في الشكل 16 - 19 (ب). وأن رسم $|F(j\omega)|$ كدالة ل لا يشير الى اتساع الفولتية الموجودة في تردد ما. ماهي اذا؟ ان تفحص المعادلة (7) يشير الى ان $F(j\omega)$ ذات وحدة هي فولت لكل وحدة تردد وهي وحدة غريبة للكثيرين منا. ولغرض فهم أفضل بقليل، دعنا ننظر الى بعض خواص $(j\omega)$



الشكل 1 - 19 (أ) سلسلة من النبضات المستطيلة الدورية

(ب) الطيف المتقطع العائد ل $|c_n|$

تمارين :

19.1 إذا كانت $f(t) = 100 \sin 20\pi t$ حينما $-0.05 < t < 0.05$ وكانت $f(t) = 0$ حينما $t < -0.05$ وكذلك حينما $t > 0.05$ ، احسب تحويلة فوريير عند ω (أ) صفرأ (ب) 10π (ج) 10π (د) 20π (هـ) 40π
 الجواب : $-j5; -j4.24; 0; j4.24; j5$

19 - 2 إذا كانت $F(j\omega) = 100$ حينما $1 < \omega < 1$ وكانت $F(j\omega) = 0$ حينما $\omega < -1$ وكذلك حينما $\omega > 1$ ، اوجد $f(t)$ عندما t تساوي (أ) صفرأ (ب) 1 (ج) -1 (د) 2 (هـ) π .
 الجواب : $0; 14.47; 26.8; 26.8; 31.8$

3 - 19 بعض خواص تحويلة فوريير

SOME PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

غرضنا من هذه الفقرة هو تبين بعض الخواص الرياضية لتحويلة فوريير وفهم مفهومها الفيزيائي وهو الأمر المهم . وسنبداً بمتطابقة اولر لاستبدال $e^{-j\omega t}$ في المعادلة (8a)

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

وحيث ان $f(t)$ و $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ كلها دوال حقيقية للزمن فان كلا التكاملين في المعادلة (9) هما حقيقيان لـ ω . لذا بفرض أن

$$F(j\omega) = A(\omega) + jB(\omega) = |F(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} \quad (10)$$

نحصل على

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (11)$$

$$B(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (12)$$

$$|F(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \quad (13)$$

وكذلك

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \quad (14)$$

وبالاستعاضة عن ω بـ ω يتبين أن $A(\omega)$ و $|F(j\omega)|$ كلاهما دالتان زوجيتان لـ ω .
بينما $B(\omega)$ و $\theta(\omega)$ كلاهما دالتان فرديتان لـ ω

الآن اذا كانت $f(t)$ هي دالة زوجية لـ t فان التكامل في المعادلة (12) هو دالة
يدية للزمن ، كما أن تناظر النهايات يجبر $B(\omega)$ ان تكون صفراً . لذا اذا كانت
 $f(t)$ زوجية فان تحويله فورير لها $F(j\omega)$ تكون حقيقية وهي دالة زوجية لـ ω
وتكون دالتها الطورية $\theta(\omega)$ صفراً او π لكل قيم ω . إلا أنه اذا كانت $f(t)$ دالة
فردية للزمن t فان $A(\omega)$ يساوي صفراً وتكون $F(j\omega)$ فردية كما تكون دالة
خيالية خالصة لـ ω كما تساوي $\theta(\omega)$ لـ $\pm\pi/2$. إلا أنه بصورة عامة تكون
 $F(j\omega)$ دالة مركبة لـ ω . وأخيراً نلاحظ ان الاستعاضة عن ω بـ $-\omega$ في المعادلة
(9) يشكل مرافق $F(j\omega)$ لذا

$$F(-j\omega) = A(\omega) - jB(\omega) = F^*(j\omega)$$

كما أن لدينا

$$F(j\omega)F(-j\omega) = F(j\omega)F^*(j\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = |F(j\omega)|^2$$

ويتذكر هذه الخواص لتحويله فورير . نجد أنفسنا على استعداد لدراسة المفزي
الفيزياوي . ولنفرض أن $f(t)$ هي إما الفولتية عبر مقاوم قيمته $1-\Omega$ أو التيار الذي
يمر خلاله .

لذا فان $f^2(t)$ هي القدرة المجهزة الى مقاوم مقداره $1-\Omega$ من قبل الدالة $f(t)$.
ويأخذ التكامل على امتداد محور الزمن نحصل على الطاقة الكلية المسلمة من قبل
 $f(t)$ الى مقاوم مقداره 1 أوم

$$W_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt \quad (15)$$

دعنا نلجأ الى أسلوب فيه بعض المراوغة وستتصور التكامل المذكور في (15) على أنه
تكامل $f(t)$ مضروبة بنفسها ثم نعوض عن احدى هاتين الدالتين بدلالة المعادلة (8b)

$$W_{in} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F(j\omega) d\omega \right] dt$$

وحيث أن $f(t)$ ليست دالة لمتغير التكامل ، لذا بإمكاننا إدخالها في داخل قوسي
التكامل ثم نستبدل تسلسل التكاملين أحدهما بدل الآخر .

$$W_{in} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

ثم بعد ذلك نرحف $F(j\omega)$ الى خارج التكامل الداخلي فيصبح ذلك التكامل $F(-j\omega)$

$$W_{in} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)F(-j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

وبتجميع هذه النتائج

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (16)$$

وان المعادلة (16) مفيدة جداً وتعرف بنظرية بارسنفال² . وتعطي هذه النظرية مع المعادلة (15) الطاقة المصاحبة لـ $f(t)$ التي يمكن الحصول عليها إما بأخذ التكامل على طول الزمن في حيز الزمن أو بـ $(1/2\pi)$ مرة بـ (التكامل على طول التردد في حيز التردد).

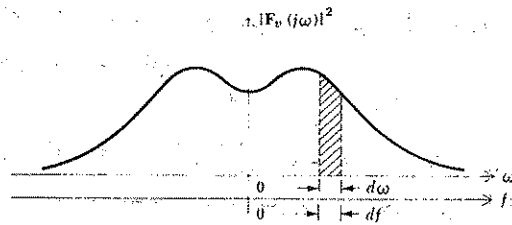
ان نظرية بارسنفال تقودنا الى فهم أعمق وتوضيح جيد لمعنى تحويلة فوريير .

لنأخذ الفولتية $v(t)$ مع تحويلة فوريير $F_r(j\omega)$ وطاقة المقاوم 1 أوم : W_{ir} :

$$W_{ir} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_r(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F_r(j\omega)|^2 d\omega$$

حيث أن المتطابقة اليمنى تنتج من الحقيقة وإن $|F_r(j\omega)|^2$ هي دالة زوجية لـ ω . وحيث أن $\omega = 2\pi f$ فإنه يمكن كتابة

$$W_{ir} = \int_{-\infty}^{\infty} |F_r(j\omega)|^2 df = 2 \int_0^{\infty} |F_r(j\omega)|^2 df \quad (17)$$



الشكل 2 - 19 مساحة الشريحة $|F_r(j\omega)|^2 df$ هي الطاقة المصاحبة لـ $1-\Omega$ الموجودة ضمن عرض الحزمة df .

2 ماري - انطونيو بارسنفال ديشيني الفرنسي كان رياضياً فريداً وجغرافياً وشاعراً نُشر نتائجه عام 1805 قبل نشر فوريير لنظريته بسبعة عشر عاماً.

يوضح الشكل 2 - 19 رسماً نموذجياً لـ $|F_r(j\omega)|^2$ كدالة لكل من ω و f . إذا قسمنا مقياس رسم التردد الى أجزاء متناهية في الصغر df ، فان المعادلة (17) تبين ان مساحة الشريحة التفاضلية تحت المنحني $|F_r(j\omega)|^2$ والتي عرضها df هي $|F_r(j\omega)|^2$. وقد أُشير الى هذه المساحة بتظليلها. حينما تتغير f من اللانهاية السالبة الى اللانهاية الموجبة يكون مجموع هذه المساحات هو الطاقة الكلية للجهاز من قبل $v(t)$ للمقاومة $1-\Omega$. لذا فان $|F_r(j\omega)|^2$ هو كثافة الطاقة أو الطاقة لوحدة عرض الحزمة لـ $v(t)$ ووحدتها هي الجول / هيرتز.

وهذه الطاقة تكون على الدوام حقيقية وزوجية ولا تأخذ أية قيمة سالبة عند كل قيم ω . وبأخذ التكامل $|F_r(j\omega)|^2$ على امتداد حيز التردد، بإمكاننا حساب جزء الطاقة الذي يُقع في حيز معلوم. لاحظ بأن كثافة الطاقة ليست دالة لطور $F_r(j\omega)$ ، لذا فهناك عدد غير متناه من دوال الزمن وتحويلات فورير اللواتي لهن دالة كثافة الطاقة نفسها.

وعلى سبيل المثال، دعنا نفرض أن $v(t)$ هي دالة فولتية قسرية سلطت على دخل مرشح امرار حزمي مثالي³ وان $v_n(t)$ هي فولتية الاخراج.

$$v(t) = 4e^{-2nt}$$

سنختار لـ $v(t)$ النبضة الاسية ذات الطرف الواحد (أي $v(t) = 0$ لكل $t < 0$).

ولنفرض أن حزمة الامرار للمرشح تعرف بـ $2 > |f| > 1$. لذا فإن الطاقة في $v_n(t)$ ستساوي طاقة ذلك الجزء من $v(t)$ الذي يحوي مركبات التردد ضمن الفترة من $f < 2$ او $f < -1$ وسنحاول ايجاد تحويلية فورير لـ $v(t)$.

3 مرشح الامرار الحزمي النموذجي هو شبكة ذات منفذين تسمح لكل مركبات التردد لاشارة الدخل التي تقع بين $\omega_1 < \omega < \omega_2$ بالمرور بدون توهين من طرفي الدخل الى طرفي الخرج. اما مركبات التردد التي تقع خارج هذه الحدود (والمساة بحزمة الامرار) فتوهن.

$$F_v(j\omega) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v(t) dt = 4 \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{4}{3 + j\omega}$$

ومن ثم سنحاول إيجاد طاقة المقاوم $1-\Omega$ الكلية في إشارة الإدخال ، إما بواسطة :

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_v(j\omega)|^2 d\omega = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{9 + \omega^2}$$

أو باستخدام

$$= \frac{16}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{9 + \omega^2} = \frac{8}{3} \text{ J}$$

$$W_{1\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt = 16 \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{8}{3} \text{ J}$$

إلا أن الطاقة الكلية في $v_o(t)$ أصغر من ذلك وتساوي :

$$W_{1\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{-4\pi} \frac{16d\omega}{9 + \omega^2} + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{16d\omega}{9 + \omega^2} = \frac{16}{\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{d\omega}{9 + \omega^2}$$

$$= \frac{16}{3\pi} \left(\tan^{-1} \frac{4\pi}{3} - \tan^{-1} \frac{2\pi}{3} \right) = 0.358 \text{ J}$$

لذا نجد بأن مرشح الامرار الحزمي يمكننا من إزالة طاقة من حدود ترددات معينة بينما يحافظ على الطاقة المحتواة في حدود ترددات أخرى . لذا فتحويلة فورير تساعد على وصف عملية الترشيح وصفاً كمياً بدون حساب $v_o(t)$ فعلياً على الرغم من أننا سنجد فيما بعد أن تحويلة فورير يمكن استخدامها أيضاً للحصول على تعبير لـ $v_o(t)$ ، إذا ما رغبتنا بإيجاد ذلك .

تمرينان

3 - 19 إذا كان $i(t) = 5e^{3t}u(-t)$ ، أوجد (أ) A ، (ب) B (ج) $|F(j3)|$.

الجواب 1.179; 1.154; 0.833

4 - أوجد الطاقة المستهلكة في أوم واحد والمصاحبة للتيار $i(t) = 5e^{-3t}u(-t)$ A. ، في الفترة (أ) $-1 < t < 0$ s ، (ب) $-1 < \omega < 1$ rad/s ، (ج) $-3 < \omega < 3$ rad/s
 الجواب (0.853; 2.08; 4.16)

4 - دالة وحدة الومضة THE UNIT-IMPULSE FUNCTION

قبل المضي مناقشة تحويلية فورير نحتاج التوقف قليلاً لتعريف دالة انفرادية singularity function تدعى بوحدة الومضة unit-impulse أو دالة دلتا delta function.

سنرى فيما بعد أن دالة وحدة الومضة تساعدنا لتأكد من قولنا السابق بأن دوال الزمن الدورية وغير الدورية تمتلك تحويلية فورير. هذا بالإضافة الى أن تحليلنا لدوائر RLC العامة يمكن أن يتم باستخدام وحدة النبضة. ولقد تجنبنا فيما سبق احتمال تغير الفولتية عبر متسعة او التيار خلال محث بكمية محسوسة خلال فترة زمنية مقدارها صفرأ. ففي مثل هاتين الحالتين تكون قيمتا التيار خلال المتسعة أو الفولتية عبر محث لانهايتيين. وعلى الرغم من أن هذا غير ممكن فيزيائياً. إلا أنه ممكن رياضياً. لذا فإنه اذا سلطت فولتية الخطوة $V_{int}(t)$

مباشرة على متسعة غير مشحونة C فان ثابت الزمن يكون صفرأ حيث أن R_{eq} تساوي صفرأ و C ذات قيمة محدودة. ويعني ذلك أن شحنة مقدارها CV_0 يجب أن تتكون عبر المتسعة خلال زمن متناه في الصفر. ويمكننا القول بالنظر الى الأمور من داخلها وليس بالتكلم بالعموميات أن تياراً قيمته مالاانهاية يسري في زمن مقداره صفر يولد شحنة محدودة على المتسعة. ويمكن وصف هذه الظاهرة باستخدام دالة وحدة الومضة. سنعرف وحدة الومضة بأنها دالة للزمن قيمتها صفر يكون دليلها argument أقل من الصفر (عموماً) $(t - t_0)$. كما أن قيمتها تساوي صفرأ ايضاً حينما تكون قيمة الدليل أكبر من الصفر. أما قيمتها عند الصفر فتساوي لانهاية ومساحتها تساوي وحدة واحدة. اما رياضياً فتعرف كما يلي :

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0 \quad (18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad \text{كما أن} \quad (19)$$

حيث ترمز δ (الدلتا الصغيرة) الى وحدة الومضة . وفي ضوء قيم الدالة المعطاة بالمعادلة (18) ومن الواضح أن حدود التكامل في (19) يمكن أن تأخذ أي قيم اصغر من t_0 أو أكبر منها . وبالأخص يمكن أن نفرض أن t_0^- و t_0^+ بأنهما أي قيمتين للزمن قريبتين من t_0 . ومن ثم يمكن وضع (19) بالشكل التالي :

$$\int_{t_0^-}^{t_0^+} \delta(t - t_0) dt = 1 \quad (20)$$

في معظم الأجزاء سوف نهتم بالدوائر التي تحوي على مقطع واحد وسنختار مقياس الزمن بحيث أن عملية الانتقال (الفتح والغلق) تحدث في اللحظة $t = 0$. لهذه الحالة الخاصة سنعرف المعادلات

$$\delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \quad (21)$$

والمعادلة

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (22)$$

$$\int_0^{0^+} \delta(t) dt = 1 \quad (23)$$

وإن وحدة الومضة يمكن أن تضرب بمقدار ثابت أيضاً ولا يؤثر ذلك على (18) أو (20) نظراً لأن القيم يجب أن تبقى صفراً حينما لا يساوي الدليل صفراً .

إلا أن ضرب أي تعبير للتكامل في ثابت ما يعني أن المساحة تحت الومضة تساوي عامل الضرب الثابت . وتدعى بشدة الومضة *strength* الومضة . لذا فالومضة $5\delta(t)$ ذات شدة مقدارها 5 والومضة $10\delta(t-2)$ ذات شدة مقدارها (10 -) . إذا ضربت وحدة الومضة بدالة للزمن فإن شدتها ستكون قيمة تلك الدالة في اللحظة التي يكون دليل الومضة صفراً . وبكلمة أخرى إن شدة الومضة $e^{-1/2}\delta(t-2)$ هي 0.368 وشدة الومضة $(5\pi t + \pi/4)\delta(t)$ هي 0.785* لذا فإن بالإمكان كتابة التكاملات التالية (4) والتي تعطي العبارة نفسها بصيغة رياضياً :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (25)$$

* وردت 0.707 في نسخة الاصل وهو خطأ (المترجمون)

(4) تدعى هذه التكاملات بتكاملات التمهيص *sifting* نظراً لأن التكامل يختار قيمة معينة لـ $f(t)$

إن الرمز الرياضي للومضة مبين في الشكل 19.3 حيث $f(t) = 4\delta(t + 1) - 3\delta(t)$ قد رسمت كدالة للزمن اعتيادياً نشير الى شدة الومضة بين قوسين مجاورين للومضة .

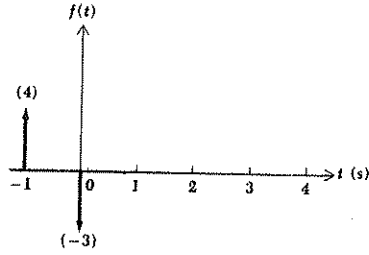
لاحظ عدم اجراء أية محاولة للإشارة الى شدة ومضة بتغيير اتساعها . فكل ومضة مسمارية spike لها اتساع غير متناه . وكل الومضات يجب رسمها بسهم له الاتساع المعتاد نفسه . ترسم الومضات الموجبة والسالبة فوق وتحت محور الزمن على الترتيب . ولغرض تجنب الالتباس مع المحاور فإن الخطوط والأسهم المستخدمة للومضات ترسم اسمك من المحاور .

وسوف نرى فيما بعد أن هناك تفسيرات شائعة أخرى لوحدة الومضة . وسنحاول ايجاد صيغة بيانية ليس لها اتساع غير متناه ولكنها تقترب من وحدة الومضة عندما يزداد الاتساع .

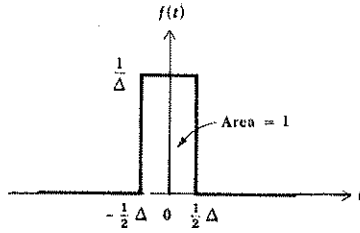
دعنا نأخذ نبضة مستطيلة كالمبينة في الشكل 4.19 . وإن عرض النبضة المختار هو Δ واتساعها هو $1/\Delta$. لذا فالمساحة تحت النبضة يجب أن تكون واحداً مهما كان عرض النبضة . كلما صغرت Δ ، ازداد الاتساع $1/\Delta$ وأصبحت النبضة قريية أكثر من وحدة الومضة .

وإن استجابة عنصر دائرة لوحدة الومضة يمكن ايجاده بحساب الاستجابة لنبضة مستطيلة ثم ندع Δ تقترب من الصفر . ولكن نظراً لأن استجابة وحدة الومضة يمكن ايجادها بسهولة لذا يجب أن نستنتج أن هذه الاستجابة هي نفسها تقريب مقبول للاستجابة المتكونة من نبضة مستطيلة قصيرة .

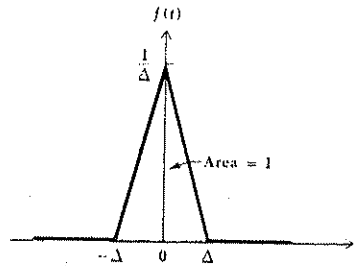
وفي الشكل 19.5 ، رسمت نبضة مثلثية يمكن استخدامها كتقريب لوحدة الومضة . وحيث اننا نفضل أيضاً مساحة مقدارها واحداً فإن نبضة اتساعها $1/\Delta$ يجب أن يكون عرضها الكلي 2Δ حينما تقترب Δ من الصفر تقترب النبضة المثلثية من وحدة الومضة .



الشكل 19.3 ومضة موجية وأخرى سالبة مرسومتان كدوال للزمن - شدة الأولى 4 والثانية 3 - لذا فالدالة الكلية هي $f(t) = 4\delta(t + 1) - 3\delta(t)$

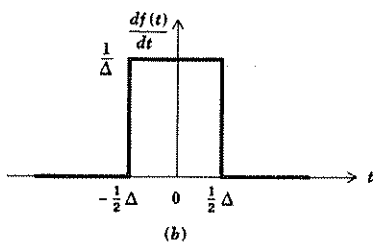
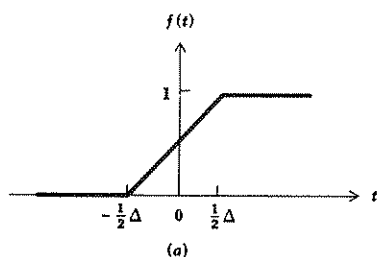


الشكل 19.4 نبضة مستطيلة ذات وحدة المساحات تقترب من وحدة الومضة حينما تقترب Δ من الصفر



الشكل 19.5 نبضة مثلثية ذات وحدة المساحات تقترب من وحدة الومضة حينما تقترب Δ من الصفر

وهناك أشكال أخرى للنبضات والتي عند غايتها تقترب من وحدة الومضة .
ولكننا سنأخذ النبضة الأسية السالبة مثلاً أخيراً . وسنحاول أولاً تبين شكل هذه
الدالة ذات المساحة التي تساوي واحداً وذلك بإيجاد المساحة تحت دالة أسية عامة :



الشكل 19.6 (أ) دالة وحدة الخطوة المعدلة حيث استغرق التغيير من الصفر الى الواحد زمناً مقداره Δ وكان
التغير خلاله خطياً
(ب) مشتقة وحدة الخطوة المعدلة . حينما Δ تقترب من الصفر فإن (أ) تصبح وحدة الخطوة و (ب) تقترب
من وحدة الومضة .

لذا

$$\text{المساحة} = \int_0^{\infty} A e^{-t/\tau} dt = -\tau A e^{-t/\tau} \Big|_0^{\infty} = \tau A$$

لذا فإن علينا أن نضع $A = 1/\tau$. وسيكون ثابت الزمن صغيراً . سنستخدم Δ مرة
أخرى لتمثيل هذا الزمن الصغير . لذا فالدالة الاسية

$$f(t) = \frac{1}{\Delta} e^{-t/\Delta} u(t)$$

تقترب من وحدة الومضة حينما تقترب Δ من الصفر . ويشير هذا التمثيل لوحدة
الومضة الى أن الاضمحال الأسي لفولتية أو تيار في دائرة يقترب من الومضة (وليس
من الضروري من وحدة الومضة) عندما يتناقص ثابت الزمن .

في آخر تفسير لنا لوحدة الومضة . دعنا نحاول ترسيخ العلاقة مع دالة وحدة الخطوة . وان الدالة المبينة في الشكل 6 - 19 (أ) هي وحدة الخطوة تقريباً إلا أنها تحتاج الى Δ من الثواني لانها التغير الخطي من الصفر الى وحدة الاتساع . تحت دالة وحدة الخطوة المعدلة هذه والمبينة في الشكل 19.6 (ب) تتبين مشتقتها . وحيث ان الجزء الخطي للخطوة المعدلة يرتفع بسرعة وحدة واحدة كل Δ من الثواني ، فإن المشتقة يجب أن تكون نبضة مستطيلة اتساعها $1/\Delta$ وعرضها Δ . وهذه هي اول دالة سبق وان اخذناها كتقريب لوحدة الومضة . وكما نعلم أنها تقترب من وحدة الومضة حينما تقترب Δ من الصفر لذا نستنتج أن وحدة الومضة نفسها يمكن اعتبارها مشتقة لدالة وحدة الخطوة مع الزمن (5) أي رياضياً

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (26)$$

وعلى العكس

$$u(t) = \int_0^t \delta(t) dt \quad t > 0 \quad (27)$$

وحيث الغاية السفلى للتكامل يمكن أن تكون بصورة عامة أي قيمة لـ t أقل من الصفر . ويمكن استعمال أي من المعادلتين (26) و (27) كتعريف لوحدة الومضة وذلك وفق ماتشاء .

يتبين أن هناك طريقة أخرى تفرض نفسها لغرض ايجاد الاستجابة لوحدة الومضة . فاذا استطعنا أن نجد استجابة وحدة الخطوة فان طبيعة الدائرة الخطية تستوجب أن تكون استجابة وحدة الومضة هي مشتقة استجابة وحدة الخطوة . ومن منطلق معاكس ، اذا علمت استجابة وحدة الومضة فان تكامل هذه الاستجابة من $-\infty$ الى t يجب ان يساوي استجابة وحدة الخطوة .

دعنا نطبق المعادلة (27) لتبين كيف يمكن لومضة تيار أن تضع فوراً شحنة على متسعة نظراً لأن شدة الومضة يمكن أن تفسر على أنها المساحة تحت الومضة ، فان تيار يجب أن يكون لها شدة ذات وحدة هي وحدة التيار مضروبة في الزمن . أي أن لها وحدة الشحنة لذا نسلط الومضة ، $i(t) = Q_0 \delta(t - t_0)$

(5) . بالحقيقة ان عدم وجود مشتقة لوحدة الخطوة في نقاط التقطع قد ولد بعض التردد عند بعض الرياضيين . ولكن بالرغم من ذلك فإن الومضة هي دالة تحليلية مفيدة .

على متسعة C . وبفرض اصطلاح الاشارات غير الفعالة تكون فولتية المتسعة

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \\ &= \frac{Q_0}{C} \int_{-\infty}^t \delta(t - t_0) dt \\ &= \frac{Q_0}{C} u(t - t_0) \end{aligned}$$

نلاحظ أن فولتية المتسعة تقفز فجأة وبتقطع من الصفر الى Q_0/C في اللحظة $t = t_0$.

تمرينان :

5 - 19 أوجد شدة الومضة المعرفة بما يلي : (أ) الغاية عندما a تقترب من

الصفر

للمقدار $[\cos(\frac{1}{2}\pi t/a)][u(t+a) - u(t-a)]/a$

(ب) df/dt حيث $f(t) = \frac{1}{2}u(t + \pi)$

(ج) الغاية عندما k تقترب من الصفر للمقدار $k/(x^2 + k^2)$, $k > 0$ حيث

الجواب : 3.14 ; 1.273 ; 0.5

6 - 19 احسب (أ) $\int_{-\infty}^{\infty} 5 \ln(\cos \pi x) \delta(x - 0.3) dx$

(ب) $\int_{-5}^0 (\cos \pi t)[\delta(t) + \delta(2-t)] dt$

(ج) $2 \int_0^{1.1} \tau \delta(\sin 2\pi\tau) d\tau$

الجواب : 3 ; 1 ; 2.66 -

5 - 19 أزواج لتحويلة فوريير لبعض دوال الزمن البسيطة

FOURIER TRANSFORM PAIRS FOR SOME SIMPLE TIME FUNCTIONS

نحاول الآن ايجاد تحويلة فوريير لوحدة الومضة $\delta(t - t_0)$ أي اننا مهتمون بالخواص الطيفية أو وصف الدالة الانفرادية في حيز التردد . فاذا استخدمنا الاصطلاح { } فنعني بها تحويلة فوريير للمقدار { } ومن ثم :

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s't} \delta(t - t_0) dt$$

ومن مناقشاتنا السالفة لمثل هذا التكامل وباستخدام المعادلة (25) بالأخص فان لدينا :

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0 \quad (28)$$

وهذه الدالة المركبة لـ ω تؤدي الى دالة كثافة الطاقة في (1-1) :

$$|\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}|^2 = \cos^2 \omega t_0 + \sin^2 \omega t_0 = 1$$

وهذه النتيجة المذهلة تقول بأن الطاقة للأوم الواحد لكل وحدة عرض الحزمة تساوي واحداً لكل الترددات ، وان الطاقة الكلية لوحدة الومضة غير متناهية في الكبر (6) . لذا فليس من الغريب ان نستنتج ان وحدة الومضة « غير عملية » نظراً لعدم امكانية توليدها في المختبر . وفوق ذلك حتى ولو فرضنا أنها توفرت لنا فانها يجب أن تظهر لنا مشوهة بعد ان تحددت بعرض حزمة محدودة لأي جهاز مختبري عملي .

نظراً لوجود نسبة فريدة هي واحد - الى - واحد بين دالة الزمن وتحويلة فورير لها ، يمكننا القول أن تحويلة فورير العكسية لـ $e^{-j\omega t_0}$ هي $\delta(t - t_0)$. وباستخدام الاشارة $\mathcal{F}^{-1}\{\}$ لتعني تحويلة فورير العكسية ، فإن لدينا

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-j\omega t_0}\} = \delta(t - t_0)$$

لذا فاننا نعلم الان

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} e^{-j\omega t_0} d\omega = \delta(t - t_0)$$

وعلى الرغم من أننا سنفشل في محاولة ايجاد قيمة هذا التكامل غير الممكن . وباستخدام الرموز يمكننا أن نكتب :

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0} \quad (29)$$

حيث ترمز \Leftrightarrow الى أن الدالتين تكونان أحد أزواج تحويلة فورير .

وبالاستمرار في دراستنا لدالة وحدة الومضة ، نفرض أن دالة خاصة للزمن $f(t)$ تعرف بان لها تحويلة فورير حسب العلاقة .

$$F(j\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$$

(6) لاحظ مثلاً من الشكل 4 - 19 ان الطاقة الكلية في وحدة الومضة هي

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^2 dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\Delta}\right) = \infty$$

والتي هي وحدة الومضة في حيز التردد وتقع عند $\omega = \omega_0$. لذا فان $f(t)$ يجب ان تساوي

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \delta(\omega - \omega_0) d\omega$$

وباستخدام خاصية التمحيص sifting مرة أخرى لوحدة الومضة . نحصل على

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

لذا يمكننا الآن كتابة

$$\frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0)$$

او

$$e^{j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \quad (30)$$

كما أنه بتغيير بسيط في الاشارات نحصل على

$$e^{-j\omega_0 t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \quad (31)$$

ومن الواضح ان دالة الزمن مركبة في كل من (30) و (31) ولا توجد في عالم المختبرات الواقعية . وان دوال الزمن مثل $\cos \omega_0 t$ يمكن توليدها بأجهزة مختبرية لكن دوال مثل $e^{j\omega_0 t}$ لايمكن توليدها . الا أننا نعلم أن

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

وأنه من السهل الاستنتاج من تعريف تحويلة فوريير أن :

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} + \mathcal{F}\{f_2(t)\} = \mathcal{F}\{f_1(t) + f_2(t)\} \quad (32)$$

لذلك

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} &= \mathcal{F}\{\frac{1}{2} e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{\frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}\} \\ &= \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned}$$

والتي تشير الى أن وصف $\cos \omega_0 t$ في حيز التردد يعطي زوجاً من الومضات عند $\omega = \pm\omega_0$ وهذه يجب أن لاتسبب أي مفاجئة حيث أننا لاحظنا في مناقشتنا للتردد المركب في الفقرة 2 - 13 أ و ب التردد الجيبي للزمن يمثل دائماً بزوج من الترددات الخيالية الواقعة عند $s = \pm j\omega_0$ لذلك فأن :

$$\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad (33)$$

وقبل المضي باعطاء تحويلات فورير لدوال زمنية أخرى ، علينا أن نفهم ماذا نريد أن نصل إليه ؟ ولماذا ؟ . ولقد وجدنا لحد الآن عدة أزواج لتحويلات فورير . ومع زيادة معلوماتنا عن هذه الأزواج فانه يمكن استخدامها بدورها لايجاد أزواج أخرى . ومن ثم نحصل على كتيب لمعظم دوال الزمن الشائعة والتي في تحليل الدوائر مع مايقابلها من تحويلات فورير . لذا فسوف لا يكون لدينا وصف الحيز الزمني لهذه الدوال فقط بل كذلك وصف للحيز الترددي لها . ومن ثم فانه كما سبق وأن استخدمنا تحويلات الطوري لتبسيط ايجاد الاستجابة الجيبية لحالة الاستقرار فسيكون بإمكاننا تحويلة فورير لمختلف الدوال القسرية لكي يسهل ايجاد الاستجابة الجيبية لحالة الاستقرار فسيكون بإمكاننا استخدام تحويلة فورير لمختلف الدوال القسرية لكي يسهل ايجاد الاستجابة الكاملة بمركبتها الطبيعية والقسرية .

وحيثما نوسع من تفكيرنا الى استخدام تحويلة لابلاس في الفصل القادم فسوف يكون بإمكاننا أن ندخل بحسابنا الظروف الابتدائية أيضاً والتي سبق أن أتعبتنا في الماضي . مع أبقاء هذه الافكار في ذهننا دعنا ننظر الى أزواج محدودة أخرى من التحويلات بهدف ادراج استنتاجاتنا بصيغة مفيدة للرجوع اليها في المستقبل .

وان أول دالة قسرية مرت بنا قبل عدد من الفصول كانت الفولتية أو التيار المستمرين . ولايجاد تحويلة فورير لدالة ثابتة مع الزمن مثل $f(t) = K$ فان أول مانمیل اليه هو الاستعاضة عن الثابت بالمعادلة المعرفة لتحويلة فورير . ثم نحسب التكامل الناتج . واذا فعلنا ذلك فسنجد أنفسنا امام مقدار غير قابل للحساب . ولكن لحسن الحظ سبق وأن وجدنا حل هذه المسألة بالمعادلة (31)

$$e^{-j\omega t} \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$$

بإمكاننا أن نجد أنه اذا عوضنا عن $\omega_0 = 0$ فان زوج التحويلة سيكون

$$1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega) \quad (34)$$

ومنها ينتج أن

$$K \Leftrightarrow 2\pi K\delta(\omega) \quad (35)$$

وبذا انتهى حل مسألتنا . وإن طيف التردد لدالة ثابتة مع الزمن يحتوي على مركبة لتردد واحد هو $\omega = 0$ والذي كنا قد عرفناه منذ مدة .

وكمثال آخر ، دعنا نجد تحويلة فوريير للدالة الانفرادية التي تعرف بدالة *signum function* $\text{sgn}(t)$ والتي تعرف

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (36)$$

أو

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

وهنا أيضاً ، إذا حاولنا تعويض دالة الزمن هذه في المعادلة المعروفة لتحويلة فوريير فسنبجابه مقداراً غير معرف وذلك عند تعويض حدود التكامل وهذه المشكلة تظهر في كل مرة نحاول فيها ايجاد تحويلة فوريير لدالة للزمن لا تقترب من الصفر حينما $|t|$ تقترب من اللانهاية . وأخيراً سنحاول تجنب هذا الوضع باستخدام تحويلة لابلاس نظراً لأن في داخلها عامل تناقص يحاول تصحيح معظم الاشكالات المصاحبة لحساب تحويلات فوريير لبعض الدوال .

إن دالة *signum* التي ندرسها الآن يمكن كتابتها بالصيغة .

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)]$$

لاحظ بأن المقدار المحصور بين الأقواس لا يقترب من الصفر حينما $|t|$ تصبح كبيرة جداً . وباستخدام تحويلة فوريير ، نحصل على :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-at} dt - \int_{-\infty}^0 e^{-j\omega t} e^{at} dt \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

وإن المركبة الحقيقية تساوي صفراً ، نظراً لأن $\text{sgn}(t)$ هي دالة انفرادية للزمن .
لذا

$$\text{sgn}(t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad (37)$$

وكمثال أخير في هذه الفقرة ، دعنا نأخذ دالة وحدة الخطوة المعروفة $u(t)$ وباستخدام حلنا لدالة *signum* السابق ، يمكن تمثيل وحدة الخطوة بالصيغة ،

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t)$$

وسنحصل على زوج تحويلة فوريير :

$$u(t) \Leftrightarrow \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \quad (38)$$

يبين الجدول 1 - 19 الاستنتاجات التي حصلنا عليها من الأمثلة السابقة في هذه الفقرة بالإضافة الى عدة دوال اخرى لم يتطرق الشرح لها هنا .

تمارين :

8 - 19 أوجد تحويلة فوريير عند $\omega = 10$ لكل من دوال الزمن التالية :

$$(أ) \quad 0.2\delta(t - 0.3) \quad (ب) \quad 0.1 - \cos 2t \quad (ج) \quad 3e^{-t} \cos 4t u(t)$$

$$(د) \quad 2 \operatorname{sgn}(t - 1)$$

الجواب $0; 0.4; 57.0^\circ; 0.2; -171.9^\circ; 0.353; -82.2^\circ$

8 - 19 احسب $f(t)$ عند $t = 0.5$ ، اذا كانت $F(j\omega) =$

$$(أ) \quad 3e^{-j\omega} - j(1/\omega) \quad (ب) \quad (5/\omega) \sin 2\omega \quad (ج) \quad 2/(3 - j\omega) \quad (د)$$

$$(1 + j\omega)/(5 - \omega^2 + j2\omega)$$

الجواب $0; 0.328; 0.5; 2.5$

6 - 19 تحويلة فوريير لدالة زمن دورية عامة

THE FOURIER TRANSFORM OF A GENERAL PERIODIC TIME FUNCTION

لاحظنا في الفقرة 2 - 19 أن بإمكاننا أن نبرهن على أن دوال الزمن الدورية الزوجية لها تحويلات فوريير . وحيث أننا قد وعدنا بذلك فنحن الآن نحاول الوفاء بذلك الوعد . دعنا نبين تلك الحقيقة على أسس قويمة . لناخذ دالة دورية مع الزمن $f(t)$ ذات فترة T ومتسلسلة فوريير لها التي مرت في المعادلات (1) و (2) و

(3) .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1)$$

حيث

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (2)$$

وكذلك

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (3)$$

وإذا تذكرنا أن تحويلة فوريير لمجموع مقادير هي مجموع تحويلات تلك المقادير وان c_n ليست دالة للزمن ، لذا بإمكاننا أن نكتب ،

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

وبتعويض تحويلة $e^{jn\omega t}$ المعطاة في (30) ، نحصل على

$$f(t) \Leftrightarrow 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \quad (39)$$

وهذا يبين أن $f(t)$ لها استجابة متقطعة محتوية على ومضات تقع في نقاط على امتداد محور ω وتعطى بـ $\omega = n\omega_0, n = \dots, -2, -1, 0, 1, \dots$ وإن شدة كل من هذه المومضات هي 2π مرة بقدر قيمة معاملات فورير العائدة لها والتي تظهر بشكل مركب في مفكوك متسلسلة فورير لـ $f(t)$.

والآن ، اذا كان التعبير لزوج التحويلة الميين في المعادلة (39) صحيحاً فان معكوس تحويلة فورير للطرف الأيمن يجب أن يساوي $f(t)$. ويمكن كتابة معكوس هذه التحويلة .

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \left[2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0) \right] d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

وحيث أن الحد الآسي لا يحوي أساً ذا مجموع n ، فان بإمكاننا استبدال ترتيب التكامل وعملية التكامل .

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega t} \delta(\omega - n\omega_0) d\omega \stackrel{?}{=} f(t)$$

وحيث أنها ليست دالة لمتغير التكامل ω ، فان c_n يمكن أن تعامل كثابت . ثم بعد ذلك باستخدام خاصية التمحيص sifting للموضنة نحصل على

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \stackrel{?}{=} f(t)$$

والتي هي تماماً المعادلة (1) نفسها وهي مفكوك متسلسلة فورير المركبة لـ $f(t)$.

وان علامة الاستفهام في المعادلة السابقة يمكن إزالتها الآن . وبذلك نكون قد تأكدنا حقيقة من وجود تحويلة فورير لدالة الزمن الدورية . وهذه يجب أن لا تكون أمراً مستغرباً .

لقد قمنا في الفقرة الأخيرة بحساب تحويلة فورير لدالة جيب تامة وهي بالتأكيد دالة دورية على الرغم من أننا لم نشر بصورة مباشرة الى دوريتها . إلا أننا

استخدمنا الطريق الخلفي للحصول على التحويلة . ولكن الآن لدينا من الأساليب الرياضية ما يمكننا من الحصول عليها بصورة مباشرة أكثر من السابق . ولفرض تبين ذلك ، لناخذ الدالة مرة أخرى . دعنا نحسب تحويلة فورير c_n .

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_0 t e^{-jn\omega_0 t} dt = \begin{cases} 1/2 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{ومن ثم}$$

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

إن هذا المقدار له قيم لاتساوي صفرأ عندما $n = \pm 1$. ومن ثم ينتج أن المجموع كله يختصر الى

$$\mathcal{F}\{\cos \omega_0 t\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

والذي هو بالضبط المقدار الذي حصلنا عليه فيما سبق . كم نحن الآن سعيدون لذلك !

تمرين

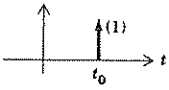
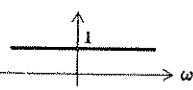

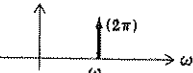
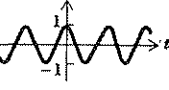
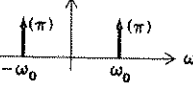
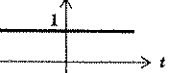
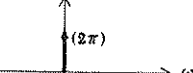
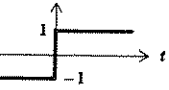
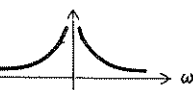
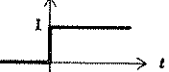
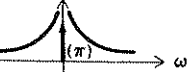
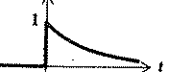

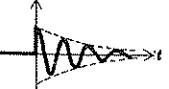
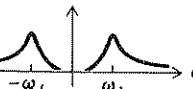
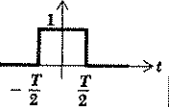
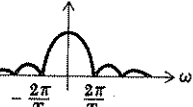
$$9 - 19 \text{ أوجد (أ) } \mathcal{F}\{2 \cos 3t\} \cdot \mathcal{F}\{2 \sin 3t\} \text{ (ب)}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{(3+j4)\delta(\omega+3) + (3-j4)\delta(\omega-3)\} = \pi/9 \text{ (ج)}$$

الجواب

$$2\pi[\delta(\omega+3) + \delta(\omega-3)]; j2\pi[\delta(\omega+3) - \delta(\omega-3)]; 1.580$$

الجدول 1 - 19 بعض أزواج تحويلة فوريير الشائعة

$f(t)$	$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$	$ F(j\omega) $
	$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
	$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	
	1	$2\pi\delta(\omega)$	
	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	
	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
	$e^{-\alpha t} u(t)$	$\frac{1}{\alpha + j\omega}$	
	$e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \cdot u(t)$	$\frac{\alpha + j\omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \omega_d^2}$	
	$u(t + \frac{1}{2}T) - u(t - \frac{1}{2}T)$	$T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$	

7 - 19 الالتفاف واستجابة الدائرة في حيز الزمن
CONVOLUTION AND CIRCUIT RESPONSE IN THE TIME DOMAIN

قبل المضي في مناقشة تحويلة فورير ، دعنا نجدد هدفنا مرة أخرى . وان غايتنا هي الحصول على وسيلة لتبسيط المسائل في تحليل الدوائر الخطية والتي تحتوي على حساب تعابير غير ضمنية explicit لدوال الاستجابة والتي تنتج بتسليط دالة قسرية واحدة أو أكثر ويمكن الوصول الى ذلك باستخدام دالة تحويلية تدعى دالة النظام $system\ function$ للدائرة . وينتج من ذلك أن دالة النظام هذه ماهي الا تحويلة فورير لاستجابة الدائرة لوحدة الومضة .

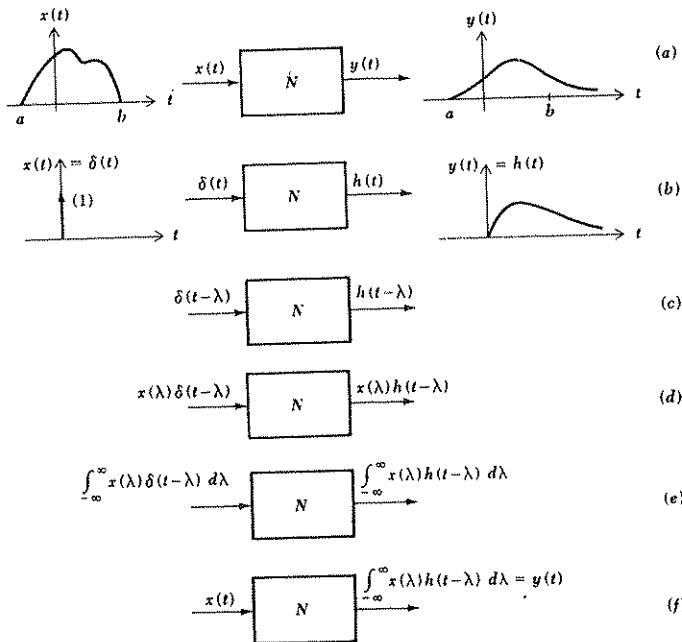
وان الأسلوب التحليلي الخاص الذي سوف يستخدم ، يستوجب حساب تحويلة فورير للدالة القسرية وحساب حاصل ضرب هذه التحويلية في دالة النظام للحصول على تحويلة دالة الاستجابة ومن ثم على عملية معكوس التحويلية للحصول على دالة الاستجابة . وبهذه الوسيلة سوف يمكن تبسيط بعض التكاملات المعقدة الى دوال بسيطة ل ω . كما ان العمليات الرياضية للتفاضل والتكامل سيستعاض عنها بعمليات جبرية أبسط كالضرب والقسمة . بابقاء هذه الملاحظات في ذهننا دعنا نمضي لاختبار استجابة وحدة الومضة لدائرة ومن ثم نكون علاقتها مع دالة النظام . ومن ثم يمكننا النظر الى تحليل مسائل محددة بعينها .

لنأخذ شبكة كهربائية خطية N ، لاتحوي على طاقة ابتدائية مخزونة . وقد سلطت عليها دالة قسرية $x(t)$. في نقطة معينة في هذه الدائرة توجد دالة الاستجابة $y(t)$ ويمكن أن نوضح ذلك بالمخطط الكتلي المبين في الشكل 7 - 19 (أ) مع مخططات عامة تبين دوال نموذجية للزمن . وان الدالة القسرية قد أوضحت بشكل ما فقط ضمن الفسحة $a < t < b$ لذا فان $y(t)$ يمكن أن توجد فقط حينما $t > a$.

إن السؤال الذي نريد اجابته الآن هو : اذا كنا نعلم $x(t)$ كيف يمكننا وصف $y(t)$ ؟ . لاجابة هذا السؤال من البديهي أننا نحتاج الى معرفة شيء ما عن N لذا سنفرض ان معرفتنا ل N هي طريقة استجابتها حينما تكون الدالة القسرية وحدة الومضة . أي أننا نفترض أننا نعلم $h(t)$ هي دالة الاستجابة الناتجة من وحدة الومضة المجيزة كدالة قسرية عند $t = 0$ كما هو موضح في الشكل 7 - 19 (ب) .

تدعى الدالة $h(t)$ اعتيادياً بأنها استجابة وحدة الومضة او استجابة الومضة *impulse response* وهذه الدالة مهمة جداً لوصف الدائرة الكهربائية .

لنفرض أننا سلطنا وحدة الومضة عند اللحظة $t = \lambda$ (لدا) بدل تسليطها عند الزمن $t = 0$. سوف نرى أن التغيير الوحيد في الخرج هو التأخر في الزمن لذا يصبح الاخراج $h(t - \lambda)$ حينما يكون الادخال $\delta(t - \lambda)$ كما هو مبين في الشكل 7 - 19 ج . ثم بعد ذلك لنفرض أن ومضة الادخال لها شدة ما لاتساوي واحداً . وبالخصوص لنفرض أن شدة الومضة مساوية رقمياً لقيمة $x(t)$ حينما $t = \lambda$. وإن قيمة $x(\lambda)$ ثابتة . ونحن نعلم أن حاصل ضرب دالة قسرية واحدة في دائرة خطية في ثابت لا يؤثر على الاستجابة سوى أنها تتغير تناسبياً . لذا فانه اذا تغير الدخل الى $x(\lambda)\delta(t - \lambda)$ ، فان الاستجابة تصبح $x(\lambda)h(t - \lambda)$ كما مبين في الشكل 7 - 19 د .



الشكل 7 - 19 توضيح متسلسل لفهم تكامل الالتفاف $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$

دعنا الآن نجمع هذا الدخل على امتداد كل القيم الممكنة لـ λ ثم نستخدم النتيجة كدالة قسرية لـ N . إن الخطية تستوجب أن يكون الخرج مساوياً لمجموع الاستجابة الناتجة من كل القيم الممكنة لـ λ . وبالتعبير عن ذلك بصورة عامة فإن تكامل الدخل ينتج تكامل الخرج كما هو موضح في الشكل 7 - 19 (هـ). ولكن ماهو الدخل الان ؟ . بعد أن أخذنا ظاهرة التمهيص sifting لوحدة الومضة نرى الآن أن الدخل ببساطة هو $x(t)$ ، أي الدخل الاصيل .

وإن سؤالنا الآن قد أصبح . حينما يكون الدخل لـ N أي $x(t)$ معلوماً وحينما تكون استجابة الومضة لـ N أي $h(t)$ معلومة فإن $y(t)$ أي الخرج أو دالة الاستجابة يمكن التعبير عنها بالصيغة :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda \quad (40)$$

كما هو موضح في الشكل 7 - 19 (و). إن هذه العلاقة المهمة مشهورة وتعرف بتكامل الالتفاف *convolution integral* وبالتعبير عن ذلك بكلمات فإن المعادلة الأخيرة تنص على أن «الخرج يساوي الدخل متداخلاً مع *convolved with* الاستجابة الومضية» وفي كثير من الأحيان تختصر بالصيغة :

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (41)$$

حيث تشير العلامة * الى العبارة «متداخلة مع» «convolved with». تظهر المعادلة (40) أحياناً بصيغة مختلفة ولكنها مكافئة. فاذا فرضنا أن $z = t - \lambda$ فإن التعبير بـ $y(t)$ يصبح

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} -x(t - z)h(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - z)h(z) dz$$

وحيث أن الإشارة التي استخدمناها لمتغير التكامل غير مهمة، لذا يمكننا أن نكتب

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)h(t - z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - z)h(z) dz \quad (42)$$

إن صيغتي الالتفاف المعطائتين بالمعادلة (42) تستحقان الحفظ عن ظهر قلب .

وان النتيجة التي حصلنا عليها في المعادلة (42) هي عامة جداً ويمكن تطبيقها على أي نظام خطي . الا أننا عادةً نهتم بالأنظمة الممكن تكوينها عملياً . أي الأنظمة الموجودة فعلياً ، او التي يمكن أن توجد . وان مثل هذه الأنظمة تكون ذات خاصية تؤدي الى تعديل قليل في تكامل الالتفاف . أي أن استجابة النظام لا يمكن أن تبدأ قبل تسليط الدالة القسرية ، وخاصة ان $(h(t))$ هي استجابة النظام الناتجة عن تسليط دالة وحدة الومضة عندما $t = 0$. لذا فان $(h(t))$ لا يمكن أن توجد لقيم $t < 0$. ينتج من ذلك أن التكامل الثاني في المعادلة (42) أي التكاملية integral يساوي صفرأ حينما $z < 0$ في التكامل الاول . كما أن التكاملية تساوي صفرأ أيضاً . عندما $t - z$ سالبة أو حينما $t > z$. لذلك فللأنظمة الممكن تحقيقها عملياً تتغير حدود التكامل الى تكاملات الالتفاف .

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t x(z)h(t-z) dz = \int_0^{\infty} x(t-z)h(z) dz \quad (43)$$

وان كلا من المعادلتين (42) و (43) صحيحتان ولكن الأخيرة أكثر خصوصية حينما نتكلم عن أنظمة خطية ممكنة التحقيق عملياً .

وقبل مناقشة أهمية استجابة الومضة لدائرة ما أكثر من السابق ، دعنا نأخذ مثالا رقمياً يعطينا نظرة عميقة حول كيفية حساب تكامل الالتفاف . وعلى الرغم من أن التعبير نفسه بسيط جداً . إلا أن الحسابات معقدة وبالأخص فيما يتعلق بحدود التكامل .

لنفرض أن الادخال كان نبضة فولتية مستطيلة تبدأ من $t = 0$ وتستمر ثانية واحدة واتساعها فولت واحد .

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)'$$

ولنفرض أيضاً أن استجابة الومضة لهذه الدائرة معلومة وأنها دالة أسية بالصيغة (7)

$$h(t) = 2e^{-t}u(t)$$

والمطلوب هو ايجاد فولتية الخرج $v_o(t)$. يمكن كتابة الجواب مباشرة بصيغة التكامل

$$\begin{aligned} y(t) = v_o(t) &= v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} v_i(t-z)h(z) dz \\ &= \int_0^{\infty} [u(t-z) - u(t-z-1)][2e^{-z}u(z)] dz \end{aligned}$$

(7) ان وصفاً لاحدى الدوائر التي يمكن ان تلسط عليها مثل هذه الومضة سيمر في المسألة 32 .

وان حساب هذا المقدار للفولتية $v_0(t)$ كان سهلاً جداً ولكن وجود عدة دوال لوحدة الخطوة يمكن أن يسبب ارتباكاً في حسابها. ويجب الانتباه جيداً الى حساب هذه الأجزاء من التكامل الذي تكون له التكاملية صفراً.

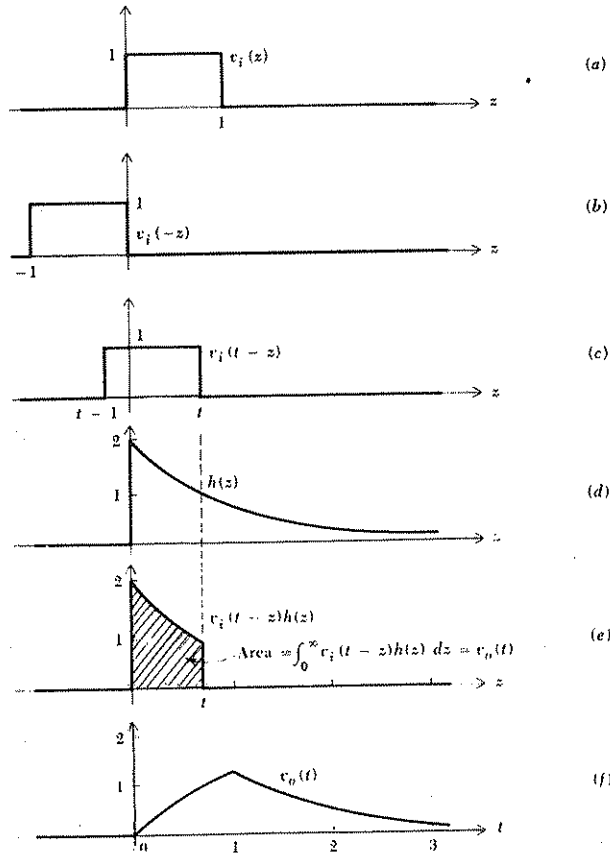
دعنا نستخدم أولاً بعض المخططات البيانية المساعدة لكي نفهم ماذا نعني. سنبدأ أولاً برسم عدة محاور لـ z المرسومة بعضها فوق بعض كما هو مبين في الشكل 8 - 19. واننا نعلم ماهو شكل الفولتية $(v_i(t))$ لذا نعرف شكل $(v_i(z))$

ايضاً. وهذه الأخيرة مرسومة في الشكل 8 - 19 (أ). وان الدالة $(v_i(z))$ هي ببساطة $v_i(-z)$ سائرة نحو الورا بالنسبة الى z أو أنها أديرت حول محور الصادات وهي مبينة في الشكل 8 - 19 (ب). بعد ذلك نرغب بتمثيل الدالة $(v_i(t-z))$ والتي هي $v_i(-z)$ بعد تزحيفها الى اليمين بمقدار $z=t$ كما مبين في الشكل 8 - 19 (ج). وقد رسمت استجابة ومضة مفترضة (متخيلة) على محور الـ z الآخر في الشكل 8 - 19 (د).

وأخيراً نضرب الدالتين $v_i(t-z)$ و $h(z)$ فنحصل على النتيجة المبينة في الشكل 8 - 19 (هـ). ونظراً لأن $h(z)$ لا يمكن وجودها قبل لحظة $t=0$ كما أن $v_i(t-z)$ لا توجد لـ $z > t$. لاحظ أن حاصل ضرب هاتين الدالتين لا يساوي صفراً في الفترة $0 < z < t$ في الحالة المبينة حيث $t < 1$. وحينما $t > 1$ فإن قيم حاصل الضرب لا تساوي صفراً لذا يمكن الحصول عليها في الفسحة $t-1 < z < t$. وان المساحة تحت منحنى حاصل الضرب (المبين مظللاً في الشكل) يساوي عددياً قيم v_0 التي تعود الى قيم خاصه للزمن t مختارة في الشكل 8 - 19 (ج). وحينما تزداد t من الصفر الى الواحد فإن المساحة تحت منحنى حاصل الضرب تستمر بالزيادة ومن ثم تستمر $v_0(t)$ بالازدياد ولكن ما إن تزداد t أكثر من $t=1$ حتى تبدأ المساحة تحت المنحنى والمساوية لـ $v_0(t)$ بالنقصان وتقترب من الصفر. للقيمة $t < 0$ لا يتقاطع المنحنيان $v_0(t-z)$ و $h(z)$ بتاتاً. لذا فالمساحة تحت منحنى حاصل الضرب تساوي صفراً بالتأكيد. والان دعنا نستخدم هذه المفاهيم البيانية للحصول على تعبير عن $v_0(t)$

علينا أن نكامل من $z=0$ الى $z=t$ لقيم t التي تقع بين الصفر والواحد أما لقيم التي تزيد عن الواحد فيكون مدى التكامل هو $t-1 < z < t$ لذا يمكن أن تكتب

$$v_n(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t 2e^{-z} dz = 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ \int_{t-1}^t 2e^{-z} dz = 2(e^{-t-1} - e^{-t}) & t > 1 \end{cases}$$



الشكل 8 - 19 مفهوم تخطيطي لحساب تكامل الالتفاف

وهذه الدالة مرسومة مع تغير الزمن في الشكل 8 - 19 (و) . إن هناك معلومات كثيرة وأساليب قد أدرجتا ضمن هذا المثال . أما التمرين أدناه فيعطي فرصة للتأكد من أن الطريقة قد تم فهمها جيداً لغرض المضي الى مادة جديدة . أو بكلمة أخرى يجب الانتباه جيداً الى المثل الصيني القديم . أسمع فأنسى وأشاهد فأتذكر وأعمل فأفهم .

تمارين

10 - 19 شبكة ذات استجابة ومضية $h(t) = 0.2u(t)$ وقد سلطت عليها إشارة

$$v_i(t) = 2e^{-t}u(t)$$

أوجد (أ) $v_o(0)$ (ب) $v_o(1)$ (ج) $v_o(2)$.

الجواب : 0.346 ; 0.253 ; 0

11 - 19 . إذا كانت استجابة الومضة هي $h(t) = 3e^{-2t}u(t)$ لشبكة معينة

وكانت إشارة الدخل $v_i(t) = u(t+1) - u(t-2)$ أوجد $v_o(t)$ عندما t تساوي (أ) 1.5 -

(ب) 0.5 (ج) 2 (د) 3 s

الجواب : 1.496 ; 0.948 ; 0.202 ; 0

8 - 19 دالة النظام والاستجابة في حيز التردد

THE SYSTEM FUNCTION AND RESPONSE IN THE FREQUENCY DOMAIN

لقد حلت في الفقرة السابقة مسألة إيجاد خرج نظام فيزيائي بدلالة الخرج والاستجابة الومضية وذلك باستخدام الالتفات . وكان العمل كله في حيز الزمن . وإن كلاً من استجابتي الدخل والايخارج دالتين للزمن . دعنا الآن نر إذا كان إجراء بعض التبسيطات وذلك بالعمل في حيز التردد لوصف هذه الدوال الثلاث . ولغرض إجراء ذلك دعنا نختبر تحويله فورير لخرج النظام وذلك باستخدام تعريف أساس لدالة فورير ويكون الخرج ممثلاً بتكامل الالتفات في المعادلة (42) .

$$\mathcal{F}\{v_o(t)\} = F_o(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t-z)h(z) dz \right] dt$$

حيث انه مرة أخرى قد فرضنا عدم وجود طاقة مخزونة . ولأول وهلة يمكن النظر الى هذا التعبير وكأنه متناه في التعقيد . الا أنه يمكن أن يبسط الى نتيجة مذهلة في بساطتها . يمكن ادخال الحد الأسي في داخل التكامل الداخلي حيث أنه لا يحتوي على متغير لتكامل z . بعد ذلك نعكس ترتيب التكامل لنحصل على

$$F_o(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v(t-z) h(z) dt dz$$

حيث أنها ليست دالة لـ t ، علينا أن نستخلص $h(z)$ من التكامل الداخلي ثم نبسط التكامل بالنسبة للزمن t باستبدال المتغير $t - z = x$

$$\begin{aligned} F_o(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(x+z)} v(x) dx dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega x} v(x) dx dz \end{aligned}$$

ولكن الآن بدأ المجموع بالاتضح حيث أن التكامل الداخلي ماهو الا تحويلة فورير $v(t)$ هذا بالإضافة الى أنه لا يحتوي على أي حد لـ z . ويمكن معاملته ككثابت بأي تكامل يتضمن z . لذا بإمكاننا نقل هذه التحويلية $F_o(j\omega)$ كلياً خارج علامة التكامل .

$$F_o(j\omega) = F_o(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega z} h(z) dz$$

وأخيراً فان التكامل المتبقي يعيد الى ذاكرتنا تعريف تحويلة فورير حيث أنه هو دون زيادة أو نقصان فهو تحويلة فورير لاستجابة الومضة التي سنرمز لها بالرمز $H(j\omega)$. لذا فقد أنتج عملنا كله نتيجة بسيطة

$$F_o(j\omega) = F_o(j\omega) H(j\omega) = F_o(j\omega) \mathfrak{F}\{h(t)\} \quad (44)$$

وهذه نتيجة مهمة أخرى ، فهي تعرف لنا معنى دالة النظام $H(j\omega)$. وإن دالة النظام هذه هي النسبة بين تحويلة فورير لدالة الاستجابة الى تحويلة فورير للدالة القسرية . هذا بالإضافة الى أن دالة النظام واستجابة الومضة تكونان زوج تحويلة فورير .

$$h(t) \Leftrightarrow H(j\omega) \quad (45)$$

وإن الحل في الأسطر السابقة يساعد لبرهان العبارة العامة القائلة أن تحويلة فورير لألتفاف دالتين للزمن يساوي حاصل ضرب تحويلتي فورير لهما .

$$\mathfrak{F}\{f(t) * g(t)\} = F_o(j\omega) F_o(j\omega) \quad (46)$$

وبالعكس اذا عرفنا تحويلتي فورير لدالة قسرية واستجابتها الومضية فان تحويلة فورير لدالة الاستجابة يمكن الحصول عليها كحاصل ضربهما . وإن النتيجة هي وصف لدالة الاستجابة في حيز التردد .

وإذا أردنا أن نحصل على وصف في حيز الزمن لدالة الاستجابة فيمكن إجراء ذلك بأخذ تحويلة فوريير العكسية . لذا نرى أن عملية الالتفاف في حيز الزمن قد تم تبسيطها الى عملية أبسط نسبياً هي عملية ضرب في حيز التردد وهذه حقيقة تستخدم تحويلات التكامل بشكل جذاب .

إن الملاحظات السابقة تجعلنا نفكر مرة أخرى لماذا نختار العمل في حيز الزمن . ولكن علينا ان نتذكر أنه نادراً ما نحصل على شيء من الاشياء . لقد قال أحد الشعراء « ان ضحكاتنا من القلب مع بعض الالم تكون مفعمة (8) » . وإن الالم هنا بعض المصاعب النادرة لغرض الحصول على تحويلة فوريير العكسية لدالة استجابة بسبب التعقيد الرياضي . ومن جهة أخرى فان حاسبة الكترونية رقمية حديثة يمكن أن تلف بخفة مذهلة ولهذا الغرض يمكن أن تحسب تحويلة فوريير السريعة لـ FFT أي (fast Fourier transform) بسرعة بالغة (9) . ومن ثم ليس هناك اختصار للطريق عند العمل في حيز الزمن او حيز التردد .

وإن قراراً يجب أن يتخذ في كل مرة عند مجابهة مسألة جديدة . وهذا القرار يجب أن يعتمد على المعلومات المتوفرة وعلى الوسائل الحاسوبية المتوفرة باليد .

والان دعنا نحاول التحليل في حيز التردد للمسألة التي درسناها في الفقرة السابقة نفسها مع تكامل الالتفاف متذكرين أنه كان لدينا دالة قسرية بالصيغة :

$$v_i(t) = u(t) - u(t - 1)$$

واستجابة وحدة الومضة المعرفة بما يأتي

$$h(t) = 2e^{-4u(t)}$$

(8) في رسالة ثقافية من بي بي شيلي « الى شيلاك » عام 1821

(9) ان تحويلة فوريير السريعة هي نوع من تحويلات فوريير المتقطعة والتي هي تقريب رقمي لتحويلة فوريير (المستمرة) التي درسناها . يمكن الرجوع الى مصادر كثيرة عن هذا الموضوع بالرجوع الى

G. D. Bergland, A Guided Tour of the Fast Fourier Transform, *IEEE Spectrum*, vol. 6, no. 7, pp. 41-52, July 1969.

نحسب أولاً تحويلات فوريير التي تقابلها . إن الدالة القسرية هي الفرق بين دالتين لوحدة الخطوة . وهاتان الدالتان متطابقتان عدا أن إحداهما قد بدأت بعد ثانية واحدة من بدء الأخرى . سوف نحاول حساب الاستجابة الناتجة من $u(t)$ والاستجابة الناتجة من $u(t-1)$ واللذان هما متشابهتان عدا أن الأولى متأخرة عن الثانية بثانية واحدة . وإن الفرق بين هاتين الاستجابتين الجزئيتين هو الاستجابة الكلية الناتجة عن $v_1(t)$.

وإن تحويلة فوريير لـ $u(t)$ كانت قد وجدت في الفقرة 19 - 5

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

وإن دالة النظام يمكن الحصول عليها بأخذ تحويلة فوريير لـ $h(t)$ المذكورة في

$$\text{الجدول 19 - 1} \quad \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathbf{H}(j\omega) = \mathcal{F}\{2e^{-t}u(t)\} = \frac{2}{1+j\omega}$$

ويعطي معكوس تحويلة فوريير لحاصل ضرب هاتين الدالتين مركبة $v_0(t)$

$$v_0(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi\delta(\omega)}{1+j\omega} + \frac{2}{j\omega(1+j\omega)}\right\} \quad u(t)$$

وباستخدام خاصية التخصيص لوحدة الومضة فإن التحويلة العكسية للحد الأول هي ثابت مقداره واحد .

ويحتوي الحد الثاني على حاصل ضرب حدين في المقام كل منهما بالصيغة $(\alpha + j\omega)$. ويمكن الحصول على تحويلته العكسية باستخدام المفكوك الجزئي الذي كنا قد درسناه في مبادئ التفاضل والتكامل .

$$\frac{2}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1+j\omega}$$

لذا وكذلك

$$v_0(t) = 1 + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega} - \frac{2}{1+j\omega}\right\}$$

وإن التحويلات العكسية يمكن الحصول عليها من الجدول 1 - 19 أيضاً :

$$\begin{aligned} v_0(t) &= 1 + \text{sgn}(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2u(t) - 2e^{-t}u(t) \\ &= 2(1 - e^{-t})u(t) \end{aligned}$$

وينتج من ذلك أن $v_{02}(t)$ والتي هي مركبة $v_0(t)$ الناتجة عن $u(t-1)$

$$v_{02}(t) = 2(1 - e^{-(t-1)})u(t-1)$$

هي :

$$v_o(t) = v_{o1}(t) + v_{o2}(t) \\ = 2(1 - e^{-t})u(t) - 2(1 - e^{-t+1})u(t - 1)$$

وان التقطع عند $t = 0$ وعند $t = 1$ يفرض علينا أن نفصل بين ثلاث فترات زمنية

هي :

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2(1 - e^{-t}) & 0 < t < 1 \\ 2(e - 1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

وهذه هي النتيجة التي حصلنا عليها من حل هذه المسألة بطريقة تكامل الالتفاف في حيز الزمن .

يتضح أن هناك تبسيطاً في الحل عند حل هذه المسألة في حيز الزمن . ولقد تمكنا عن استبدال تكامل معقد نسبياً في حيز الزمن بضرب بسيط لتحويلتي فوريير في حيز التردد وكذلك (وهذه نقطة مهمة جداً) لم نكلف أنفسنا بأخذ تحويلة فوريير عكسية معقدة عند إيجاد $v_o(t)$.

تمرينان

12 - 19 إذا كانت $h(t) = 3e^{-2t}u(t)$ وكذلك $v_i(t) = 2e^{-t}u(t)$ أحسب أولاً $H(j\omega)$ و $V_i(j\omega)$ وكذلك $V_o(j\omega) = V_i(j\omega)H(j\omega)$ ثم أحسب $v_o(t)$ وكذلك احسبها عندما t تساوي (أ) 0.1 (ب) 0.2 (ج) مامقدار $v_o(t)$.

الجواب : 0.279; 0.286; 0.300

13 - 19 استخدم طرق الحيز الترددي لايجاد الاستجابة في حيز الزمن للشبكة التي دالة نظامها $(2 + j\omega)/(1 + j2\omega)$ ، وإذا كانت النقطة هي (أ) وحدة الومضة (ب) دالة وحدة الخطوة (ج) $\cos t$.

الجواب : $(2 - 1.5e^{-t/2})u(t); 0.58(t) + 0.75e^{-t/2}u(t); \cos(t - 36.87^\circ)$

9 - 19 المفهوم الفيزيائي لدالة النظام

THE PHYSICAL SIGNIFICANCE OF THE SYSTEM FUNCTION

في هذه الفقرة سنحاول ربط عدة جوانب من تحويلة فورير مع الدراسة التي انتهينا منها في فصول سابقة .

إذا كان لدينا شبكة خطية عامة ذات طرفين مثل N لا تحتوي على طاقة ابتدائية مخزونة فيها وفرضنا أن هناك دوال قسرية جيبيية واستجابة ، ولنفرض أنهما تمثلان فولتيتين كالمبينتين في الشكل 9 - 19 . لنفرض أن فولتية الإدخال هي ببساطة $A \cos(\omega_r t + \theta)$ وأن الإخراج يمكن أن يوصف بصورة عامة بشكل $v_o(t) = B \cos(\omega_r t + \phi)$ حيث الاتساع B وزاوية الطور ϕ كلاهما دالة لـ ω_r .

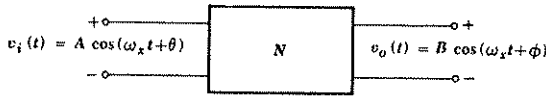
وفي صيغة الطور يمكننا أن نكتب الدالة القسرية ودالة الاستجابة بالصيغتين

$$V_o = B e^{j\phi} \quad V_i = A e^{j\theta}$$

و

وأن النسبة بين استجابة الطور ودالة استجابة الطور هي عدد مركب وهو دالة لـ

$$\frac{V_o}{V_i} = G(\omega_r) = \frac{B}{A} e^{j(\phi - \theta)}$$



الشكل 9 - 19 التحليل الجيبي يمكن استخدامه لاجاد الدالة التحويلية $H(j\omega_r)$ و $(B/A)e^{j(\phi - \theta)}$ حيث B و ϕ دالتان لـ ω_r

حيث B/A هي اتساع G و $\phi - \theta$ هي زاوية طورها . وأن هذه الدالة $G(\omega_r)$ هي استجابة التردد لـ N . ويمكن ايجادها في المختبر بتغيير ω_r على مدى كبير من القيم وقياس الاتساع B/A وزاوية الطور $\phi - \theta$ لكل قيمة من قيم ω_r . وإذا

رسمنا فيما بعد كل هذه المتغيرات الوسيطة parameters كدوال للتردد يصف الزوج الناتج من المنحنيات دالة استجابة التردد بصورة كاملة .

والآن دعنا نحفظ بهذه الملاحظات في ذهننا جيداً بعض الوقت طالما ندرس جانباً آخر من جوانب المسألة نفسها .

وللدائرة ذات الدخل الجيبي والخرج المينين في الشكل 9 - 19 ، ماهي دالة النظام $H(j\omega)$ ؟ للإجابة عن هذا السؤال نبدأ بتعريف $H(j\omega)$ على أنها النسبة بين تحويلتي فوريير للإخراج والادخال . إن كلتا دالتي الزمن هاتين تحتويان على صيغة الدالة $\cos(\omega_r t + \beta)$ واللذان لم نحسب لهما تحويلة فوريير بعد ، على الرغم من أن باستطاعتنا معالجة $\cos \omega_r t$. وإن تحويلة فوريير التي نحتاجها هي

$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_r t + \beta)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cos(\omega_r t + \beta) dt$$

وإذا عوضنا $\omega_r t + \beta = \omega_r \tau$ ينتج

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(\omega_r t + \beta)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega \tau + j\omega \beta / \omega_r} \cos \omega_r \tau d\tau \\ &= e^{j\omega \beta / \omega_r} \mathcal{F}\{\cos \omega_r \tau\} \\ &= \pi e^{j\omega \beta / \omega_r} [\delta(\omega - \omega_r) + \delta(\omega + \omega_r)] \end{aligned}$$

وهذا هو زوج جديد من تحويلة فوريير

$$\cos(\omega_r t + \beta) \Leftrightarrow \pi e^{j\omega \beta / \omega_r} [\delta(\omega - \omega_r) + \delta(\omega + \omega_r)] \quad (47)$$

والذي بإمكاننا استخدامه الآن لحساب دالة النظام المطلوبة

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{\mathcal{F}\{B \cos(\omega_r t + \phi)\}}{\mathcal{F}\{A \cos(\omega_r t + \theta)\}} \\ &= \frac{\pi B e^{j\omega \phi / \omega_r} [\delta(\omega - \omega_r) + \delta(\omega + \omega_r)]}{\pi A e^{j\omega \theta / \omega_r} [\delta(\omega - \omega_r) + \delta(\omega + \omega_r)]} \\ &= \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta) / \omega_r} \end{aligned}$$

وبالرجوع الى التعبير

$$G(\omega_r) = \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta)}$$

حيث B و ϕ قد حسبنا عندما $\omega = \omega_r$ ونرى أن $H(j\omega)$ عند $\omega = \omega_r$ تعطي

$$H(j\omega_r) = G(\omega_r) = \frac{B}{A} e^{j\omega(\phi - \theta)}$$

وحيث أنه لا يوجد شيء خاص حول الرمز x نستنتج أن دالة النظام ودالة استجابة التردد هما متطابقتان

$$H(j\omega) = G(\omega) \quad (48)$$

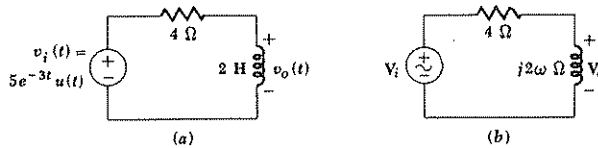
وان حقيقة أن احدى الازاحتين الزاويتين هي ω والأخرى رمز لها بـ $j\omega$ ليست ذات بال . وقد تم ذلك دون تعيين حيث أن z يمكن أن تسهل مقارنة مباشرة اكثر بين تحويلتي فورير ولا بلاس .

وان المعادلة (48) تمثل ربطاً مباشراً بين اساليب تحويلة فورير وتحليل الحالة المستقرة الجيبية . وان حلنا السابق للتحليل الجيبى للحالة المستقرة باستخدام الطور بات كأنه حالة خاصة للأساليب الأكثر عموماً لتحليل تحويلة فورير . ولقد كان ذلك حالة خاصة نظراً لأن الادخال والاخراج كانا جيبين بينما يمكن لتحويلات فورير ودوال النظام أن تيسرا لنا معالجة الدوال القسرية غير الجيبية واستجاباتها .

ولذلك فانه لايجاد دالة النظام $H(j\omega)$ لشبكة ما ، فان كل ما نحتاجه هو ايجاد الدالة التحويلية الجيبية كدالة لـ ω (أو $j\omega$) .

وكمثال على ذلك دعنا نرجع الى دائرة RL المتوالية البسيطة المرسومة في الشكل 10 - 19 (أ) . نريد ايجاد الفولتية عبر المحث حينما تكون فولتية الادخال ومضة أسية مضمحلة . ونحن نريد دالة النظام ولكن ليس من الضروري تسليط ومضة ثم ايجاد استجابة الومضة ثم ايجاد التحويلة العكسية لها . ولكن بدلاً من ذلك نستخدم المعادلة (48) للحصول على دالة النظام $H(j\omega)$ بفرض ان كلاً من فولتيتي الدخل والخروج جيبيتان . ويبين الشكل 10 - 19 (ب) طوراها . باستخدام

$$H(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{j2\omega}{4 + j2\omega}$$



الشكل 10 - 19 (أ) يطلب ايجاد استجابة $v_o(t)$ الناتجة عن $v_i(t)$ (ب) دالة النظام $H(j\omega)$ يمكن ايجادها من تحليل الحالة المستقرة الجيبى $H(j\omega) = V_o/V_i$

إن تحويل الدالة القسرية هي

$$\mathcal{F}\{v_i(t)\} = \frac{5}{3 + j\omega}$$

وإن تحويل $v_o(t)$ هي

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{v_o(t)\} &= \mathbf{H}(j\omega)\mathcal{F}\{v_i(t)\} \\ &= \frac{j2\omega}{4 + j2\omega} \frac{5}{3 + j\omega} \\ &= \frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\end{aligned}$$

حيث تساعد الكسور الجزئية التي ظهرت في الخطوة الأخيرة على إيجاد تحويل فورير العكسية

$$\begin{aligned}v_o(t) &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{15}{3 + j\omega} - \frac{10}{2 + j\omega}\right\} \\ &= 15e^{-3t}u(t) - 10e^{-2t}u(t) \\ &= 5(3e^{-3t} - 2e^{-2t})u(t)\end{aligned}$$

وهكذا اكتملت المسألة بدون مناقشة طويلة أو استخدام الالتفاف أو المعادلات التفاضلية.

ولنرجع مرة أخرى إلى المعادلة (48) التي تعطي التطابق بين دالة النظام $\mathbf{H}(j\omega)$ ودالة استجابة تردد الحالة المستقرة الجيبية $G(\omega)$. ويمكن الآن أن نفترض أن دالة النظام هي عبارة عن نسبة طوري الخرج إلى طوري الدخل . ولنفرض أننا أبقينا على اتساعي طوري الدخل عند وحدة واحدة وزاوية الطور عند الصفر . لذا فإن طوري الخرج هو $\mathbf{H}(j\omega)$. تحت هذه الظروف إذا سجلنا اتساع الخرج وطوره كدالتين لـ ω لكل قيم ω نكون قد سجلنا دالة النظام $\mathbf{H}(j\omega)$ كدالة لـ ω لكل قيم ω لذلك نكون قد اخترنا استجابة النظام ظروف تسليط عدد غير متناه من الحبيبيات كلها ذات اتساع مقداره وحدة واحدة وزاوية طور مقداره صفر بصورة متتالية عند الدخل . لنفرض الآن أن دخلنا كان ومضة ذات وحدة واحدة ونحاول إيجاد استجابة الومضة $h(t)$. هل إن المعلومات التي نختبرها تختلف فعلاً عن التي حصلنا عليها تها ؟

وإن تحويل فورير لوحده الومضة كانت وحدة واحدة وتشير إلى أن كل مركبات التردد موجودة وكلها تحوي الاتساع نفسه وكلها ذات طور مقداره صفر . وإن استجابة نظامنا هي عبارة عن مجموع استجابات كل هذه المركبات . ويمكن النظر إلى هذه النتيجة عند الخرج على مرسمة أشعة المهبط cathode-ray

oscilloscope من الواضح إن دالة النظام ودالة استجابة الومضة يحتويان على معلومات متكافئة بغض النظر عن استجابة النظام .

لذلك فإن لدينا طريقتان مختلفتان لوصف استجابة نظام ما عند تسليط دالة قسرية عامة :

الأولى هي الوصف في حيز الزمن والأخرى بوصفه في حيز التردد . وعند الحل في حيز الزمن نلف convolve الدالة القسرية مع استجابة الومضة للنظام لغرض الحصول على دالة الاستجابة لقد وجدنا عند أول دراستنا للالتفاف إن حاصل الضرب هذا يمكن فهم معناه بالنظر الى الدخل كومات مستمرة ذات شدات مختلفة وازمنة تسليط مختلفة ايضاً . وإن الخرج الناتج يكون عبارة عن استجابات ومضات مستمرة .

أما في حيز التردد فنجد الاستجابة بضرب تحويلة فورير لدالة قسرية في دالة النظام .

وفي هذه الحالة نترجم تحويلة الدالة القسرية على انها طيف التردد أو أنها جيبيات مستمرة .

وبضرب هذه بدالة النظام نحصل على دالة الاستجابة كدالة مستمرة ايضاً من جيبيات .

وسواء اخترنا أن ننظر الى الخرج كاستجابات ومضات مستمرة أو كاستجابات جيبية مستمرة فإن خطية الشبكة ومبدأ التراكم يمكننا من ايجاد الخرج الكلي كدالة للزمن بأخذ المجموع على امتداد الترددات (معكوس تحويلة فورير) أو كدالة للتردد بأخذ المجموع على امتداد الزمن (تحويلة فورير) .

ولسوء الحظ فإن كلا هذين الأسلوبين يحويان بعض المتاعب أو المحددات المصاحبة لاستخدامهما . باستخدام تكامل الالتفاف لا يمكن ايجاد التكامل نفسه بسهولة عندما توجد دوال قسرية معقدة أو عند وجود دوال استجابة ومضية . هذا بالإضافة الى انه من وجهة النظر التجريبية لا يمكننا قياس استجابة ومضة النظام نظراً لأننا لانستطيع توليد ومضة فعلياً . وحتى إذا قربنا الومضة بنبضة قصيرة ذات اتساع مرتفع فاننا سندفع نظامنا الى التشبع ومن ثم الخروج عن حيز العمل الخطي .

وفي حيز التردد نجابه تحديداً واحداً وهو أننا يمكن أن نفترض نظرياً بسهولة تسليط دوال قسرية ليس لها تحويلات فورير . والأكثر من ذلك ، اذا رغبتنا بايجاد وصف الحيز الزمني لدالة الاستجابة فان علينا أن نحسب تحويلة فورير العكسية . وإن ايجاد بعض المعكوسات صعب جداً .

وأخيراً فان اي من هذه الأساليب لا يعطي طريقة مناسبة لحل المسائل المحتوية على ظروف ابتدائية .

أن الفائدة الكبيرة التي حصلنا عليها من استخدام تحويلة فورير تنتج من وفرة المعلومات التي تجهزها عن الخواص الطيفية للإشارة وبالأخص الطاقة أو القدرة لكل وحدة عرض حزمة .

أن معظم الصعوبات والمحددات المصاحبة لتحويلة فورير يمكن التغلب عليها باستخدام تحويلة لابلاس . وسنرى بأن الأخيرة تُعرف بطريقة حيث انها تحوي داخلياً عامل التقارب convergence الذي يمكننا من ايجاد التحويلات لمديات اعرض من دوال الادخال الزمنية عما يمكن لتحويلة فورير أن تحتوي هذا بالاضافة الى أننا سنجد أن الظروف الابتدائية يمكن معاملتها بطريقة تجعلنا نتعجب عن سبب عدم دراسة هذا الاسلوب من قبل وعن سبب تأخيره الى الفصل الأخير من الكتاب . وأخيراً فأن تحويلة فورير يمكن الحصول عليها من تحويلة لابلاس على الأقل لمعظم دوال الزمن التي تبرز في المسائل الهندسية الواقعية جيداً ، ولكن لماذا تم تأجيل ذلك لحد الآن ؟ وإن أفضل إجابة على ذلك ربما لأن هذه الأساليب يمكن أن تعقد الحل للمسائل البسيطة ويمكن أن تجعل الترجمة الفيزيائية لأداء الشبكات البسيطة مبهمه . فمثلاً اذا كنا نرغب فقط بايجاد الاستجابة القسرية فانه من غير المجدي استخدام تحويلة لابلاس وحساب كل من الاستجابتين القسرية والطبيعية من خلال المرور على عملية تحويلة عكسية صعبة .

والآن بعد كل هذه العموميات ننتقل الى لابلاس .

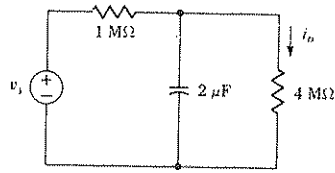
قمرين

14 - 19 باستخدام طرق تحويلة فورير ، أوجد i للدائرة المبينة في الشكل

11 - 19 عندما t تساوي ثانية واحدة ، اذا كانت $v_x = (أ) \delta(t) \cdot (ب) u(t)$

(ج) $\cos 2t$.

الجواب nA 44.4; 66.9; 92.9



الشكل 11 - 19 أنظر التمرين 14 - 19 .

مسائل

1. □

نبضة منفردة كدالة للزمن كما يأتي :

$$f(t) = u(t + 1) - 2u(t) + u(t - 1)$$

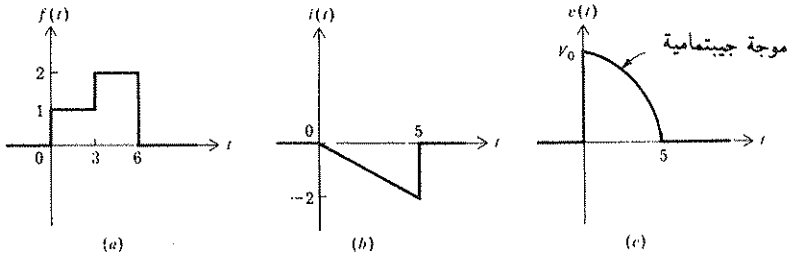
أوجد تحويلة فوريير لها .

2 . دالة غير دورية للزمن توصف كما يأتي :

$$f(t) = V_0 \sin \pi t - 2 < t < 2; f(t) = 0 \text{ for } t < -2 \text{ and } t > 2$$

أوجد $F(j\omega)$.

3 . أوجد تحويلات فوريير لأشكال الموجات المبينة في الشكل 12 - 19 .



الشكل 12 - 19 انظر المسألة 3 .

4. □ إذا كانت $1 < t < 2$ وكذلك $f(t) = 10$

$$f(t) = 0 \quad t < -2, 0 < t < 1 \quad t > 2$$

كما تعرف $f(t)$ عند $-2 < t < 0$ بحيث

(أ) $f(t)$ دالة زوجية . إحسب $F(j\omega)$

(ب) $f(t)$ دالة فردية . إحسب $F(j\omega)$

5. إحسب دالة الزمن التي تقابل كل من أطيف التردد المستمرة الآتية :

$$F(j\omega) = 1, |\omega| < 1; F(j\omega) = 0, |\omega| > 1 \quad (أ)$$

$$F(j\omega) = \cos \omega, |\omega| < \pi; F(j\omega) = 0, |\omega| > \pi \quad (ب)$$

$$F(j\omega) = e^{-\omega}, |\omega| < 1; F(j\omega) = 0, |\omega| > 1 \quad (ج)$$

6. إشارة ذات تحويل فوريير لها اتساع يساوي

$$|F(j\omega)| = |3 - 1.5j\omega| [u(\omega + 2) - u(\omega - 2)]$$

مامقدار طاقة الاوم الواحد في الإشارة .

7. □ تحويل فوريير لدالة زمن معينة هي $6\pi/j\omega$ (أ) أكتب تعبيراً تكاملياً لـ

$$\int_0^{\infty} (\sin ax)/x \, dx = \pi/2 \quad \text{إذا علم أن } f(t)$$

حينما $\omega > 0$ (ب) أوجد طاقة الاوم الواحد المحتواة في $f(t)$ ضمن حزمة

$$1 < |\omega| < 2 \text{ rad/s}$$

8. (أ) أوجد الطاقة الكلية المصاحبة لشكل الموجة لأوم واحد .

$$i(t) = Ae^{-bt} [u(t+k) - u(t-k)]$$

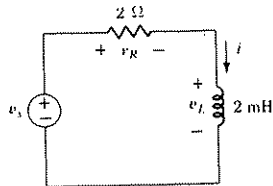
(ب) افرض أن k تقترب من اللانهاية . ثم اوجد مامقدار الجزء الموجود في حزمة

التردد $|\omega| < b$ من الطاقة الكلية .

9. في الشكل 13 - 19 افرض ان $v_s = \delta(t)$ V . أوجد (أ) $v_R(t)$ و (ب)

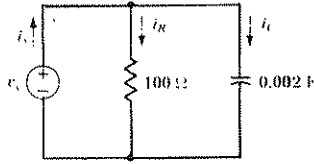
(ج) $i(t)$. إحسب الطاقة الكلية (د) المستهلكة في المقاوم (هـ) المجزأة

من المصدر .



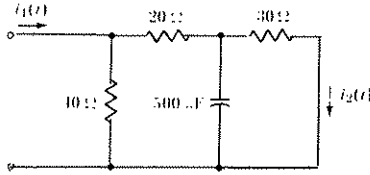
الشكل 13 - 19 انظر المسألة 9

10 □ . افرض أن $v_s = 100u(t) \text{ V}$ في الدائرة المبينة في الشكل 14 - 19 .
احسب (أ) $i_R(t)$ ، (ب) $i_C(t)$ ، (ج) $i_s(t)$ (د) احسب الشحنة المخزونة في
المسعة عند $t = 0$ و $t = 0^+$.



الشكل 14 - 19 انظر المسألة 10 .

11 . (أ) افرض ان $i_1(t) = \delta(t) \text{ A}$ في الشكل 15 - 19 . ثم أوجد $i_2(t)$ (ب)
افرض أن $i_1(t) = u(t) \text{ A}$ ثم احسب $i_2(t)$ مرة أخرى .
(ج) برهن أن الدالة القسرية في الجزء (أ) هي مشتقة الدالة القسرية في (ب)
وان الاستجابة في (أ) هي مشتقة الاستجابة في (ب) .



الشكل 15 - 19 انظر المسألة 11 .

12 . سلط التيار $i(t) = 100b[u(t) - ut - 1/b] \mu\text{A}$
على دائرة تحتوي على 5Ω و 10 H على التوالي . احسب اتساع تيار المحث حينما $t = 1$
اذا كان (أ) $b = 1$ (ب) $b = 10$ (ج) $b = 100$ (د) عند الغاية حينما b تقترب
من اللانهاية .

13. $F(j\omega)$ أوجد إذا كانت $f(t) =$ (أ) $2 \cos 4t$ (ب) $2e^{-3t} \cos 4t u(t)$ (ج) $2\delta(t) \cos 4t$ (د) $2 \cos 4t [u(t+1) - u(t-1)]$

14. أوجد تحويلية فوريير لكل من الدوال الآتية وارسم $|F(j\omega)|^2$ مع ω

(أ) $2e^{-2t}[u(t) - u(t-1)]$ (ب) $2e^{-2t} \sin t u(t)$ (ج) $2 \operatorname{sgn}(t-1)$

15. احسب وارسم دالة الزمن المقابلة لكل من تحويلتي فوريير الآتيتين .

(أ) $2\pi\delta(\omega) - 2(\sin \omega)/\omega$ (ب) $(2/j\omega) + 2/(j\omega + 1)$

16 باستخدام تعريف تحويلية فوريير، برهن النتائج الآتية، حيث ان

(أ) $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ (ب) $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{f(t)\}$

(ج) $\mathcal{F}\{df(t)/dt\} = j\omega \mathcal{F}\{f(t)\}$ (د) $\mathcal{F}\{f(kt)\} = (1/|k|)F(j\omega/k)$

(هـ) $\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-j\omega)$ (و) $\mathcal{F}\{tf(t)\} = jd[F(j\omega)]/d\omega$

17. إن إحدى فترات الزمن لدالة دورية مع الزمن فيها هي $T = 5s$

$$f_1(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$$

ماهي تحويلية فوريير لسلسلة النبضات .

18. تعرف دالة دورية ما كما يأتي :

$$f(t) = 8 - 4|t| \quad 0 < |t| < 2$$

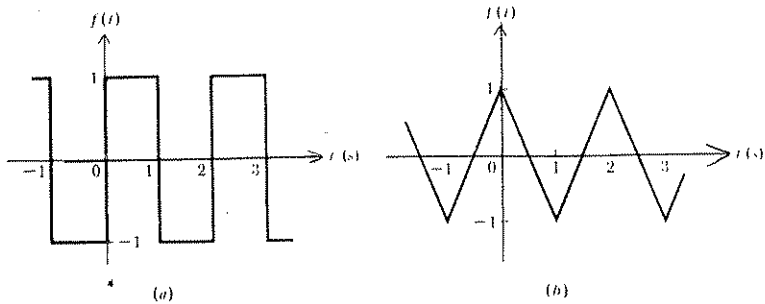
$$f(t) = 0 \quad 2 < |t| < 4 \quad \text{و}$$

$$T = 8s \quad \text{حيث}$$

إرسم المنحنيات (أ) $f(t)$ مع الزمن (ب) $|c_n|$ مع $n\omega_0$ (ج) $|F(j\omega)|$ مع ω .

19. أوجد تحويلية فوريير لاشكال الموجات المبينة في (أ) الشكل 16 - 19 (أ)

(ب) 16 - 19 (ب) .



الشكل 16 - 19 انظر المسألة 19 .

20. إن ادخال نظام خطي معين تعطى بما يأتي :

$$x(t) = t[u(t+2) - u(t-1)]$$

بينما تعطى استجابة وحدة الومضة للنظام بـ

$$h(t) = 2e^{-2t}u(t)$$

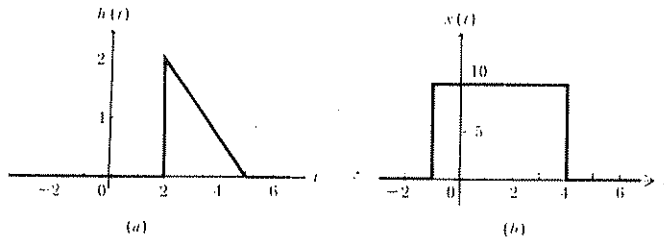
(أ) إرسم $x(t)$ و $h(t)$ (ب) لف هاتين الدالتين بيانياً لاعطاء دالة خرج

تقريبية (ج) مثل الخرج كتكامل (د) احسب الخرج عندما t تساوي صفرأ

21. استجابة وحدة الومضة والدخل لنظام خطي معين مبينتان في الشكل 17 - 19

(أ) احسب تعبير تكامل لاجراج يكون صحيحاً ضمن الفسحة $0 < t < 6$ ولا

يحتوي على دوال انفرادية (ب) احسب الخرج عندما $t = 5$



الشكل 17 - 19 نظر المسألة 21

22. إشارة دخل $x(t) = [u(t+1) - u(t-2)]$

سلطت على نظام خطي استجابة وحدة الومضة له هي $h(t) = 2e^{-2t}u(t)$ أوجد

إشارة الخرج مشتغلاً كلياً في حيز الزمن .

استجابة وحدة الومضة لنظام خطي تعطى بما يأتي :

$$h(t) = (2 + e^{-2t})u(t - 2)$$

والدخل المسلط على النظام هو

$$x(t) = u(t+1) - u(t-4)$$

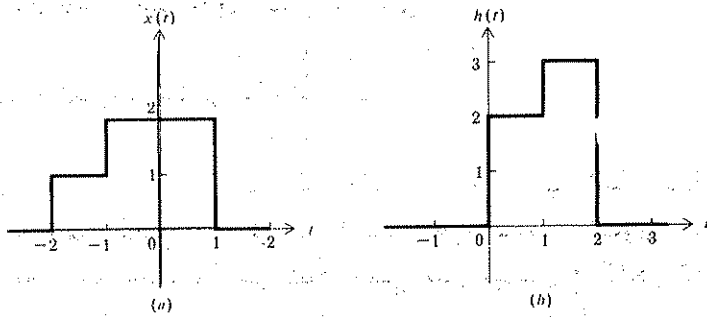
استخدم مفهوم الالتفاف لاجداد تعبير تحليلي مناسب للخرج $y(t)$ ثم ارسم

منحنى $y(t)$ مع الزمن .

24. برهن على أن كلا صيغتي تكامل الالتفاف في المعادلة (42) يؤديان الى دالة

الخرج مع الزمن نفسها لأشكال الموجة الميينة في الشكل 18 - 19 إرسم $y(t)$

مع الزمن .



الشكل 18 - 19 انظر المسألة 24 .

25 □ لكل من تحويلات فوريير المبينة . أوجد دالة الزمن المقابلة لها (أ)

$$10/[(1+j\omega)(2+j\omega)] \quad (ج) \quad 1/(1+\omega^2) \quad (ب) \quad j3\omega/(4+\omega^2)$$

26 . يوصف نظام خطي باستجابة وحدة الخطوة $2e^{-u(t)}$. افرض الآن أن وحدة الومضة سلطت كدخل للنظام . أوجد طاقة الاوم الواحد عند الخرج ضمن الفسحة $1 < |f| < 2$ Hz

27 . اذا سلطت الاشارة $x(t) = \delta(t)$ على نظام خطي معين وكان الخرج الناتج

$$y(t) = 3e^{-t}u(t-2) \quad (أ) \quad \text{اذا سلط الادخال} \quad x(t) = 5[u(t-1) - u(t-6)]$$

استخدم أسلوب الحيز الزمني لايجاد الخرج عندما $t = 4$ و $t = 9$ s

(ب) أوجد دالة النظام لهذه الشبكة . (ج) اذا كانت $x(t) = \delta(t)$ كم

تكون طاقة الاوم الواحد الموجودة في الاخراج

28 □ اذا كانت $y(t) = f(t) * g(t)$. اوجد $y(t)$ لـ $F(j\omega) = 1/(1+j\omega)^2$ و

$G(j\omega) = 2 + \delta(\omega)$ باستخدام الالتفاف في كل من (أ) حيز التردد (ب) في حيز

الزمن .

« ملاحظة : إن التحويلة العكسية المطلوبة يمكن ايجادها بالرجوع الى الجزء هـ من المسألة 16 » .

29. افرض أن $y(t) = f(t) * g(t)$ حيث $f(t) = 2e^{-t}u(t)$ و $g(t) = e^{-t}u(t+1)$. أوجد $y(t)$ باستخدام الالتفاف (أ) في حيز الزمن (ب) في حيز التردد .

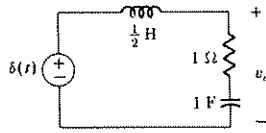
« ملاحظة راجع الجزء (أ) من المسألة 16 » .

30. إذا سلطت اشارة الدخل $x(t) = 3u(t)$ على نظام خطي فانتجت الخرج $y(t) = te^{-t}u(t)$. احسب (أ) دالة النظام (ب) استجابة وحدة الومضة للنظام .

31. حينما سلطت ومضة $\delta(t)$ على نظام خطي كان الاخراج $e^{-t}u(t)$ (أ) أوجد دالة النظام (ب) ماهو الخرج الناتج من تسليط الدخل $e^{-t}u(t)$ (ج) مامقدار الخرج الناتج عن ادخال $4 \cos(3t + \frac{1}{4}\pi)$

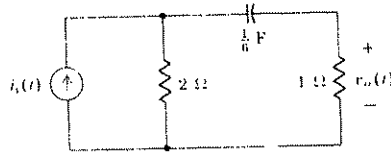
32. في الفقرة 7 - 19 كانت استجابة الومضة $h(t) = 2e^{-t}u(t)$ قد قربت نظرياً . لغرض بناء شبكة لها مثل هذه الاستجابة ، (أ) احسب $H(j\omega) = V_o(j\omega)/V_i(j\omega)$ (ب) بمجرد النظر الى $h(t)$ او الى $H(j\omega)$ لاحظ أن الشبكة تحتوي على عنصر واحد لخزن الطاقة . باختيار دائرة عشوائياً تحتوي على $R = 1 \Omega$ وعلى $C = 1 F$ لاعطاء ثابت زمن كهذا . أوجد هيئة الدائرة التي تعطي $\frac{1}{2}h(t)$ أو $\frac{1}{2}H(j\omega)$ (ج) ضع مضخم فولتية مثالياً بشكل متسلسل مع الشبكة لكي يعطي ثابت التضخيم اللازم . كم يكون تضخيم هذا المضخم ؟

33. أوجد ω_c في دائرة الشكل 19 - 19 .



الشكل 19 - 19 انظر المسألة 33 .

34. أوجد $v_o(t)$ في الدائرة المبينة في الشكل 20 - 19 اذا كانت $i_s(t) = e^{-t} \text{ A}$ (أ)
 $u(t) \text{ A}$ (ب) $\delta(t) \text{ A}$ (ج)



الشكل 20 - 19 أنظر المسألة 34 .

الفصل العشرون

اساليب تحويلية لابلاس

(Laplace) TRANSFORM TECHNIQUES

1 - 20 مقدمة INTRODUCTION

عند البدء بهذا الفصل الأخير من الكتاب عن تحويلية لابلاس فإن من المفيد التوقف قليلاً لمراجعة التقدم الذي أحرز لحد الآن وذلك لسببين ، أولهما أننا قد غطينا أرضية واسعة منذ الصفحة الأولى ، وإن ربط تلك المادة مع بعضها هو أمر مجهد . وثانيهما نحتاج أن نرى موقع تحويلية لابلاس ضمن حرم الطرق التحليلية التي درسناها .

هدفنا كان على الدوام تحليلياً ، وعند معرفة دالة مرغمة في نقطة ما في دائرة خطية يمكن إيجاد الاستجابة عند نقطة أخرى . ولقد استخدمنا في الفصول الأولى الدوال المرغمة فقط وكانت الاستجابة بهيئة $V_0 e^{\sigma t}$ ، إلا أنه بعد تقديم التسعة والمحث انتجت إثارة دوائر RC و RL البسيطة استجابات متغيرة أسياً مع الزمن : $V_0 e^{\sigma t}$. وعند دراسة دائرة أخذت الاستجابات هيئة أسية متغيرة جيبياً $V_0 e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$ لقد تم كل ذلك العمل في حيز الزمن وكانت الدالة المرغمة هي الوحيدة التي درست .

وعندما تقدمنا باستخدام الدالة المرغمة الجيبية أجبرتنا صعوبة حل المعادلات التفاضلية - التكاملية integrodifferential equations على البحث عن طرق أسهل لحل المسائل . وقد كانت النتيجة استخدام تحويلية الطورى . ويمكن أن نتذكر أننا قد توصلنا إليها خلال فرض دالة مرغمة مرتبة بصيغة $V_0 e^{j\theta} e^{j\omega t}$ وفور توصلنا

للنتيجة لم نكن بحاجة الى استخدام العامل المحتوي على الزمن t . لذلك اغفلنا
 وبقي لدينا الطوري $V_0 e^{j\omega t}$. وبذا نكون قد وصلنا الى حيز التردد .

وبعد حصولنا على بعض الوسائل في تحليل الحالة الجيبية المستقرة فان قليلا من
 التفكير الجاد قد أدى بنا الى تسليط دالة مرغمة بهيئة $V_0 e^{j\omega t} e^{(s-r)t}$ ثم اخترعنا
 التردد المركب s لتنظيم كل الأشكال الدالية السابقة الى حالات خاصة : تيار
 مستمر ($s=0$) وأسية ($s=r$) وجيبية ($s=j\omega$) وأسية جيبية
 ($s=r+j\omega$) وقد كان ذلك حينما وقفنا في نهاية الفصل السادس عشر .

ثم رجعنا بعد ذلك الى حيز الزمن ، وتعلمنا كيفية صياغة معادلاتنا بالشكل
 القياسي المطلوب بطرق متغيرات الحالة . للدوائر ذات التعقيد من الدرجتين الأولى
 والثانية ، وكان باستطاعتنا حل المعادلات الناتجة لانواع مختلفة من الدوال المرغمة
 وبضمنها الصيغ التي تجنبناها سابقاً كما وعدنا أيضاً بأن هذه المعادلات يمكن
 تغذيتها الى حاسبة الكترونية بغض النظر عن درجة الدوال المرغمة أو أشكال دوالها .

وبالمضي لمجاوبة أنواع أخرى من الدوال المرغمة عدنا الى الدوال الدورية غير
 الجيبية وهناك وجدنا أن المتسلسلات التي انتجت من قبل فوريير
 $a_0 + \sum (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ مناسبة وبامكانها تمثيل أي دالة دورية تهمننا
 تقريباً . وبفضل خاصيتي الخطية والتراكب أمكننا ايجاد الاستجابة كمجموع
 لاستجابات الحدود الجيبية المنفردة .

وبتذكر نجاحنا في الدوال الأسية المركبة طورنا الصيغة المركبة لمتسلسلة فوريير
 والتي كانت مناسبة فقط للدوال الدورية . إلا أنه بفرض أن الفترة لسلسلة دورية
 من النبضات تزداد دون حدود وصلنا الى شكل ينطبق على نبضة منفردة وهو تحويله
 فوريير العكسية .

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} V(j\omega) d\omega$$

وكان ذلك موقعنا . فماذا نحتاج بعد ذلك ؟ لقد بقي هناك أمور متعددة . أولها
 أن هناك دوال للزمن ليس لها تحويله فوريير . وهذه مثل الدوال الأسية المتزايدة
 والعديد من الاشارات العشوائية وأشكال أخرى من دوال الزمن التي لايمكن أخذ
 تكاملها مطلقاً . وثانيها أننا لم نسمح بعد بخزن الطاقة الابتدائية في الشبكات

التي يطلب إيجاد الاستجابة الزائلة أو الكاملة لها باستخدام طرق تحويلة فوريير .
 وإن كلا هذين المطلبين سيتحققان بتحويله لابلاس ، كما سلاحظ الاصطلاح
 البسيط والحل السهل .

20.2 تعريف تحويلة لابلاس DEFINITION OF THE LAPLACE TRANSFORM

إن الخطوة التي سنقدم عليها للوصول الى تحويلة لابلاس هي اقتراح استخدام
 تحويلة فوريير العكسية لترجمة $v(t)$ كمجموع (تكامل) عدد غير متناه من
 الحدود ، كل منها بشكل

$$\left[\frac{V(j\omega) d\omega}{2\pi} \right] e^{j\omega t}$$

وبمقارنة ذلك بالدالة المرغمة المركبة

$$[V_0 e^{j\theta}] e^{j\omega t}$$

والتي تؤدي بنا الى الطوري $V_0 e^{j\theta}$. نلاحظ ان الحدود المحصورة ضمن القوسين
 هي كميات مركبة على العموم ، لذلك فان $(1/2\pi)V(j\omega) d\omega$ يمكن أن تترجم كنوع
 ما من الطوري وبالطبع فان التفاضل الترددي يؤدي الى اتساع متناه في الصغر
 ولكننا نجمع عدداً غير متناه من مثل هذه الحدود عند إجراء التكامل

لذلك فان خطواتنا النهائية ستوازي تلك الخطوة التي اتخذناها عند تقديم
 الطوريات في حيز التردد المركب ، والان سندع التغير مع الزمن يكون بهيئة

$$e^{(\sigma + j\omega)t}$$

ولكي يتم ذلك لناخذ تحويلة فوريير لـ $e^{-\sigma t}v(t)$ بدلا من أخذ $v(t)$
 نفسها . لـ $v(t)$ وحدها لدينا :

$$V(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} v(t) dt \quad (1) \quad \text{وكذلك}$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} V(j\omega) d\omega \quad (2)$$

وبفرض أن

$$g(t) = e^{-\sigma t} v(t) \quad (3)$$

نرى أن

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-\sigma t} v(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma + j\omega)t} v(t) dt$$

أو أن

$$G(j\omega) = V(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(\sigma + j\omega)} v(t) dt \quad (4)$$

وذلك بالمقارنة مع المعادلة (1) . وبأخذ تحويلة فوريير العكسية نحصل على :

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} G(j\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} V(\sigma + j\omega) d\omega$$

وبمساعدة المعادلة (3) لدينا

$$e^{-\sigma t} v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} V(\sigma + j\omega) d\omega$$

وبتحويل $e^{-\sigma t}$ داخل التكامل

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+j\omega)t} V(\sigma + j\omega) d\omega$$

والآن نعوض عن $\sigma + j\omega$ بمتغير مركب واحد هو s . وحيث أن σ ثابتة $ds = j d\omega$ ، نحصل على

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} e^{st} V(s) ds \quad (5)$$

حيث أصبحت الحدود $\sigma + j\infty$ و $\sigma - j\infty$. وبدلالة (4) يمكن كتابة المعادلة (4)

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} v(t) dt \quad (6)$$

تعرف المعادلة (6) تحويلة لابلاس ذات الجانبين لـ $v(t)$. لقد استخدم تعبير « ذات الجانبين » «two-sided” or “bilateral” للتأكيد على حقيقة أن الزمن الموجب والسالب متضمنان في حدود التكامل . وإن المعادلة (5) هي تحويلة لابلاس العكسية وتحتوي المعادلتان على زوج تحويلة لابلاس ذات الجانبين .

وإذا استمرينا في العملية التي بدأنا بها مسبقاً في هذه الفقرة سنلاحظ أن $v(t)$ لا يمكن تمثيلها كمجموع (تكامل) حدود بشكل :

$$\left[\frac{V(s) ds}{2\pi j} \right] e^{st} = \left[\frac{V(s) d\omega}{2\pi} \right] e^{st}$$

وإن مثل هذه الحدود لها الشكل نفسه الذي صادفناه عندما استخدمنا الطوريات لتمثيل الجيبيات المتغيرة أسياً .

$$[V_0 e^{j\omega}] e^{st}$$

حيث الحد داخل القوسين هو دالة لـ s . لذلك يمكن ترجمة تحويلة لابلاس ذات الجانبين على أنها تمثيل $v(t)$ كمجموع (تكامل) عدد لانهائي من الحدود المتناهية في الصغر للتردد المركب $s = \sigma + j\omega$. وإن المتغير هو s (او ω) و σ يجب تصورها ليتمكنان في عامل التقارب convergence factor أي أنه

بادخال الحد الأسى هذا في المعادلة (6) فان قيمة موجبة اكثر من قيم σ وستضمن ان الدالة $e^{-\sigma t} v(t) u(t)$ يمكن ايجاد تكاملها بصورة مطلقة لأي $v(t)$ نحتاجها تقريباً . أما القيم الأكثر سلبية من قيم σ فنحتاجها حينما $t < 0$. لذلك فان تحويله لابلاس ذات الجانبين موجودة لانواع اوسع من الدوال $v(t)$ من تلك المتوفرة لتحويله فورير وان الظروف الدقيقة المطلوبة لوجود تحويله لابلاس (ذات الجانب الواحد) ستعطى في الفقرة التالية .

وفي عدد كبير من مسائلنا لتحليل الدوائر لا توجد الدوال المرغمة ودوال الاستجابة لكل الازمنة . لا أنها تبتدىء في لحظة معينة ماتختار عادة عند $t = 0$. لذلك ، لدوال الزمن التي لا توجد عند $t < 0$ او لدوال الزمن التي يكون تصرفها عند $t < 0$ غير ذي فائدة لنا فأن الوصف في حيز الزمن يمكن تصوره بشكل $v(t)u(t)$. وان تحويله لابلاس، العائدة لذلك هي إذا

$$V(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} v(t) u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt$$

وهذه تعرف بأنها تحويله لابلاس ذات الجانب الواحد لـ $v(t)$ أو ببساطة تحويله لابلاس لـ $v(t)$ حيث أن الجانب الواحد يكون مفهوماً . إن تعبير التحويله العكسية يبقى دونما تغيير ولكن عند حسابها يفهم أنها منطبقة فقط لـ $t > 0$ ولذا فان تعريف زوج تحويله لابلاس الذي سيستخدم من الآن فصاعداً هو

$$V(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt \quad (7)$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st} V(s) ds \quad (8)$$

$$v(t) \Leftrightarrow V(s)$$

وهذه التعابير يجب حفظها عن ظهر قلب .

إن الرمز \mathcal{L} يمكن استخدامه للإشارة الى تحويله لابلاس المباشرة أو العكسية ،

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

وان

نمريان

1 - 20 إذا كانت $f(t) = 2e^{-3t}[u(t+1) - u(t-4)]$ أوجد (أ) تحويل فورير لها (ب) تحويل لابلاس ذات الجانبين (ج) تحويل لابلاس

الجواب

$$[2/(5+s)](1 - e^{-20s}); [2/(5+s)](e^{-3s} - e^{-20s});$$

$$[2/(5+j\omega)](e^{-3j\omega} - e^{-20-j1\omega})$$

2 - 20 أوجد تحويل لابلاس لكل من الدوال المبينة أدناه وكذلك اعط مدى σ الذي تظهر له تحويل (أ) $e^{-3t}u(t-1)$ (ب) e^{-3t} (ج) $e^{-3t}u(t+1)$ (د) $e^{-3t}u(t)$ (هـ) $e^{-3t}u(t-1)$

الجواب

$$(1/s)e^{-s}, \sigma > 0; 1/(s-3), \sigma > 3; 1/(s+3), \sigma > -3;$$

$$1/(s+3), \sigma > -3; [1/(s+3)]e^{-3s}, \sigma > -3$$

3 - 20 تحويلات لابلاس لبعض دوال الزمن البسيطة :

LAPLACE TRANSFORMS OF SOME SIMPLE TIME FUNCTIONS

في هذه الفقرة سوف نكون جداول تحويلات لابلاس لدوال الزمن التي تتكرر بكثرة في تحليل الدوائر كما فعلنا في تحويلات فورير. وسوف نفعل ذلك ، على الأقل مبدئياً ، باستخدام التعريف : $V(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}v(t) dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$ والذي بمساعدة تعريف التحويلة العكسية ،

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{st}V(s) ds = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}$$

يكون علاقة واحدة - لواحدة بين $v(t)$ و $V(s)$. أي أنه لكل $v(t)$ يوجد لها $V(s)$ ويوجد هناك $V(s)$ واحدة لا وجود لغيرها . عند هذه النقطة ربما نشعر بأننا نعالج صيغة مشؤمة ببعض التردد للدالة العكسية . لاتخف من ذلك ! كما سنرى بعد قليل أن دراسة أولية لنظرية تحويل لابلاس لاتستدعي حساب هذا التكامل حقيقة . ومن الانتقال من حيز التردد مع الأخذ بنظر الاعتبار الفردية المذكورة أعلاه سيمكننا تكوين جدول زواج التحويلة بحيث ان كل تحويله نرغب بعكسها سيكون لها الدالة الزمنية المقابلة متوفرة في الجدول .

وقبل أن نبدأ بحساب بعض التحويلات علينا أن نتوقف قليلاً لنر فيما إذا كان هناك أي احتمال أن لا تكون التحويلة موجودة لبعض $v(t)$ التي تهمننا. وفي دراستنا لتحويلة فورير اجبرنا على أخذ ما يشبه طريقة الباب الخلفي لايجاد بعض التحويلات. ولقد كان ذلك صحيحاً للدوال الزمنية التي كانت قابلة للتكامل مطلقاً مثل دالة وحدة الخطوة.

في حالة تحويلة لابلاس أن استخدام الدوائر الخطية الممكنة الربط أو الدوال المرغمة الموجودة في العالم الحقيقي لا يؤدي بتاتاً الى دوال زمن ذات مشاكل. من الناحية التقنية وإن مجموعة الظروف الكافية للتأكد من تقارب تكامل لابلاس لحالة $Re(s) > k$ هي:

1. الدالة $v(t)$ قابلة للتكامل لكل فترة محددة $t_1 < t < t_2$ حيث $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$

2. الغاية $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} |v(t)|$ موجودة لبعض قيم k دوال الزمن التي لا توفي بهذه الظروف لا تصادف الا نادراً في تحليل الدوائر 1.

وعند أخذ تحويلات لابلاس للدوال الزمنية التي لها ومضة أو دالة انفرادية من درجة عالية عند $t = 0$ فان التكامل المعرف لتحويلة لابلاس يجب أن يؤخذ للغاية السفلى عند $t = 0^-$ لكي يشمل تأثير التقطع 2.

دعنا الآن ننظر الى تحويلات محددة. سنحاول كالعادة أن ندرس أولاً تحويلة لابلاس لدالة وحدة الخطوة $u(t)$ والتي سببت لنا سابقاً بعض المشاكل.

1 أحد الأمثلة مثل هذه الدوال e^{nt} و e^{-nt} وليس t^n أو n^t

2 لاكمال المناقشة على اختيار $t = 0^-$ على أنها الغاية السفلى يمكن الرجوع الى كتاب

Clare D. McGillem and George R. Cooper, "Continuous and Discrete Signal and System Analysis," p. 202, Holt, Rinehart, and Winston, New York,

ويعطي هذا الكتاب مناقشة تفصيلية عن تحويلة لابلاس وتطبيقاتها.

من المعادلة المعروفة يمكن كتابة :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right)_0^{\infty} = \frac{1}{s}\end{aligned}$$

نظراً لأن $\text{Re}(s) > 0$ توفى بالشرط 2 اعلاه . لذا

$$u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s} \quad (9)$$

وقد تكون زوج تحويله لابلاس ببساطة كبيرة .
الدالة الانفرادية الأخرى التي تهمننا تحويله لابلاس لها هي دالة وحدة الومضة
حيث $\delta(t - t_0)$ حيث $t_0 > 0^-$

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt = e^{-st_0}$$

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-st_0} \quad (10)$$

على الخصوص نلاحظ أننا نحصل على

$$\delta(t) \Leftrightarrow 1 \quad (11)$$

لقيمة

وبتذكر اهتمامنا السابق بالدالة الأسية . سنحاول دراسة تحويلتها

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s + \alpha} e^{-(s + \alpha)t} \right]_0^{\infty}$$

وبذا

$$= \frac{1}{s + \alpha}$$

$$e^{-\alpha t} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s + \alpha} \quad (12)$$

إذا كانت α سالبة فإننا نفهم أن $\text{Re}(s) > -\alpha$
وكمثال أخير حالياً دعنا ندرس الدالة الانحدارية $tu(t)$. نحصل على

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

$$tu(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^2} \quad (13)$$

أما بالتكامل المباشر أو باستخدام جداول التكاملات المحددة .
لفرض الاسراع بعملية اشتقاق ازواج تحويلات لابلاس سوف نتوقف لتكوين بعض
النظريات المفيدة في الفقرة الآتية .

تمرينان

20 - 3 أوجد $\mathcal{L}\{f(t)\}$ إذا كانت $f(t) = 2\delta(t-3)$ (أ) $2u(t-3)$ (ب) $2t(t-3)$ (ج) $2(t-3)u(t-3)$ (د)

الجواب $2e^{-3s}/s; 2e^{-3s}/s^2; 2e^{-3s}; e^{-3s}[(6/s) + (2/s^2)]$

20 - 4 أوجد $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ لقيم $F(s)$: (أ) $3 + (6/s)$ (ب) $3(s+4)/(s+2)$ (ج)

(د) $3 + 6/(s+2)$ (هـ) $(3s+12)/(s+2)$

الجواب : $3\delta(t); 3\delta(t) + 6u(t); 3\delta(t) + 6e^{-2t}u(t); 3\delta(t) + 6e^{-2t}u(t); \delta(t) + 2e^{-2t}u(t)$

20 - 4 عدة نظريات أساسية لتحويلة لابلاس

SEVERAL BASIC THEOREMS FOR THE LAPLACE TRANSFORM

ان ايجاد تحويلات لابلاس يتبسط باستخدام عدد من النظريات . إحدى هذه النظريات وأكثرها بدهة هي النظرية الخطية : تحويلة لابلاس لمجموع دالتين للزمن او اكثر يساوي مجموع تحويلات كل منها . ولدالتى الزمن المبينتين فيما يأتي :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} \{f_1(t) + f_2(t)\} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\ &= F_1(s) + F_2(s)\end{aligned}$$

لتضرب مثلاً على هذه النظرية . لنفرض أن لدينا تحويلة لابلاس $V(s)$ ونريد حساب دالة الزمن $v(t)$ التي تعود اليها . فمن الممكن أحياناً أن نجزئ $V(s)$ كمجموع لدالتين أو أكثر مثلاً $V_1(s)$ و $V_2(s)$ واللذان لهما تحويلتان معكوسيتان $v_1(t)$ و $v_2(t)$ معروفتين . يصبح بعد ذلك من السهل تطبيق النظرية الخطية لنكتب :

$$\begin{aligned}v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s) + V_2(s)\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{V_2(s)\} = v_1(t) + v_2(t)\end{aligned}$$

ولنأخذ مثلاً على ذلك . لنفرض أن المطلوب ايجاد تحويلة لابلاس العكسية لـ :

$$V(s) = \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

وعلى الرغم من أنه من الممكن التعويض عن هذا المقدار في المعادلة التي عرفت بها تحويلة لابلاس العكسية، إلا أنه من الأسهل كثيراً استخدام النظرية الخطية باستخدام مفكوك الكسور الجزئية يمكن فك تحويلة معينة بمجموع تحويلتين بسيطتين

$$V(s) = \frac{1/(\beta - \alpha)}{s + \alpha} + \frac{1/(\alpha - \beta)}{s + \beta}$$

ولكن سبق وأن حسبنا التحويلات العكسية لمثل هاتين الهيئتين اللتين على الجهة اليمنى. لذا

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{\beta - \alpha} e^{-\alpha t} u(t) + \frac{1}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} u(t) \\ &= \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \end{aligned}$$

فإننا إذا رغبتنا يمكننا أن ندرج ذلك في قائمة أزواج تحويلات لابلاس.

$$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)} \quad (14)$$

ومن المناسب الإشارة إلى أن الدالات المتسامية transcendental function لـ t في حيز الزمن تتحول إلى دالات لـ s بسيطة وقابلة للاختصار في حيز التردد. وأن التبسيطات التي من هذا النوع لها أهمية في نظرية التحويلات. وفي هذا المثال لاحظ أيضاً أننا استخدمنا حقيقة أن

$$kv(t) \Leftrightarrow kV(s) \quad (15)$$

حيث k هو ثابت التناسب. وهذه النتيجة بالطبع هي نتيجة مباشرة من تعريف تحويلة لابلاس.

والآن نحن على استعداد لدراسة نظريتين سوية كمبرر لاستخدام تحويلتي لابلاس في تحليل الدوائر وهما نظرية الاشتقاق ونظرية التكامل. وستساعدنا هاتان النظريتان لتحويل المشتقات والتكاملات التي تظهر في معادلات الدوائر في حيز الزمن.

دعنا نأخذ الاشتقاق بالنسبة للزمن أولاً بأخذ دالة للزمن $v(t)$ والتي تظهر لها تحويلة لابلاس $V(s)$. ونرغب بإيجاد تحويلة المشتقة الأولى لـ $v(t)$

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{dv}{dt} dt$$

ويمكن ايجاد التكامل بالتجزئة :

$$v' = e^{-st} \quad dV = \frac{dv}{dt} dt$$

وبالنتيجة

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = \left[v(t)e^{-st} \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} v(t) dt$$

الحد الأول الى اليمين يجب أن يقترب من الصفر عندما تزداد t دون ما حد والا فان $V(s)$ تكون غير موجودة . لذا

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dv}{dt} \right\} = 0 - v(0) + sV(s)$$

وكذلك

$$\frac{dv}{dt} \Leftrightarrow sV(s) - v(0) \quad (16)$$

وعند وجود تقطع عند $t = 0$ فان $v(0)$ يجب أن تترجم الى $v(0^-)$. ويمكن أيجاد علاقات مشابهة للمشتقات من درجات أعلى .

$$\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow s^2V(s) - sv(0) - v'(0) \quad (17)$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \Leftrightarrow s^3V(s) - s^2v(0) - sv'(0) - v''(0) \quad (18)$$

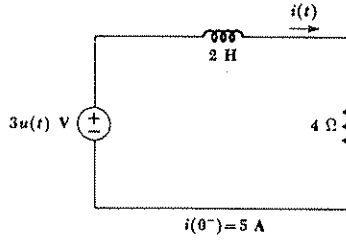
حيث $v'(0)$ هي قيمة المشتقة الأولى لـ $v(t)$ المحسوبة عند $t = 0$ (أو عند $t = 0$ اذا كان هناك تقطع عند $t = 0$) و $v''(0)$ هي القيمة الابتدائية للمشتقة الثانية لـ $v(t)$ وهكذا . حينما تكون كافة الظروف الابتدائية صفراً . نرى أن المشتقة بالنسبة الى t التي كانت في حيز الزمن تناظر الضرب مرة واحدة في s في حيز التردد كما يناظر الاشتقاق مرتين في حيز الضرب بـ s^2 في حيز التردد . وهكذا . لذا فالاشتقاق في حيز الزمن يكافئ الضرب في حيز التردد . وهكذا هو تبسيط كبير ! علينا أن نلمس أيضاً أنه عندما لاتساوي الظروف الابتدائية صفراً فان وجودها يؤخذ بنظر الاعتبار . وسيوضح ذلك بمثال بسيط :

لنفرض أن لدينا دائرة RL الميينة في الشكل 20-1 الشبكة مجهزة من مصدر فولتية وحدة الخطوة . ولنفرض أن القيمة الابتدائية للتيار (عند $t = 0$) كانت 5 A .

وباستخدام قانون الفولتية لكروشوف لكتابة معادلة دارة واحدة في حيز الزمن .

$$2 \frac{di}{dt} + 4i = 3u(t) \quad \text{نحصل على}$$

3 كان بإمكاننا تكوين هذا التيار بفرض أن المصدر هو $3u(t) + 20u(-t) + 17u(t) - 20$ أي مقدار آخر من هذا القبيل .



الشكل 1 - 20 دائرة محللة بتحويل معادلة التفاضل $2 \frac{di(t)}{dt} + 4i = 3u(t)$ إلى $2[sI(s) - i(0^-)] + 4I(s) = 3/s$.

بدلاً من حل هذه المعادلة التفاضلية كما فعلنا سابقاً، نحول أولاً إلى حيز التردد بأخذ تحويلة لابلاس لكل حد: $2[sI(s) - i(0^-)] + 4I(s) = \frac{3}{s}$. ثم نحل هذه المعادلة لإيجاد $i(0^-) = 5$ ، ثم نعوض

$$(2s + 4)I(s) = \frac{3}{s} + 10$$

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1.5}{s(s+2)} + \frac{5}{s+2} \\ &= \frac{0.75}{s} - \frac{0.75}{s+2} + \frac{5}{s+2} \\ &= \frac{0.75}{s} + \frac{4.25}{s+2} \end{aligned}$$

ثم

وبعد ذلك لغرض إيجاد المعكوس نستخدم زوج التحويلات الذي سبق أن وجدناه:

$$\begin{aligned} i(t) &= 0.75u(t) + 4.25e^{-2t}u(t) \\ &= (0.75 + 4.25e^{-2t})u(t) \end{aligned}$$

وبذا يكون الحل لـ $i(t)$ كاملاً. وكلا الاستجابتين المرغمة $u(t)$ و 0.75 والاستجابة الطبيعية $4.25e^{-2t}u(t)$ موجودتان، كما أدخل الطرف الابتدائي تلقائياً في الحل. توضح الطريقة وسيلة غير مؤذية لإيجاد الحل الكامل لمعادلة تفاضلية. يمكن الحصول على تبسيط من النوع نفسه عندما نصادف عملية تكامل بالنسبة للزمن في معادلات الدوائر الكهربائية. دعنا نجد تحويلة لابلاس لدالة الزمن التي

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t v(x) dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t v(x) dx\right] dt$$

توصف بـ $\int_0^t v(x) dx$

$$u = \int_0^t v(x) dx \quad dv = e^{-st} dt \quad \text{وبأخذ التكامل بالتجزئة}$$

$$du = v(t) dt \quad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

ثم

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t v(x) dx\right\} = \left\{\left[\int_0^t v(x) dx\right] \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]\right\}_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{s} e^{-st} v(t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \int_0^t v(x) dx\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} V(s)$$

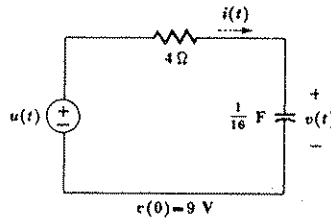
ولكن نظراً لأن $e^{-st} \rightarrow 0$ عندما $t \rightarrow \infty$ ، فإن الحد الأول على اليمين يتلاشى عند الغاية العليا، وعندما $t \rightarrow 0$ يتلاشى التكامل في هذا الحد أيضاً. وهذا يترك لنا الحد $V(s)/s$ فقط. لذا

$$\int_0^t v(x) dx \Leftrightarrow \frac{V(s)}{s}$$

لذا فالتكامل في حيز الزمن يقابل القسمة على s في حيز التردد. وهنا أيضاً تم تحويل عملية رياضية معقدة في حيز الزمن الى عملية جبرية بسيطة في حيز التردد.

وكمثال لتبيين انه كيف يساعدنا ذلك في تحليل الدوائر سوف نحسب $i(t)$ و $v(t)$ لقيم $t > 0$ في دائرة RC المبينة في الشكل 20 - 2. ولقد فرض أن هناك بعض الطاقة الابتدائية المخزونة في المتسعة قبل $t = 0$ بحيث كانت $v(0) = 9$ V سوف نبدأ بكتابة معادلة دارة منفردة واحدة:

$$u(t) = 4i(t) + 16 \int_{-\infty}^t i(t) dt$$



الشكل 20 - 2 دائرة توضح استخدام زوج تحويل لا بلاس $(1/s)I(s)$ $\Leftrightarrow \int_0^t i(t) dt$

ولغرض تطبيق نظرية التكامل الزمني، يجب أن نرتب الحد الأسفل للتكامل لكي يكون صفراً، لذا نضع:

$$16 \int_{-\infty}^t i(t) dt = 16 \int_{-\infty}^0 i(t) dt + 16 \int_0^t i(t) dt = v(0) + 16 \int_0^t i(t) dt$$

$$u(t) = 4i(t) + v(0) + 16 \int_0^t i(t) dt \quad \text{ولهذا}$$

ثم نأخذ تحويله لابلاس لكلا طرفي المعادلة. نظراً لأننا نستخدم تحويله منفردة النهاية، لذا فإن $\mathcal{L}\{v(0)u(t)\}$ تتبسط إلى $\mathcal{L}\{v(0)u(t)\}$. ومن ثم

$$I(s) = \frac{-2}{s+4}$$

وبالحل لـ $I(s)$

$$\frac{1}{s} = 4I(s) + \frac{9}{s} + \frac{16}{s} I(s)$$

فتكون النتيجة المطلوبة فوراً

$$i(t) = -2e^{-4t}u(t)$$

وإذا كان المطلوب هو الاستجابة $v(t)$ فإن علينا أن نكتب معادلة عقدة واحدة

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = 0$$

وبأخذ تحويله لابلاس، نحصل على

$$\frac{V(s)}{4} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{16} sV(s) - \frac{v(0)}{16} = 0$$

أو

$$V(s) \left(1 + \frac{s}{4}\right) = \frac{1}{s} + \frac{9}{4}$$

لذا

$$V(s) = \frac{4}{s(s+4)} + \frac{9}{s+4} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+4} + \frac{9}{s+4}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{8}{s+4}$$

وبأخذ التحويله العكسية:

$$v(t) = (1 + 8e^{-4t})u(t)$$

وبهذا حصلنا بسرعة على فولتية المتسعة بدون الاضطرار لاستخدام حل المعادلة التفاضلية لغرض تدقيق هذه النتيجة نلاحظ أن $(1/16)dv/dt$ ويجب أن تعطي التعبير السابق لـ $i(t)$ لقيم $t > 0$.

$$\frac{1}{16} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{16} (-32)e^{-4t} = -2e^{-4t}$$

وهذا صحيح.

ولأيضاح استخدام النظرية الخطية ونظرية التفاضل الزمني اضافة الى الزوج المهم من جدول تحويلات لابلاس الذي سيأتي فيما بعد ، دعنا نثبت تحويلة لابلاس لـ $\sin \omega t u(t)$. نستطيع استخدام تعريف تعبير التكامل وذلك باستخدام التكامل بالاجزاء ولكن ذلك صعب ودونما حاجة . لذا بدلاً من ذلك سنستخدم العلاقة

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

إن تحويلة مجموع هذين الحدين هي فقط مجموع التحويليتين وكل حد هو دالة أسية سبق أن وجدنا تحويلتها . ويمكن بعد ذلك فوراً أن نكتب

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin \omega t u(t)\} &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \sin \omega t u(t) &\Leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (20)$$

وبعد ذلك نستخدم نظرية التفاضل الزمني لايجاد تحويلة $\cos \omega t u(t)$ والتي تناسب مع مشتقة $\sin \omega t$. أي أن

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega t u(t)\} &= \mathcal{L}\left\{ \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} [\sin \omega t u(t)] \right\} \\ &= \frac{1}{\omega} s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \cos \omega t u(t) &\Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (21)$$

تمارين

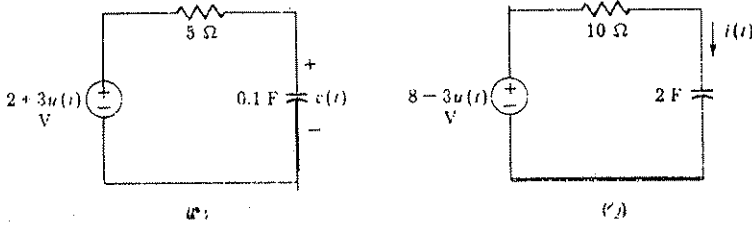
- 5 - 20 بفك الكسور الجزئية ، أوجد تحويلة لابلاس العكسية لـ : (أ)
 $\frac{1}{(s+1)(s+3)}$ (ب) $\frac{s}{(s+1)(s+3)}$ (ج) $\frac{s+2}{(s+1)(s+3)}$
 الجواب $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t)$; $\frac{1}{2}(3e^{-3t} - e^{-t})u(t)$; $\frac{1}{6}(4 - 3e^{-t} - e^{-3t})u(t)$
- 6 - 20 استخدم طرق التحويل لايجاد $v(t)$ لـ $t > 0$ اذا كانت (أ)
 $3 \frac{d^2 v}{dt^2} + 4 \frac{dv}{dt} + v = 10\delta(t)$ $v'(0) = 4$, (ب) $v(0) = 2$ و $6v + 2 \frac{dv}{dt} = 3u(t)$
 $v(0) = 2$ (ج) $v(t)$ كما مبينة في الشكل 3 - 20 (أ)

الجواب $(5 - 3e^{-2t}); \frac{1}{2}(1 + 3e^{-3t}); (14e^{-t} - 12e^{-2t})$ V

20 - 7 أوجد $i(t)$ لـ $t > 0$ إذا كان (أ) $3 \int_0^t i(t) dt + 6i(t) = 2e^{-t}$
 (ب) $\int_{-\infty}^t i(t) dt + 4 di/dt = -6\delta(t), i(0) = 1.5, \int_0^{\infty} i(t) dt = 3$

(ج) $i(t)$ هو التيار المبين في الشكل 3 - 20 (ب)

الجواب أ $-0.3e^{-0.5t}; -1.5 \sin 0.5t; \frac{1}{3}(2e^{-t} - e^{-0.5t})$



الشكل 3 - 20 (أ) انظر التمرين 6 - 20 (ب) انظر التمرين 7 - 20

5 - 20 الالتفاف مرة أخرى CONVOLUTION AGAIN

في دراستنا لتحويلة فوريير، اكتشفنا أن تحويلة فوريير لـ $f_1(t) * f_2(t)$ هو التفاف دالتي الزمن وهو حاصل ضرب تحويلتي الدالتين. وقد أدى ذلك الى مفهوم مفيد جداً لدالة النظام التي عرفت على أنها النسبة بين تحويلة خرج النظام الى تحويلة دخل النظام. وأن هذه الظروف المناسبة بالضبط موجودة عند العمل مع تحويلة لابلاس كما سنرى الآن.

لنفرض أن $F_1(s)$ و $F_2(s)$ هما تحويلتا لابلاس لـ $f_1(t)$ و $f_2(t)$ لناخذ تحويلة لابلاس لـ $f_1(t) * f_2(t)$

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t - \lambda) d\lambda\right\}$$

كما اكتشفنا في دراستنا السابقة للالتفاف أن إحدى هاتين الدالتين للزمن ستكون غالباً الدالة القسرية التي تسلط على طرفي دخل دائرة خطية، بينما الأخرى ستكون استجابة وحدة الومضة للدائرة. أي أن استجابة دائرة خطية هي التفاف الدخل واستجابة الومضة لاغير.

حيث أننا الآن نتعامل مع دوال الزمن التي لا توجد قبل $t = 0$ (إن تعريف تحويل لابلاس تجربنا على ذلك) فإن الحد الأدنى للتكامل يمكن أن يتغير إلى الصفر. وباستخدام تعريف تحويل لابلاس، نحصل على:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) d\lambda \right] dt$$

وحيث أن e^{-st} تعتمد على λ ، ويمكننا تحريك هذا العامل داخل التكامل الداخلي،

وإذا فعلنا ذلك وعكسنا ترتيب التكامل تكون النتيجة:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-st} f_1(\lambda)f_2(t-\lambda) dt \right] d\lambda$$

وبالمضي يمثل هذه المحاولات نلاحظ أن $f_1(\lambda)$ لا تعتمد على الزمن t . لذا يمكن أن تحرك خارج التكامل الداخلي:

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(\lambda) \left[\int_0^\infty e^{-st} f_2(t-\lambda) dt \right] d\lambda$$

ثم نجري التعويض $x = t - \lambda$ في قوسي التكامل (حيث يمكننا معاملة λ ككثابت) وعندها نتخلص من العامل $e^{-s\lambda}$

$$\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\lambda} f_1(\lambda) \left[\int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx \right] d\lambda$$

إن الحد المحصور بين قوسين هو $F_2(s)$ وهو ليس دالة الـ t . ومن ثم يمكن تحريكه خارج إشارتي التكاملين. لذا فالباقي هو تحويل لابلاس $F_1(s)$ ونحصل على:

$$f_1(t)*f_2(t) \Leftrightarrow F_1(s)F_2(s) \quad (22)$$

وهي النتيجة المطلوبة . وبوضع ذلك بأسلوب مختلف قليلاً يمكننا الاستنتاج أن التحويلة العكسية لحاصل ضرب تحويلتين هو التفاف التحويلتين العكسيتين المنفردتين وهي نتيجة مفيدة أحياناً في الحصول على التحويلات العكسية .

وكمثال على استخدام نظرية الالتفاف دعنا نعد النظر في المثال الأول المار في الفقرة والذي أعطينا فيه التحويلة

$$V(s) = \frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$$

وحصلنا على التحويلة العكسية بمفكوك الكسر الجزئي partial fraction expansion . وسوف ندعو الآن $V(s)$ بحاصل ضرب التحويلتين :

$$V_1(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

حيث
وكذلك

$$V_2(s) = \frac{1}{s + \beta}$$

$$v_1(t) = e^{-\alpha t} u(t)$$

$$v_2(t) = e^{-\beta t} u(t)$$

وإن $v(t)$ المطلوبة يمكن أن تعطى مباشرة بالصيغة

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)V_2(s)\} = v_1(t) * v_2(t) \\ &= \int_0^{\infty} v_1(\lambda) v_2(t - \lambda) d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha \lambda} u(\lambda) e^{-\beta(t-\lambda)} u(t - \lambda) d\lambda \\ &= \int_0^t e^{-\alpha \lambda} e^{-\beta(t-\lambda)} d\lambda \\ &= e^{-\beta t} \int_0^t e^{(\beta-\alpha)\lambda} d\lambda \\ &= e^{-\beta t} \frac{e^{(\beta-\alpha)t} - 1}{\beta - \alpha} u(t) \end{aligned}$$

$$v(t) = \frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) u(t)$$

وأخيراً

وهي النتيجة نفسها التي حصلنا عليها سابقاً باستخدام مفكوك الكسر الجزئي . لاحظ أن من الضروري استعمال وحدة الخطوة $u(t)$ في النتيجة . نظراً لأن كل التحويلات للابلاس تنطبق فقط لقيم الزمن غير السالبة .

وهل كان الحصول على النتيجة بهذه الطريقة أسهل؟ كلا إلا إذا كان هناك من يحب تكاملات الالتفاف. وإن طريقة مفكوك الكسر الجزئي عادة أسهل على فرض أن المفكوك نفسه ليس مزعجاً.

كما لاحظنا سابقاً عدة مرات، فإن الخرج $v_o(t)$ عند نقطة معينة في دائرة خطية يمكن الحصول عليه بالتحفاف الإدخال $v_i(t)$ بواسطة استجابة وحدة الومضة $h(t)$ ، إلا أننا يجب أن نتذكر أن استجابة الومضة تنتج من تسليط وحدة الومضة عند $t = 0$ مع مساواة كل الظروف الابتدائية بالصفر تحت هذه الظروف يكون الناتج هو تحويله لا بلاس:

$$\mathcal{L}\{v_o(t)\} = V_o(s) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = V_i(s) \{\mathcal{L}\{h(t)\}\}$$

لذا فالنسبة $V_o(s)/V_i(s)$ تساوي تحويله استجابة الومضة والتي سندعوها بـ $H(s)$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} \quad (23)$$

لقد أعطي المقدار $H(s)$ لأول مرة في الفقرة 7 - 13 على أنه النسبة بين الاستجابة القسرية الى الدالة المرغمة التي تنتجها وسميها بالدالة التحويلية. والآن نستخدم الإشارة نفسها $H(s)$ والتسمية نفسها لتمثيل نسبة تحويله لا بلاس للإخراج (أو الاستجابة) الى تحويله لا بلاس للإدخال (أو الدالة المرغمة) حينما تكون كل الظروف الابتدائية صفراً. وسنوضح مكافئ هذين الوضعين للدالة التحويلية $H(s)$ في الفقرات التالية وحتى نهاية الفصل.

من (23) نرى أن أستجابة الومضة والدالة التحويلية تكونان زوجاً لتحويله لا بلاس

$$h(t) \Leftrightarrow H(s) \quad (24)$$

وهذه حقيقة مهمة سوف نستغلها فيما بعد لتحليل تصرف بعض الدوائر التي حيرتنا فيما سبق.

من الواضح ان هناك تشابهاً كبيراً بين الدالة التحويلية لنظرية تحويله لا بلاس

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\mathcal{L}\{v_o(t)\}}{\mathcal{L}\{v_i(t)\}}$$

ودالة النظام المعرفة في تحويلات فورير

$$H(j\omega) = \frac{V_o(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{\mathcal{F}\{v_o(t)\}}{\mathcal{F}\{v_i(t)\}}$$

وإن معالجة متقدمة أكثر لهذا الموضوع⁴ توضح أن $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$. إذا كانت كل أقطاب $H(s)$ تقع في النصف الأيسر من مستوى s . وإذا وقعت أية أقطاب لـ $H(s)$ على محور $j\omega$ فإن $H(j\omega)$ تحتوي أيضاً على اثنتين من دوال دلتا لكل من هذين القطبين وإذا كانت $H(s)$ تحوي أية أقطاب في النصف الايمن فإن $H(j\omega)$ غير موجودة .

تمرينات

8 - 20 استخدم تكامل الالتفات ليجاد تحويلة لابلاس العكسية لـ $F_1(s)F_2(s)$

$$(أ) [1/(s+1)][1/(s+1)] \quad (ب) [1/(s+1)]^2 \quad \text{أوجد } f_1(t) * f_2(t)$$

بأي طريقة إذا كانت $f_1(t) = 5e^{-2t}u(t)$ و $f_2(t) = 3e^{-4t}u(t)$ (ج) و $2tu(t)$ (د)

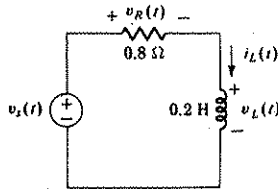
$$\text{الجواب } te^{-4t}u(t); \frac{1}{2}t^2e^{-4t}u(t); 7.5(e^{-2t} - e^{-4t})u(t); 2.5(2t - 1 + e^{-2t})u(t)$$

9 - 20 في الدائرة المبينة في الشكل 4 - 20 افرض أن $v_s(t) = 2\delta(t)$ V ثم

أوجد كلا من $h(t)$ و $H(s)$ إذا كان الاخراج هو (أ) $i_L(t)$ ، (ب) $v_L(t)$ (ج) $v_L(t)$

الجواب

$$4e^{-4t}u(t), 4/(s+4); \delta(t) - 4e^{-4t}u(t), s/(s+4); 5e^{-4t}u(t), 5/(s+4) \text{ A/V}$$



الشكل 4 - 20 انظر التمرين 9 - 20

6 - 20 زحزحة الزمن والدوال الدورية

TIME-SHIFT AND PERIODIC FUNCTIONS

لقد استطعنا الآن أن نحصل على عدد من مداخل السجل لازواوج لابلاس التي سبق أن اتفقنا على تكوينها . من ضمن تلك كانت تحويلة دالة الومضة ودالة الخطوة والدالة الأسية والدالة المنحدرة ramp function والدالة الجيبية ومجموع دالتين أسيتين . هذا بالإضافة الى أننا لاحظنا النتيجة في حيز العمليات تجري في حيز الزمن وكانت التكامل والتفاضل والالتفاف واستخدمنا تحويلة لابلاس لتعريف ماذا كنا نعني بالدالة التحويلية . ان هذه النتائج مع أخرى متعددة جمعت سوية للرجوع اليها بسرعة في الجدولين 1 - 20 و 2 - 20 . وإن بعض العلاقات المبينة في الجدولين غير مألوفة . إلا أننا سوف نتعرض الى بعض النظريات الأخرى التي تساعدنا لاستنتاج تلك العلاقات .

الجدول 1 - 20 أزواج تحويلات لابلاس

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t), n = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$(e^{-\alpha t}u(t))'$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t), n = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$
$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \theta)u(t)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \theta)u(t)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t u(t)$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t u(t)$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$

الجدول 2 - 20 عمليات تحويلية لابلاس

العملية بالانكليزية	$f(t)$	$F(s)$	العملية بالعربية
addition	$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(s) \pm F_2(s)$	الجمع
scalar multiplication	$kf(t)$	$kF(s)$	الضرب غير الاتجاهي
time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0)$	التفاضل الزمني
	$\frac{d^2f}{dt^2}$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	
	$\frac{d^3f}{dt^3}$	$s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$	
time integration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s}F(s)$	التكامل الزمني
	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) dt$	
convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s)F_2(s)$	الالتفاف
time shift	$f(t - at)u(t - a), a > 0$	$e^{-as}F(s)$	زحزحة الزمن
frequency shift	$f(t)e^{-at}$	$F(s + a)$	زحزحة التردد
frequency differentiation	$-tf(t)$	$\frac{dF(s)}{ds}$	تفاضل التردد
frequency integration	$\frac{f(t)}{-t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$	تكامل التردد
scaling	$f(at), a > 0$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	التعبير
initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	القيمة الابتدائية
final value	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, all poles of $sF(s)$ in LHP	القيمة النهائية
periodicity	$f(t) = f(t + nT), n = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}}F_1(s)$, where $F_1(s) = \int_0^T f(t)e^{-st} dt$	دورية الزمن

كما وجدنا في بعض مسائل الحالة الزائلة التي مرت بنا، أنه كل الدوال المرغمة لا تبدأ من الصفر. ماذا يحدث لتحويل دالة الزمن إذا ما زحزحت بالنسبة للزمن بمقدار معلوم؟ وخاصة إذا كانت تحويلة $f(t)u(t)$ دالة معروفة هي $F(s)$. فما هي تحويلة $f(t-a)u(t-a)$ أي أن دالة الزمن الاصلية تأخرت بمقدار a من الثواني (وهي غير موجودة لـ $t < a$) بالبداية مباشرة من تعريف تحويل لابلاس نحصل على: $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a) dt$

لقيم $t \geq a$ وباختيار متغير جديد للتكامل $\tau = t - a$ نحصل على

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = \int_0^{\infty} e^{-s(t+a)} f(\tau) d\tau = e^{-as} \mathbf{F}(s)$$
 لذا

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as} \mathbf{F}(s) \quad (a \geq 0) \quad (25)$$

والنتيجة تعرف بنظرية زحزحة الزمن. وتنص ببساطة على أنه إذا تم تأخير دالة الزمن بزمن مقداره a في حيز الزمن، فإن النتيجة في حيز التردد هي الضرب في e^{-as} .

وكمثال على تطبيق هذه النظرية لناخذ نبضة مستطيلة توصف بالمعادلة:

$$v(t) = u(t-2) - u(t-5)$$

والتي لها قيمة مقدارها واحد للفترة الزمنية $2 < t < 5$ وقيمة مقدارها صفر فيما عدا ذلك. نعلم أن تحويلة $u(t)$ هي $1/s$ لاغير.

وحيث أن $u(t-2)$ هي عبارة عن $u(t)$ متأخرة بثانيتين، فإن تحويلة هذه الدالة المتأخرة $2s$ هي e^{-2s}/s . وبصورة مشابهة فإن تحويلة $u(t-5)$ هي e^{-5s}/s . ومن ثم فإن التحويلة المطلوبة هي:

$$V(s) = \frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s}$$

وقد تبين أنه من غير الضروري الرجوع الى تعريف تحويلة لابلاس لايجاد $V(s)$. وأن نظرية زحزحة الزمن مفيدة أيضاً في ايجاد تحويلة دوال دورية في الزمن.

لتفرض أن $f(t)$ دورية، فترتها T لقيم t الموجبة كما نعلم فإن تصرف $f(t)$ لقيم $t < 0$ ليس لها تأثير على تحويلة لابلاس (ذات الجانب الواحد) لذا فإن $f(t)$

$$f(t) = f(t - nT) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

إذا عرفنا دالة جديدة للزمن قيمتها لاتساوي صفرأ في الفترة الأولى

$$f_1(t) = [u(t) - u(t-T)]f(t) \quad f(t) \downarrow$$

فإن $f(t)$ الاصلية يمكن ان تمثل على أنها مجموع عدد غير متناه من مثل هذه الدوال متأخرة بمضاعفات كاملة لـ T . لذا فإن

$$f(t) = [u(t) - u(t-T)]f(t) + [u(t-T) - u(t-2T)]f(t) + [u(t-2T) - u(t-3T)]f(t) + \dots$$

$$= f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \dots$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_1(t-nT)$$

ان تحويلة لابلاس لهذا المجموع هي فقط مجموع التحويلات

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_1(t - nT)\}$$

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} F_1(s) \quad ; \text{ لذا فان نظرية زحزحة الزمن تؤدي الى}$$

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad \text{حيث}$$

ظراً لأن $F_1(s)$ ليست دالة لـ n . فانه يمكن ازلتها من المجموع فتصبح

$$F(s) = F_1(s)[1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots]$$

عند تطبيق نظرية ذي الحدين لمفكوك المقدار بين القوسين فانه يتبسط الى $1/(1 - e^{-Ts})$. لذا نستنتج أن دالة دورية $f(t)$ ذات فترة T لها تحويلة لابلاس بالصيغة :

$$F(s) = \frac{F_1(s)}{1 - e^{-Ts}} \quad (26)$$

حيث

$$F_1(s) = \mathcal{L}\{[u(t) - u(t - T)]f(t)\} \quad (27)$$

هي تحويلة الفترة الأولى من دالة الزمن .

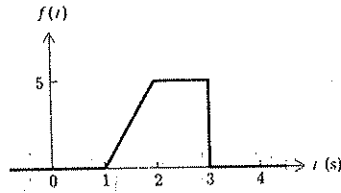
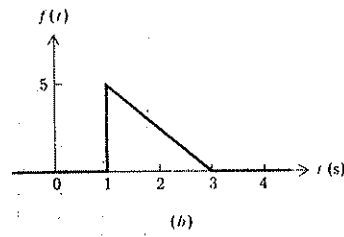
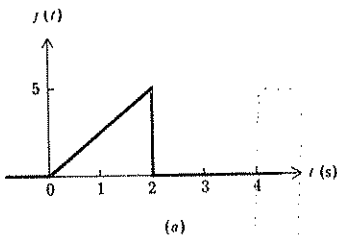
ولأيضاح استخدام نظرية التحويله هذه للدوال الدورية . دعنا نطبقها على سلسلة النبضات المستطيلة المعروفة المبينة في الشكل 5 - 20 . ويمكن وصف هذه الدالة الدورية تحليلاً :

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n [u(t - nT) - u(t - nT - \tau)] \quad t > 0$$

الدالة $V_1(s)$ هي ببساطة تحسب

$$V_1(s) = V_n \int_0^{\tau} e^{-st} dt = \frac{V_n}{s} (1 - e^{-s\tau})$$

والآن لغرض الحصول على التحويله المطلوبه نقسم فقط على $(1 - e^{-sT})$:



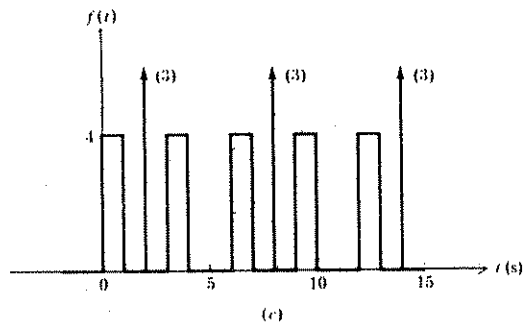
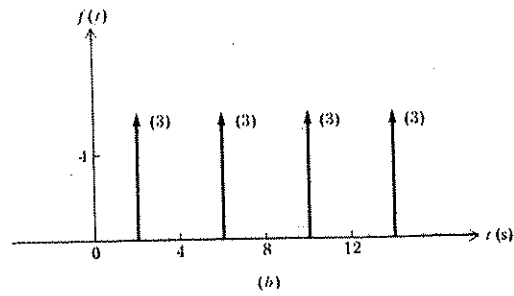
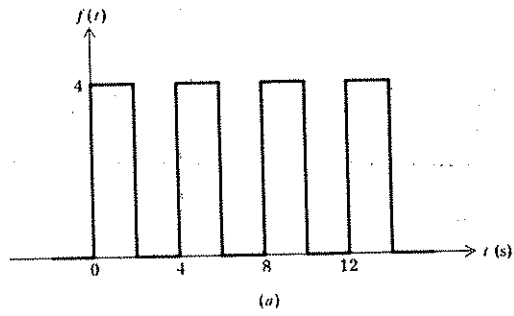
الشكل 6 - 20 انظر التمرين 10 - 20

11 - 20 أوجد تحويلة لابلاس الدورية المبينة في الشكل (أ) 7 - 20 (أ)
 (ب) 7 - 20 (ب) (ج) 6 - 20 (ج)

الجواب

$$\frac{(4/s)(1 + e^{-2s})}{(1 - e^{-2s})}; \quad 3e^{-2s}/(1 - e^{-4s});$$

$$[(4/s)(1 - e^{-s})/(1 - e^{-3s})] + 3e^{-2s}/(1 - e^{-6s})$$



الشكل 7 - 20 انظر التمرين 11 - 20

7 - 20 الزحزحة والتفاضل والتكامل والتعبير في حيز التردد

SHIFTING, DIFFERENTIATION, INTEGRATION, AND SCALING IN THE FREQUENCY DOMAIN

ظهرت نظريات أخرى في الجدول 2 - 20 . وقد حددت تلك النظريات النتائج في حيز الزمن لعمليات بسيطة على في حيز التردد . وسنحصل على نظريات متعددة ببساطة في هذه الفقرة ثم نرى كيف يمكن تطبيقها لاشتقاق أزواج تحويلات إضافية .

وأول نظرية جديدة تعطي علاقة بين $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ مع $F(s+a)$.
لنأخذ تحويلة لابلاس لـ $e^{-at}f(t)$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{-at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} f(t) dt$$

بتمحص هذه النتيجة . ونلاحظ أن التكامل على الطرف الأيمن مطابق لتعريف $F(s)$ عدا شيء واحد هو أن $(s+a)$ تظهر بدل s . لذا

$$e^{-at}f(t) \Leftrightarrow F(s+a) \quad (29)$$

ومن ذلك نستنتج أن الاستعاضة عن s بـ $(s+a)$ في حيز التردد يقابل الضرب في e^{-at} في حيز الزمن . ويعرف ذلك بأنه نظرية ترحيف التردد . ويمكن أن توضع هذه النظرية حيز التطبيق المباشر في إيجاد تحويلة الدالة الجيبية المضحلة التي استخدمناها في دراستنا السابقة بكثرة لنبدأ بالتحويلة المعروفة لدالة جيبية

$$\mathcal{L}\{\cos \omega_0 t\} = F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

ومن ثم فإن تحويلة $e^{-at} \cos \omega_0 t$ يجب أن تكون $F(s+a)$

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cos \omega_0 t\} = F(s+a) = \frac{(s+a)}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{وكذلك}$$

$$e^{-at} \cos \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2} \quad (30)$$

بعد ذلك دعنا نختبر نتائج تفاضل $F(s)$ بالنسبة الى s . النتيجة هي :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} [-tf(t)] dt\end{aligned}$$

والتي هي بوضوح تحويلة لابلاس $[-tf(t)]$ لذا نستنتج أن التفاضل بالنسبة الى s في حيز التردد ينتج ضرباً في $-t$ في حيز الزمن . او

$$-tf(t) \Leftrightarrow \frac{d}{ds} F(s) \quad (31)$$

لنفرض ان $f(t)$ هي دالة ذات وحدة الانحدار unit-ramp والتي نعرف أن تحويلتها $1/s^2$. يمكننا أن نستخدم نظرية التفاضل التي حصلنا عليها الآن لايجاد التحويلة العكسية لـ $1/s^3$ كالآتي :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2} \right) = -\frac{2}{s^3} \Leftrightarrow -t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} \right\} = -t^2 u(t) \quad \text{وكذلك}$$

$$\frac{t^2 u(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{s^3} \quad (32)$$

وبالاستمرار بهذه الطريقة ، نحصل على

$$\frac{t^3}{3!} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^4} \quad (33)$$

وبصورة عامة

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s^n} \quad (34)$$

إن تأثير تكامل $F(s)$ بالنسبة الى s يمكن أن يتضح بالبدء بالتعريف مرة أخرى :

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

وباجراء تكامل التردد من s الى ∞

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_s^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right] ds$$

وباستبدال تسلسل التكاملين

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \left[\int_s^{\infty} e^{-st} ds \right] f(t) dt$$

وبإجراء التكامل الداخلي

$$\int_s^{\infty} F(s) ds = \int_0^{\infty} \left[-\frac{1}{t} e^{-st} \right]_s^{\infty} f(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt \quad \text{لذا}$$

$$\frac{f(t)}{t} \Leftrightarrow \int_s^{\infty} F(s) ds \quad (35)$$

فمثلاً سبق وأن حصلنا على زوج التحويلة

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\sin \omega_0 t u(t)}{t} \right\} = \int_s^{\infty} \frac{\omega_0 ds}{s^2 + \omega_0^2} = \tan^{-1} \frac{s}{\omega_0} \quad \text{لذا}$$

فنحصل على

$$\frac{\sin \omega_0 t u(t)}{t} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\omega_0} \quad (36)$$

بعد ذلك نأخذ نظرية تعبير الزمن لنظرية تحويلة لابلاس وذلك بإيجاد تحويلة $f(at)$. لنفرض أن $\mathcal{L}\{f(t)\}$ معلومة. الطريقة سهلة:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-s\lambda/a} f(\lambda) d\lambda$$

حيث استبدلنا المتغير $at = \lambda$ وإن التكامل الأخير يمكن تمييزه على أنه $1/a$ مرة بقدر تحويلة لابلاس لـ $f(t)$. عدا أن s استبدلت بـ s/a في التحويلة.

يتبع ذلك

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F(s/a) \quad (37)$$

نضرب مثلاً بسيطاً على استخدام نظرية تعبير الزمن هذه. دعنا نجد تحويلة موجة جيبيتمامية ذات تردد 1-kHz. لنفرض أننا نعلم تحويلة موجة جيبيتمامية ترددها

$$\cos t u(t) \Leftrightarrow \frac{s}{s^2 + 1}$$

فالنتيجة:

$$\mathcal{L}\{\cos 2000\pi t u(t)\} = \frac{1}{2000\pi} \frac{s/2000\pi}{(s/2000\pi)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + (2000\pi)^2}$$

إن نظرية تعبير الزمن تعطينا بعض الفوائد الحسابية التي تمكننا من العمل أولاً بعالم متباطيء حيث تمتد دوال الزمن عدة ثوانٍ وتأخذ الدوال الدورية فترات بحدود عدة ثوانٍ بالمقدار. إن العمل الهندسي التطبيقي يحتوي عادة دوال زمنية تتغير بسرعة أكثر مع الزمن مما تشير أمثلتنا إليها.

وإن تباطؤ الزمن يستخدم فقط لتبسيط العمليات الحسابية للمسائل. وهذه النتائج يمكن بعد ذلك أن تترجم إلى عالم الواقع باستخدام نظرية تعبير الزمن.

وإن تعبير الزمن مفيد أيضاً بل وضروري عند التعامل مع الحاسبة التناظرية analog computer وهنا علينا أن نعمل بدوال زمنية متباطئة . نظراً لأن هناك تحيدات في حيز التردد على الدوائر الالكترونية في الحاسبة التناظرية .

تمارين

12 - 20 أوجد (أ) $\mathcal{L}\{e^{-at} \sin(\omega t + \theta) u(t)\}$ (ب) $\mathcal{L}\{-t \sin(\omega t + \theta) u(t)\}$

(ج) $\mathcal{L}\{\sin^2 t u(t)\}$ (د) $\mathcal{L}\{\sin t u(t)/t\}$

الجواب

$$\frac{1}{2s} - \frac{s}{2(s^2 + 4)} = \frac{1}{2} \ln \frac{s}{\sqrt{s^2 + 4}} = \frac{-s^2 \sin \theta - 2\omega s \cos \theta + \omega^2 \sin \theta}{(s^2 + \omega^2)^2}$$

$$\frac{(s + a) \sin \theta + \omega \cos \theta}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

13 - 20 أوجد تحويله لابلاس العكسية لـ (أ) $5/(s + 2)^2$ (ب) $10/[(s + 2)^2 + 4]$ (ج) $5e^{-4s-2}/(s + 2)$

الجواب $5e^{-2t}u(t-4)$; $5te^{-2t}u(t)$; $5e^{-2t} \sin 2t u(t)$

14 - 20 (أ) إذا كانت $\mathcal{L}\{(\pi t)^{-1/2}\} = s^{-1/2}$ أوجد $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ (ب) إذا كانت $\mathcal{L}\{f(t)\} = 2/(s^2 + 5)$ أوجد $\mathcal{L}\{f(2t)\}$

الجواب $1/2 \sqrt{\pi} s^{-1/2}$; $8/(s^2 + 4)$

8 - 20 نظرية القيمة الابتدائية ونظرية القيمة النهائية

THE INITIAL-VALUE AND FINAL-VALUE THEOREMS

النظريتان الأساسيتان الأخيرتان اللتان سوف نناقشهما تعرفان بنظرية القيمة الابتدائية ونظرية القيمة النهائية . وهاتان النظريتان سوف تساعدانا على حساب $f(0^+)$ و $f(\infty)$ بتفحص قيمتي غاييتي $F(s)$

لفرض اشتقاق نظرية القيمة الابتدائية نأخذ تحويله لابلاس للمشتقة مرة اخرى

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^+) = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt$$

والآن نفرض أن s تقترب من النهاية . وبتجزئة التكامل الى جزئين :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\int_0^0 e^{st} \frac{df}{dt} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \right)$$

حيث نرى أن التكامل الثاني يجب أن يقترب من الصفر عند غايته نظراً لان المقدار المكامل نفسه يقترب من الصفر . هذا بالإضافة الى أن $f(0^-)$ ليست دالة لـ s ويمكن حذفها من الغاية اليسرى .

$$\begin{aligned} -f(0^-) + \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] &= \lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^0 df = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(0^+) - f(0^-)] && \text{وأخيراً} \\ &= f(0^+) - f(0^-) && \text{أو} \end{aligned}$$

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)] \quad (38)$$

ان المعادلة الرياضية الأخيرة تدعى بنظرية القيمة الابتدائية . تنص هذه النظرية على أن القيمة الابتدائية لدالة الزمن $f(t)$ يمكن الحصول عليها من تحويل لابلاس $F(s)$ بضرب التحويلة بـ s ثم افترض أن s تقترب من اللانهاية . لاحظ أن القيمة الابتدائية لـ $f(t)$ التي تم الحصول عليها هي الغاية من اليمين .

ان نظرية القيمة الابتدائية مع نظرية القيمة اللانهائية ، التي سوف نأخذها بعد قليل ، هما نظريتان مفيدتان للتحقق من نتائج التحويل أو التحويل العكسي . فمثلاً عندما نحسب تحويلة $\cos \omega_0 t u(t)$ نحصل على $s/(s^2 + \omega_0^2)$. بعد ملاحظة أن $f(0^+) = 1$ ، يمكن أن يتم تحقيق جزئي على صحة هذه النتيجة بتطبيق نظرية القيمة الابتدائية .

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(s \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) = 1$$

وبذا تحقق الحل .

نظرية القيمة النهائية مفيدة جداً كنظرية القيمة الابتدائية ، حيث أنها يمكن استخدامها فقط مع بعض أنواع التحويلات ، وهي التحويلات التي تقع أقطابها في النصف الأيسر من مستوى s ، عدا حالة القطب البسيط عند $s = 0$. نأخذ مرة أخرى تحويلة لابلاس لـ df/dt

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = sF(s) - f(0^-)$$

في هذه الحالة عند الغاية حينما تقترب s من الصفر

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt$$

نفترض أن كلاً من $f(t)$ ومشتقتها الأولى قابلتان للتحويل . والآن بعد أن تم وضع الحد الأخير من هذه المعادلة كغاية :

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{df}{dt} dt = \lim_{t \rightarrow \infty} [f(t) - f(0^-)]$$

وبملاحظة أن $f(0^-)$ مقدار ثابت فإن مقارنة المعادلتين الأخيرتين تبين ان

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] \quad (39)$$

والتي هي نظرية القيمة النهائية . بتطبيق هذه النظرية ، من الضروري معرفة ان $f(\infty)$ أي غاية $f(t)$ حينما تصبح t لانهاية ، موجودة أو بكلمة أخرى أن أقطاب $sF(s)$ تقع كلها ضمن النصف الأيسر من المستوى s ، عدا حالة القطب البسيط فيكون في نقطة الأصل ، حتى انها يجب أن لاتقع على محور $i\omega$.

وكمثال مباشر على تطبيق هذه النظرية ، دعنا نأخذ الدالة $f(t) = (1 - e^{-at})u(t)$ حيث $a > 0$ نرى مباشرة أن $f(\infty) = 1$. تحويلة $f(t)$ هي

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

وبالضرب في s وترك s تقترب من الصفر ، نحصل على

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a}{s+a} = 1$$

والتي تتفق مع $f(\infty)$

إلا انه اذا كانت $f(t)$ جيبيية ، بحيث أن $F(s)$ لها أقطاباً على محور $j\omega$ ، فإن الاستخدام الأعمى لنظرية القيمة النهائية يمكن ان يؤدي الى الاستنتاج ان القيمة النهائية تساوي صفراً . الا أننا نعلم أن القيمة النهائية لكل من $\sin \omega_0 t$ او $\cos \omega_0 t$ غير معروفة indeterminate . لذلك يجب الحذر من وجود اقطاب على محور $j\omega$.

لدينا الآن كل الوسائل لتطبيق تحويلة لابلاس لحل المسائل التي لم يكن بإمكاننا حلها سابقاً أو التي تم حلها بصعوبة وجهد كبير .

تمرين

15 - 20 بدون ايجاد $f(t)$ أولاً . اوجد $f(0^+)$ وكذلك $f(\infty)$ لكل من التحويلات الآتية (أ) $(2s^2 + 6)/[s(s^2 + 5s + 2)]$ (ب) $2e^{-s}/(s + 3)$ (ج) $(s^2 + 1)/(s^2 + 5)$ الجواب غير معروف $0, 0; 2, 3; \infty$

9 - 20 الدالة التحويلية $H(s)$ THE TRANSFER FUNCTION

في بداية هذا الفصل عرفنا الدالة التحويلية $H(s)$ على أنها تحويلة لابلاس لاستجابة الومضة $h(t)$. حيث الطاقة الابتدائية صفر في الدائرة

وقبل ان نستطيع استخدام الدالة التحويلية بصورة فعالة نحتاج الى أن نبين على أنها يمكن الحصول عليها بسهولة لأي دائرة خطية باستخدام تحليل حيز التردد . ويتم ذلك بمناقشة تشبه التي تم تقديمها لتحويلة فورير و $H(j\omega)$ في الفقرة 9 - 19 لكننا سنعطي ذلك باختصار .

سنشتغل في حيز التردد المركب ونسلط اشارة دخل $v_i(t) = Ae^{j\omega t} \cos(\omega_r t + \theta)$ والتي هي $V_i(s_r) = Ae^{j\theta}$ بصيغة الطوري حيث كل من θ و A دالة للتردد المركب $s_r = \sigma_r + j\omega_r$ للاشارة المغذاة . وان الاستجابة هي $v_o(t) = Be^{\sigma_r t} \cos(\omega_r t + \phi)$ لذا $V_o(s_r) = Be^{j\phi}$

$$\frac{V_o(s_r)}{V_i(s_r)} = G(s_r) = \frac{B}{A} e^{j(\phi-\theta)} \quad (40)$$

لايجاد $H(s)$ نحتاج الى ايجاد نسبة تحويله الخرج الى تحويله الدخل :

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}\{B e^{j\omega_r t} \cos(\omega_r t + \phi)\}}{\mathcal{L}\{A e^{j\omega_r t} \cos(\omega_r t + \theta)\}}$$

يمكن الحصول على التحويلة المطلوبة من الجدول 1 - 20 بالاستعاضة عن $s - \sigma_r$ بـ s في تحويله $\cos(\omega t + \theta)$ لذا

$$H(s) = \frac{B \left\{ \frac{[(s - \sigma_r) \cos \phi - \omega_r \sin \phi]}{[(s - \sigma_r)^2 + \omega_r^2]} \right\}}{A \left\{ \frac{[(s - \sigma_r) \cos \theta - \omega_r \sin \theta]}{[(s - \sigma_r)^2 + \omega_r^2]} \right\}}$$

عندما $s = s_r$ تتبسط الى

$$\begin{aligned} H(s_r) &= \frac{B j \omega_r \cos \phi - \omega_r \sin \phi}{A j \omega_r \cos \theta - \omega_r \sin \theta} \\ &= \frac{B \cos \phi + j \sin \phi}{A \cos \theta + j \sin \theta} = \frac{B}{A} e^{j(\phi-\theta)} \end{aligned}$$

والتي هي مطابقة لـ (40) . نظراً لعدم وجود تأثير معين للتوصيف x . ينتج

$$H(s) = G(s) \quad (41)$$

لذا يمكننا ايجاد $H(s)$ باستخدام طرق حيز التردد الاعتيادية مع التعبير عن كل العناصر بدلالة ممانعتها عند التردد المركب s .

دعنا نوضح كيف يمكن استخدام هذا الأسلوب لايجاد $h(t)$ وفولتية الخرج للدائرة المبينة في الشكل 8 - 20 (أ) . نفترض الآن عدم وجود طاقة ابتدائية في الشبكة . أولاً نبني دائرة حيز التردد المبينة في الشكل 8 - 20 (ب) النسبة $V_o(s)/V_i(s)$ يمكن ايجادها بايجاد الممانعة $Z_i(s)$ والتي هي ممانعة الفروع المتوازية الثلاثة الى اليمين :

$$Z_i(s) = \frac{1}{s/24 + 1/30 + 1/(24 + 48/s)} = \frac{120(s + 2)}{5s^2 + 19s + 8}$$

ثم باستخدام قاعدة تقسيم الفولتية
لذا

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Z_i(s)}{20 + Z_i(s)} = \frac{6(s+2)}{5s^2 + 25s + 20}$$

$$H(s) = \frac{1.2(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

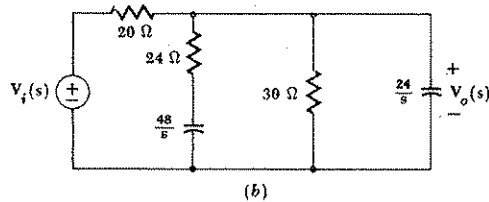
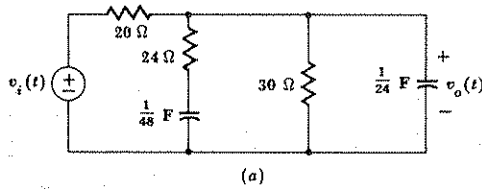
لايجاد $h(t)$ نحتاج الى $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{0.4}{s+1} + \frac{0.8}{s+4}\right\}$$

$$h(t) = (0.4e^{-t} + 0.8e^{-4t})u(t)$$

وكذلك
لذا ، اذا كانت

$$v_i(t) = \delta(t), v_o(t) = h(t) = (0.4e^{-t} + 0.8e^{-4t})u(t).$$



الشكل 8 - 20 (أ) مثال يمكن الحصول فيه على الدالة التحويلية $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$ بواسطة تحليل حيز التردد. الظروف الابتدائية كلها صفر (ب) دائرة حيز التردد

لدوال دخل مختلفة، مثل $v_i(t) = 50 \cos 2t u(t)$ V، فيمكن استخدام مفهوم الدالة التحويلية،

$$V_o(s) = H(s)V_i(s)$$

$$V_i(s) = \mathcal{L}\{50 \cos 2t u(t)\} = \frac{50s}{s^2 + 4}$$

حيث
وكذلك

$$V_o(s) = \frac{1.2(s+2)}{(s+1)(s+4)} \frac{50s}{s^2 + 4}$$

وبتحويلها الى كسور جزئية

$$V_o(s) = \frac{-4}{s+1} + \frac{-8}{s+4} + \frac{6+j6}{s+j2} + \frac{6-j6}{s-j2}$$

$$= \frac{-4}{s+1} + \frac{-8}{s+4} + \frac{12s+24}{s^2+4}$$

ومن ثم

$$v_o(t) = (-4e^{-t} - 8e^{-4t} + 12 \cos 2t + 12 \sin 2t)u(t)$$

وان الحل مباشر ، وعلينا ان نكون على ثقة بأنه بالامكان ايجاد الاستجابة لأي دخل من الممكن ايجاد تحويله لا بلاس له . وسنفترض وجود طاقة ابتدائية مخزونة في الفقرة التالية وهي الفقرة الأخيرة في هذا الفصل .

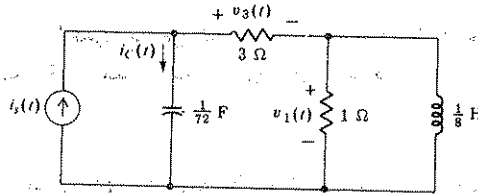
تمرين

16- 20 أوجد استجابة الومضة للدائرة المبينة في الشكل 9 - 20 برسم دائرة في حيز التردد وايجاد الدالة التحويلية المناسبة ، ومن ثم ايجاد تحويله لا بلاس العكسية ، اذا كان الخرج هو (أ) $v_1(t)$ (ب) $v_3(t)$ (ج) $i_c(t)$

الجواب

$$\delta(t) - 18e^{-12t}u(t) + 72te^{-12t}u(t) \text{ A;}$$

$$(54e^{-12t} - 216te^{-12t})u(t) \text{ V; } (18e^{-12t} - 216te^{-12t})u(t) \text{ V}$$



الشكل 9 - 20 انظر التمرين 16 - 20.

عند وجود طاقة ابتدائية في دائرة فإنه يمكن استخدام طريقة تحويلية لابلاس للحصول على الاستجابة الكاملة بوحدة من عدة طرق . وسأخذ اثنتين .

الطريقة الأولى أكثر أساسية لأنها تضم كتابة معادلات تفاضلية للشبكة ثم أخذ تحويلية لابلاس لتلك المعادلات . الظروف الابتدائية تظهر عند تحويلية مشتقة او تكامل . أما الطريقة الثانية فثحتاج الى الاستعاضة عن كل فولتية ابتدائية لمتسعة وتيار ابتدائي لمحث بمصدر مكافئ يدعى بمولد الظرف الابتدائي . ومن ثم تعتبر هذه العناصر لاتحمل أية طاقة ابتدائية ويمكن عند ذلك اتباع طريقة الدالة التحويلية والتي مرت في الفقرة السابقة .

دعنا نوضح طريقة المعادلات التفاضلية بأخذ الدائرة نفسها المبينة في الشكل 10 - 20 والتي سبق أن حللناها ولكن بظروف ابتدائية لاتساوي صفرأ هذه المرة . دعنا نفترض أن $v_1(0^-) = 10 \text{ V}$ و $v_2(0^-) = 25 \text{ V}$

المعادلات التفاضلية لهذه الدائرة يمكن الحصول عليها بكتابة المعادلات العقدية بدلالة v_1 و v_2 . عند العقدة v_1 :

$$\frac{v_1 - v_2}{24} + \frac{1}{48} v_1' = 0 \quad \text{او} \quad (42)$$

$$2v_2 = 2v_1 + v_1'$$

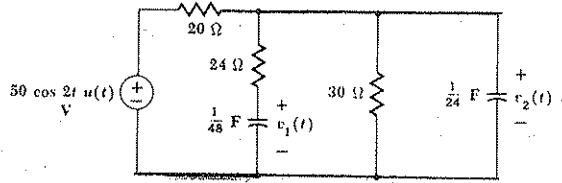
بينما العقدة v_2

$$\frac{v_2 - 50 \cos 2t u(t)}{20} + \frac{v_2 - v_1}{24} + \frac{v_2}{30} + \frac{1}{24} v_2' = 0 \quad \text{او} \quad (43)$$

$$v_1 = v_2' + 3v_2 - 60 \cos 2t u(t)$$

بتأثير v_2 على أنها الاستجابة المطلوبة ، نحذف v_1 و v_1' بأخذ مشتقة (43) مع تذكر أن $du(t)/dt = \delta(t)$:

$$v_1' = v_2'' + 3v_2' + 120 \sin 2t u(t) - 60\delta(t) \quad (44)$$



الشكل 10 - 20 تم الحصول على الاستجابة $v_2(t)$ لهذه الشبكة تحت الظروف الابتدائية $v_1(0) = 10$ و $v_2(0) = 25$ V

و بتعويض (43) و (44) في (42)

$$2v_2 = 2[v_1 + 3v_2 - 60 \cos 2t u(t)] + [v_1'' + 3v_2'' + 120 \sin 2t u(t) - 60\delta(t)]$$

$$v_1'' + 5v_2 + 4v_2 = (120 \cos 2t - 120 \sin 2t)u(t) + 60\delta(t) \quad \text{أو}$$

والآن لناخذ تحويل لابلاس

$$s^2V_2(s) - sv_2(0^-) - v_2'(0^-) + 5sV_2(s) - 5v_2(0^-) + 4V_2(s) = \frac{120s - 240}{s^2 + 4} + 60$$

وبتجميع الحدود

$$(s^2 + 5s + 4)V_2(s) = sv_2(0^-) + v_2'(0^-) + 5v_2(0^-) + \frac{120s - 240}{s^2 + 4} + 60$$

نفرض ان

$$(s^2 + 5s + 4)V_2(s) = 25s + 125 + v_2'(0^-) + \frac{120s - 240}{s^2 + 4} + 60$$

ونحتاج الى قيمة $v_2'(0^-)$ التي يمكن الحصول عليها من معادلتى الدائرة (42) و (43) بأخذ كل حد عند $t = 0^-$ بالحقيقة نحتاج الى استخدام (43) في هذه المسألة .

$$v_1(0^-) = v_2'(0^-) + 3v_2(0^-) - 0$$

$$v_1(0^-) = -65$$

وكذلك

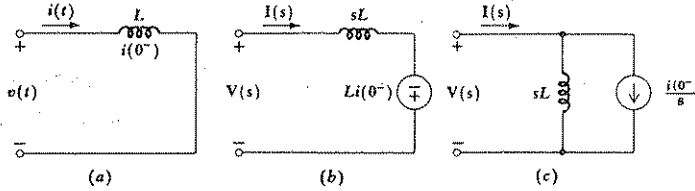
$$\begin{aligned}
 V_2(s) &= \frac{25s + 120 + 120[(s - 2)/(s^2 + 4)]}{(s + 1)(s + 4)} \quad \text{ومن ثم} \\
 &= \frac{25s^2 + 120s^2 + 220s + 240}{(s + 1)(s + 4)(s^2 + 4)} \quad (45) \\
 &= \frac{23/3}{s + 1} + \frac{16/3}{s + 4} + \frac{12s + 24}{s^2 + 4}
 \end{aligned}$$

التي يمكن الحصول منها استجابة حيز التردد

$$v_2(t) = (23/3)e^{-t} + 16/3e^{-4t} + 12 \cos 2t + 12 \sin 2t)u(t)$$

الآن دعنا نحسب مكافئ حيز التردد للمحث L مع تيار ابتدائي $i(0^-)$ توصف شبكة حيز الزمن التي في الشكل 11 - 20 بما يأتي

$$v(t) = Li'$$



الشكل 11 - 20 (أ) محث L بتيار ابتدائي $i(0^-)$ مبين في حيز الزمن (ب) و (ج) شبكتنا حيز التردد المكافئتين ل (أ) لفرض تحويله لابلاس

$$V(s) = sLI(s) - Li(0^-) \quad (46)$$

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0^-)}{s} \quad (47)$$

ومن ثم

أو

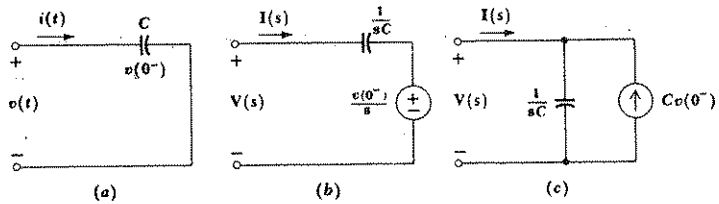
مكافئاً حيز التردد يمكن أن يُقرأ من (46) و (47) وهما مبيانان في الشكلين 11 - 20 (ب) وج على التعاقب . ومن المفيد ملاحظة أن مصدر الفولتية في الشكل 11 - 20 (ب) هو تحويلة ومضة بينما مصدر التيار في ج هو تحويلة خطوة .

كما ويمكن الحصول على الشبكات المكافئة لمتسعة مشحونة مبدئياً بوسائل مشابهة . والنتائج مبينة في الشكل 12 - 20 .

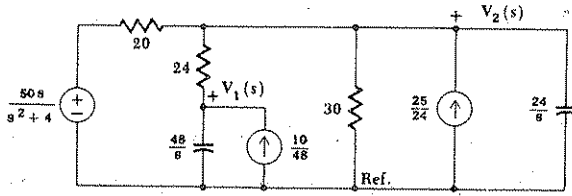
يمكن الآن استخدام هذه النتائج لبناء مكافئ حيز التردد للدائرة المبينة في الشكل 10 - 20 النتيجة . تستخدم مصادر التيارات بدل الظروف الابتدائية لغرض تسهيل كتابة معادلات العقد .

والآن علينا استخدام كل من مبدأ التراكب ومفهوم الدالة التحويلية لكي نرى أن $V_2(s)$ تتكون من مجموع ثلاثة حدود :

كل منها ناتج من كل مصدر يعمل لوحده . هذا بالإضافة الى ان كلاً من هذه المصادر له دالة تحويلية لـ $V_2(s)$. يمكن الحصول على كل دالة تحويلية بتطبيق طرق تحليل حيز التردد الاعتيادية . ولسنا بحاجة الى حل ثلاثة مسائل قصيرة نظراً لأن بإمكاننا الحصول على تحليل حيز التردد عندما تعمل كل المصادر الثلاثة معاً . نجري ذلك بكتابة معادلتى العقدتين :



الشكل 12 - 20 (أ) المتسعة C بفولتية ابتدائية $v(0^-)$ مبينة في حيز الزمن (ب) و (ج) شبكتا حيز التردد المكافئتان لـ (أ) لتحليل تحويلة لابلاس



الشكل 13 - 20 مكافئ حيز التردد للدائرة المبينة في الشكل 10 - 20 مصدرا التيار $10/48$ و $25/24$ بجهازان فولتيي حيز الزمن 10 V و 25 V عبر متستين مقدارهما $1/48$ -F و $1/24$ -F على التتابع.

$$\frac{V_1(s) - V_2(s)}{24} + \frac{sV_1(s)}{48} - \frac{10}{48} = 0$$

$$(s + 2)V_1 - 2V_2 = 10 \quad (48) \quad \text{أو}$$

وكذلك

$$\frac{V_2(s) - 50s/(s^2 + 4)}{20} + \frac{V_2(s) - V_1(s)}{24} + \frac{V_2(s)}{30} - \frac{25}{24} + \frac{sV_2(s)}{24} = 0$$

$$(s + 3)V_2 - V_1 = \frac{60s}{s^2 + 4} + 25 \quad (49)$$

باستخدام (48) لحذف V_1 من هذه المعادلة نحصل على

$$V_1 = \frac{10 + 2V_2}{s + 2}$$

ومن ثم

$$V_2 = \frac{25s^2 + 120s^2 + 220s + 240}{(s + 1)(s + 4)(s^2 + 4)}$$

وهذا يتفق مع المعادلة (45) التي حصلنا عليها قبل صفحتين ، ولسنا بحاجة الى اعادة عملية التحويلة العكسية . وبذا تحقق الطريقتان احدهما الأخرى .

وبمقارنة استخدام الطريقتين ، وربما من الصحيح أن نذكر أن طريقة الدالة التحويلية مع مولدات الظروف الابتدائية أسرع قليلاً . وهذه العبارة تصبح أقرب الى الصواب كلما ازدادت الشبكة تعقيداً . الا أنه علينا أيضاً أن نبقي بفكرنا الحقيقة انه

كلما كنا أقرب الى الأساسيات كلما كنا اكثر تجنباً للارتباك في الاساليب الخاصة والوسائل .

وبالطبع فإن طريقة المعادلات التفاضلية أكثر أساسية . وأن استخدام تحويلة لابلاس يمكن تصوره ببساطة على أنه طريقة سهلة لحل المعادلات التفاضلية الخطية .

قبل انهاء مناقشتنا لتحويلة لابلاس من المفيد أن نقارن استخدامها مع استخدام تحويلة فوريير . أن تحويلة فوريير غير موجودة لدوال متنوعة بالكثرة التي توجد بها الأولى . كما أن العامل z منتشر في الحل بكثرة في مقادير التحويلة . كما أن تحويلة فوريير أصعب عند التطبيق على الدوائر المحتوية على طاقة ابتدائية مخزونة . لذا فإن مسائل الحالة الزائلة أسهل حلاً بواسطة تحويلة لابلاس إلا أنه عندما تطلب معلومات طيفية عن الاشارة مثل توزيع الطاقة عبر حزمة تردد فإن تحويلة فوريير تكون مناسبة أكثر .

والان ونحن نقرب من الفقرات الأخيرة من الفصل الأخير ، عندما ننظر الى مئات الصفحات التي مرت في تحليل الدوائر الخطية علينا أن نسأل أنفسنا ماذا حصلنا ؟ . هل بإمكاننا فعلاً أن نعالج مسألة عملية حقيقية أو أننا كنا نحاول إدارة طاحونه المغامر كيشوت* الهوائية الوهمية ؟

هل بإمكاننا تحليل مرشحات فعالة ذات عدد من المراحل أو جهاز الاستقبال المستخدمة في القياس عن بعد أو شبكة قدرة كهربائية متداخلة كبيرة ؟ قبل أن نعترف أننا لانستطيع أو على الأقل نعترف أن هناك أمور أخرى لايمكن ان نجريها ، دعنا نناقش كم يمكننا المضي في هذه المسائل المعقدة ؟

لقد طورنا بالتأكيد قابلية جيدة في كتابة مجموعات المعادلات التي تمثل تصرف دوائر خطية ذات تعقيد متزايد . وهذه بنفسها لا يستهان بها . حيث أننا فعلنا ذلك في حيزي التردد والزمن معاً . إن تحدينا الحقيقي كان في الصعوبة على

* قصة المغامر كيشوت عالمية معروفة بكثرة الاوهام التي يقع في شركها .

الحصول على نتائج عددية كلما ازدادت الدوائر تعقيداً . ولهذا السبب فقد ركزنا على الأمثلة المناسبة للقابلية الحسائية للانسان . الا أننا طورنا الفهم المتزايد لمعظم وسائل التحليل المهمة في العملية .

وفي الفصول العديدة الأخيرة طورنا تلك الاساليب التي تجهز عملية الحصول على أجوبة رقمية محددة وعلى طرق متغيرات الحالة وطرق حيز الزمن وطرق التحويلات وطرق حيز التردد . ويمكننا الآن كتابة مجموعة من المعادلات في حيز الزمن أو معادلات حيز التردد لأي دائرة مهما كان مقياس كبرها الذي نختاره . لكن الحل العددي سوف يجهد دقتنا وينفذ صبرنا . وإذا أريد لنا مناقشتنا أن تستمر لأكثر مما سبق ، علينا أن نعتمد على وسائل غير قابلية الانسان فحسب على حل هذه المعادلات . هذه النقطة التي تعيدنا الى الآلة الحاسبة computer فهي صورة لحد غير متناه وذات دقة مثيرة للاستغراب وذات سرعة ربما أكثر من تصورنا . وإن الأساليب التفصيلية التي توصل الحاسبة الألكترونية الى الحل العددي تدخل من قبلنا . وإذا ماررتركبنا خطأ في البرنامج فأن ذلك الخطأ الناتج عنا سيؤدي بالحاسبة الى الوصول الى نتائج خاطئة بسرعة ودقة وصبر أيضاً .

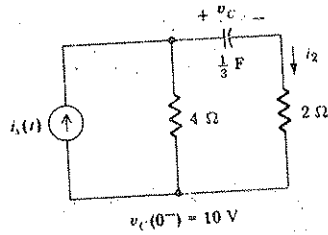
والخلاصة أننا يمكننا الآن وضع معادلات وضعية دقيقة تصف أي وضعية لدائرة خطية تقريباً . كما ان لدينا قابلية متواضعة لحل مجموعات مبسطة من هذه المعادلات . وإن خطوتنا الآتية . اذا كتب علينا أن نستمر ، هي دراسة برامج الحاسبة الكبيرة التي يمكن بواسطتها تحويل معادلات متغيرات الحالة او معادلات التحويلة الى معطيات مفيدة . ولكن علينا التوقف في وقت ما وليكن الان .

تمرينان

التمرين 17 - 20 للدائرة المبنية في الشكل 14 - 20 ، أكتب المعادلات التفاضلية المناسبة ثم خذ تحويله لابلاس لكل من الطرفين ثم جد $i_2(t)$ اذا كانت $i_1(t) = 10u(t)$ A (ب) $10 \cos t u(t)$ A (ج) $10e^{-t}u(t)$ A

الجواب

$$5e^{-112}u(t); (40/3e^{-t} - 25/3e^{-112})u(t); (-1/3e^{-112} + 16/3 \cos t - 8/3 \sin t)u(t) A$$



الشكل 14 - 20 انظر التمرينين 17 - 20 و 18 - 20

18 - 20 أعد التمرين 17 - 20 ببناء مولد الظروف الابتدائية في الدائرة ثم أعمل في حيز التردد في الجواب نفسه

مسائل :

1 □ أوجد تحويلة لابلاس ذات الجانبين لكل من دوال الزمن الآتية ثم صف مدى σ التي تظهر فيها (أ) $5[u(t+2) - u(t-1)]$ (ب) $5t[u(t+2) - u(t-1)]$ (ج) $5e^{-t}[u(t+2) - u(t-1)]$ (د) $5e^{-t}$

2 أعد السؤال 1 لتحويلة لابلاس ذات الجانب الواحد

3 □ أوجد $F(s)$ إذا كانت $f(t)$ (أ) $4\delta(t-3)$ (ب) $4tu(t-3)$ (ج) $4 \cos t$ (د) $8(t-3)$

4 افرض ان $f_1(t) = 2\delta(t+1) + 3\delta(t-2)$ وأن $f_2(t) = 3\delta(t-2)$ (أ) ارسم $f_1(t)$ و $f_2(t)$ بدلالة t (ب) بين ان $F_1(s) = F_2(s)$ (ج) أعد حل الفرعين أ و ب بإضافة العبارة المذكورة في الفقرة 3 - 20 بان هناك تقابل منفرد بين $f(t)$ و $F(s)$

5 □ احصل على مفكوكات الكسور الجزئية لكل من الكسور الآتية ، ثم أوجد دوال الزمن المائدة لها (أ) $F_1(s) = [(s+1)(s+3)]/[s(s+2)]$ (ب) $F_2(s) = (s+2)/[s^2(s^2+4)]$

6 أوجد أولاً مفكوك الكسور الجزئية ، ثم أوجد تحويلة لابلاس العكسية لكل من (أ) $10/[s^2(s+2)]$ (ب) $[10(s+1)]/[s^2(s+2)]$ (ج) $[10(s+1)^2]/[s^2(s+2)]$ (د) $[10(s+1)^3]/[s^2(s+2)]$

□ 7 بدون أخذ أي تكامل ، اوجد تحويل لابلاس للمقدار $\int_{-\infty}^t te^{-2t}u(t) dt$

8 اوجد $y(t)$ عندما $t > 0$ ، اذا (أ) $d^2y/dt^2 + y = 0$ حيث $y(0) = 1$ و $y'(0) = -1$ (ب) $y'' + y' = t^2 + 2t$ اذا كان $y(0) = 4$ ، $y'(0) = -2$

9 اوجد $x(t)$ و $y(t)$ للزمن $t > 0$ اذا كان $x'' + x' + y'' = 0$ و $y'' + y' = 0$ حيث $x(0) = 0$ و $x'(0) = 1$ و $y(0) = 1$ و $y'(0) = -1$

□ 10 حل المجموعة الآتية من المعادلات التفاضلية للدالتين $x(t)$ و $y(t)$:

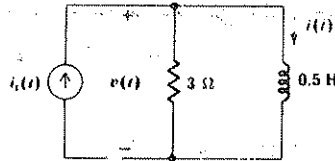
$$2x' + 4x + y' - y = 0, \quad x' + 2x + y' + y = 0$$

حيث $x(0) = 0$ و $y(0) = 1$

11 اذا كانت $x'(t) + 3x(t) + 2 \int_0^t x(\lambda) d\lambda = 2u(t)$

و $x(0) = 1$ ، اوجد $x(t)$ للزمن $t > 0$

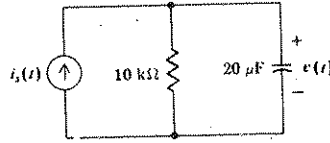
12 في الدائرة المبينة في الشكل 20 - 15 (أ) افرض $i_s(t) = 5tu(t)$ ثم اوجد $v(t)$ (ب) افرض أن $i_s(t) = 5\delta(t)$ ثم اوجد $i(t)$



الشكل 15 - 20 أنظر السؤال 12

□ 13 اوجد $v(t)$ للدائرة المبينة في الشكل 16 - 20 ، اذا كان $i_s(t)$ يساوي (أ)

$2 \cos 10t u(t)$ (ب) $\delta(t)$



الشكل 16 - 20 انظر السؤال 13

14 مقاوم ذو $5\text{-}\Omega$ ومتسعة ذات $40\text{-}\mu\text{F}$ ربطتا على التوازي مع مصدر تيار يجهر نبضة A $i_s(t) = 10(e^{-1000t} - e^{-2000t})u(t)$. أوجد فولتية المتسعة.

15 مقاوم ذو $5\text{-}\Omega$ ومتسعة ذات $40\text{-}\mu\text{F}$ ومحث ذو 6.25-mH ربطت على التوازي مع مصدر تيار يجهر نبضة $i_s(t) = 10(e^{-1000t} - e^{-2000t})u(t)$. أوجد فولتية المتسعة.

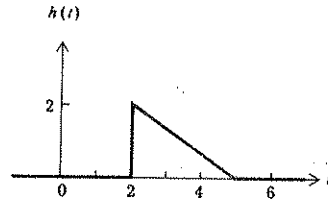
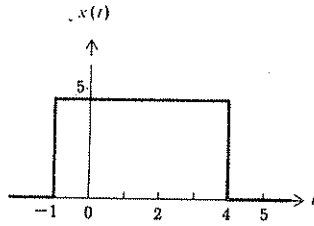
16 إذا كانت $f(t) = 3e^{-3t}u(t)$ و $g(t) = 4 \sin 2t u(t)$ أوجد $f(t)*g(t)$

17 إذا علم ان استجابة ومضة مسلطة على نظام خطي هي $5e^{-t}u(t)$. مامقدار الاخراج الناتج من الادخال $4e^{-3t}u(t)$ ؟

18 إذا عرفت الاشارتين $f_1(t) = t[u(t+2) - u(t-1)]$ و $f_2(t) = u(t-3)$ (أ) اعمل في حيز الزمن لايجاد $f_1(t)*f_2(t)$ (ب) أوجد $\mathcal{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}$

19 الادخال $x(t)$ واستجابة الومضة $h(t)$ لنظام خطي مبيان في الشكل 20 - 17.

أوجد اخرج النظام $y(t)$ في الفترة $4 < t < 6$. ثم أوجد $y(5)$



الشكل 17 - 20 أنظر السؤال 19

20 أوجد تحويلة لابلاس العكسية لكل من (أ) $\frac{[s(s^2 + 3s + 4)]}{[(s + 2)^2(s^2 + 2s + 2)]}$ (ب) $\frac{(s^2 + 1)}{[s(s + 1)]}$

21 إذا عرفت أن $F(s) = \frac{(s^2 + 3)}{[(s + 1)^2(s^2 + 2s + 5)]}$

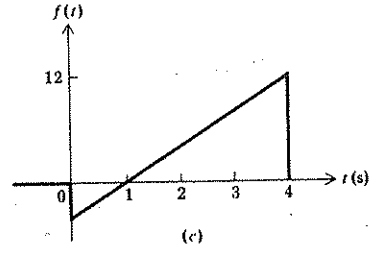
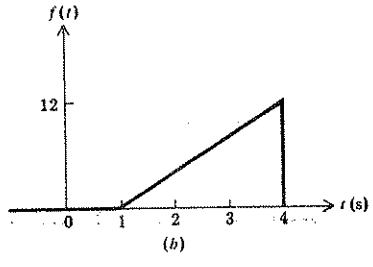
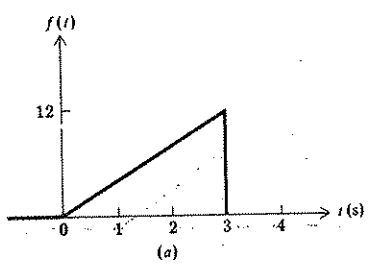
(أ) ارسم مخطط الأصفار والاقطاب $F(1+j2)$ (ب) أوجد $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ (ج) أوجد $F(1+j2)$

22 أوجد مفكوك $\frac{(3s^2 + 2)}{[(s + 1)(s^2 - 2s + 2)]}$ بواسطة الكسور الجزئية ثم أوجد تحويلة لابلاس العكسية لها .

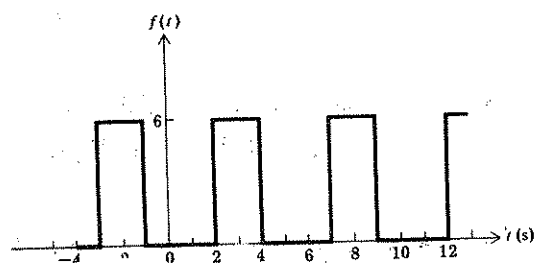
23 أوجد تحويلة لابلاس للدوال المبينة في (أ) الشكل 18 - 20 أ (ب) الشكل 18 - 20 ب (ج) الشكل 18 - 20 ج .

24 أوجد تحويلة لابلاس العكسية للمقدار $e^{-s}(s + 1)/[(s + 3)(s^2 + 2s)]$.

25 لدالة الزمن الدورية المبينة في الشكل 19 - 20 . أوجد (أ) تحويلة لابلاس لـ $f(t)u(t)$ (ب) تحويلة فورير لـ $f(t)$ (ج) متسلسلة فورير المثبتة لـ $f(t)$



الشكل 18 - 20 أنظر السؤال 23



الشكل 19 - 20 أنظر السؤال 25

26 اشارة خاصة تحتوي على نبضات مثلثية اولها بشكل $2t[u(t) - u(t - 3)]$ تعاد كل أربع ثوان لكل قيم الزمن الموجبة . أوجد تحويله لابلاس لهذه السلسلة من النبضات .

27 أوجد تحويله لابلاس للدالة الدورية $f(t) = |\cos(\pi t/3)|u(t)$

□ 28 إذا كانت $\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-4s}/(s + 3)$, أوجد $f(3.5)$ و $f(4.5)$

29 أوجد لكل تحويله لابلاس مبينة فيما يأتي , ثم ارسمها مع الزمن t (أ)
 $(e^{-s} - e^{-2s})/(s + 1)$ (ب) $(e^{-s} - e^{-4s})/[(s + 1)(1 - e^{-4s})]$

30 إذا عرفت المعادلة التفاضلية التكاملية $2 \frac{di}{dt} + 3 \int_0^t i(\lambda) d\lambda + 4i = 3(t - 1)u(t - 1)$ أوجد $i(t)$ إذا كان $i(0) = 0$

□ 31 إذا كانت $F(s) = (s^2 + 3)/[(s + 1)^2(s^2 + 2s + 5)]$, أوجد القيمتين الابتدائية والنهائية العائدة لـ $f(t)$

□ 32 إذا كانت $F(s) = 3(s^2 - 1)/[s(s^2 + 2s + 3)] = (A/s) + (Bs + C)/(s^2 + 2s + 3)$ أوجد $A, B, C, f(\infty), f(0^+)$

33 إذا علمت $F(s) = \frac{(2s + 3)(s^2 + 8s + 9)(s^2 + 9s + 8)}{s(s + 1)(s^4 + 10s^3 + 62s^2 + 178s + 225)}$ وأنها لا تحتوي على أي قطب في النصف الايمن أو على محور ω , عدا نقطة الاصل , أوجد $f(0^+)$ و $f(\infty)$

□ 34 بدون عكس التحويلات الآتية , أوجد (إذا كان ذلك بالامكان) القيمتين الابتدائية لدوال الزمن العائدة لها , (أ) $(s + 1)/[(s + 2)^2 + 9]$ (ب) $(s + 3)^2 + 16$
 $(s^4 + 9s^3 + 8s)/[s^2(s^2 + 4s^2 + 3s + 2)]$

35 تحويله لابلاس معينة $F(s)$ تحوي صفراً بسيطاً في $s = -2$ وقطباً بسيطاً في $s = -1 \pm j2$ كما أن $F(0) = 2$. (أ) $f(t)$ أوجد (ب) $F(2 + j3)$

36 إذا سلطت اشارة دخل $x(t) = 3u(t)$ على نظام خطي فولدت استجابة خرج $y(t) = te^{-t}u(t)$. أوجد (أ) الدالة التحويلية للنظام (ب) استجابة وحدة النبضة للنظام .

37 العلاقة بين الدخل $x(t)$ والخرج $y(t)$ لنظام خطي هي

$$u''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

إذا كانت $y(0) = y'(0) = 0$. أوجد (أ) الدالة التحويلية (ب) استجابة وحدة الومضة للنظام .

38 الدخل $tu(t)$ سلط على شبكة خطية N فكان الخرج $(e^{-2t} - 1)u(t)$.
افرض أن اثنتين من هاتين الشبكتين قد ربطتا بشكل تسلسلي cascade بحيث أن
خرج الأولى هو دخل الثانية . إذا سلطت وحدة الخطوة $u(t)$ على دخل الشبكة
الأولى ماهو خرج كل شبكة .

39 افرض إن $f_1(t) = (1 + 2e^{-t})u(t)$, $f_2(t) = (3e^{-t} \cos 2t)u(t)$

$$\text{وإن } f_3(t) = 4[u(t) - u(t - 2)]$$

(أ) أوجد $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ بالعمل كلياً في حيز الزمن .

(ب) إذا كانت استجابة وحدة الومضة لنظام معين $h(t) = f_1(t)$

أوجد الدالة التحويلية لهذا النظام عندما $\omega = 2$

(ج) بفرض نظام خطي مرة أخرى لـ $h(t) = f_1(t)$. أوجد الخرج $y(t)$ بدون

استخدام الالتفاف في حيز الزمن . إذا كان الدخل $x(t) = f_2(t)$

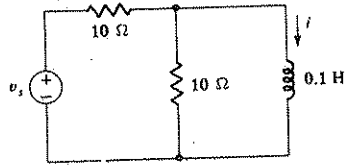
40 □ في الدائرة الميينة في الشكل 20 - 20 . افرض أن $v_s = 50u(t) + 2\delta(t) - 10$ V استخدم طرق تحويلة لابلاس لايجاد $i(t)$ للزمن $t > 0$

$$v_s(t) = 20u(-t) + 40 \cos 100t u(t) \text{ V}$$

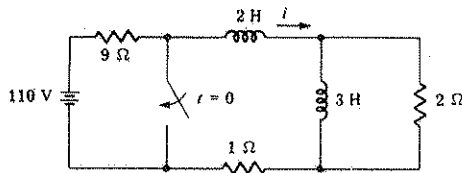
افرض أن في الدائرة الميينة في الشكل 20 - 20 . أوجد $i(t)$ لقيم $t > 0$.

42 ارسم مكافئ حيز التردد للدائرة الميينة في الشكل 21 - 20 الذي ينطبق

لقيم $t > 0$ ثم أوجد $i(t)$.

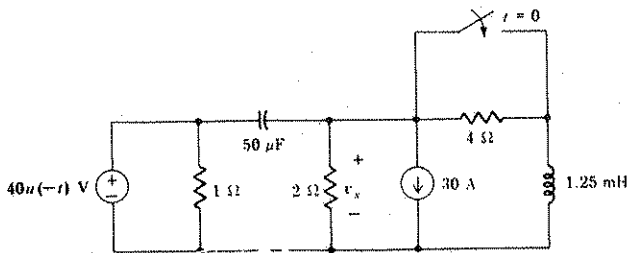


الشكل 20 - 20 أنظر السؤالين 40 و 41 .

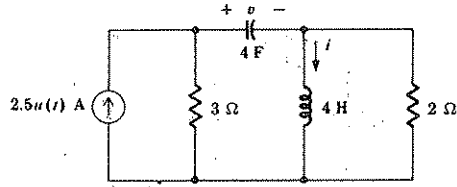


الشكل 21 - 20 أنظر السؤال 42 .

43 للدائرة الميئة في الشكل 22 - 20 (أ) إرسم مكافئء حيز التردد الذي ينطبق لقيم $t > 0$ (ب) استخدمه لحساب $v_x(t)$.



الشكل 22 - 20 أنظر السؤال 43 .



الشكل 23 - 20 أنظر السؤال 44

44 افرض أن $v(0^-) = 2\text{ V}$ و $i(0^-) = 5\text{ A}$ ، في الدائرة المبينة في الشكل 20 - 23 . أوجد $i(t)$ لقيم $t > 0$.

الجزء السابع

الملاحق

APPENDIXES

الملحق الاول

المحددات DETERMINANTS

في الفقرة 2 - 3 من الفصل الثالث حصلنا على منظومة من ثلاث معادلات للدائرة الميئة في الشكل 2 - 3 والمحتوية على اربعة عقد :

$$7v_1 - 3v_2 - 4v_3 = -11 \quad (3)$$

$$-3v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 3 \quad (4)$$

$$-4v_1 - 2v_2 + 11v_3 = 25 \quad (5)$$

ان هذه المجموعة من المعادلات كان يمكن حلها بحذف المتغيرات تدريجياً . لكن هذه الطريقة طويلة ويمكن أن لاتعطي أي جواب اذا لم تجر بطريقة مرتبة لعدد أكبر من المعادلات . هناك طريقة أكثر ترتيباً تستخدم المحددات وقاعدة كرامر كما تناقشان في معظم كتب الجبر الجامعي . وان استخدام المحددات له فائدة اضافية تؤدي بصورة طبيعية الى تعبير عن عناصر الدائرة بدلالة المصفوفات matrices كما تعطي طريقة لتحليل دائرة عامة تساعد على برهنة نظريات عامة . وتجدر الإشارة الى أن عدد الخطوات الحسابية المطلوبة لكل مجموعة كبيرة من المعادلات الآنية باستخدام المحددات كبير . ولهذا تبرمج الحاسبة الألكترونية لاستخدام طريقة أخرى . ويحتوي هذا الملحق على مراجعة مختصرة لطريقة المحددات والتسميات فيها .

لنأخذ المعادلات (3) و (4) و (5) . وإن صف المعاملات الثابتة للمعادلات يدعى بالمصفوفة matrix .

$$G = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

حيث الإشارة G قد اختيرت نظراً لأن كل عنصر في المصفوفة له قيمة توصيلية .
وليس للمصفوفة قيمة وما هي إلا عبارة عن صفوف من العناصر المرتبة . وللدلالة على
المصفوفة سنستخدم الحروف السميكة ونضع الصفوف نفسها بين قوسين مربعين .

إن محدد مصفوفة مربعه له قيمة معينة . ولكي نكون دقيقين علينا أن نقول أن
محدد مصفوفة مربعة هو قيمة ، لكن الاستخدام الاعتيادي يمكننا من القول أن كلاً
من الصفوف نفسها وقيمتها هي المحدد . وسوف نرمز للمحدد بـ Δ ونستخدم توصيفاً
مناسباً للرمز الى المصفوفة التي يعود اليها المحدد .

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} 7 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -4 & -2 & 11 \end{vmatrix} \quad \text{نبدأ}$$

لاحظ أن خطين عموديين بسيطين يستخدمان لكي يكتب داخلهما المحدد .
وإن قيمة محدد يمكن الحصول عليها بمك حدود مصغراته $minor$. ولإجراء ذلك
نختار أي صف أفقي row أو أي صف عمودي column ونضرب كل عنصر في ذلك
الصف الأفقي أو بمصغراته وبالمقدار $(-1)^{j+k}$ ، ثم نجمع خواصل الضرب هذه . وإن
مصغرات العناصر التي تظهر في الأفقي j والصف العمودي k هي المحددات التي
نحصل عليها عند حذف الصف الأفقي j والصف العمودي k ، ويرمز لها بالرمز
 kj .

كمثال ، دعنا نفك المحدد Δ_G على امتداد الصف العمودي 3 . نبدأ بضرب الـ
(- 4) في أعلى هذا الصف العمودي بالمقدار $(-1)^{3+1} = 1$ ثم بمصغره :

$$(-4)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}$$

ثم نعيد ذلك للعنصرين الآخرين في الصف العمودي 3 . وجمع النتائج :

$$\Delta_G = (-4) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$$

أن المصفرات الآن تحتوي فقط على صفين عموديين وصفين أفقيين . لهذا فهي من الدرجة الثانية ويمكن حساب أقيامها بفكها بدلالة مصفرتها مرة أخرى وهي عملية صغيرة . لذا نفك أول محدد على امتداد الصف العمودي الأول بضربه بـ (-3) وبـ $(-1)^{1+1}$ وبمصغره والذي هو عبارة عن العنصر (-2) ثم ضرب (-4) بـ (-1) ثم بـ 6 لذا

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-3)(-2) - 6(-4) = 30$$

ومن الأسهل اعتيادياً تذكر النتيجة للمحدد من الدرجة الثانية على أنها « الأعلى الأيسر مضروباً بالأسفل الأيمن مطروحاً منه الأعلى الأيمن مضروباً في الأسفل الأيسر » . وأخيراً

$$\begin{aligned} \Delta_n &= -4[(-3)(-2) - 6(-4)] + 2[7(-2) - (-3)(-4)] + 11[7(6) - (-3)(-3)] \\ &= -4(30) + 2(-26) + 11(33) \\ &= 191 \end{aligned}$$

فغرض التمرين دعنا نفك هذا المحدد على امتداد الصف الأفقي الأول .

$$\begin{aligned} \Delta_n &= 7 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 7(62) + 3(-41) - 4(30) \\ &= 191 \end{aligned}$$

وإن المفكوكات بالمصفرات تنطبق للمحددات بأي درجة كانت .
بإعادة هذه القواعد لايجاد المحدد بصورة أعم نقول عن مصفوفة معينة a

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

لذا فإن Δ_n يمكن الحصول عليها بالنفك بدلالة المصفرات على امتداد أي صف أفقي

$$\Delta_n = a_{11}(-1)^{1+1} \Delta_{11} + a_{12}(-1)^{1+2} \Delta_{12} + \dots + a_{1n}(-1)^{1+n} \Delta_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{1j}(-1)^{1+j} \Delta_{1j}$$

أو على امتداد أي صف عمودي k

$$\Delta_n = a_{1k}(-1)^{1+k} \Delta_{1k} + a_{2k}(-1)^{2+k} \Delta_{2k} + \dots + a_{nk}(-1)^{n+k} \Delta_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{jk}(-1)^{j+k} \Delta_{jk}$$

إن العامل المشارك $cofactor C_{jk}$ للعنصر الذي يظهر في كل من الصف j والصف العمودي k هو ببساطة $(-1)^{j+k}$ مرة بقدر المصغر Δ_{jk} لذا فإن $C_{11} = \Delta_{11}$ ، لكن $C_{12} = -\Delta_{12}$

يمكننا الآن كتابة

$$\Delta_n = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j} = \sum_{j=1}^n a_{nj} C_{nj}$$

وكمثال ، دعنا نأخذ المحدد من الدرجة الثالثة :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 10 \end{vmatrix}$$

فنجد

وكذلك

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 10 \end{vmatrix} = 51 \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = -16$$

$$C_{11} = 51 \quad C_{12} = 16$$

بعد ذلك نأخذ قاعدة كرامر التي تمكننا من إيجاد أقيام متغيرات غير معروفة .
دعنا نأخذ (3) و (4) و (5) مرة أخرى ونعرف المحدد Δ_1 بأنه المحدد الذي نحصل عليه عند الاستعاضة عن الصف الأفقي الأول Δ_n بثلاثة ثوابت على الطرف الايمن من المعادلات الثلاث . لذا

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -11 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 \\ 25 & -2 & 11 \end{vmatrix}$$

وبالفك على امتداد الصف العمودي الأول

$$\Delta_1 = -11 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -2 & 11 \end{vmatrix} + 25 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -682 + 123 + 750 = 191$$

تنص قاعدة كرامير على أن

$$v_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_G} = \frac{191}{191} = 1 \text{ V} \quad \text{وعلى}$$

$$v_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_G} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -11 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -4 & 25 & 11 \end{vmatrix}}{191} = \frac{581 - 63 - 136}{191} = 2 \text{ V}$$

$$v_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_G} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 & -11 \\ -3 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 25 \end{vmatrix}}{191} = \frac{1092 - 291 - 228}{191} = 3 \text{ V} \quad \text{وأخيراً}$$

تنطبق قاعدة كرامير على منظومة متكونة من N من المعادلات الجبرية التي تحتوي على N من المجاهيل للمتغير i قيمة v_i

$$v_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_G}$$

الملحق الثاني

برهان لنظرية ثفنن

A PROOF OF THEVENIN'S THEOREM

سنحاول برهنة نظرية ثفنن بصيغتها التي ظهرت في الفقرة 6 - 3 من الفصل الثالث وسنعيدها هنا للرجوع اليها

لاي دائرة خطية معطاة اعد ترتيبها بشكل شبكتين A و B مربوطتين سوية بموصلات بدون مقاومة .

عرف الفولتية v_m بأنها فولتية الدائرة المفتوحة الممكن ان تظهر عبر النهايات A اذا فصلت B بحيث لا يسحب تيار من A . وعليه فأن جميع التيارات والفولتيات في B سوف تبقى غير متغيرة اذا اميتت A

(جميع مصادر الفولتية غير المعتمدة ومصادر التيار غير المعتمد في A تستبدل بدوائر قصر ودوائر مفتوحة على التعاقب) وأن مصدر الفولتية غير المعتمد v_m مربوط بقطبية مناسبة على التوالي مع شبكة A الميتة (غير فعالة) .

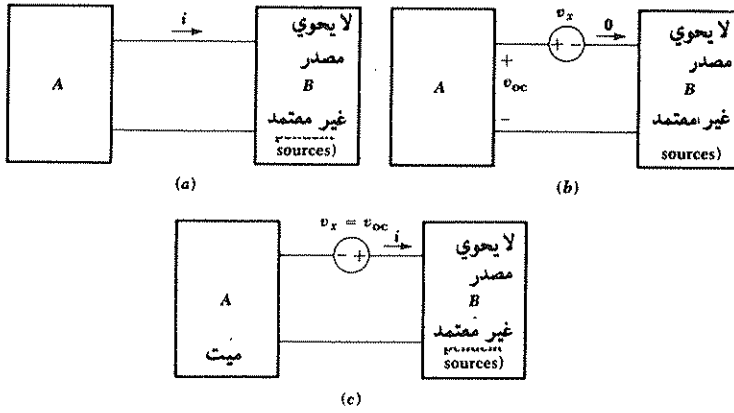
وسوف نرى تأثير برهاننا بأن نجعل كلاً من الشبكة الأصلية A ومكافئ ثفنن للشبكة A يسببان التيار نفسه لكي يسري في نهايتي الشبكة B . اذا كان التياران متساويين فأن الفولتيتان يجب أن تكونا نفسيهما . أو بكلمة أخرى اذا سلطنا تياراً معيناً ، والذي يمكننا تصويره كمصدر تيار ، على الشبكة B . فان مصدر التيار والشبكة B تحتويان دائرة لها فولتية إدخال محدد كأستجابة . فالتيار يحدد الفولتية . أو بالعكس يمكننا اذا شئنا أن نبين أن فولتية النهاية على B لا تتغير ، نظراً لأن الفولتية تحدد التيار أيضاً نفسه بشكل محدد . اذا لم تتغير فولتية الادخال والتيار الى الشبكة B ينتج من ذلك أن التيارات والفولتيات خلال الشبكة B كلها لا تتغير .

دعنا نبرهن أولاً النظرية للحالة حينما تكون الشبكة B غير فعالة $inactive$ (لاحتوي على مصادر غير معتمدة). وبعد تحقيق هذه الخطوة، يمكننا استخدام مبدأ التراكب لتمديد النظرية لكي تشمل الشبكة B التي تحتوي على مصادر غير معتمدة. وكل مصدر يمكن أن يحتوي على مصادر معتمدة بشرط أن متغيراتها المسيطرة تقع في الشبكة نفسها.

لذا فالتيار i الذي يسري في الموصل الأعلى من الشبكة A الى الشبكة B في الشكل 2-1 (أ) يتسبب كلياً من المصدر غير المعتمد الذي يوجد في الشبكة A . لنفرض الآن أننا أضفنا مصدر فولتية إضافي v_x ، والذي سوف ندعوه مصدر ثفنن، في الموصل الذي يقاس فيه التيار كما موضح في الشكل م 2-1 (ب) ثم نعيد مقدار زمن v_x وتغيره حتى ينقص التيار الى الصفر.

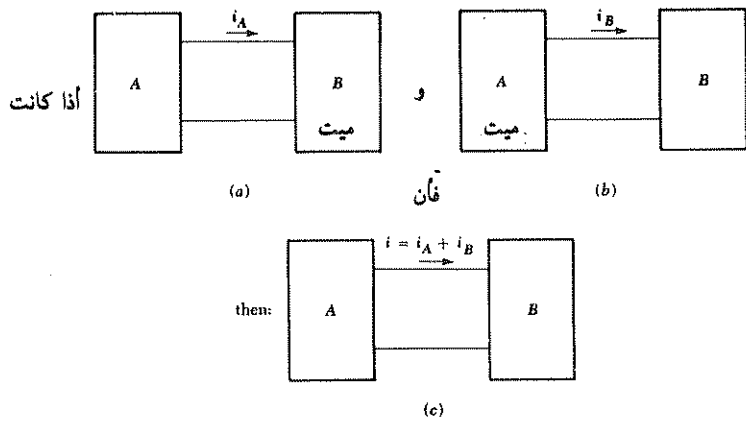
من تعريفنا لـ v_{oc} ، فإن الفولتية عبر نهايتي A يجب أن تكون v_{oc} ، حيث أن $i=0$ الشبكة B لا تحتوي أي مصادر غير معتمدة ولا يدخل أي تيار طرفيها، لذا لا يوجد هناك فولتية عبر طرفي الشبكة B . ووفقاً لقانون الفولتية لكرشوف فإن فولتية مصدر ثفنن هي v_{oc} ، فولت $v_x = v_{oc}$. بالإضافة الى ذلك فإنه نظراً لأن مصدر ثفنن والشبكة A بجملتها لاتعطي تياراً الى B ، ونظراً لأن الشبكة A بنفسها تعطي التيار i ، فإن نظرية التراكب تستوجب الى أنه حينما يعمل مصدر ثفنن وحده يعطي تياراً مقداره $-i$ الى B . لذا فالمصدر عندما يعمل وحده باتجاه عكسي، كما يظهر من الشكل م 2-1 ج، ينتج تياراً في السلك العلوي i . الا أن هذا الوضع هو الاستنتاج نفسه الذي وصلت اليه نظرية ثفنن: مصدر ثفنن v_{oc} حينما يعمل على التوالي مع المصدر A غير الفعال يكافئ الشبكة المعطاة.

الآن دعنا نأخذ الحالة حينما تصبح الشبكة B شبكة فعالة. نتصور الآن التيار i يسري من الشبكة A الى الشبكة B في الموصل الأعلى كما تكونت من الجزئين i_A و i_B حيث i_A هو التيار الناتج من A حينما تعمل لوحدها والتيار i_B ناتج من B حينما تعمل لوحدها. وإن قدرتنا على قسمة التيار بين هاتين المركبتين ناتجة مباشرة من تطبيق مبدأ التراكب على هاتين الشبكتين الخطيتين. يبين الشكل م 2-2 الاستجابة الكلية والاستجابتين الجزئيتين.



الشكل م 1-2 (أ) شبكة خطية عامة A والشبكة B التي لا تحتوي على مصادر غير معتمدة. السيطرة على المصادر المعتمدة يجب أن تظهر في جزء الشبكة نفسه (ب) مصدر ثفنن أدخل في الدائرة وقد غير حتى يكون $i=0$ لا تظهر أية فولتية عبر الشبكة B ، ومن ثم $v_x = v_{oc}$. لذا ينتج المصدر ثفنن تياراً $-i$ بينما الشبكة A تجهز i (ج) مصدر ثفنن قد عكس وقد قتلت الشبكة A . لذا فالتيار هو i .

لقد درسنا الاستجابة الجزئية لـ i_1 اعلاه. اذا كانت الشبكة B غير فعالة نعلم وان الشبكة A يمكن أن يستعاض عنها بمصدر ثفنن والشبكة غير الفعالة A . بكلمة أخرى فإن الاستجابة الجزئية i_1 تحدث حينما A و B قد قتلا وجعل مصدر ثفنن فعالاً وذلك من بين المصادر الثلاثة التي يجب أن نبقىها بفكرنا أي التي في A والتي في B ومصدر ثفنن. وبالتحضير لاستخدام التراكب نفرض الآن أن A تبقى غير فعالة، ولكن بالرجوع الى B ثم نقفل مصدر ثفنن فنحصل من التعريف على الاستجابة الجزئية i_{11} . ومن تراكب النتائج فإن الاستجابة حينما تقتل A ويبقى مصدر ثفنن و B غير فعالين أي $i_1 + i_{11}$. وهذا المجموع هو التيار الأصيل i . وقد أصبح الوضع المطلوب هو دائرة ثفنن المكافئة حينما يكون مصدر ثفنن والمصدر B فعالين لكن A قد قتلت. لذا فالشبكة الفعالة A يمكن أن يستعاض عنها بمصدر ثفنن وفولتية دائرة مفتوحة على التوالي مع المصدر غير الفعال A . بغض النظر عن حالة الشبكة B سواء كانت فعالة أو غير فعالة.



الشكل م 2 - 2 التراكب يمكننا من أخذ التيار i على أنه مجموع الاستجابتين الجزئيتين .

الملحق الثالث

الأعداد المركبة

COMPLEX NUMBERS

يحتوي هذا الملحق على فقرات لتفطية تعريف العدد المركب والعمليات الحسابية الأساسية للأعداد المركبة ومتطابقة أويلر والصيغتين الأسية والقطبية للعدد المركب . وسوف نبدأ بتقديم مفهوم العدد المركب .

م 1 - 3 العدد المركب COMPLEX NUMBER

عالجت دراستنا الأولية في الرياضيات كليا الأعداد الحقيقية مثل 4 و $2/7$ و π . ولكن بعد ذلك بدأنا نصادف معادلات جبرية مثل $x^2 = -3$ لا يمكن ان يحققها أي عدد حقيقي . ويمكن جل مثل هذه المعادلة فقط باستحداث وحدة خيالية *imaginary unit* أو العامل الخيالي *imaginary operator* الذي سوف نرمز له بالاشارة j . من التعريف $j^2 = -1$ لذا تكون $\sqrt{-1} = j$ و $j^3 = -j$ و $j^4 = 1$ وهكذا . وان حاصل ضرب عدد حقيقي في العامل الخيالي يدعى بالعدد الخيالي *imaginary number* . كما أن مجموع عدد حقيقي مع عدد خيالي يدعى عدد مركب . فالعدد الذي بصيغة $a + jb$. حيث a و b أعدادان حقيقيان . هو عدد مركب² .

وسوف نرمز للعدد المركب باشارة خاصة منفردة مثل $A = a + jb$. إن الطبيعة المركبة للعدد المركب يمكن أن يشار إليها باستخدام الحرف السميك او في الكتابة اليدوية باستخدام خط فوق الحرف . العدد المركب A أعلاه يوصف بأنه يحتوي

- 1 . الرمز الرياضي للعامل الخيالي هو الرمز j . ولكن من المعتاد استخدام j في الهندسة الكهربائية لفرض تجنب الالتباس مع اشارة التيار .
- 2 . أن استخدام الكلمتين حقيقي وخيالي هو شيء مؤسف . وإن استخدامهما هنا وفي كتب الرياضيات كحدين تقنيين للرجوع الى مجموعة من الأعداد . ان ترجمة خيالي على أنه « لاوجود له في العالم الفيزيائي » أو المركب على انه « مقعد » ليسا صحيحين ولا يقصد بهما كذلك .

على مركبة حقيقية او جزء حقيقي a ومركبة خيالية أو جزء خيالي b . ويمثل ذلك بـ

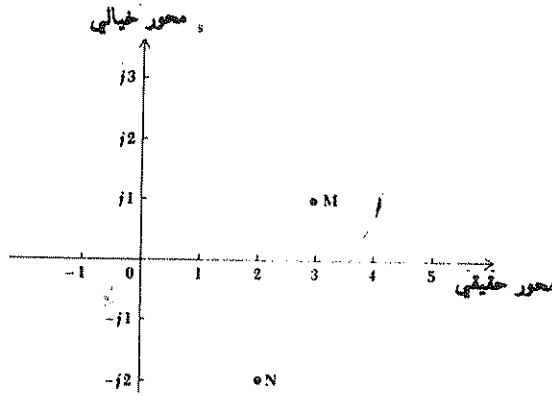
$$\text{Re}[A] = a \quad \text{Im}[A] = b$$

وإن المركبة الخيالية لـ A هي ليست jb حيث ان تعريف المركبة الخيالية هي عدد حقيقي . وتجدر ملاحظة أن كل الأعداد الحقيقية يمكن أن تعتبر أعداداً مركبة جزؤها الخيالي يساوي صفراً. لذا فالأعداد الحقيقية محتواة في نظام الأعداد المركبة ويمكننا اعتبارها حالات خاصة . وعندما نعرف العمليات الحسابية الأساسية للأعداد المركبة ، علينا ان نتوقع انها تختصر الى ما يقابلها من التعاريف للأعداد المركبة ، اذا أصبح الجزء الخيالي لكل عدد مركب صفراً .

نظراً لأن أي عدد مركب كلياً يوصف بزوج من عددين حقيقيين مثل a و b المثال السابق ويمكننا أن نحصل على مساعدة منظورة بتمثيل العدد المركب بيانياً على المستوى المتعامد الاحداثيات بتزويد انفسنا بالأحداثي الحقيقي والأحداثي الخيالي كما موضح في الشكل م 1 - 3 . تكون مستوياً مركباً أو مخطط الزاوي *Argand diagram* الذي يمكن أن يمثل أي عدد مركب عليه كنقطة واحدة وقد تم تأشير العددين المركبين $M = 3 + j1$ و $N = 2 - j2$. ومن الضروري فهم أن المستوى المركب هذا هو فقط مساعدة بيانية وليس ضرورياً للعبارات الرياضية التي ستأتي فيما بعد .

سنعرف العددين المركبين على أنهما متساويان اذا كان جزءهما الحقيقيان متساويين ولا يتساوى العددان فيما عدا ذلك . لذا بعد ذلك فإن كل نقطة في المستوى المركب تعود الى عدد مركب واحد فقط . وعلى العكس لكل عدد مركب هناك نقطة واحدة في المستوى المركب . لذا فأنا اذا أعطينا العددين المركبين .

$$A = a + jb \quad \text{and} \quad B = c + jd$$



الشكل م ١ - 3 المعدادان المركبان $M = 3 + j1$ و $N = 2 - j2$ مبينان على المستوى المركب

لذا فإذا كان

$$A = B$$

من الضروري أن يكون

$$a = c \quad \text{and} \quad b = d$$

العدد المركب الممثل كمجموع عدد حقيقي وعدد خيالي مثل $A = a + jb$ يقال عنه أنه بشكل مستطيل *rectangular* أو بشكل احداثيات متعامدة *cartesian* وستظهر اشكال أخرى للعدد المركب فيما بعد لجمع الاعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها. مجموع عددين مركبين يعرف على أنه العدد المركب الذي جزؤه الحقيقي هو مجموع الجزئين الحقيقيين للعددين المركبين وجزؤه الخيالي هو مجموع الجزئين الخياليين للعددين المركبين. لذا

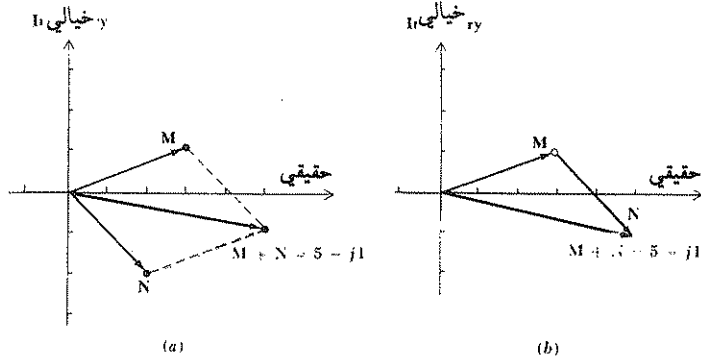
$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

فمثلاً

$$(3 + j4) + (4 - j2) = 7 + j2$$

والفرق بين عددين مركبين يؤخذ بالطريقة نفسها. فمثلاً

$$(3 + j4) - (4 - j2) = -1 + j6$$



الشكل م 2 - 3 (أ) مجموع العددين المركبين $M = 3 + j1$ و $N = 2 - j2$ ويمكن الحصول عليه برسم متوازي الاضلاع (ب) مجموع العددين نفسيهما قد وجد بدمج رأس السهم الى النهاية .

ويمكن الحصول على جمع الاعداد المركبة وطرحها بيانياً أيضاً على المستوى المركب . كل عدد مركب يمثل كمتجه vector او بقطعة من خط مستقيم ذات اتجاه . ويمكن الحصول على المجموع بأكمال متوازي الاضلاع كما يتضح من الشكل م 2 - 3 (أ) او بايصال رأس متجه الى نهاية الآخر كما هو موضح في الشكل م 2 - 3 (ب) . وان رسماً بيانياً يكون عادة مفيد لتحقيق للحل العددي الأدق .

وحاصل ضرب عددين مركبين يعرف على أنه :

$$(a + jb)(c + jd) = (ac - bd) + j(bc + ad)$$

وهذه النتيجة يمكن الحصول عليها بسهولة بالضرب المباشر للمقدارين ذوي الحدين . باستخدام قواعد جبر الاعداد المركبة وتبسيط النتيجة باعتبار ان

$$j^2 = -1 \text{ . فمثلاً}$$

$$\begin{aligned} (3 + j4)(1 - j2) &= 12 - j6 + j16 - 8j^2 \\ &= 12 + j10 + 8 \\ &= 20 + j10 \end{aligned}$$

ومن الأسهل ضرب عددين مركبين بهذه الطريقة . خاصة اذا عوضنا عن j^2 مباشرة بـ -1 . ثم عوضنا في القانون العام الذي يعرف بالضرب .

قبل تعريف عملية قسمة الأعداد المركبة علينا أن نعرف مرافق conjugate العدد المركب . ومرافق العدد المركب $A = a + jb$ هو $a - jb$ ويرمز له A^* . وأن مرافق أي عدد مركب يمكن الحصول عليه بسهولة وذلك بتغيير إشارة الجزء الخيالي من العدد المركب .

$$A = 5 + j3$$

فإذا كان :

فيكون

$$A^* = 5 - j3$$

ومن الواضح أن مرافق أي مقدار مركب معقد يمكن ايجاده بالاستعاضة عن كل عدد مركب فيه بمرافقه أظهرت تعاريف الجمع والطرح والضرب ان الجمل الآتية صحيحة : مجموع عددين مركبين ومرافقيهما هو عدد حقيقي والفرق بين عدد مركب ومرافقه هو عدد خيالي وحاصل ضرب عدد مركب مع مرافقه هو عدد حقيقي . وكذا من الواضح أيضاً أنه اذا كان A^* هو مرافق A ، فإن A هو مرافق A^* . أو بكلمة أخرى أن $A = (A^*)^*$ ويقال عن العدد المركب ومرافقه أنهما يشكلان زوجاً من الأعداد المركبة المترافقة .

الآن نعرف حاصل قسمة عددين مركبين

$$\frac{A}{B} = \frac{(A)(B^*)}{(B)(B^*)}$$

ومن ثم

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

نضرب البسط والمقام ومرافق المقام وذلك لغرض الحصول على مقام حقيقي . تدعى هذه العملية بتنسيب المقام .
وكمثال عددي :

$$\begin{aligned} \frac{3 + j1}{4 - j2} &= \frac{(3 + j1)(4 + j2)}{(4 - j2)(4 + j2)} \\ &= \frac{4 + j22}{16 + 4} \\ &= 0.2 + j1.1 \end{aligned}$$

إن جمع عددين مركبين أو طرح كل منهما ممثل بالاحداثيات المتعامدة هما عمليتان بسيطتان . أما الضرب والقسمة بدلالة الاحداثيات المتعامدة فهما عمليتان غير محبذتين . وسوف يظهر فيما بعد أن هاتين العمليتين يمكن إجراؤهما بطريقة أبسط وذلك حينما يكون العددان المركبان ممثلين بشكل أسي أو قطبي . وسوف تقدم هذين الشكلين في الفقرتين م 3 - 3 و م 3 - 4

تمرينان

م 3 - 1 إذا علم أن $A = 5 - j2$ و $B = -3 + j6$ و $C = -4 - j3$

أوجد (أ) $B - C$ (ب) $4A + 2B - 3C$

(ج) $jC(A + B)^2$ (د) $A \operatorname{Re}[B] - B \operatorname{Im}[A]$

الجواب $26 + j13; 28 + j96; 1 + j9; -21 + j18$

م 2 - 3 لقيم A و B و C السابقة أوجد (أ) $[(A + A^*)(B - B^*)]^*$ (ب)

$(A - B)/(AB)$ (ج) $(1/A^*) - (1/B)^*$

الجواب $-j120; -0.239 - j0.202; 0.239 - j0.202$

م 2 - 3 متطابقة اويلر EULER'S IDENTITY

في الفصل التاسع بدأنا بمصادفة دوال للزمن تحتوي على أعداد مركبة وكنا مهتمين بالتفاضل والتكامل لهذه الدوال . في معظم الاحوال يجب أن نفاضل هذه الدوال أو نكاملها بالنسبة الى متغير حقيقي t . في حالات متفرقة قليلة فقط من الضروري أخذ التفاضل أو التكامل بالنسبة الى متغير مركب . ولا تحتاج هذه الحالات الى معالجة خاصة .

إن عمليتي التفاضل والتكامل بالنسبة الى متغير مركب تعرفان باستخدام عمليتي التحديد اللتان استخدمناهما للمتغيرات الحقيقية نفسها ويمكن أن نبين بطريقة مباشرة أن المتغيرات المركبة والثوابت المركبة يمكن أن تعامل كما لو كانت متغيرات حقيقية أو ثوابت حقيقية عند إجراء عمليتي التفاضل والتكامل . أو بكلمة أخرى ، إذا كانت $f(t)$ دالة مركبة مع الزمن مثل :

$$f(t) = a \cos ct + jb \sin ct \quad \text{فإن}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -ac \sin ct + jbc \cos ct \quad \text{ومن ثم}$$

$$\int f(t) dt = \frac{a}{c} \sin ct - j \frac{b}{c} \cos ct + C$$

حيث أن ثابت التكامل C بصورة عامة هو عدد مركب .

والآن علينا أن نستخدم علاقة أساسية مهمة جداً تعرف بمتطابقة أويلر . سوف نبرهن هذه المتطابقة نظراً لفائدتها الكبيرة في تمثيل الاعداد المركبة بشكل آخر غير الشكل المستطيل .

ويعتمد البرهان على مقادير متسلسلة القدرة لـ $\cos \theta$ و $\sin \theta$ و e^z والتي ويمكن الرجوع اليها في نهاية كتب التفاضل والتكامل الجامعية .

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad \text{أو}$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$$

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + j \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad \text{ومن ثم}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad \text{لذا}$$

$$e^{j\theta} = 1 + j\theta - \frac{\theta^2}{2!} - j \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

فنستنتج أن

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1)$$

أو إذا فرضنا أن $z = -j\theta$ نجد أن

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (2)$$

وبجمع (1) و (2) وطرحها نحصل على مقدارين سيستخدمان بدون برهان في دراستنا للاستجابة الطبيعية تحت المتضائلة لدوائر RLC المتوالية أو المتوازية .

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (3)$$

$$\sin \theta = -j\frac{1}{2}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (4)$$

تمرين

م 3 - 3 استخدم المعادلات من (1) الى (4) في الفقرة السابقة لاجاد قيم

$$(أ) e^{j1}, (ب) e^{1+j}, (ج) \cos(j1), (د) \sin(j1)$$

الجواب

$$.0 + j1.175; 1.543 + j0; 0.540 + j0.841; 1.469 + j2.29$$

م 3 - 3 الشكل الأسّي THE EXPONENTIAL FORM

دعنا نأخذ مصافحه اويلر $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$ ونضرب كل طرف بالعدد الموجب الحقيقي

$$Ce^{j\theta} = C \cos \theta + jC \sin \theta \quad (5)$$

الطرف الأيمن من (5) يحتوي على مجموع عدد حقيقي وعدد خيالي ومن ثم تمثيل عدد مركب بشكل مستطيل . دعنا ندعو هذا بالعدد المركب A وحيث $A = a + jb$ بمساواة الجزئين الحقيقيين

$$a = C \cos \theta \quad (6)$$

والجزئين الخياليين

$$b = C \sin \theta \quad (7)$$

وبالتربيع وجمع (6) و (7)

$$a^2 + b^2 = C^2$$

أو

$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(8)

وبقسمة (7) على (6)

أو

$$\frac{b}{a} = \tan \theta$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a} \quad (9)$$

نحصل على العلاقتين (8) و (9) اللتين تمكناننا من ايجاد C و θ من معرفة a و b فمثلاً اذا كان $A = 4 + j2$ فاننا نرى أن a تساوي 4 و b تساوي 2 فنجد C و θ

$$C = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4.47$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{4} = 26.6^\circ$$

يمكننا أن نستخدم هذه المعلومات الجديدة لكتابة A بشكل

$$A = 4.47 \cos 26.6^\circ + j4.47 \sin 26.6^\circ$$

ولكنه بشكل الطرف الأيسر من المعادلة (5) ، والذي يبرهن أن الشكل الآتي هو الشكل المفيد .

$$A = Ce^{j\theta} = 4.47e^{j26.6^\circ}$$

ويدعى العدد المركب ممثلاً بهذه الطريقة بالشكل الأسّي . ويعرف عامل الضرب الموجب الحقيقي C بأنه الاتساع أو المقدار والكمية الحقيقية θ التي تظهر في الأس تدعى بال $argument$ أو الزاوية . يمثل الرياضون عادة θ بالزوايا نصف القطرية ، لذا يكتبون

$$A = 4.47e^{j0.461}$$

أما المهندسون الكهربائيون عادة فيستخدمون الدرجات وتستخدم اشارة الزاوية (°) في الأس لكي لا يحدث أي التباس .

ولغرض الاعادة باختصار ، اذا كان لدينا عدداً مركباً معطى بصيغة مستطيلة ، ونرغب بتحويله الى صيغة أسية :

$$A = a + jb$$

$$A = Ce^{j\theta}$$

يمكننا ايجاد C و θ من (8) و (9) . اذا أعطينا العدد المركب بصيغة أسية فان بإمكاننا ايجاد a و b من (6) و (7) .

وهناك سؤال يظهر عند إيجاد الزاوية θ باستخدام علاقة معكوس ظل الزاوية المعطاة بالعلاقة (9). إن هذه الدالة متعددة القيم، لذا يجب اختيار زاوية مناسبة من الامكانيات المختلفة إحدى الطرق التي يمكن أن يتم بواسطتها الاختيار وتكون باختيار زاوية لها جيب أو جيب تمام الإشارة المناسبة لكي ينتج القيم المطلوبة لـ a و b من المعادلتين (6) و (7).

$$V = 4 - j3$$

فمثلاً دعنا نحول:

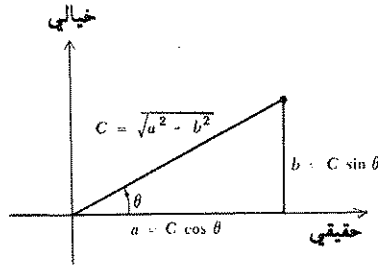
إلى صيغة أسية. والأتساع يساوي

$$C = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$$

والزاوية هي

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-3}{4} \quad (10)$$

يجب اختيار قيمة θ بحيث تؤدي إلى قيمة موجبة لـ $\cos \theta$. نظراً لأن $4 = 5 \cos \theta$ وقيمة سالبة لـ $\sin \theta$. نظراً لأن $-3 = 5 \sin \theta$ لذا نحصل على $\theta = -36.9^\circ, 323.1^\circ, -396.9^\circ$ وهكذا. وإن أية زاوية من هذه الزوايا صحيحة ونختار عادة أبسط واحدة منها وهي هنا -36.9° . وعلينا أن نلاحظ أن الحل باستخدام (10) يعطي $\theta = 143.1^\circ$ وهو غير صحيح نظراً لأن $\cos \theta$ سالب و $\sin \theta$ موجب.



الشكل 3-3 عدد مركب يمكن أن يمثل بنقطة في المستوى المركب باختيار قيمتين صحيحتين للجزيئين الحقيقي والخيالي من الصيغة المستطيلة أو باختيار صيغة الاتساع والزاوية للصيغة الأسية.

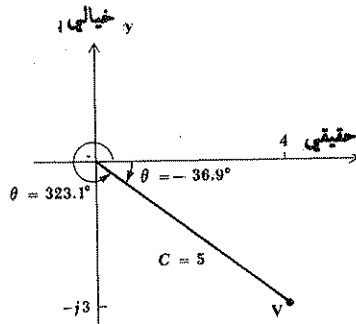
وهناك طريقة أسهل لاختيار الزاوية الصحيحة اذا أردنا تمثيل العدد المركب بيانياً في المستوى المركب . دعنا نختار عدداً مركباً معطى بصيغة مستطيلة مثل $A = a + jb$. بحيث يقع في الربع الأول من المستوى المركب . كما موضح في الشكل م 3-3 . وإذا رسمنا خطاً من نقطة الأصل الى نقطة تمثل العدد المركب ، علينا أن نرسم مثلثاً قائم الزاوية قطره هو اتساع التمثيل الأسّي للعدد المركب . وبكلمة أخرى $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ بالاضافة الى ذلك فإن الزاوية بعكس عقارب الساعة التي هي الزاوية التي يصنعها الخط مع المحور الحقيقي الموجب ، ترى على أنها الزاوية θ التي هي زاوية التمثيل الأسّي ، نظراً لأن $a = C \cos \theta$ وأن $b = C \sin \theta$. والآن اذا أعطينا صيغة مستطيلة من عدد مركب يقع في ربع آخر مثل $V = 4 - j3$ كما يتضح في الشكل م 3-4 حيث الزاوية الصحيحة ظهرت بيانياً بوضوح على أنها -36.9° أو 323.1° لهذا المثال . وإن هذا الرسم يمكن أن يتصور دونما حاجة الى رسمه .

وإذا كان للصيغة المستطيلة للعدد المركب جزء حقيقي سالب ، يكون عادة من الأسهل العمل مع القيمة السالبة للعدد المركب ، وبذا نتجنب زاوية أكبر من 90° بالمقدار . فمثلاً اذا كان

$$I = -5 + j2$$

نكتب

$$I = -(5 - j2)$$



الشكل م 3-4 العدد المركب $V = 4 - j3 = 5e^{-j36.9^\circ}$ ممثل في المستوى المركب .

ومن ثم فإن تحويل (5-j2) الى صيغة مركبة :

$$e^{j\theta} = -Ce^{j\theta}$$

حيث

لذا لدينا

$$C = \sqrt{29} = 5.39 \quad \text{and} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{-2}{5} = -21.8^\circ$$

$$I = -5.39e^{-j21.8^\circ}$$

وإن الإشارة السالبة يمكن حذفها من العدد المركب بزيادة أو إنقاص الزاوية بـ 180 كما يرى ذلك بالرجوع الى مخطط المستوى المركب . لذا فالنتيجة يمكن أن تمثل بدلالة الصيغة الأسية كما يأتي :

$$I = 5.39e^{j158.2^\circ} \quad \text{or} \quad I = 5.39e^{-j201.8^\circ}$$

لاحظ أن استخدام حاسبة الكترونية يدوية بنسق معكوس الظل دائماً يعطي زاوية ذات اتساع أقل من 90° . لذا فإن $\tan^{-1}[(-3)/4]$ و $\tan^{-1}[3/(-4)]$ كلاهما يعطي قيمة قيمة مقدارها 36.9° - . أما الحاسبات التي تعطي التحويل من الصيغة المستطيلة الى الصيغة القطبية فتعطي القيمة الصحيحة في كل الأحوال .

ملاحظة أخيرة حول التمثيل الأسى للعدد المركب يجب ان لاتنسى . أن عددین مركبین كل منهما مكتوب بصيغة أسية يكونان متساويين اذا كان اتساعهما متساويان وزاويتاهما متكافئتين ولا يحدث هذا فيما عدا ذلك . والزوايا المتكافئة هي التي يكون بينهما مضاعفات الـ 360° فمثلاً $A = Ce^{j\theta}$ و $B = De^{j\phi}$ فاذا كان $A = B$ فمن الضروري أن يكون $C = D$ و $\theta = \phi \pm 360^\circ n$ حيث $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

تمرینان

م 4 - 3 مثل كل من الأعداد المركبة بالصيغة الأسية وذلك باستخدام زاوية تقع في الحدود $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$ (أ) $-1.9 - j5.1$ (ب) $-2 + j5$ (ج)

$$\text{الجواب } 0.217 - j5.19; 5.19e^{-j87.4^\circ}; 5.39e^{j111.8^\circ}; 5.44e^{-j110.4^\circ}$$

م 5 - 3 مثل بصيغة مستطيلة (أ) $5e^{-j1}$ (ب) $-5.1e^{-j26^\circ}$ (ج)

$$\text{الجواب } 5.07e^{-j104.5^\circ}$$

$$-4.58 + j2.24; -1.269 - j4.91; 2.70 - j4.21$$

م 4 - 3 الصيغة القطبية THE POLAR FORM

الصيغة الثالثة (والتي هي الأخيرة) التي يمكننا أن نمثل بها الأعداد القطبية هي الطريقة الأسية نفسها عدا ما كان هناك من فرق بسيط في الاشارات . ونستخدم اشارة الزاوية (\angle) للاستعاضة عن المزيج ($e^{j\theta}$) .
لذا فالتمثيل الأسى للعدد المركب A

$$A = C/\theta$$

يمكن أن يكتب بصورة أدق لاند ما

$$A = Ce^{j\theta}$$

يقال عن العدد المركب الان انه ممثل بالصيغة القطبية . وهي تسمية تشير الى تمثيل نقطة في المستوى (المركب) . باستخدام الاحداثيات القطبية .

ومن الواضح ان التحويل من الصيغة المستطيلة الى الصيغة القطبية أو بالعكس ، فمن ناحية المبدأ يشبه التحويل بين الصيغة المستطيلة والصيغة الأسية . وتنطبق العلاقة نفسها بين C و θ و a و b

$$A = 10 + j10$$

$$A = 14.14e^{j45^\circ}$$

$$A = 14.14/45^\circ$$

لذا فالعدد المركب

يكتب بالصيغة الأسية

وبالصيغة القطبية

ولفرض تلمس استخدام الصيغتين الأسية والقطبية ، دعنا نأخذ عمليتي الضرب والقسمة لعددتين مركبتين ممثلين بالصيغة الأسية أو القطبية .

$$\text{وإذا أعطينا ، } A = 5/53.1^\circ \text{ and } B = 15/-36.9^\circ$$

فان التعبير لهذين العددتين المركبتين بالصيغة الأسية

$$A = 5e^{j53.1^\circ} \quad B = 15e^{-j36.9^\circ}$$

ويمكننا كتابة حاصل الضرب كعدد مركب بالصيغة الأسية التي اتساعها حاصل ضرب الاتساعين وزاويتها المجموع الجبري للزاويتين وذلك وفق القاعدة

$$(A)(B) = (5)(15)e^{j(53.1^\circ - 36.9^\circ)}$$

$$AB = 75e^{j16.2^\circ} = 75/16.2^\circ$$

ومن تعريف الصيغة القطبية يتضح أن

$$\frac{A}{B} = 0.333/90^\circ$$

وإن جمع الأعداد المركبة وطرحها يتمان أسهل ما يمكن باستعمال الأعداد المركبة بالصيغة المستطيلة أما الجمع أو الطرح لعددتين معطينين بصيغة أسية أو قطبية فيجب أن يبدأ بتحويل الأعداد المركبة إلى صيغة مستطيلة .

تنطبق الحالة العكسية على الضرب والقسمة ، فالعددان المركبان المعطيان بصيغة مستطيلة يجب أن يحولا إلى الصيغة القطبية مالم يكن العددان أرقاماً صغيرة .
فمثلاً إذا أردنا ضرب $(1-j3)$ في $(2+j1)$ فمن الأسهل ضربهما مباشرة كما هما فنحصل على $(5-j5)$ إذا أمكن ضرب الأعداد ذهنياً فإن الزمن يفقد في التحويل إلى الصيغة القطبية .

ونحن على وشك إنهاء مناقشتنا علينا أن نعتاد على الصيغ الممكنة الثلاث المختلفة للأعداد المركبة وكذلك على سرعة التحويل من صيغة إلى أخرى . وإن العلاقات بين الصيغ الثلاث تبدو غير منتبهة . وتعطي المعادلات المطولة الآتية خلاصة للعلاقات المختلفة .

$$\begin{aligned} A &= a + jb = \text{Re} [A] + j \text{Im} [A] = C e^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j \tan^{-1}(b/a)} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} / \tan^{-1}(b/a) = \frac{b}{\sin [\tan^{-1}(b/a)]} / \tan^{-1}(b/a) \\ &= C \cos \theta + jC \sin \theta = C / \theta \end{aligned}$$

ويمكن أن تتم معظم علاقات تحويل الصيغ من صيغة إلى أخرى بسرعة بمساعدة الحاسبة . وسوف نجد أن الأعداد المركبة وسيلة رياضية مناسبة لتحليل الأوضاع الفيزيائية الحقيقية . وما لا بد منه للمسائل الفيزيائية فإن العدد المركب بشكل أو بآخر يصاحبه مرافقه .

تمرينان :

م 6 - 3 مثل نتائج كل من عمليات الأعداد المركبة بصيغة قطبية لستة أرقام وراء الفارزة باستخدام الحاسبة .

$$(5 - 3/21.6^\circ)(4.11/-161.9^\circ - 2/18.7613^\circ); 1/(1/189.2^\circ - 1/-15.6^\circ)$$

$$2.18/57.9^\circ + 4.11/-161.9^\circ + 1.89/-49.2^\circ.$$

الجواب

$$0.511942/-176.800^\circ; 1.74095/-150.364^\circ; 15.0987/171.771^\circ$$

م 7 - 3 أوجد I إذا كان (أ) $I^2 + I = j1$ (ب) $\ln I = -1 + j1$ (ج)

الجواب

$$\sin I = 2$$

$$0.1988 + j0.310; 0.300 + j0.625 \text{ or } -1.300 - j0.625;$$

$$1.571 \pm j1.317$$

Standard Abbreviations

مختصرات قياسية

ac	alternating current	تيار متناوب
A	ampere	أمبير
C	Coulomb	كولوم
cps	Cycle per second	دورة بالثانية
dB	decibel	ديسبل
°C	degree Celsius	درجة مئوية
°K	degree Kelvin	درجة كلفن
dc	direct current	تيار مستمر
eV	electron Volt	الالكترون فولت
F	farad	فراذ
ft	foot	قدم
g	gram	غرام
H	henry	هنري
Hz	hertz	هيرتز
h	hour	ساعة
J	joule	جول
kg	Kilogram	كيلوغرام
m	meter	متر
mks	meter-Kilogram-second	متر كغم - ثانية
Ω	mho	موه
min	minute	دقيقة
N	newton	نيوتن
N-m	newton-meter	نيوتن متر
Ω	ohm	أوم
lbf	pound-force	باوند قوة

PF	power factor	عامل قدرة
rad	radian	نصف قطرية
RLC	resistance-inductance-Capacitance	مقاومة محاثة متسعة
rps	revolution per second	دورة بالثانية
rms	root-mean-square	جذر معدل التربيع
s	second	ثانية
V	Volt	فولت
VA	voltampere	فولت أمبير
W	watt	واط
Wh	watthour	واط ساعة

« لاحظ أن البادئات القياسية للنظام العشري قد أعطيت في جدول في الفقرة 1 - 2 » .

الملحق الرابع

أجوبة لمسائل مختارة

الفصل الأول

1. (a) 16.2 MJ; (b) 9000 h; (c) 205 ft/s; (d) كلارك كنت (رجل خارق)
4. 0.0884 pints
7. (a) 10 μC ; (b) 10 μC ; (c) 12.71 mA
9. (a) 975 C; (b) 383 C
12. (a) 31.1 kC; (b) 48 W; (c) 373 kJ; (d) 24.9 W
14. 8.0 C

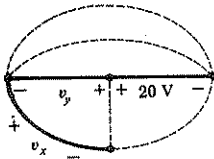
الفصل الثاني

1. (a) 236.5 V; (b) 16.56 kW; (c) 0.647 W/in.²
4. (a) 10.0 V; (b) 5.00 A; (c) 50.0 W
7. $i_x = -3$ A, $v_x = 3$ V, $P_{\text{batt}} = 15$ W
10. -30 W
13. $P_r = 68.5$, $P_{\text{50V}} = -168.9$, $P_{\text{0.2V}} = -13.7$, $P_{10} = 114.1$ W
16. (a) -20 V, -20 mA, 50 mA; (b) 26.7 V, 26.7 mA, 3.33 mA
19. (a) 6.67 V, 3.33 A, 66.7 W; (b) 20 V, 10 A, 200 W
22. (a) 0.415 Ω ; (b) 0.200 Ω
25. (a) 2.5 A; (b) 4.00 V
28. $v_3 = (R_1 R_3 i_s) / (R_1 + R_2 + R_3)$, $i_1 = (R_2 + R_3) i_s / (R_1 + R_2 + R_3)$
31. 5.5 V, 3.98 A
34. (a) 30 W; (b) -2 A

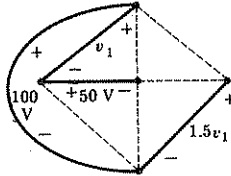
الفصل الثالث

1. (a) -33; (b) $17/7$; $-34/7$, $-11/7$
4. 2.00 A
7. 25.6 W
9. (a) 6 A; (b) 3 A
11. -3.5 mA
14. 20 mA, -80 mW
17. 80 W
20. 4 A
23. (a) 150 V; (b) 160 V
25. (a) 15 A, 2 Ω ; (b) 112.5 W; (c) 2 Ω
27. 381 mW
30. $8/9$ Ω
33. (a) 3; (b) 4; (c) انظر الشكل ادناه; (d) $20v_x - 7v_y = -80$, $-6v_x - v_y = -45$; (e) 123.9 W

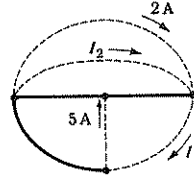
35. انظر الرسوم أدناه: 6 V
 37. (a) انظر الرسوم أدناه; (b) $-4I_1 + 14I_2 = -8$, $10I_1 - 4I_2 = 13$;
 (c) 7.32 W
 39. (a) and (b) 0.75 A, 0.30 A



33(c)



3-35



3-37(a)

الفصل الرابع

3. (a) 0.0206; (b) 0.1777 s
 5. $2\sqrt{t} - 0.001$ A, $0.01/\sqrt{t} - 0.001$ V
 8. (a) 9.6 V, 192 mW, 1.152 mJ; (b) 16 V, 0 W, 3.20 mJ
 11. (a) 2.0 nF; (b) 2.40 nF
 13. (a) $12/7$; (b) $12/11$; (c) 9 μ F
 15. (a) 60 cos 10t V; (b) 5 + 2 sin 10t A
 18. (a) $2 \times 10^{-4} dv/dt + 2 \times 10^{-4}v + 25 \int_0^t v dt = i_s + i_L(0)$;
 (b) $0.04 di/dt + 5000i + 5000 \int_0^t i dt = v_s - v_C(0)$
 21. Use v_1, v_2, v_C left to right. $v_1 - v_C = 3v_1$, $10 \int_0^t (v_1 - v_2) dt +$
 $0.5 + 0.8e^{-100t} + v_1/20 + v_C - v_2/50 + 2 \times 10^{-4} dv_C/dt = 0$,
 $10 \int_0^t (v_2 - v_1) dt - 0.5 - 0.8e^{-100t} + (v_2 - v_C)/50 = 0$

الفصل الخامس

1. 153.7 ms
 4. (a) 9.6 A; (b) 2.40 A; (c) $9.6e^{-2t}$ A; (d) $2.4e^{-4t}$ A;
 (e) $19.2(e^{-4t} - e^{-2t})$ V
 7. (a) 29.0; (b) 144.3 ms
 9. (a) 0.8; (b) 0.280 A
 12. $10e^{-80t}$ V
 15. 100 Ω , 2 μ F
 17. (a) 50 mC; (b) 38.9 mC
 19. 76.1 V
 21. $3e^{t/0.003}$ mA
 25. $60 + 4e^{-250t} - 40e^{-200t}$ mA

27. (a) 60 V, 0 V; (b) 60 V, 0 V, 60 V; (c) 0.02 s; (d) $60e^{-50t}$ V;
 (e) $6e^{-50t}$ mA; (f) $20 + 40e^{-50t}$ V, $20 - 20e^{-50t}$ V; (g) $1.8 + 3.6 = 5.4$ mJ
29. $t > 122.6$ s
30. $-6.75e^{-1/40}$ μ A

الفصل السادس

2. $20 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [u(t - 0.2n)]$ V
7. 22.3 and 9.81 mA
9. (a) $0.4(1 - e^{-1250t})$; (b) $10/23(e^{-100t} - e^{-1250t})$;
 (c) $0.2[\sqrt{2} \cos(1250t - 45^\circ) - e^{-1250t}]$ A
14. $(-40 - 200e^{-15,000t})u(t)$ V
17. (a) 0; (b) 200; (c) 131.7; (d) 0 W
19. $50(1 - e^{-10t})u(t)$ V, $(20 - 25e^{-10t})u(t)$ V
22. $20(1 - e^{-10e^{1/3}t})u(t)$ V
25. (a) $100u(-t) + (40 + 60e^{-6250t})u(t)$ V; (b) 100 V
28. 76.3 k Ω , 62.1 μ F
30. $10 + 30e^{-40,000t}$ V

الفصل السابع

2. (a) $200e^{-2t} - 100e^{-8t}$ V, $t > 0$; (b) $-100e^{-2t} + 200e^{-8t}$ V, $t > 0$
5. (a) $-40e^{-500t} + 55e^{-2000t}$ V, $t > 0$; (b) 15.0 V and -17.0 V
8. (a) 25 Ω ; (b) 1.28 mJ
12. (a) $1^4/125$ H, $1/70$ F; (b) 3.63 J
14. 12,885 V
17. $200(e^{-5000t} - e^{-15,000t})$ V
20. -9992 V
23. (a) 500 J in L, 80 J in C; (b) 335 J in L, 62.2 J in C
27. $20 + 250(e^{-100t} - e^{-150t})$ V, $1/24(3e^{-150t} - 2e^{-100t})$ A
29. (a) $-50 + 25/3(16e^{-2000t} - e^{-8000t})$ V, $t > 0$;
 (b) $-2 + 5/3(4e^{-2000t} - e^{-8000t})$ A, $t > 0$
32. (a) 0; (b) 1.748; (c) -1.073 A

الفصل الثامن

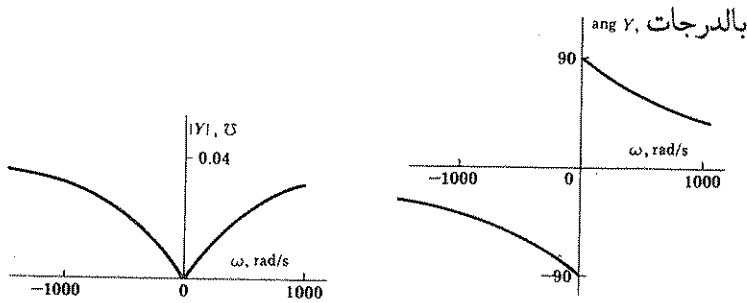
1. (a) 12.5 ms, 80 Hz, 503 rad/s; (b) $27.8 \cos(160\pi t - 43.9^\circ)$ V;
 (c) 66.1°
3. (a) 11.17 ms; (b) 89.5 Hz; (c) 563 rad/s; (d) -38.7° and 8.00;
 (e) -128.7° and 8.00; (f) 0.898
6. $412 \cos(500t - 116.0^\circ)$ V
8. $80 \cos(2000t - 36.9^\circ)$ mA
11. $1.414 \cos(5t - 45^\circ) + 1.342 \cos(10t - 63.4^\circ)$ A

الفصل التاسع

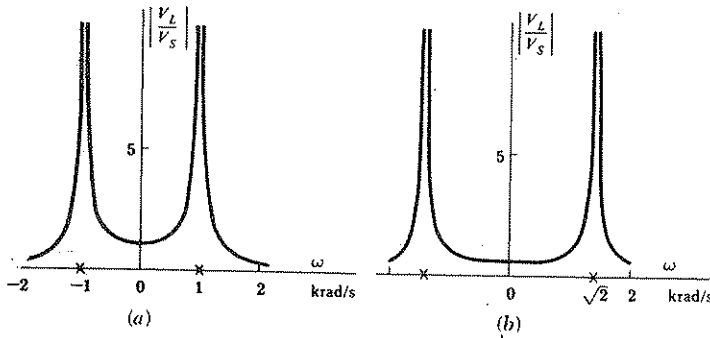
1. (a) $18.83/133.5^\circ$; (b) $5.58/-56.9^\circ$; (c) $-0.0725 - j0.0470$; (d) $0.0524 + j0.1838$
4. $15.98 \cos(1000t - 71.2^\circ) + 4.60 \cos(500t + 38.2^\circ)$ V
7. (a) $95.8 \cos(\omega t + 94.0^\circ)$ mA; (b) $25.1/-111.6^\circ$ mA
10. (a) 143.5; (b) -135.0 W
13. (a) 39.99; (b) 9.51; (c) -9.51 W
15. (a) $0.0260/-47.4^\circ$; (b) $0.769/37.4^\circ$ A
17. (a) 384 and 65.9; (b) 204 and 124.3 Hz
20. 1.25 mH
23. $0.125 \mu\text{F}$
26. $1 \Omega, 1 \text{ H}$

الفصل العاشر

2. (a) $7.81/-128.7^\circ$ V; (b) 9.80Ω
4. $6.47 \cos(10^4 t + 44.0^\circ)$ V
6. (a) $11.09 \cos(10^4 t + 33.7^\circ)$ A; (b) $3.29 \cos(10^4 t + 170.5^\circ)$ A
8. (a) $-4 + \sqrt{2} \cos(10^6 t - 45^\circ)$ V; (b) $\sqrt{2} \cos(10^6 t + 135^\circ)$ V
10. $6 + j17 \Omega$
13. $1.581/-18.43^\circ$ A
15. 65° and -61° , or -113° and 13°
- 18.



22.



الفصل الحادي عشر

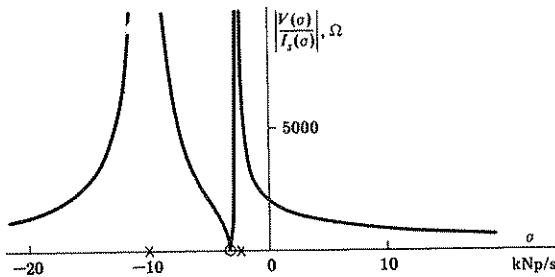
1. $p_{2500} = 4.8 \text{ mW}$, $p_{1H} = 110.9 \text{ mW}$, $p_{1\mu F} = -110.9 \text{ mW}$,
 $p_{10,000} = 19.2 \text{ mW}$
4. (a) $P_{20} = 10 \text{ kW}$, $P_{10} = 5 \text{ kW}$; (b) $P_{20} = 3.125 \text{ kW}$, $P_{10} = 6.25 \text{ kW}$
7. (a) $2.5 \mu\text{F}$; (b) 192 W
10. (a) $Z_L = R_{th} + j0$; (b) $Z_L = R_{th} - jX_{th}$; (c) $Z_L = R_L - jX_{th}$; (d)
 $R_L = \sqrt{R_{th}^2 + (X_{th} + X_L)^2}$; (e) $R_L = \sqrt{R_{th}^2 + X_{th}^2}$
13. (a) 500 W ; (b) 223.6 V ; (c) 655 rad/s ; (d) $81.6 \mu\text{F}$
16. 6.62 mA rms
19. (a) 106.1Ω ; (b) 61.2 V rms
22. (a) 4.47 A rms ; (b) 0.915 متخلف
25. (a) 46.9 kW ; (b) 33.3 kVAR ; (c) $57.5/35.4^\circ \text{ kVA}$; (d) 57.5 kVA ; (e) $92/35.4^\circ \Omega$
28. Two possible solutions: $104.3/-19.94^\circ \text{ VA}$ from left source and $149.0/-56.63^\circ \text{ VA}$ from right source, or $171.5/-133.49^\circ \text{ VA}$ from left source and $300.2/-6.81^\circ \text{ VA}$ from right source

الفصل الثاني عشر

1. (a) $157.0/-86.8^\circ$; (b) $104.5/-114.0^\circ$; (c) $0.924/39.4^\circ$
4. (a) $P_{top} = 852 \text{ W}$, $P_{bottom} = 972 \text{ W}$, $I_{nN} = 1 \text{ A rms}$; (b) $P_{top} = 783 \text{ W}$, $P_{bottom} = 874 \text{ W}$, $I_{nN} = 0.760/3.3^\circ \text{ A rms}$
7. $I_{aA} = 17.68/-45^\circ$, $I_{bB} = 20.2/-44.0^\circ$, $I_{cC} = 20.0/66.9^\circ$, $I_{nN} = 35.8/166.8^\circ \text{ A rms}$, $P_T = 7350 \text{ W}$
10. (a) 28.3 A rms ; (b) $412/11.64^\circ \Omega$; (c) 97.1%
13. $35.4/48.3^\circ \Omega$
16. 58.2 A rms , 22.6 kW , 0.975 lagging
19. (a) $P_A = 850 \text{ W}$, $P_B = 225 \text{ W}$; (b) yes; (c) yes
22. $P_A = 200 \text{ W}$, $P_B = 149.5 \text{ W}$, $P_C = 250.5 \text{ W}$
24. (a) 800 W , 0.249 lagging, $13.42/75.6^\circ \Omega$; (b) 800 W , 0.249 leading, $13.42/-75.6^\circ \Omega$

الفصل الثالث عشر

1. (a) -10 , -40 ; (b) $-16 \pm j12 \text{ s}^{-1}$
4. (a) $5.75/-58.5^\circ$; (b) $7.21/-33.7^\circ \text{ mA}$
8. (a) 10.0 ; (b) -1.995 ; (c) -0.0970 ; (d) 0.0539 A
10. 2.51 J
13. Zeros: $s = -3333$, ∞ ; poles: $s = -2500$, $-10,000$; see sketch



15. (a) 100Ω ; (b) 12.5 H ; (c) $690 \mu\text{F}$
19. (a) $53.9/21.8^\circ$ from zero at $s = -50$, $53.9/68.2^\circ$ from pole at $-20 - j30$, $22.4/-26.6^\circ$ from pole at $s = -20 + j30$; (b) $1.137/42.1^\circ$
21. (a), (b), and (c) -2 and -5 Np/s
23. $(1.20 + 0.8e^{-23t} - 2.0e^{-10t})u(t) \text{ A}$
26. (a) 0 ; (b) $10/(s + 17.5) \Omega$; (c) 0 ; (d) $Ae^{-17.5t} \text{ V}$

الفصل الرابع عشر

1. (a) 1000 rad/s, 5.00; (b) 120 krad/s, 60; (c) 602.1 rad/s, 12.5
4. (a) 4 krad/s, 40, 80 cos 4000t V; (b) 2 cos 4000t, 400 sin 4000t, -400 sin 4000t mA; (c) 20 mW, 4 mJ
7. 115.5 rad/s
10. (a) 5 Mrad/s; (b) 50; (c) 0.1 Mrad/s; (d) 4.95 Mrad/s; (e) 5.05 Mrad/s; (f) $40\angle -90^\circ$ mV
12. 5 k Ω , 2.36 μ H, 4.24 nF
15. 551 Ω , 13.74 mH, 4.54 μ F
17. (a) 5 Mrad/s; (b) 20,540 rad/s
20. 4470 rad/s, 22.4
23. (a) 5 krad/s, 40; (b) 5 krad/s, 20
26. (a) 25 m Ω , 1 H, 1 F; (b) 6.28 Ω , 10 mH, 0.1583 μ F
29. 10 Ω , 0.514 H, 875 μ F

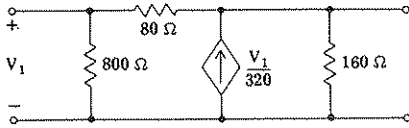
الفصل الخامس عشر

1. (a) 1 and 3, or 2 and 4; (b) 2 and 3, or 1 and 4; (c) 2 and 3, or 1 and 4
4. (a) -0.4s; (b) -2s/(s + 5); (c) -100s/(21s² + 325s + 1000)
7. 700s/(16s² + 109s + 8)
10. 17.54 mH
13. 2.11 sin 40t A, -286 cos 40t V; اصفاً بالطريقتين
16. 1.333 μ F, 46.2
19. 0.1818, 0.333, 0.667, 1, 2, 3, 6, and 11 H
22. 0.530
25. $P_3 = 119.7$, $P_2 = 19.9$, $P_5 = 49.9$ W
28. (a) $a = 1$, $P_{12} = 108$ W, $P_{36} = 324$ W; (b) $V_1 = V_2 = 108\angle 180^\circ$ V rms
31. (a) 64.2 Ω , 5.62 W; (b) 85.8 Ω , 5.64 W

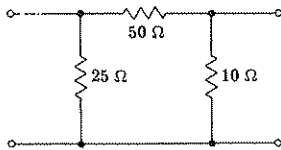
الفصل السادس عشر

1. 8.20 Ω
4. (a) (0.01996 - 0.996R_r) Ω ; (b) -99.6, -996, and -9960 Ω
7. Zero at $s = -0.6$ s⁻¹ and pole at $s = -1.667$ s⁻¹
10. (a) $y_{11} = 125$, $y_{12} = -62.5$, $y_{21} = -62.5$, $y_{22} = 93.8$ mU; (b) same answer as (a)

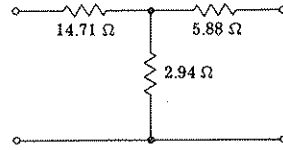
13. (a) $y_{11} = 0.6$, $y_{12} = 0.333$, $y_{21} = -2.10$, $y_{22} = 0.5 \text{ U}$; (b) $y_{11} = 1.60$, $y_{12} = 0.0952$, $y_{21} = -0.600$, $y_{22} = 0.1429 \text{ U}$
16. (a) $y_{11} = 13.75$, $y_{12} = -12.5$, $y_{21} = -15.62$, $y_{22} = 18.75 \text{ mU}$;
 (b) انظر الدائرة



19. (a) انظر الدائرة

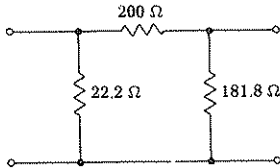


(b) انظر الدائرة



22. (a) 186.1 V rms; (b) 10.83 kΩ; (c) $y_{11} = 6.67$, $y_{12} = 0.333$, $y_{21} = -0.667$, $y_{22} = 0.0667 \text{ mU}$
25. (a) $z_{11} = 3.53$, $z_{12} = 0.588$, $z_{21} = 0.588$, $z_{22} = 4.76 \text{ Ω}$; (b) $z_{11} = \frac{5(s^2 + 2)}{s}$, $z_{12} = \frac{4s + 10}{s}$, $z_{21} = \frac{10}{s}$, $z_{22} = \frac{14s + 10}{s}$

28. انظر الدائرة



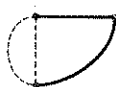
31. (a) -4 V; (b) 40 kΩ; (c) $z_{11} = -500$, $z_{12} = 15$, $z_{21} = -10^6$, $z_{22} = 10^4 \text{ Ω}$

الفصل السابع عشر

1. انظر الاشكال



(a)

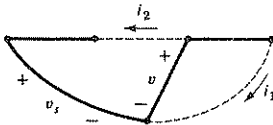


(b)



(c)

4. (a) $i' = 8i - 2v - 15 + f(t) + 5g(t)$, $v' = 6i - v - 12 + f(t) + 4g(t)$; (b) $x'_1 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\sin 2t$, $x'_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}\sin 2t$, $x'_3 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}\sin 2t$.
7. $v' = -1.5v + 3i$, $i' = -0.25v - 1.25i + 7.5u(t)$
10. (a) $\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -10 & 16 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -10 & 16 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -5 & 14 \\ 7 & -16 \end{bmatrix}$
13. (a) $a = [-20]$, $f = [40 + 50u(t)]$; (b) $a = [-5 \times 10^5]$, $f = [5 \times 10^6 u(t)]$; (c) $a = \begin{bmatrix} 0 & 1/16 \\ -10^6 & -250 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 0 \\ 5000u(t) + 1250 \end{bmatrix}$;
- (d) $a = \begin{bmatrix} -250 & 3 \times 10^5 \\ -0.05 & 0 \end{bmatrix}$, $f = \begin{bmatrix} 12,500u(t) \\ 1 \end{bmatrix}$
16. $v' = -5.4 \times 10^5 v + 1.4 \times 10^5 v_s$; (a) $v = 7(1 - e^{-5.4 \times 10^5 t})$ V, $t > 0$; (b) $v = 7e^{-5.4 \times 10^5 t}$ V, $t > 0$
19. $i_1(t) = 0.4e^{-2t} + 15e^{-10t} - 15.4e^{-12t}$ A, $t > 0$
22. (a) $\begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-3t} & -e^{-2t} + e^{-3t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-3t} & -e^{-2t} + 2e^{-3t} \end{bmatrix}$;
- (b) $\begin{bmatrix} \cos 2t & -2 \sin 2t \\ \frac{1}{2} \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$
25. (a) $v' = -10v - 480i + 6v_s$, $i' = \frac{1}{30}v - \frac{1}{30}v_s$;
- (b) $\begin{bmatrix} -10 & -480 \\ 1/30 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $v = (100 - \frac{100}{3}e^{-2t} - \frac{200}{3}e^{-8t})u(t)$ V;
- (d) $v = \frac{100}{27}(e^{-2t} + 12e^{-8t} - 13e^{-20t})u(t)$ V
28. (a) $v' = -1.25i_1 - 1.25i_2$, $i'_1 = 2v - 2i_1$, $i'_2 = 2v - 2i_2 - 4u(t)$; (b) $I_1/V_s = 5/[(s+2)(s^2+2s+5)]$; $s = -2, -1 \pm j2$;
- (c) $i_{1f} = 1$ A; (d) $v(0^+) = i_1(0^+) = i_2(0^+) = 0$; (e) $i'_1(0^+) = 0$; (f) $i'_2(0^+) = 0$; (g) $i_1 = (1 - e^{-2t} - e^{-t} \sin 2t)u(t)$ A



الفصل الثامن عشر

1. (a) 2.20; (b) 4.03; (c) 1.312
4. $2 - 3 \sin 10\pi t - \sin 20\pi t - 2 \sin 30\pi t - 3 \sin 40\pi t$
7. (a) 7 s; (b) $2\pi/7$ rad/s; (c) 2 Hz; (d) $5/7$; (e) 1.952
10. (a) odd; (b) half-wave; (c) even and half-wave
13. $b_n = 0$ for all n , $a_{\text{even}} = 0$, $a_1 = 24.8$, $a_3 = -3.80$, $a_5 = -19.10$, $a_7 = -10.28$, $a_9 = -1.403$
15. (a) half-wave, $a_0 = a_{\text{even}} = b_{\text{even}} = 0$; (b) half-wave and odd, $a_0 = a_{\text{even}} = a_{\text{odd}} = b_{\text{even}} = 0$; (c) both half-wave and odd symmetry if a_0 is removed, $a_{\text{even}} = a_{\text{odd}} = b_{\text{even}} = 0$

17. (a) $j_{-19} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \left(-\cos \frac{3\pi n}{8} + \cos \frac{\pi n}{8} - \cos \frac{7\pi n}{8} + \cos \frac{5\pi n}{8} \right) \sin \frac{5\pi n t}{2} = \frac{240}{\pi} \sum_{n=1, \text{odd}}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi n}{8} - \cos \frac{3\pi n}{8} \right) \sin \frac{5\pi n t}{2}$;
- (b) $f_{\text{rms}} = 42.43$, $f_{\text{rms}} = 41.69$ using b_1 through b_{21}
20. (a) $T = 6.28$ ms; (b) $v(t) = 20 \cos 0.999 \times 10^6 t + 50 \cos 10^6 t + 20 \cos 1.001 \times 10^6 t$ V; (c) $V_{\text{rms}} = 40.62$ V, $V_{C_{\text{rms}}} = 35.36$ V, and $V_{\text{rms}} = 1.149 V_{C_{\text{rms}}}$
22. $c_5 = 5.25 / -76.0^\circ$, $c_{-5} = 5.25 / 76.0^\circ$
25. (a) 18 V; (b) 72.4 W
28. (a) $3.53 / -112.5^\circ$ V; (b) 4.29 W

الفصل التاسع عشر

1. $(j4/\omega) \sin^2(\frac{1}{2}\omega)$
4. (a) $f(t) = 10[u(t+2) - u(t+1) + u(t-1) - u(t-2)]$,
 $F(j\omega) = (20/\omega)(\sin 2\omega - \sin \omega)$; (b) $f(t) = 10[-u(t+2) + u(t+1) + u(t-1) - u(t-2)]$,
 $F(j\omega) = (j20/\omega)(\cos 2\omega - \cos \omega)$
7. (a) $f(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} (6\pi/j\omega) d\omega = 3\pi \operatorname{sgn}(t)$; (b) 56.5 J
10. (a) $u(t)$ A; (b) $0.2\delta(t)$ A; (c) $0.2\delta(t) + u(t)$ A; (d) $q_C(0^-) = 0$, $q_C(0^+) = 0.2$ C
13. (a) $2\pi[\delta(\omega+4) + \delta(\omega-4)]$; (b) $[2(3+j\omega)]/[(3+j\omega)^2 + 16]$;
 (c) $[4/(\omega^2 - 16)](\omega \cos 4 \sin \omega - 4 \sin 4 \cos \omega)$; (d) 2
17. $F(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{j4}{n} \sin^2 \frac{\pi n}{5} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{5}\right)$
19. (a) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{jn} \sin^2 \frac{\pi n}{2} \delta(\omega - \pi n)$;
 (b) $2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\sin \frac{1}{2}\pi n}{\frac{1}{2}\pi n} \right)^2 - \frac{\sin \pi n}{\pi n} \right] \delta(\omega - \pi n) =$
 $\frac{4}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n] \delta(\omega - \pi n)$
22. $y(t) = 2(1 - e^{-t-1})$, $-1 < t < 2$; $= 2(e^2 - e^{-1})e^{-t}$, $t > 2$; $= 0$,
 $t < -1$
25. (a) $\frac{1}{3}[e^{2t}u(-t) - e^{-2t}u(t)]$; (b) $\frac{1}{2}e^{-4t}$; (c) $10(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$
28. $y(t) = 1/2\pi + 2te^{-4t}u(t)$
31. (a) $1/(4+j\omega)$; (b) $\frac{1}{3}(e^{-t} - e^{-4t})u(t)$; (c) $0.8 \cos(3t + 8.13^\circ)$
34. (a) $\frac{1}{3}[\delta(t) - 2e^{-2t}u(t)]$ V; (b) $\frac{2}{3}e^{-2t}u(t)$ V; (c) $\frac{2}{3}e^{-2t}e^{-t}u(t)$ V

الفصل العشرون

1. (a) $(5/s)(e^{2s} - e^{-s})$, $-\infty < \sigma < \infty$; (b) $(-5/s^2)[(s+1)e^{-s} + (2s-1)e^{2s}]$, $-\infty < \sigma < \infty$; (c) $[5/(1-s^2)][2 - (s+1)e^{2s-2} + (s-1)e^{-s-1}]$, $-\infty < \sigma < \infty$; (d) $10/(1-s^2)$, $|\sigma| < 1$
3. (a) $4e^{-3s}$; (b) $\frac{4e^{-3s}}{s^2}(1+3s)$; (c) $4e^{-3s} \cos 3$
5. (a) $1 + \frac{1.5}{s} + \frac{0.5}{s+2}$, $\delta(t) + (1.5 + 0.5e^{-2t})u(t)$;
 (b) $\frac{1}{4} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+4} \right)$, $\frac{1}{4}(2t+1 - \cos 2t - \sin 2t)u(t)$
7. $\frac{1}{s(s+2)^2}$
10. $x(t) = 2e^{-2t} - 2e^{-3t}$, $y(t) = e^{-3t}$
13. (a) $5 \times 10^4 e^{-5t} u(t)$ V; (b) $4000(-e^{-5t} + \cos 10t + 2 \sin 10t)u(t)$ V
16. $\frac{2.5}{3}(e^{-5t} - \cos 2t + 2.5 \sin 2t)u(t)$
19. If $4 < t < 6$, then $y(t) = 15$, $y(5) = 15$
22. $[e^{-t} + 2e^t(\cos t + \sin t)] u(t)$
25. (a) $\frac{6e^{-2s}(1-e^{-5s})}{s(1-e^{-5s})}$; (b) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{12}{n} e^{-j1.2\pi n} \sin 0.4\pi n \delta(\omega - 0.4\pi n)$
 $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{-12}{n} e^{-j0.2\pi n} \sin 0.6\pi n \delta(\omega - 0.4\pi n)$
 (c) $2.4 - \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sin 0.6\pi n}{n} \cos[0.2\pi n(2t-1)] \right\}$
28. $f(3.5) = 0$, $f(4.5) = 0.223$
31. $f(0^+) = 0$, $f(\infty) = 0$
34. (a) $f(0^+) = 1$, $f(\infty) = 0$; (b) $f(0^+) = 1$, $f(\infty) = 4$
37. (a) $1/[(s+1)(s+2)]$; (b) $(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$
40. $4 + 5e^{-50t}$ A
44. $i(t) = 2e^{-t/10} + 3e^{-t/4}$ A, $t > 0$

Neper Frequency	تردد نبري
Complex Frequency	تردد مركب
Synthesis	تركيب
Pole Zero Constallation	تركيب الاقطاب والاصفار
Electrolysis	تحليل كهربائي
Integral Transform	تحويلة تكاملية
Fast Fourier Transform	تحويلة فورير السريعة
Fet	تحويلة فورير السريعة
Laplace Transform	تحويلة لابلاس
Underdamped	تحت المضاءلة
Analysis	تحليل
Design	تصميم
Amplitude Modulation	تضمين اتساعي
Am	تضمين اتساعي
Convergence	تقارب
Rating	تقنين
Definite Integral	تكامل محدد
Particular Integral	تكامل خاص
Sifting	تحصيص
Harmonic	توافقي
Double Subscript Notation	توصيف سفلي مزدوج
Tuning	توليف
Attenuation	توهين
Displacement Current	تيار ازاحة
Alternating Current	تيار متناوب
a.c.	تيار متناوب
Direct Current	تيار مستمر
Conductance	توصلة
Time Constant	ثابت الزمن
Thevinin	ثفنن
Link	رباط
Resonance	رنين

Duality	الثنائية
Rms	ج . م . ث
Joule	جول
Gyrator	جايرتر
Addition	جمع
Damped Sinusoidal	جيبية متضائلة
Computer	حاسبة الكترونية
Bandpass	جزمة امرار
Domain	حيز
State Space	حيز الحالة
Time Domain	حيز الزمن
System Function	دالة النظام
Singularity Function	دالة انفرادية
Bessel Function	دالة بيسل
Complementary Function	دالة تامة
Delta Function	دالة دلتا
Forcing Function	دالة قسرية
Transcendental Function	دالة متسامية
Ramp Function	دالة الحدارية
Nonplaner Circuit	دائرة غير مسطحة
Short Circuit	دائرة قصر
Magnetically Coupled Circuit	دائرة متقارنة مغناطيسيا
Integrated Circuit	دائرة متكاملة
Planer Circuit	دائرة مسطحة
Open Circuit	دائرة مفتوحة
Loop	دائرة
Degree Kelvin	درجة كلفن
Degree Celsius	درجة مئوية
Argument	دليل
Cycle Per Second	دورة بالثانية
Revolution Per Second	دورة بالثانية
Time Periodicity	دورية الزمن

Decible	ديسيبل
Db	ديسيبل
Two Sided	ذات جانين
Bilateral	ذات جانين
Radian	زاوية نصف قطرية
Shifting	زحزجة
Time Shift	زحزجة الزمن
Synchrotron	سينكروترون
Lumped Constant Network	شبكة مجمعة الثوابت
Distributed Constant Network	شبكة موزعة الثوابت
Semiconductor	شبه موصل
Supermesh	شبكة متراكبة
Strength	شدة
Tree	شجرة
Normal Tree	شجرة اعتيادية
Cotree	شجرة مصاحبة
Normal Form	شكل اعتيادي
Row	صف افقي
Coulmn	صف عمودي
Vaccum Tube	صمام فراغي
Black Box	صندوق مبهم
Scaler Multiplication	ضرب غير اتجاهي
Input Terminal	طرف ادخال
Output Terminal	طرف اخراج
Phasor	طوري
Convergence Factor	عامل تقارب
Imaginary Operator	عامل خيالي
Power Factor	عامل قدرة
Cofactor	عامل مشارك
Parameter	عامل وسيط
Imaginary Number	عدد خيالي
Complex Number	عدد مركب
Bandwidth	عرض الحزمة

Node	عقدة
Supernode	عقدة متراكبة
Gram	غرام
Passive	غير فعال
Inactive	غير فعال
Scalar	غير متجه
Make Before Break	فتح قبل الغلق
Farad	فرادي
Potential Difference	فرق جهد
Active	فعال
Fourier	فورير
Overdamping	فوق المضائلة
Volt-Ampere	فولت أمبير
Va	فولت أمبير
Carrier Voltage	فولتية حاملة
Electrical Voltage	فولتية كهربائية
Plug	قابس
Base	قاعدة
Instantaneous Power	قدرة آنية
Apparent Power	قدرة ظاهرية
Complex Power	قدرة مركبة
Telemetry	قياس عن بعد
Initial Value	قيمة ابتدائية
Eigenvalue	قيمة ايكن
Effective Value	قيمة مؤثرة
Gain	كسب
Voltage Gain	كسب الفولتية
Xylophone	كسيلوفون
Coulomb	كولوم
Cayley-Hamilton	كيلي هاملتون
Unique	لا مثيل له
Comvolved With	متداخل مع
Meter-Kilogram-Second	متر كيلوغرام ثانية

MKS	متر كيلوغرام ثانية
Capacitor	متسعة
Quadrature	متعامد
Polynomial	متعدد الحدود
State Variable	متغير الحالة
Hybrid Parameter	متغير وسيط هجين
Impedance Parameter	متغير وسيط للمناعة
Discrete	متقطع
Confirmable	متوافق
Average Power	متوسط القدرة
Collector	مجمع
Mutual Inductance	محاثة تبادلية
Broadcasting Station	محطة ارسال
Argand Diagram	مخطط زاوي
Vector Diagram	مخطط طوري
Cathode Ray Oscilloscope	مرسمة اشعة المهبط
Harmonic Supresstion Filter	مرشح كاب التوافقيات
Multiplexung Filter	مرشح متعدد الامرار
Double Throw	مزدوج الحركة
Path	مسار
Transfer Admittance	مسايرة انتقالية
Spike	مساوي
Light Bulb	مصباح الضوء
Independent Voltage Source	مصدر فولتية غير معتمد
Controlled Source	مصدر محكوم
Dependent Source	مصدر معتمد
Minor	مصغر
Matrix	مصفوفة
Fuse	مصهر
Critical Damping	مضائلة حرجة
Operational Amplifier	مضخم تشغيل
Integrodifferential Equation	معادلات تفاضلية تكاملية

Auxiliary Equation	معادلة مساعدة
Characteristic Equation	معادلة مميزة
Exponential Damping Coefficient	معامل موهن أسّي
Scaling	معايرة
Booster	معزز
Screw Driver	مفك براغي
Resistance	مقاومة
Rectifier	مقوم
Spark Coil	ملف قذح
Impedance	مانعة
Immittance	ممايرة
Port	منفذ
Distributor	موزع الشرارة
Generator	مولد
Mho	موه
Hump	تتوء
Turns Ratio	نسبة اللفات
Rhp	نصف المستوى الايمن
International System of Units	نظام الوحدات العالمي
Balanced Three Phase System	نظام متعدد الاطوار المتوازن
S.I. Syster	نظام S.I.
Norton	نورتن
Newton	نيوتن
Watthour	واط ساعة
WH	واط ساعة
Unit Impulse	وحدة الومضة
Imaginary Unit	وحدة خيالية
Impulse	ومضة
Hybrid	هجيني
Henry	هنري
Hertz	هيرتز
CHz	هيرتز
Convolve	يلف

مصطلحات انكليزي - عربي

a.c.	تيار متناوب
Active	فعال
Addition	جمع
Additive	اضافي
Admittance	المسايرة
Alternating Current	تيار متناوب
AM	تضمين اتساعي
Ampere	امبير
Amplitude	اتساع
Amplitude Modulation	تضمين اتساعي
Analysis	تحليل
Apparent power	قدرة ظاهرية
Argand Diagram	مخطط زاوي
Argument	دليل
Attenuation	توهين
Auxiliary Equation	معادلة مساعدة
Average Power	متوسط القدرة
Balanced Three Phase System	نظام متعدد الاطوار المتوازية
Bandpass	جزمة امرار
Bandwidth	عرض الجزمة
Base	قاعدة
Battery	بطارية
Bessel Function	دالة بيسل
Bilateral	ذات جانبيين
Black Box	صندوق مبهم
Booster	معزز
Broadcasting Station	محطة ارسال
Capacitor	متسعة
Carrier Voltage	فولتية حاملة
Cathode Ray Oscilloscope	مرسمة اشعة المهبط
Cayley-Hamilton	كيلى هاملتون
Characteristic Equation	معادلة مميزة
Cofactor	عامل مشارك

Collector	مجمع
Commutative	تبادلي
Complementary Function	دالة تامة
Complex Frequency	تردد مركب
Complex Number	عدد مركب
Complex Power	قدرة مركبة
Computer	حاسبة الكترونية
Conductance	توصيلية - او مواصلة
Confirmable	متوافق
Convergence	تقارب
Convergence Factor	عامل تقارب
Convolution	التفاف
Convolve	يلف
Convolved With	متداخل مع
Cotree	شجرة مصاحبة
Controlled Source	مصدر محكوم
Coulmn	صف عمودي
Coulomb	كولوم
Critical Damping	مضاءلة حرجة
Cycle Per Second	دورة بالثانية
Damped Sinusoidal	جيبية متضائلة (متلاشي)
Db	ديسبل
Decible	ديسبل
Definite Integral	تكامل محدد
Degree Celsius	درجة مئوية
Degree Kelvin	درجة كلفن
Delta Function	دالة دلتا
Dependent Source	مصدر معتمد
Design	تصميم
Direct Current	تيار مستمر
Displacement Current	تيار ازاحة
Distributed Constant Network	شبكة موزعة الثوابت
Distributor	موزع الشرارة

Discrete	متقطع
Domain	حيز
Double Subscript	توصيف سفلي مزدوج
Notation	رمز
Double Throw	مزدوج الحركة
Duality	الثنائية
Effective Value	قيمة مؤثرة
Eigenvalue	قيمة ايكن
Electrical Voltage	فولتية كهربائية
Electrolysis	تحليل كهربائي
Electron Volt	الالكترون فولت
Emitter	باعث
Euler	اويلر
EV	الالكترون فولت
Exponential	اسي
Exponential Damping Coefficient	معامل موهن اسي
Farad	فراذ
Fast Fourier Transform	تحويلة فوريير السريعة
FFT	تحويلة فوريير السريعة
Forcing Function	دالة قسرية
Fourier	فوريير
Frequency	تردد
Frequency Response	استجابة ترددية
Fuse	مصهر
Gain	كسب
Generator	مولد
Gram	غرام
Gyrator	جايريتور
Harmonic	توافقي
Harmony Supression Filter	مرشح كاب التوافقيات
Henry	هنري
Hertz	هيرتز
Hump	نتوء

Hybrid	هجينى
Hybrid Parameter	متغير وسيط هجينى
HZ	هيرتز
Imaginary Number	عدد خيالى
Imaginary Operator	عامل خيالى
Impedance Parameter	متغير وسيط للممانعة
Imaginary Unit	وحدة خيالية
Immittance	ممايرة
Impedance	ممانعة
Impulse	ومضة
Impulse Responce	استجابة الومضة
Inactive	غير فعال
Independent Voltage Source	مصدر فولتية غير معتمد
Initial Value	قيمة ابتدائية
Input Terminal	طرق ادخال
Instantaneous Power	قدرة آنية
Integral Transform	تحويلة تكاملية
Integrand	التكاملية
Integrated Circuit	دائرة متكاملة
Integrodifferential Equation	معادلات تفاضلية تكاملية
International System of Units	نظام الوحدات العالمى
Joule	جول
Laplace Transform	تحويلة لابلاس
Light Bulb	مصباح الضوء
Linearity	الخطية
Link	رباط
Loop	دائرة
Lumped Constant Network	شبكة مجموعة الثوابت
Magnetically Coupled Circuit	دائرة متقارنة مغناطيسيا

Make Before Break	فتح قبل الغلق
Matrix	مصفوفة
Meter-Kilogram-Second	متر كيلوغرام ثانية
Mho	موه
Minor	مصفر
MKS	متر كيلوغرام ثانية
Multiplexing Filter	مرشح متعدد الامرار
Mutual Inductance	محاثة تبادلية
Neper Frequency	تردد نيري
Newton	نيوتن
Node	عقدة
Nonplaner Circuit	دائرة غير مسطحة
Norton	نورتن
Normal Form	شكل اعتيادي
Normal Tree	شجرة اعتيادية
Ohm	اوم
Open Circuit	دائرة مفتوحة
Output Terminal	طرق اخراج
Overdamping	فوق المضاءلة
Parameter	عامل وسيط
Particular Integral	تكامل خاص
Particular Solution	الحل الخاص
Passive	غير فعال
Path	مسار
Permeability	الانفاذية
Permittivity	السماحية
Phasor	طوري
Planer Circuit	دائرة مسطحة
Plug	قايس
Pole Zero Constallation	تركيبية الاقطاب والاصفار
Polynomial	متعدد الحدود
Port	منفذ
Potential Difference	فرق جهد

Power Factor	عامل قدرة
Operational Amplifier	مضخم تشغيل
Quadrature	متعامد
Radian	زاوية نصف قطرية
Ramp Function	دالة المنحدارية
Rating	تقنين
Reciprocity	التعاكس
Reciprocity Theroem	النظرية العكسية
Rectifier	مقوم
Resistance	مقاومة
Resonance	رنين
Resonant Frequency	تردد الرنين
Revolution Per Second	دورة بالثانية
RHP	نصف المستوى الايمن
RMS	ج . م . ت
Row	صف افقي
Scaler	غير متجه
Scaler Multiplication	ضرب غير اتجاهي
Scaling	معايرة
Screw Driver	مفك براغي
Semiconductor	شبه موصل
Servomechanisms	الاليات المؤازرة
Short Circuit	دائرة قصر
Shifting	زحزحة
Sifting	تحخيص
S.I.	نظام
Singularity Function	دالة انفرادية
Spark Coil	ملف قذح
Spike	مسماري
State Space	حيز الحالة
State Variable	متغير الحالة
Steady State	الحالة المستقرة
Strength	شدة

Supermesh	شبكة متراكبة
Supernode	عقدة متراكبة
Synchrotron	سينكوترون
Synthesis	تركيب
System Function	دالة النظام
Telemetry	قياس عن بعد
Thevinin	ثفنن
Time Constant	ثابت الزمن
Time Domain	حيز الزمن
Time Periodicity	دورية الزمن
Time Shift	زحزحة الزمن
Topology	التركيب النيوي
Transcendental Function	دالة متسامية
Transfer Admittance	مسايرة انتقالية
Transient	الزائلة (او العابرة)
Tree	شجرة
Transistor	ترانزستور
Tuning	توليف
Turns Ratio	نسبة اللفات
Two Sided	ذات جانبيين
Underdamped	تحت المضاءلة
Unique	لا مثيل له
Unit Impulse	وحدة الومضة
VA	فولت امبير
Vacuum Tube	صمام فراغي
Vector Diagram	مخطط طوري
Voltage Gain	مكسب الفولتية
Volt-Ampere	فولت امبير
Watt-hour	واط ساعة
WH	واط ساعة
Xylorhone	كسيلوفون



المحتويات

٥ مقدمة المترجمين
٧ مقدمة المؤلفين
١١ الجزء الاول - الدوائر المقاومة
١٣ الفصل الاول - تعاريف ووحدات
١ 1 - 1 مقدمة
١٥ 2 - 1 نظم الوحدات
٢١ 3 - 1 وحدة الشحنة
٢٣ 4 - 1 التيار والفولتية والقدرة
٢٣ 5 - 1 أنواع الدوائر وعناصر الدائرة
٤٥ الفصل الثاني - قوانين تجريبية ودوائر بسيطة
٤٥ 1 - 2 مقدمة
٤٦ 2 - 2 قانون أوم
٤٩ 3 - 2 قانونا كرشوف
٥٧ 4 - 2 تحليل دائرة ذات دارة واحدة
٦٢ 5 - 2 الدوائر المفردة المزدوجة العقد
٦٥ 6 - 2 دمج المصدر والمقارنة
٧٠ 7 - 2 تقسيم الفولتية والتيار
٨٣ الفصل الثالث - بعض الاساليب النافعة لتحليل الدائرة
٨٣ 1 - 3 مقدمة
٨٤ 2 - 3 التحليل العقدي
٩٥ 3 - 3 التحليل الشبكي
١٠٤ 4 - 3 تحويلات المصادر
١١١ 5 - 3 الخطية والتراكيب
١١٦ 6 - 3 نظريات ثفنن ونورتن

- ١٢٦ 3 - 7 التحليل الشجري والعقدي العام
- ١٣٥ 3 - 8 تحليل الرباطات والدارة

الجزء الثاني - دوائر الحالة الزائلة

- ١٥٧ الفصل الرابع - المحاثة والمتسعة
- ١٥٩ 1 - 4 مقدمة
- ١٦٠ 2 - 4 المحث
- ١٦٥ 3 - 4 العلافات المثالية للمحث
- ١٧٠ 4 - 4 المتسعة
- ١٧٦ 5 - 4 المحاثة والسعة سوية
- ١٨٢ 6 - 4 الثنائية
- ١٨٧ 7 - 4 الخطية وعواقبها مرة أخرى

الفصل الخامس - دوائر RL و RC الخالية من المصدر

- ١٩٥ 1 - 5 مقدمة
- ١٩٥ 2 - 5 دوائر RL البسيطة
- ١٩٧ 3 - 5 خصائص الاستجابة الاسية
- ٢٠١ 4 - 5 دائرة RL اكثر عموماً
- ٢٠٥ 5 - 5 دائرة RC البسيطة
- ٢٠٩ 6 - 5 دائرة RC الاكثر عموماً
- ٢١٢ 6 - 5 دائرة RC الاكثر عموماً

الفصل السادس - تأثير الدالة المرغمة ذات وحدة الخطوة

- ٢٢٣ 1 - 6 مقدمة
- ٢٢٣ 2 - 6 الدالة المرغمة ذات وحدة الخطوة
- ٢٢٤ 3 - 6 نظرة اولية على دائرة RL المسافة
- ٢٣٠ 4 - 6 الاستجابة الطبيعية والمرغمة
- ٢٣٤ 5 - 6 دوائر RL
- ٢٣٦ 6 - 6 دوائر RC
- ٢٤٤ 6 - 6 دوائر RC

الفصل السابع - دوائر ال RLC

- ٢٥٥ 1 - 7 مقدمة
- ٢٥٥ 2 - 7 الدائرة المتوازية الخالية من المصدر
- ٢٥٧ 2 - 7 الدائرة المتوازية الخالية من المصدر

٢٦٢ 3 - 7 دائرة RLC المتوازية u فوق المضاءلة
٢٦٦ 4 - 7 المضاءلة الحرجة
٢٧٠ 5 - 7 دائرة RLC المتوازية u تحت المضاءلة
٢٧٥ 6 - 7 دائرة RLC المتواليّة بدون مصدر
٢٧٩ 7 - 7 الاستجابة الكاملة لدائرة
٢٩٥ الجزء الثالث - التحليل الجيبي
٢٩٦ الفصل الثامن - الدالة المرغمة الجيبية
٢٩٦ 1 - 8 مقدمة
٢٩٩ 2 - 8 خصائص الجيبيات
٣٠٢ 3 - 8 الاستجابة المرغمة للدالات المرغمة الجيبية
٣١١ الفصل التاسع - فكرة الطوري
٣١١ 1 - 9 مقدمة
٣١٢ 2 - 9 الدالة المرغمة المركبة
٣١٨ 3 - 9 الطوري
٣٢٢ 4 - 9 العلاقات الطورية لـ R و L و C
٣٢٨ 5 - 9 الممانعة
٣٣٢ 6 - 9 المسائرة
٣٣٩ الفصل العاشر - الاستجابة المستقرة الجيبية
٣٣٩ 1 - 10 مقدمة
٣٣٩ 2 - 10 تحليل العقدة والشبكة والدارة
٣٤٣ 3 - 10 نظرية التراكب وتحويلات المصدر وثفنن
٣٤٦ 4 - 10 المخططات الطورية
٣٥٢ 5 - 10 الاستجابة كدالة لـ w
٣٦٥ الفصل الحادي عشر - معدل القدرة وقيم ج . م . ت
٣٦٥ 1 - 11 مقدمة
٣٦٦ ٢ - 11 القدرة الانية
٣٦٩ 3 - 11 معدل القدرة
٣٧٨ 4 - 11 القيم التأثيرية للتيار والفولتية
٣٨٢ 5 - 11 القدرة الظاهرية وعامل القدرة
٣٨٧ 6 - 11 - 6 القدرة المركبة
٨٦٧	

٤٠١ الفصل الثاني عشر - الدوائر متعددة الاطوار
٤٠١ 12 - 1 مقدمة
٤٠٥ 12 - 2 انظمة الطور الواحد ذات الاسلاك الثلاثة
٤١١ 12 - 3 ربط Y Y للاطوار الثلاثة
٤١٧ 12 - 4 ربط الدالتا
٤٢٢ 12 - 5 استخدام الواطميتر
٤٢٤ 12 - 6 قياس القدرة في انظمة الاطوار الثلاثة

..... الجزء الرابع تردد المركب

..... الفصل الثالث عشر - التردد المركب

٤٣٩ 13 - 1 مقدمة
٤٤١ 13 - 2 التردد المركب
٤٤٣ 13 - 3 الدالة المرغمة الجيبية المتضائلة
٤٤٦ 13 - 4 Y (s) Z (s)
٤٥١ 13 - 5 استجابة التردد بدلالة
٤٥٥ 13 - 6 مستوى التردد المركب
٤٦٠ 13 - 7 الاستجابة الطبيعية والمستوى
٤٧٣ الفصل الرابع عشر - استجابة التردد

٤٩١ 14 - 1 مقدمة
٤٩١ 14 - 2 رنين التوازي
٤٩٣ 14 - 3 تاصيل اكثر عن رنين التوازي
٥٠٢ 14 - 4 رنين التوالي
٥٠٩ 14 - 5 صيغ رنين اخرى
٥١١ 14 - 6 المعايرة
٥٢٠

..... الجزء الخامس الشبكات ذات المنفذين

..... الفصل الخامس عشر - الشبكات ذات الدوائر المتقارنة مغناطيسيا

٥٣٧ 15 - 1 مقدمة
٥٣٧ 15 - 2 المحائة التبادلية
٥١٨ 15 - 3 اعتبارات الطاقة
٥٤٦

٥٥٣	المحول الخطي	15	- 4
٥٥٩	المحول المثالي	15	- 5
٥٨١	الفصل السادس عشر - الشبكات ذات المنفذين		
٥٨١	مقدمة	16	- 1
٥٨٢	شبكات المنفذ الواحد	16	- 2
٥٨٦	متغيرات المسيرة	16	- 3
٥٩٢	بعض الشبكات المكافئة	16	- 4
٦٠٢	المتغيرات الوسطية للمناعة	16	- 5
٦٠٦	المتغيرات الوسطية الهجينية	16	- 6
٦٢١	الجزء السادس تحليل الشبكة		
٦٢٣	الفصل السابع عشر - تحليل متغير الحالة		
٦٢٣	مقدمة	17	- 1
٦٢٤	متغيرات الحالة والمعادلات بشكلها الاعتيادي	17	- 2
٦٢٩	كتابة مجموعة معادلات الشكل الاعتيادي	17	- 3
٦٣٨	استعمال توصيف المصفوفة	17	- 4
٦٤٢	حل معادلات الدرجة الاولى	17	- 5
٦٤٨	حل معادلة المصفوفة	17	- 6
٦٥٠	النظر ابعد الى مصفوفة الحالة الانتقالية	17	- 7
٦٥٤	حل منظومة الدرجة الثانية	17	- 8
٦٦٩	الفصل الثامن عشر - تحليل فورير		
٦٦٩	مقدمة	18	- 1
٦٧٢	الشكل المثلي لتسلسلات فورير	18	- 2
٦٨٠	استخدام التماثل	18	- 3
٦٨٧	الاستجابة الكاملة لدوال دورية قسرية	18	- 4
٦٩١	الصيغة المركبة لتسلسلة فورير	18	- 5
٧٥٧	الفصل التاسع عشر - تحويلات فورير		
٧٥٨	مقدمة	19	- 1
٧١٢	تعريف تحويل فورير	19	- 2
٨٦٩	بعض خواص تحويل فورير	19	- 3

٧١٧ 19 - 4 دالة وحدة الومضة
٧٢٣ 19 - 5 أزواج لتحويل فورير لبعض دوال الزمن البسيطة
٧٢٨ 19 - 6 تحويل فورير لدالة زمن دورية عامة
٧٣٢ 19 - 7 الالتفاف واستجابة الدائرة في حيز الزمن
٧٣٨ 19 - 8 دالة النظام والاستجابة في حيز التردد
٧٤٣ 19 - 9 المفهوم الفيزيائي لدالة النظام
٧٥٧ الفصل العشرون - اساليب تحويل لابلاس
٧٥٧ 20 - 1 مقدمة
٧٥٩ 20 - 2 تعريف تحويل لابلاس
٧٦٢ 20 - 3 تحويلات لابلاس لبعض دوال الزمن البسيطة
٧٦٥ 20 - 4 عدة نظريات أساسية لتحويل لابلاس
٧٧٢ 20 - 5 الالتفاف مرة أخرى
٧٧٧ 20 - 6 زحزحة الزمن والدوال الدورية
٧٨٥ 20 - 7 الزحزحة والتفاضل والتكامل والتعبير في حيز التردد
٧٨٨ 20 - 8 نظرية القيمة الايبدائية ونظرية القيمة النهائية
٧٩١ 20 - 9 الدالة التحويلية
٧٩٥ 20 - 10 الاستجابة الكاملة

٨١١ الجزء السابع : ملاحق
٨١٢ الملحق الاول المحددات
٨١٧ الملحق الثاني برهان نظرية ثفنن
٨٢١ الملحق الثالث الاعداد المركبة
٨٣٧ الملحق الرابع اجوبة لمسائل مختارة

٨٤٩ مصطلحات عربي - انكليزي
٨٥٦ مصطلحات انكليزي - عربي

كلية طب جامعة القاهرة
مطبعة مطبعة دار الكتب للطباعة والنشر جامعة القاهرة

رقم الايداع في المكتبة الوطنية ببيداد «١٩٦٧» لسنة ١٩٨٢.

الدكتور محمد زكي محمد خضر

ولد في الموصل عام ١٩٤٤ وحصل على شهادة البكلوريوس في الهندسة الكهربائية من جامعة بغداد عام ١٩٦٥ عين بعدها معيداً في قسم الهندسة الكهربائية بجامعة الموصل .

ثم حصل على شهادة الدكتوراه بموضوع المكائن الكهربائية من جامعة شفيلد في بريطانيا عام ١٩٧٢ وقد عمل بعد ذلك رئيساً لقسم الهندسة الكهربائية بجامعة الموصل للفترة ١٩٧٢ - ١٩٧٨ ومديراً لمركز الحاسبة الالكترونية في الجامعة نفسها للفترة ١٩٧٢ - ١٩٨١ . ويعمل الآن رئيس مهندسين في المنشأة العامة للسمنت في نينوى ومسؤولاً عن مركز الحاسبة الالكترونية فيها .

منح جائزة هو بكنسون من معهد المهندسين الكهربائيين في لندن عام ١٩٧٢ وتكريم مجلس جامعة الموصل عام ١٩٧٥ وله بحوث منشورة تزيد عن ثلاثين بحثاً وعدد من الكتب المترجمة والمؤلفة .



الدكتور مظفر انور النعمة

ولد في السليمانية عام ١٩٢٨ وحصل على شهادة البكلوريوس في الهندسة الكهربائية من جامعة بغداد عام ١٩٦٠ وقد عمل مهندساً في بعض الشركات والدوائر الرسمية ثم حصل على الماجستير من جامعة كنساس في الولايات المتحدة الامريكية عام ١٩٦٩ وعلى الدكتوراه من جامعة كنساس الرسمية عام ١٩٧٢ في الكترولنيات القدرة عين بعدها مدرساً في جامعة الموصل . شارك في دورات تدريبية في الاتحاد السوفياتي وبريطانيا والمانيا الاتحادية وقضى سنة التفرغ العلمي في جامعة المسيسيبي عام ١٩٨١ / ١٩٨٢ . وله عدد من البحوث المنشورة وعدد من الكتب المترجمة والمؤلفة . وهو عضو في جمعية المهندسين العراقيين ومعهد المهندسين الكهربائيين في امريكا .



الدكتور مأمون فاضل الكياجي

ولد في الموصل عام ١٩٤٧ وحصل على شهادة البكلوريوس في الهندسة الكهربائية من جامعة الموصل عام ١٩٦٨ وعلى الماجستير من جامعة الشرق الاوسط في انقرة عام ١٩٧٦ وعلى الدكتوراه من جامعة برادفورد في بريطانيا عام ١٩٨٢ في حماية انظمة القدرة وقد عمل في جامعة الموصل منذ تخرجه كمعيد ومدرس مساعد ثم مدرساً .

نشر عدداً من البحوث والكتب المترجمة . عضو في جمعية المهندسين العراقيين وجمعية المهندسين الكهربائيين البريطانيين .



